



پایه دوازدهم

مادر برای بیست

ریاضیات گسسته



مصطفی دیداری

درسنامه سؤال‌های امتحانی با پاسخ تشریحی امتحان نهایی

درس‌نامه‌های کاملاً کاربردی، روان و گویا منطبق بر کتاب درسی به همراه بیش از ۱۵۰ مثال آموزشی

بیش از ۶۰۰ سؤال امتحانی با پوشش کامل امتحانات نهایی به همراه پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ارائه سؤال‌های امتحانی دشوار جهت شبیه‌سازی و پیش‌بینی سؤالات دشوار احتمالی امتحان نهایی

تیپ‌بندی سؤال‌های امتحانی در قالب در کادرهای «در امتحان نهایی چه خبر؟»

امتحان‌های فصل به فصل، نوبت اول و دوم و نهایی

به همراه یک جلد ضمیمه رایگان برای مرور سریع با بررسی پرتکرارترین ایده‌های امتحان نهایی با مثال‌های فراوان





مقدمه³ ناشر

سلام

اولین باری که اسم «ریاضیات گسسته» را شنیدید به چه فکری افتادید؟! آدم اولش فکر می‌کند که با ریاضیاتی سروکار دارد که از همه چیز، از دنیا و از عقبا، گسسته است، رفته کناری نشسته و با قضیه‌ها و مسئله‌هایش خوش است. اما خب، اصلاً این‌طور نیست. بحث‌های ریاضیات گسسته نه تنها از دنیا نگسسته، بلکه خیلی هم کاربرد دارد. گراف، ترکیبیات، نظریهٔ اعداد، احتمال و... همه از ابزارهایی هستند که در خیلی رشته‌های دیگر کاربرد دارند. فکر می‌کنم باور نمی‌کنید، می‌گویید معلم‌ها کم بودند! این نویسندگان و ناشران هم شروع کرده‌اند به نصیحت که ریاضی خیلی کاربرد دارد و به دردتان می‌خورد و ...!

اما بگذارید یک کم توضیح بدهم، شاید علاقه‌مند شدید:

فکر می‌کنم همهٔ شماهایی که این کتاب را می‌خوانید در یکی از شبکه‌های اجتماعی، حالا از نوع وطنی‌اش یا خارجی، عضو هستید. از آپ، اینترنت و... هم خیلی استفاده می‌کنید. همین موضوع‌هایی که امسال در درس ریاضیات گسسته‌تان می‌خوانید، مثلاً نظریهٔ گراف و ترکیبیات، در طراحی نرم‌افزارها و برنامه‌ریزی این چیزهایی که گفتم خیلی کاربرد دارند. اصلاً اگر این نظریه‌ها نبود، این چیزها این‌قدر که می‌بینید پیشرفت نمی‌کرد. همهٔ موضوع این است که وقتی می‌گوییم کاربرد منظورمان این نیست که بلافاصله بعد از این که درس را خواندید می‌توانید در زندگی به کارش ببرید. برای استفاده از هر کدام از این‌ها کلی سعی دیگر هم لازم است. کار خدا را چه دیده‌اید، شاید هر کدام از شما در آینده‌ای نزدیک بشوید طراح، سازنده یا برنامه‌ریز یکی از همین‌ها. شاید مستقل از هر رشتهٔ دانشگاهی که می‌خوانید آخر سر، کارتان بیفتد به دنیای دیجیتال و اینترنت و... تازه اگر حتی زمینهٔ کارتان این‌ها نباشد احتمالاً برای بازاریابی، تبلیغات و فروش و... باز هم درگیر همین چیزها می‌شوید؛ پس نتیجه می‌گیریم اتفاقاً این ریاضیات گسسته نه تنها گسسته نیست بلکه خیلی هم به ما و زندگی‌مان پیوسته است.

مؤلف خوبمان، آقای دیداری، با دانش، تجربه و دقتی بی‌نظیر این کتاب را نوشته تا خیالتان از بابت یادگیری این درس راحت باشد. الان که دارم این مقدمه را می‌نویسم از بابت خوب بودن کتاب خیالم راحت است اما باز هم، چون نظر شما که از این کتاب استفاده می‌کنید، برایمان بسیار مهم است و اول و آخر کیفیت کتاب به نظر شما برمی‌گردد، لطفاً برایمان بنویسید که چه‌طور بود؟ چه چیزهایی کم دارد؟ چه چیزهایی زیاد دارد و چگونه می‌تواند بهتر شود؟ منتظریم.

خوش باشید

به نام او

چون حسابی درگیر کار بودم وقت نمی‌کردم برم دانشگاه! هر از گاهی سری می‌زدم تا ببینم چه خبر است. درس نظریهٔ اعداد داشتیم. آخرهای ترم بود. رفتم دانشگاه و ته کلاس نشستیم. استاد وسط درس دادن یک دفعه گفت: «اون ته کلاس، سینما نیستش ها» راستش را بخواهید خیلی بهم برخورد. ۲۰ دقیقه گذشت. استاد گفت: کی فلان قضیه را خوانده است که سمینار بدهد؟ (سیستمش بیشتر سمیناری بود و خیلی درس نمی‌داد) کسی دست بالا نبرد. از شانس، من این قضیه را حدود شش ماه پیش برای کلاسی خوانده بودم ولی خب اثباتش زیاد یادم نبود. آن حرف استاد هم هنوز توی گوشم بود. گفتم: خدایا برم نرم؟ از یک طرف اثباتش بود و از یک طرف قصهٔ حال‌گیری! خلاصه دل را به دریا زدم و دست بالا کردم. کمی تعجب کرد. بالأخره اولین جلسهٔ حضور من بود. رفتم آن جلو نفس عمیقی کشیدم ولی هر کاری کردم دیدم نه خیر! چیزی یادم نمی‌آید؛ (حالا استرس و ...) پیش خودم گفتم از این ستون به آن ستون فرج است فعلاً صورت قضیه را پای تخته بنویسم شاید چیزی یادم آمد. نوشتیم و دیدم نه مثل این‌که قضیه جدی است و چیزی یادم نمی‌آید! یک دفعه چیزی به ذهنم رسید. کتاب را بستیم و گفتم: «خب ایده برای اثبات بدهید! اثبات که در کتاب هست. من برای شما رونویسی کنم فایده‌ای ندارد! دانشجویها شروع به اعتراض کردند ولی استاد از این حرف من خوشش آمد و گفت: «خب راست می‌گویند اگر پای تخته تندتند بنویسد که فایده‌ای ندارد. خلاصه این‌ها یک چیزی می‌گفتند و من هم کمی بحث می‌کردم و زیر زیرکی هم کتاب را نگاه می‌کردم. بالأخره هر جوری بود اثبات را تمام کردم. (البته به دلم نچسبید. جلسه بعد یه موضوع دیگه رو خیلی معلمی و به همون صورت بحث دوطرفه با دانشجویها سمینار دادم. استاد هم خیلی حال کرد و وسطش شروع کرد تعریف و تمجید و پایان ترم هم بدون این‌که ورقه‌ام رو تصحیح کنه تنها ۲۰ لیسانسمو داد).

غرضم از نقل این خاطره، آن جملهٔ قصاری بود که گفتم! اکثراً می‌پرسید: آقا چه جوری باید سؤال‌های ریاضی را حل کنیم؟ اگر سوال حل شد که کارتان درست است ولی اگر نشد تکلیف چیست؟ این‌جا نباید جواب را سریع از روی پاسخ‌نامه ببینید! خودتان را دست کم نگیرید. به ذهنتان مهلت بدهید. سعی کنید ارتباطی بین چیزهایی که می‌دانید و چیزهایی که باید به دست آورید برقرار کنید. مثال‌های حل‌شدهٔ جزوهٔ معلم یا درس‌نامهٔ کتاب‌ها را ببینید و راه حل را تا جایی که می‌توانید جلو بروید. اگر هنوز به جواب نرسیدید حالا اشکالی ندارد، پاسخ را ببینید. اگر همهٔ این مراحل را طی کرده باشید یک «آهان اشکالم این‌جا بوده» به خود خواهید گفت. این‌جا است که من به شما تبریک می‌گویم چون یادگیری شما کامل شده است. در مورد اهمیت نهایی و معدل فکر می‌کنم همهٔ شما این‌قدر شنیده‌اید که بهتر است حرفی نزنم پس بهتر است چند کلمه در مورد این کتاب بگویم. این کتاب از بخش‌های زیر تشکیل شده است:

درس‌نامه: سعی کردم خیلی روان و ساده (البته کامل) درس را آموزش دهم. مطالب اضافه که به درد نهایی نمی‌خورد در این کتاب نمی‌بینید اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهایی لازم دارید بیان شده است پس به نظرم یک بار هم شده درس‌نامه را به دقت مطالعه کنید. چپ‌نشین درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسی است البته در برخی موارد برای این‌که درس طولانی نشود و حوصله‌تان سر نرود درس ممکن است به چند بخش تقسیم شده باشد و سؤال‌های هر قسمت آورده شده باشد. همهٔ کادریهای صورتی‌رنگ کتاب درسی که به صورت جای خالی هم در امتحان می‌آید در کتاب پوشش داده شده است.

جدول‌های خلاصه: در پایان هر موضوع کل درس را در یک جدول خلاصه کرده‌ام. شب‌های امتحان از این‌ها غافل نشوید.

در امتحان نهایی چه خبر: بچه‌ها حجم درس‌ها زیاد است پس تا می‌توانید مطالب را تیپ‌بندی شده و منظم به خاطر بسپارید. من سعی کرده‌ام این کار را برای شما انجام بدهم و تیپ‌های مهم امتحانی به همراه نمونه‌سؤال‌های آن را در هر قسمت بیان کنم.

سؤال‌های امتحانی: همه مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی و کار در کلاس و ملاس! و سؤال‌های نهایی سال‌های قبل و سال‌های بعد! را در این قسمت به صورت کاملاً دسته‌بندی شده برای شما آورده‌ام. اگر کتاب را از اول سال تهیه کرده‌اید که خورد خورد همه را حل کنید و جلو بیایید اما اگر نزدیک نهایی هستید بیشتر روی سؤال‌های مشابه کتاب درسی و نهایی‌ها تمرکز کنید. سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت موشک است مقداری بالاتر از کتاب درسی بوده و برخی از آن‌ها نیز تست کنکور بوده‌اند. چون ممکن است در آینده، تست هم در سؤال‌های نهایی بیاید یا معلم شما آزمون ترم اول را تستی بگیرد خوب است به این‌ها توجه کنید. (به درد کنکورتون هم می‌خوره!)

آزمون‌های انتهایی هر فصل: بعد از تمام شدن هر فصل خوب است خودتان را با یک آزمون نسبتاً دشوار محک بزنید. اگر در حل سؤال‌ها اشکالات زیادی داشتید بدانید که باید دوباره به درس‌نامه و سؤال‌های امتحانی مراجعه کنید.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها (با آن متدی که گفتم البته) حتماً پاسخ‌ها را تحلیل کنید حتی شما دوست عزیز که سؤال را درست حل کرده‌اید!

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب دو آزمون ترم اول داریم و چهارتا هم نهایی. این‌ها دیگر از نون شب واجب‌تر است. به خصوص برای امتحان نهایی حتماً کلید نهایی را ببینید و دقت کنید که بارم به چه قسمت‌هایی اختصاص پیدا کرده است.

در پایان تشکر می‌کنم از همه مسئولین و برو بچه‌های خیلی سبزی. از آقای هاشمی و خانم جالینوس که زحمت زیادی برای این کتاب کشیدند و از آقایان علیرضا کاظمی‌بقا، ماهان فنی‌فر، نیما فیض‌آقایی، امیرحسین ابومحبوب و ابولفضل ناصری و از شاگردان خوبم آرمیتا شیرخانی و ریحانه سجادی و فاطمه فتاحیان که با صبر و حوصله کتاب را خواندند و اشکالات آن را درآوردند. بخوانید و حالش را ببرید و ۲۰ بگیرید و علاقمند گسسته شوید و به رشته کامپیوتر! بروید و ...

دوست‌دار شما دیداری

فهرست

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

۱۰	بخش ۱: استدلال ریاضی
۱۸	بخش ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح - قسمت اول (عاد کردن)
۲۴	بخش ۳: بخش‌پذیری در اعداد صحیح - قسمت دوم (قضیه تقسیم)
۲۶	بخش ۴: بخش‌پذیری در اعداد صحیح - قسمت سوم (افراز اعداد صحیح)
۲۸	بخش ۵: بخش‌پذیری در اعداد صحیح - قسمت چهارم (ب.م.م و ک.م.م)
۳۱	بخش ۶: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها - قسمت اول (هم‌نهشتی)
۳۸	بخش ۷: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها - قسمت دوم (تقسیم بر اعداد خاص)
۴۴	آزمون جمع‌بندی فصل اول
۴۵	پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

۶۰	بخش ۱: معرفی گراف، تعاریف و برخی خواص
۶۶	بخش ۲: معرفی گراف‌های خاص
۷۲	بخش ۳: مسیر و دور در گراف
۷۶	بخش ۴: مدل‌سازی با گراف
۸۴	آزمون جمع‌بندی فصل دوم
۸۵	پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

۹۶	بخش ۱: مباحثی در ترکیبیات - قسمت اول (مروری بر روش‌های مقدماتی شمارش)
۱۰۱	بخش ۲: مباحثی در ترکیبیات - قسمت دوم (حل معادله سیاله)
۱۰۵	بخش ۳: مباحثی در ترکیبیات - قسمت سوم (مربع لاتین)
۱۱۱	بخش ۴: روش‌هایی برای شمارش - قسمت اول (اصل شمول و عدم شمول)
۱۱۸	بخش ۵: روش‌هایی برای شمارش - قسمت دوم (اصل لانه‌کبوتری)
۱۲۳	آزمون جمع‌بندی فصل سوم
۱۲۴	پاسخ سؤال‌های امتحانی

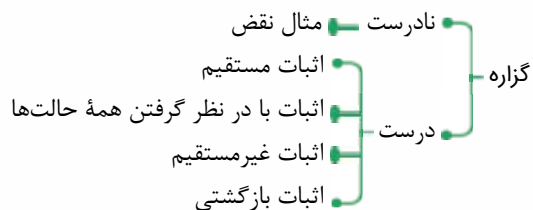
امتحانات

۱۳۷ نمونه امتحان نیمسال اول (امتحان شماره ۱)
۱۳۸ پاسخ نمونه امتحان نیمسال اول (امتحان شماره ۱)
۱۳۹ نمونه امتحان نیمسال اول (امتحان شماره ۲)
۱۴۰ پاسخ نمونه امتحان نیمسال اول (امتحان شماره ۲)
۱۴۱ نمونه امتحان نیمسال دوم (امتحان شماره ۳)
۱۴۳ پاسخ نمونه امتحان نیمسال دوم (امتحان شماره ۳)
۱۴۵ نمونه امتحان نیمسال دوم (امتحان شماره ۴)
۱۴۷ پاسخ نمونه امتحان نیمسال دوم (امتحان شماره ۴)
۱۴۹ نمونه امتحان نیمسال دوم - نهایی خردادماه ۱۴۰۲ (امتحان شماره ۵)
۱۵۰ پاسخ نمونه امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۲ (امتحان شماره ۵)
۱۵۱ نمونه امتحان نیمسال دوم - نهایی خردادماه ۱۴۰۳ (امتحان شماره ۶)
۱۵۲ پاسخ نمونه امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۳ (امتحان شماره ۶)

فصل ۱: آشنایی با نظریه اعداد

بخش ۱: استدلال ریاضی

گزاره: به هر جمله خبری که درست یا نادرست باشد، گزاره می‌گوییم. درستی گزاره‌های نادرست را با مثال نقض رد می‌کنیم و گزاره‌های درست را هم با چهار روش، اثبات می‌کنیم.



مثال نقض

مثال نقض: مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است.

مثلاً برای این‌که نشان دهیم گزاره «عدد $3 + 2^n$ به ازای هر عدد طبیعی n ، اول است.» نادرست است، کافی است $n = 5$ قرار دهیم، چون $3 + 2^5 = 35$ می‌شود که اول نیست.

نکته: برای ارائه مثال نقض گزاره‌های شرطی، باید مثالی ارائه کنیم که در فرض، درست دربیاید ولی حکم را نقض کند.

(نویسنده فردا ۹۹)

مثال: ارزش گزاره «جمع هر دو عدد گنگ، گنگ است.» را تعیین کنید.

پاسخ: اگر بخواهیم نشان دهیم که گزاره نادرست است باید دو عدد گنگ پیدا کنیم (توجه کن به نکته) که جمع آن‌ها گنگ نباشد؛ مثلاً $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ هر دو گنگ هستند، ولی $0 = \sqrt{2} + (-\sqrt{2})$ می‌شود که گویا است.

مثال: نشان دهید گزاره «برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^{2^n} + 1$ اول است.» نادرست است.

پاسخ: باید یک عدد n پیدا کنیم به طوری که به ازای آن $2^{2^n} + 1$ اول نباشد. به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ حاصل $2^{2^n} + 1$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ می‌شود که همگی اول هستند، دقت کنید که وقتی پرانتز نداریم باید از توان بالا شروع کنیم مثلاً اگر $n = 3$ باشد $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ می‌شود. اوایل نشان داد که به ازای $n = 5$ حاصل $2^{2^5} + 1$ بر ۶۴۱ بخش پذیر است، یعنی اول نیست. یادتان باشد، مثال نقض این گزاره $n = 5$ است.

اثبات مستقیم

با مثال آوردن نمی‌توانیم چیزی را اثبات کنیم. کتاب چهار روش برای اثبات درستی یک گزاره ارائه کرده است که اولین آن‌ها اثبات مستقیم است.

اثبات مستقیم: روش اثباتی است که در آن به صورت مستقیم از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم.

مثلاً برای این‌که ثابت کنیم جمع عدد زوج با عدد فرد، فرد است؛ داریم:

ابتدا عدد زوج را $2k$ و عدد فرد را $2k' + 1$ می‌گیریم. ($k, k' \in \mathbb{Z}$)

$$2k + 2k' + 1 = 2(\underbrace{k + k'}_q) + 1 = 2q + 1$$

حالا:

جمع دو عدد به صورت $2q + 1$ درآمد، یعنی فرد است. حالا دیگر مطمئن هستیم که جمع عدد فرد با عدد زوج، همواره فرد می‌شود.

توجه: دقت دارید که چون k لزوماً با k' یکسان نیست، آن‌ها را متفاوت (یعنی k و k') می‌گیریم و هر دو را k نمی‌گیریم.

نکته: برای این‌که از اثبات مستقیم استفاده کنیم باید شکل اعداد را به درستی در نظر بگیریم:

$2k$	عدد زوج
$2k + 1$	عدد فرد
$2k$ و $2k'$	دو عدد زوج
$2k + 1$ و $2k' + 1$	دو عدد فرد

n و $n + 1$	دو عدد متوالی
$2n$ و $2n + 2$	دو عدد زوج متوالی
$2n + 1$ و $2n + 3$	دو عدد فرد متوالی
$\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$)	عدد گویا



مثال: ثابت کنید جمع پنج عدد طبیعی متوالی بر ۵ بخش پذیر است.

پاسخ: اولین عدد طبیعی را n می‌گیریم. بعدی می‌شود $n+1$. بعدی $n+2$ و ... پس داریم:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5\left(\frac{n+2}{1}\right) = 5q$$

جمع این ۵ تا عدد به صورت $5q$ درآمد (۵ ضرب در ۵ عدد صحیح) پس مضرب ۵ است.

مثال: نشان دهید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی، همواره بر ۸ بخش پذیر است.

پاسخ: تفاضل مربعات یعنی تفاضل دو تا مربع! عدد فرد اول را $2k+1$ می‌گیریم. چون گفته فرد متوالی، عدد فرد بعدی (دو تا بیشتره) به صورت

$$(2k+3)^2 - (2k+1)^2 = (4k^2 + 12k + 9) - (4k^2 + 4k + 1) = 8k + 8 = 8\left(\frac{k+1}{1}\right) = 8q$$

$2k+3$ می‌شود. حالا داریم:

مثال: الف) ثابت کنید اگر به ۴ برابر ضرب دو عدد طبیعی متوالی، یک واحد اضافه کنیم، حاصل به صورت مربع کامل درمی‌آید.

ب) ثابت کنید اگر $4k+1$ مربع کامل باشد، k حاصل ضرب دو عدد متوالی است.

پاسخ: الف) ضرب دو عدد طبیعی متوالی به صورت $n(n+1)$ می‌شود. حالا باید ثابت کنیم $4n(n+1)+1$ به صورت توان دوم یک عدد طبیعی است:

$$4n(n+1)+1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

پس فهمیدیم «اگر k ، حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن گاه $4k+1$ مربع کامل است.»

ب) فرض این است که $4k+1$ مربع کامل است، پس آن را a^2 می‌گیریم:

$$4k+1 = a^2 \Rightarrow k = \frac{a^2-1}{4} = \frac{a-1}{2} \times \frac{a+1}{2}$$

$4k+1$ فرد است پس a^2 نیز عددی فرد و a هم فرد است پس $a-1$ و $a+1$ زوج بوده است. کسرهای عددی صحیح هستند، هم‌چنین $\frac{a+1}{2}$ و $\frac{a-1}{2}$ دو عدد متوالی هستند؛ چون اختلاف آن‌ها یک واحد است.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها در روش اثبات مستقیم معمولاً گفته n فرد باشد چنین می‌شود یا n زوج باشد چنان می‌شود اما فرض کنید

می‌خواهیم ثابت کنیم «برای هر عدد طبیعی n ، حاصل $n^2 - 3n + 7$ عددی فرد است». بالأخره این n از دو حالت، خارج نیست (به اسم روش دقت کن!) یا فرد است یا زوج. این دو حالت را جداگانه برویم جلو تا در هر کدام به $2q+1$ برسیم:

$$\text{۱} \quad n \text{ زوج} \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 - 3n + 7 = (2k)^2 - 3(2k) + 7 = 4k^2 - 6k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 3k + 3) + 1 = 2q + 1$$

$$\text{۲} \quad n \text{ فرد} \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 - 3n + 7 = (2k+1)^2 - 3(2k+1) + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 6k + 4 + 7 = 4k^2 - 2k + 12 = 2(2k^2 - k + 6) + 1 = 2q + 1$$

روش اثبات در نظر گرفتن همه حالت‌ها؛ مسئله را به چند حالت که در ضمن همه حالت‌ها را پوشش دهد تقسیم می‌کنیم و در هر کدام، ثابت می‌کنیم که حکم نتیجه می‌شود.

همارزی روش همه حالت‌ها: در مثال بالا، زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^2 - 3n + 7$ را با r نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم اگر

$p \vee q \Rightarrow r$ می‌رسیم یعنی: $p \vee q \Rightarrow r$. به جای آن، ثابت کردیم هم از p به r می‌رسیم و هم از q به r یعنی: $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

در اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها از هم‌ارزی مقابل استفاده می‌کنیم:

نکته: شبیه بالا و در حالت کلی برای این که حکم q را ثابت کنیم، می‌توانیم فرض را به n گزاره p_1, p_2, \dots, p_n تقسیم کرده و از هم‌ارزی

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

مقابل استفاده کنیم:

مثال: ثابت کنید: الف) ضرب دو عدد طبیعی متوالی همواره زوج است. ب) نشان دهید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

(نویس فرژاد ۹۹ و دی ۱۴۰۰)

پاسخ: الف) باید ثابت کنیم $n(n+1)$ همیشه زوج است. دو حالت می‌گیریم: $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2q$ زوج $n \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n(n+1) = 2k(2k+1) = 2q$

$$\text{۲} \quad n \text{ فرد} \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2q$$

در هر دو حالت شد $2q$ ، پس n چه زوج باشد چه فرد، $n(n+1)$ زوج می‌شود.

ب عدد فرد را $2k+1$ می‌گیریم:

گفته ثابت کنید مربع این عدد به صورت $8q+1$ درمی‌آید:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$$

طبق (الف) ضرب دو عدد متوالی زوج است.

تذکره: بچه‌ها گزاره (ب) را حفظ باشید. البته در درس بعدی آن را یک‌جور دیگر هم ثابت می‌کنیم.

مثال: نشان دهید اگر $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 4, 7\}$, $n \in S$ و عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، آن‌گاه $n \in A$.

پاسخ: کل اعدادی که n می‌تواند باشد از ۲ تا ۷ است؛ پس بیاییم این‌ها را امتحان کنیم تا ببینیم چه موقع $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج می‌شود:

$$n = 2 \Rightarrow \frac{4 \times 9}{4} = 9 \quad \times$$

$$n = 5 \Rightarrow \frac{25 \times 36}{4} = 225 \quad \times$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{9 \times 16}{4} = 36 \quad \checkmark$$

$$n = 6 \Rightarrow \frac{36 \times 49}{4} = 9 \times 49 \quad \times$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{16 \times 25}{4} = 100 \quad \checkmark$$

$$n = 7 \Rightarrow \frac{49 \times 64}{4} = 16 \times 49 \quad \checkmark$$

پس می‌بینید اگر $n = 3, 4, 7$ باشد، عبارت داده‌شده زوج می‌شود؛ یعنی $n \in A$.

نکته: اگر عبارت $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، n به یکی از دو صورت $n = 4k$ یا $n = 4k+3$ می‌تواند باشد. (دقت کنید اعداد ۳ و ۷ به صورت $4k+3$ و عدد ۴ به صورت $4k$ است.)

مثال: ثابت کنید حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: سه عدد طبیعی متوالی را می‌توانیم $n, n+1, n+2$ بگیریم. باید ثابت کنیم $n(n+1)(n+2) = 3q$. این‌جا زوج و فرد در نظر گرفتن به درد نمی‌خورد اما اگر n را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ای برابر ۰، ۱ یا ۲ می‌تواند داشته باشد، پس سه حالت در نظر می‌گیریم:

$$n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) = 3q \quad \text{۱} \quad \text{باشد. در این حالت:}$$

$$n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1) = 3q \quad \text{۲} \quad \text{باشد. این‌جا هم:}$$

$$n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4) = 3q \quad \text{۳} \quad \text{باشد. این‌جا هم:}$$

پس ضرب سه عدد متوالی، همیشه مضرب ۳ است. در مثال قبلی ثابت کردیم مضرب ۲ هم است، پس ضرب ۳ عدد متوالی، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

نکته: اگر سه عدد طبیعی متوالی را به صورت $n-1, n, n+1$ نمایش بدهیم، داریم: $(n-1)(n)(n+1) = n^3 - n$ یعنی $n^3 - n$ همیشه بر ۶ بخش‌پذیر است.

مثال: ثابت کنید اگر a بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه $a^2 = 3q+1$. سپس نتیجه بگیرید به ازای هر دو عدد صحیح x و y عبارت $xy(x^2 - y^2)$ همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: با روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها برویم. در مثال قبلی گفتیم a در تقسیم بر ۳ سه حالت می‌تواند داشته باشد، ولی چون گفته a مضرب ۳ نیست، پس فقط دو حالت می‌ماند:

$$a^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3q + 1 \quad \text{۱} \quad \text{باشد: } a = 3k + 1$$

$$a^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3q + 1 \quad \text{۲} \quad \text{باشد: } a = 3k + 2$$

پس اگر a مضرب ۳ نباشد، a^2 به صورت $3q+1$ است. حالا اگر از x و y حداقل یکی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، $xy(x^2 - y^2)$ بر ۳ بخش‌پذیر است، اما اگر هیچ‌کدام بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، طبق چیزی که الان ثابت کردیم مربع هر دو به صورت $3q+1$ هستند؛ پس:

$$xy(x^2 - y^2) = xy(3q+1 - (3q'+1)) = xy(3(q-q')) = 3t$$

گفتیم که هر گزاره یا درست است یا نادرست. حالا اگر من به شما بگویم یک گزاره نمی‌تواند نادرست باشد، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 بله نتیجه می‌گیریم درست است. این اساس روش برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم است. روش کار به این صورت است که:

- ۱ خلاف حکم (دقت کردی فلاف کلم) را در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.
- ۲ با قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم.
- ۳ فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی خود حکم ثابت می‌شود.

(نهایی فرداد ۱۴۰۲)

مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر r عدد گویای ناصفر و x عددی گنگ باشد، آن‌گاه rx گنگ است.
 فرض حکم

۱ خلاف حکم را در نظر می‌گیریم یعنی فرض کنیم rx گویا باشد، پس $rx = a$ که a گویا است.

۲ $x = \frac{a}{r}$ اما تقسیم دو عدد گویا $(\frac{a}{r})$ که مخرج هم صفر نیست گویا است، پس x گویا است.

۳ به تناقض رسیدیم (ثابت کردیم x گویا است در صورتی که x گنگ بود)، پس خلاف حکم، باطل و خود حکم درست است.

مثال: ثابت کنید جمع عددی گویا با عددی گنگ، گنگ می‌شود.

پاسخ: فرض کنید a عددی گویا و x عددی گنگ باشد. گفته ثابت کنید $a + x$ گنگ است (حکم). باید خلاف حکم را در نظر بگیریم. یعنی « $a + x$ گنگ نیست، یعنی گویا است» حالا باید این را به تناقض برسانیم.

$a + x = b \Rightarrow x = b - a$
 $a + x$ گویا است، پس برابر با عدد گویایی مثل b می‌شود. حالا:
 با اثبات مستقیم به راحتی ثابت می‌شود جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (مفرج صفر نباشه) دو عدد گویا، گویا است (جمع دو تا کسر گویا، کسر گویا میشه) پس $b - a$ گویا است. از طرفی طبق فرض x گنگ بود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف)، باطل و در نتیجه خود حکم درست است. معمولاً برای اثبات گنگ بودن اعداد از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

نکته: در مورد گویا یا گنگ بودن جمع، تفریق و ضرب اعداد داریم:

	ضرب	جمع و تفریق (نوع اثبات)
هر دو گویا	گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)
یکی عدد گویا صفر باشد، صفر ولی ضرب گویای ناصفر در گنگ، گنگ است.)	گنگ (برهان خلف)	یکی گویا و یکی گنگ
ممکن است گنگ یا گویا	ممکن است گنگ یا گویا	هر دو گنگ

مثال: نشان دهید اگر n^2 فرد باشد، آن‌گاه n هم فرد است.

پاسخ: خلاف حکم می‌شود « n فرد نیست»، یعنی n زوج است؛ پس:
 $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2q$

پس نتیجه می‌گیریم n^2 زوج است در صورتی که فرض می‌گوید n^2 فرد است، پس به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف)، باطل و خود حکم درست است.

مثال: a, b, c, d چهار عدد طبیعی فرد هستند. نشان دهید معادله $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$ جواب ندارد.

پاسخ: فرض کنیم معادله، دارای جواب باشد، یعنی اعداد a, b, c, d وجود داشته باشند که در معادله صدق کنند.

با مخرج مشترک گیری داریم:
 $\frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = 1 \Rightarrow bcd + acd + abd + abc = abcd$

چون a, b, c, d فرد هستند $abcd$ فرد می‌شود. از طرفی عبارت‌های سمت چپ نیز همگی فرد هستند، اما جمع چهار عدد فرد، زوج می‌شود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم چون سمت راست فرد ولی سمت چپ عددی زوج است، بنابراین فرض خلف باطل بوده و معادله در اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

مثال: نشان دهید اگر $a^2 + b^2$ فرد باشد، آن‌گاه a فرد است یا b فرد است.

پاسخ: حکم گفته « a فرد یا b فرد». اگر بخواهیم با برهان خلف برویم خلاف حکم با استفاده از قانون دموگان می‌شود « a زوج و b زوج»، (یاد تونه

رگه $a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k'^2 = 2(2k^2 + 2k'^2) = 2q$ حالا: $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

این یعنی $a^2 + b^2$ زوج می‌شود در صورتی که فرض می‌گوید فرد است. تناقض حاصل، می‌گوید فرض خلف باطل و خود حکم درست است.

مثال: a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری (مثل ۲، ۳ و ۱) هستند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج است.

پاسخ: فرض کنیم $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد، یعنی فرد باشد. ضرب ۳ عدد، فرد شده است، پس هر سه تا فرد بوده‌اند، یعنی $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3$ همگی فرد بوده‌اند. جمع سه عدد فرد، فرد می‌شود، یعنی $A = a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3$ فرد است. از طرفی $A = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3)$ می‌شود، پس $A = 0$ شده، یعنی زوج است. این تناقض نشان می‌دهد فرض خلف باطل و $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

نکته: دقیقاً با همین روش می‌توانستیم ثابت کنیم $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$ نیز زوج است. چون اگر فرض کنیم فرد است باید

$$A = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = 2(a_1 + a_2 + a_3) \quad \text{اما: } A = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

زوج مساوی هم

اثبات با گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی)

دو گزاره هم‌ارز: دو گزاره P و Q را هم‌ارز گوئیم هرگاه ارزش یکسانی (هر دو درست یا هر دو نادرست) داشته باشند.

ترکیب دوشروطی: ترکیب دوشروطی دو گزاره را به صورت $Q \Leftrightarrow P$ نمایش می‌دهیم. این گزاره وقتی درست است که P و Q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. به عبارت دیگر ارزش‌های یکسانی داشته باشند.

حالا یک سؤال: اگر $Q \Leftrightarrow P$ درست و Q هم درست باشد، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ معلوم است که P هم باید درست باشد. اگر $s \Leftrightarrow r \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p$ درست و s هم درست باشد، نتیجه می‌گیریم r, q و p هم‌ارز باشند و چون s درست است پس r, q و p هم درست می‌شوند. اساس کار اثبات با گزاره‌های هم‌ارز (یا اثبات بازگشتی) همین است. مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم:

«برای هر دو عدد مثبت a و b داریم: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ » (همین دو بار تا حالا تو نهایی اومده)

یک مخرج مشترک می‌گیریم: $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$. چون $ab > 0$ ، با ضرب دو طرف در آن داریم $a^2 + b^2 \geq 2ab$ و با بردن $2ab$ به طرف دیگر: $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$.
خب $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$ پس می‌شود $(a - b)^2 \geq 0$. پس تا این جا شد:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \xrightarrow{ab > 0} \underbrace{a^2 + b^2}_{r} \geq 2ab \Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2 - 2ab}_{s} \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

p q

$(a - b)^2 \geq 0$ همواره درست است. تمام ترکیب‌های دوشروطی هم درست هستند پس تمام گزاره‌های s, r, q و p هم درست هستند. حکم هم همان p بود که درستی آن ثابت شد.

روش اثبات حکم p با گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی): سعی می‌کنیم با اعمال دوطرفه ضرب، تقسیم، جمع و تفریق، ترکیب‌های درست دوشروطی $r \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p$ بسازیم تا جایی که به یک رابطه همواره درست برسیم. چون آخرین گزاره همواره درست و ترکیب‌های دوشروطی هم درست هستند. پس هم گزاره‌ها هم‌ارز بوده و هم حکم p درست می‌شود (یعنی ثابت می‌شود).

نکته: درستی نامساوی‌ها معمولاً به روش گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی) ثابت می‌شود.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی a, b ثابت کنید $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

پاسخ: از گزاره‌های هم‌ارز کمک می‌گیریم و سعی می‌کنیم حکم را به یک عبارت همواره درست برسانیم. عبارت‌های همواره درستی که در این جا ظاهر می‌شوند معمولاً به صورت جمع چند عبارت درجه دوم است. در اتحاد مربع، $2ab$ ظاهر می‌شود پس ضرب دو طرف در ۲، ایده خوبی می‌تواند باشد:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b \Leftrightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 1 - 2ab - 2a - 2b \geq 0$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a - b)^2 \geq 0$$

این آخری همواره درست است، پس طبق روش اثبات بازگشتی حکم ثابت می‌شود.





مثال: فرض کنید a, b, c سه عدد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

پاسخ: آن پیرانتزهای سمت چپ را ضرب کرده و ساده می‌کنیم تا ببینیم چه درمی‌آید:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}_{\text{(بازکن ببین همون میشه)}} + \left(\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 \geq 0$$

آخرین رابطه همواره درست بوده و همه گزاره‌ها هم‌ارز هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

مثال: دو عدد حقیقی مثبت هستند. ثابت کنید $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}}$

پاسخ: a, b هر دو مثبت هستند، پس \sqrt{ab} تعریف شده و مثبت است. حالا:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \geq \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \xrightarrow{\times \sqrt{ab}} \sqrt{b} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a+b}$$

حالا چون هر دو طرف مثبت هستند، می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم ($a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ؛ یادته؟)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b} + \sqrt{a})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2 \Leftrightarrow b + a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq a + b \Leftrightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$$

این آخری همواره درست است. همه گزاره‌ها هم‌ارز هستند پس حکم ثابت می‌شود.

مثال: آیا ترکیب $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$ درست است؟ a, b چه شرطی داشته باشند تا این ترکیب دوشروطی درست باشد؟ (نهایی شهریور ۹۹ با تغییر)

پاسخ: اگر $a < b$ باشد می‌توانیم الزاماً بگوییم $a^2 < b^2$ ؟ خب نه! مثلاً $1 < -3$ است، ولی $1 \not< 9$.

پس $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$ نادرست است. برعکس هم در حالت کلی نادرست است. اما اگر a, b هیچ کدام منفی نباشند، این ترکیب دوشروطی

درست است. خلاصه این‌که اگر $a, b \geq 0$ باشند: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ درست است.

خوب است یک جمع‌بندی روی چهار روش اثبات داشته باشیم:

نوع اثبات	روش کار	کاربرد
مستقیم	از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم.	از زوج یا فرد بودن اعداد به درستی حکم می‌رسیم.
در نظر گرفتن همه حالت‌ها	n را حالت‌بندی می‌کنیم (مثلاً زوج و فرد) و در هر کدام به درستی حکم می‌رسیم.	برای هر n می‌خواهیم حکمی را ثابت کنیم.
برهان خلف	خلاف حکم را به تناقض می‌رسانیم.	اثبات گنگ بودن اعداد - هر جا که اثبات مستقیم دشوار باشد.
بازگشتی	حکم را با اعمال دوطرفه به یک رابطه همواره درست می‌رسانیم.	نامساوی‌ها

در امتحان نهایی چه خبر؟

تیپ ۱ کتاب درسی تأکید کرده است که سؤال‌های این درس شبیه تمرین‌های کتاب درسی می‌باشد؛ بنابراین سؤال‌هایی که از این قسمت می‌آید، از متن کتاب درسی است. صورت تمرین‌ها و قضیه‌ها به صورت درست و نادرست یا جای خالی می‌آید، پس آن‌ها را حفظ باشید. برای رد کردن یک حکم کلی نیز ارائه یک مثال نقض کافی است.

حالاتوکل کن: سؤال‌های ۱ تا ۲۰

تیپ ۲ اثبات مستقیم است که باید از درستی فرض به درستی حکم برسید. به‌خصوص اثبات این تمرین هم که اگر k ضرب دو عدد متوالی باشد، $4k + 1$ مربع کامل است.

حالاتوکل کن: سؤال‌های ۲۱ تا ۳۴ و ۷۴ و ۷۵

تیپ ۳ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها (مثلاً n زوج و n فرد یا $n = 3k$ ، $n = 3k + 1$ ، $n = 3k + 2$ و اثبات حکم) است که کم‌تر از آن سؤال آمده است. چند تمرین مهم داریم که اثبات آن‌ها را به خاطر داشته باشید.

حالاتوکل کن: سؤال‌های ۳۵ تا ۴۰ و ۷۶

تیپ ۴ اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف است که خلاف حکم را به تناقض می‌رسانیم.

اثبات گنگ بودن اعداد با این روش صورت می‌گیرد (همچنین اثبات آن تمرین مهم a_1, a_2, a_3 و جایگشتی از آن‌ها که با b_1, b_2, b_3 نشان می‌دادیم).
حالات وحل کن: سؤال‌های ۴۱ تا ۵۳ و ۷۷

تیپ ۵ اثبات با گزاره‌های هم‌ارز (یا بازگشتی) است. اثبات درستی نامساوی‌ها معمولاً با این روش انجام می‌شود که حکم را با اعمال دوطرفه همواره درست می‌رسانیم. از بین چهار روش اثبات بیشتر از این تیپ سؤال می‌آید.

حالات وحل کن: سؤال‌های ۵۴ تا ۷۳

سؤال‌های امتحانی

سوالات با علامت سخت‌ترین سؤال‌های هر درس هستند. اگر به کم‌تر از ۲۰٪ از این سؤال‌ها، برو سراغ اون‌ها.



درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.



(نهایی شهریور ۹۹)

۱- اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ ، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$.



(نهایی فرورد ۱۳۰۰)

۲- هیچ دو عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد.



(نهایی دی ۹۷)

۳- اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $k + 1$ مربع کامل است.



(نهایی شهریور ۱۳۰۲)

۴- ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، عددی گنگ است.



(نهایی دی ۱۳۰۱)

۵- اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.



(نهایی دی ۱۳۰۱)

۶- برای مقادیر حقیقی و ناصفر و به شرط آن‌که $a + b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است.



(نهایی دی ۱۳۰۱)

جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۷- برای اثبات نادرستی یک گزاره از استفاده می‌کنیم.

(نهایی دی ۱۳۰۰)

۸- حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ عددی است. (گویا/ گنگ)

۹- میانگین حسابی دو عدد x و y برابر و میانگین هندسی دو عدد x و y برابر است.

۱۰- اگر $7ab$ عددی فرد باشد، حاصل $a^2 + b^2$ عددی است.

۱۱- در روش برهان خلف از خلاف به می‌رسیم.

گزاره‌های زیر را با ارائه مثال نقض مناسب رد کنید.

(نهایی شهریور ۹۸)

۱۲- برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

۱۳- معکوس هر عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی خودش است.

۱۴- ضرب دو عدد گنگ غیرمساوی، عددی گنگ است.

(نهایی دی ۱۳۰۲)

۱۵- ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، همواره گنگ می‌شود.

نادرستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱۶- اگر $\alpha + \beta$ گنگ باشد، $\alpha - \beta$ هم گنگ است.

۱۷- اگر α, β دو عدد گنگ غیرمساوی باشند، $\frac{\alpha + \beta}{2\beta}$ گنگ است.

۱۸- اگر a, b دو عدد حقیقی باشند که $ab = 0$ ، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

۱۹- اگر $A \cap B = A \cap C$ باشد، آن‌گاه $B = C$.

(نهایی شهریور ۹۹)

۲۰- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x, y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

درستی گزاره‌های زیر را به صورت مستقیم ثابت کنید.

(مشابه تمرین کتاب)

۲۱- جمع دو عدد گویا، گویا است.

۲۲- اگر n عددی فرد باشد، مجموع n عدد طبیعی متوالی بر n بخش پذیر است.

(مشابه تمرین کتاب)

۲۳- میانگین هفت عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی می‌شود.

۲۴- اگر a مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $a(a + 3)$ بر ۱۸ بخش پذیر است.

۲۵- اگر مربع عددی فرد را با ۳ برابر عددی زوج جمع کنیم، حاصل فرد می‌شود.

(نهایی فرورد ۱۳۰۱)

۲۶- برای هر عدد طبیعی زوج n ، $5n + 7 - n^2$ عددی فرد است.

■ گزاره‌های زیر را ثابت کرده یا با ارائه مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

۲۷- به ازای هیچ دو عدد اول a, b ، عدد $a + b$ اول نمی‌شود.

۲۸- اگر از مکعب عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل عددی زوج می‌شود.

۲۹- مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی همواره بر ۳ بخش پذیر است.

۳۰- برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 1$ اول است.

۳۱- با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.

۳۲- اگر a, b, c سه عدد طبیعی باشند، $a\sqrt{bc}$ گنگ است.

۳۳- ضرب ۳ عدد زوج متوالی بر ۲۴ بخش پذیر است.

۳۴- اگر a, b دو عدد صحیح و $3ab$ عددی فرد باشد، $a^2 + b^2$ عددی زوج است.

۳۵- ثابت کنید حاصل ضرب ۳ عدد صحیح متوالی که عدد وسطی فرد است بر ۲۴ بخش پذیر است.

■ گزاره‌های زیر را ثابت کنید. (به روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها)

۳۶- برای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 + 5n - 7$ عددی فرد است.

۳۷- به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^2 + 2$ بر ۴ بخش پذیر نیست.

۳۸- اگر n عددی طبیعی و $\frac{n(n+1)}{3}$ زوج باشد، $n = 4q$ یا $n = 4q + 3$.

۳۹- گزاره «اگر $(a-1)b = 0$ باشد، آن‌گاه $a = 1$ یا $b = 0$ » را ثابت کنید.

۴۰- فرض کنیم $A = \{3, 4, 5\}$ و $S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ، اگر $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$ زوج باشد و $n \in S$ ، ثابت کنید $n \in A$.

۴۱- ثابت کنید معکوس هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴۲- می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{2}+2}$ نیز گنگ است.

۴۳- می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.

۴۴- فرض کنید n عددی طبیعی و $3n - 2$ عددی فرد باشد. ثابت کنید n نیز فرد است.

۴۵- ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴۶- فرض کنید α, β دو عدد گنگ باشند به طوری که $\alpha + \beta$ گویا باشد. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.

(نهایی دی ۹۹ و دی ۱۴۰۰)

(نهایی دی ۹۷)

۴۷- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

۴۸- فرض کنید a عدد گویای غیرصفر و x عددی گنگ باشد. ثابت کنید ax گنگ است.

۴۹- a و b^2 دو عدد گنگ هستند به طوری که ab عددی گویا است. ثابت کنید $\frac{a}{b}$ گنگ است.

(مشابه تمرین کتاب)

۵۰- ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی تابع g در $x = a$ ناپیوسته باشد، تابع $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

۵۱- نشان دهید اگر ضرب دو عدد طبیعی a, b زوج باشد، آن‌گاه a زوج یا b زوج بوده است.

(مشابه تمرین کتاب)

۵۲- همه جواب‌های معادله $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب)

۵۳- اگر $a, b \neq 0$ و $a + b \neq 0$ ، نشان دهید معادله $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ جواب ندارد.

(نهایی شهریور ۱۴۰۱)

(مشابه تمرین کتاب)

۵۴- a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

■ کدام یک از ترکیب‌های دوشرطی زیر درست و کدام یک نادرست است؟ چرا؟

۵۵- n^2 زوج است اگر و فقط اگر n زوج باشد.

۵۶- $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

۵۷- $x = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$

۵۸- $x^3 \leq x^2 \Leftrightarrow x \leq 1$

■ احکام زیر را ثابت کنید.

۵۹- ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

(به $\frac{x+y}{2}$ میانگین حسابی دو عدد و به \sqrt{xy} میانگین هندسی دو عدد می‌گوییم.)

(نهایی فروردین ۹۸ و شهریور ۹۹)

۶۰- اگر $a < 0$ باشد، آن گاه $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

۶۱- a, b, c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید: $3 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a + b + c)$

۶۲- برای هر دو عدد حقیقی x و y به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$

۶۳- گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$

برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

۶۴- اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$

۶۵- a, b دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

۶۶- x, y دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم: $x^2 y^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$

۶۷- a, b, c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

۶۸- برای اعداد حقیقی ناصفر و هم‌علامت a, b ثابت کنید: $\frac{\Delta a - 2b}{b} \geq \frac{-4a - \Delta b}{2a}$

۶۹- ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل ضرب آن‌ها کم‌تر نیست.

۷۰- به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌هاست.

۷۱- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x, y داریم: $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$

۷۲- برای هر عدد حقیقی a ثابت کنید: $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$

■ گزاره‌های درست را ثابت کرده و برای گزاره‌های نادرست مثال نقض ارائه کنید.

۷۳- برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^4 + 1 \geq x^3 + x$

۷۴- اگر x گنگ باشد، $3x^2 + 18x + 4$ نیز گنگ است.

۷۵- ضرب هر چهار عدد طبیعی متوالی از مربع کامل یک واحد کم‌تر است.

۷۶- ثابت کنید $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

۷۷- ثابت کنید اگر x, y و $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ گویا باشند، آن گاه \sqrt{x} و \sqrt{y} هر دو گویا هستند.

بخش ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح - قسمت اول

رابطه عادکردن (شمردن)

۶ بخش‌پذیر است. چرا؟ چون عددی صحیح، مثل ۳ وجود دارد که $2 \times 3 = 6$ می‌شود. این را این‌جوری می‌نویسیم $6 \mid 2$ و می‌خوانیم «عدد ۲، عدد ۶ را عاد می‌کند یا می‌شمارد یا ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است» یا مثلاً $14 \mid 7$ چون عددی مثل (۲-) وجود دارد که $7 \times (-2) = -14$ می‌شود، ولی ۵ $\nmid 2$ چون عدد صحیحی وجود ندارد که در ۲ ضرب شده و حاصل برابر ۵ شود. در حالت کلی داریم:

تعریف رابطه عادکردن: a و b دو عدد صحیح هستند؛ می‌گوییم a ، عدد b را عاد می‌کند (می‌شمارد) و می‌نویسیم $a \mid b$ هرگاه عدد صحیحی مثل q وجود داشته باشد که $aq = b$. به زبان ریاضی:

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; aq = b$$

اگر $a \mid b$ آن گاه b مضرب a و a مقسوم‌علیه b است.

تذکر: همه اعدادی مثل a, b, x و ... که در این فصل با آن‌ها سروکار داریم، صحیح هستند.

ویژگی‌های مقدماتی عادکردن

۱۷ $\mid 17 \times 17 = 17$. شبیه همین $17 \mid -17$ چون $17 = (-1) \times (-17)$. در حالت کلی ± 1 همه اعداد را عاد می‌کنند. پس برای هر عدد صحیح

داریم $a \mid \pm a$.

هر عددی، خودش و قرینه‌اش را عاد می‌کند یعنی $\pm a \mid \pm a$.

هر عددی مثل a ، صفر را عاد می‌کند، یعنی $a \mid 0$ ، چون $a \times 0 = 0$.

اگر $a \mid 0$ ، آن گاه $a \times q = 0$ پس $a = 0$ ؛ یعنی فقط صفر، صفر را عاد می‌کند.

اگر n و m دو عدد طبیعی و $m \leq n$ باشد، آن گاه $a^m \mid a^n$. (مثلاً $2^5 \mid 2^7$)

(مشابه نهایی دی ۹۸)

(مشابه تمرین کتاب)

(نهایی شهریور ۱۴۰۲)

(نهایی دی ۱۴۰۱)

(نهایی فرورد ۱۴۰۲)

(مشابه تمرین کتاب)

(نهایی دی ۱۴۰۲)

(نهایی فرورد ۱۴۰۰)

(مشابه تمرین کتاب)

۲۱. مجموعه اعداد گویا به صورت $Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ تعریف می‌شود،

یعنی مجموعه اعداد گویا شامل کسرهایی هستند که صورت و مخرج عدد صحیح

بوده و مخرج مخالف صفر باشد. فرض کنیم $\frac{c}{d}, \frac{a}{b}$ گویا باشند. $(d, b \neq 0)$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

چون a, b, c, d صحیح هستند، صورت و مخرج صحیح هستند و چون b

و d هیچ‌کدام صفر نیستند $bd \neq 0$ ، پس $\frac{ad+bc}{bd}$ حتماً عددی گویا است.

۲۲. n عدد طبیعی متوالی را $n, n+1, n+2, \dots, n+(n-1)$ می‌گیریم.

حالا: (پرا تا $n-1$ رفت؛ بین $n+0$ از رفت تا $n+(n-1)$)

$$n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+(n-1)) \\ = n \times n + \frac{(n-1)(n)}{2} = n^2 + \frac{(n-1)(n)}{2}$$

(مجموع $n-1$ جمله دنباله حسابی)

n عددی فرد است، پس $n-1$ زوج بوده یعنی $q = \frac{n-1}{2} \Rightarrow n-1 = 2q$ ؛ پس:

$$n^2 + q(n) = n(n+q) = nq'$$

۲۳. هفت عدد طبیعی را به صورت $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6$

در نظر می‌گیریم. میانگین این‌ها می‌شود:

$$\frac{n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5+n+6}{7} = \frac{7n+21}{7} = n+3$$

یعنی میانگین برابر عدد وسطی می‌شود. در حالت کلی میانگین تعداد فردی

عدد، که تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، برابر همان عدد وسطی می‌شود.

۲۴. گفته a مضرب ۳ باشد، پس $a = 3k$ می‌گیریم.

$$a(a+3) = 3k(3k+3) = 3k(3(k+1)) = 9k(k+1) = 9(2q) = 18q$$

ضرب دو عدد متوالی زوج است.

۲۵. عدد فرد را $2k+1$ و عدد زوج را $2q$ می‌گیریم. حالا داریم:

$$(2k+1)^2 + 3(2q) = 4k^2 + 4k + 1 + 6q = 2(2k^2 + 2k + 3q) + 1 = 2q' + 1$$

$$n = 2k \Rightarrow (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$$

$$2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$$

۲۷. اگر بخواهیم این را رد کنیم باید دو عدد اول پیدا کنیم که جمع آن‌ها

اول بشود. $a = 2$ و $b = 3$ می‌گیریم. (پس دو عدد اول a, b وجود دارد به

طوری که $a+b$ هم اول بشود).

۲۸. عدد فرد به هر توانی برسد، فرد می‌شود حالا اگر یک واحد کم کنیم زوج

می‌شود. این را ثابت می‌کنیم:

$$(2k+1)^3 - 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 - 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) = 2q$$

۲۹. اولین عدد طبیعی فرد اول را $2k+1$ می‌گیریم. بعدی دو واحد بیش‌تر

است پس عدد فرد بعدی $2k+3$ و بعدی $2k+5$ می‌شود. حالا:

$$2k+1+2k+3+2k+5 = 6k+9 = 2(2k+3) + 3 = 3q$$

۳۰. مثال نقض $n = 3$ چون $2^3 + 1 = 9$ می‌شود که اول نیست.

۳۱. اثبات درستی: دو عدد زوج متوالی

$$2k(2k+2) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2$$

۳۲. کافی است $a = 1$ و $b = c = 2$ بگیریم تا $a\sqrt{bc} = 2$ بشود. این مثال

نقض یعنی گزاره نادرست است.

۳۳. به نظر می‌رسد که درست باشد (پندرتا عدد امتحان کنین!) اولین زوج اول را

$2k$ بعدی را $2k+2$ و بعدی را $2k+4$ می‌گیریم. حالا:

$$(2k) \frac{2(k+1)}{2} \frac{2(k+2)}{2} = \frac{2k(k+1)(k+2)}{2} = k(k+1)(k+2) = 8(3q) = 24q$$

ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۶ و در نتیجه مضرب ۲۴ است.

۱. درست است. با در نظر گرفتن همه حالت‌ها حکم را ثابت می‌کنیم. دو حالت

داریم، بالأخره $a = 0$ یا $a \neq 0$:

الف اگر $a = 0$ باشد که حکم ثابت شده است.

ب اگر $a \neq 0$ باشد، با ضرب دو طرف رابطه $ab = 0$ در $\frac{1}{a}$ داریم:

$$ab = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{a}} b = 0$$

پس باز هم حکم نتیجه می‌شود.

۲. نادرست است. $x = y = 0$ وجود دارد.

۳. درست است. اگر $k = n(n+1)$ بگیریم، داریم:

$$4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

۴. نادرست است. مثال نقض: $a = 0$ و $b = \sqrt{2}$

۵. درست است (اثبات با برهان خلف). خلاف حکم را در نظر می‌گیریم یعنی

فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}$ گویا باشد، داریم: $\frac{1}{x} = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0$) از طرفی

$a \neq 0$ ($\frac{1}{x}$ صفر نیست)، پس $x = \frac{b}{a}$ بنا بر این x گویا است.

به تناقض رسیدیم، پس فرض خلف باطل و خود حکم درست است.

۶. نادرست است. مثال نقض $a = 1$ و $b = 1$ ($\frac{1}{1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$)

۷. مثال نقض

۸. ضرب عدد گویای ناصفر در عدد گنگ، گنگ است.

$$9. \sqrt{xy} - \frac{x+y}{2}$$

۱۰. $7ab$ فرد باشد، a و b فرد پس a^2 و b^2 هم فرد ولی $a^2 + b^2$ زوج است.

۱۱. حکم - خلاف فرض یا امر بدیهی

۱۲. اگر $n = 4$ بگیریم، $2^4 - 1 = 15$ می‌شود که اول نیست.

۱۳. معکوس عدد ۳ برابر $\frac{1}{3}$ می‌شود، اما $\frac{1}{3} \geq 3$ نیست.

۱۴. دو عدد گنگ را $\sqrt{2}$ و $\sqrt{8}$ بگیریم، اما $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$ می‌شود که عددی

گویا است.

۱۵. عدد گویا را صفر و عدد گنگ را $\sqrt{2}$ می‌گیریم. $0 \times \sqrt{2} = 0$ می‌شود که

عددی گویا است.

۱۶. $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ بگیریم $\alpha + \beta = 2\sqrt{2}$ گنگ می‌شود، ولی $\alpha - \beta = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

گنگ نبوده و گویا است.

۱۷. اول دقت کنید که $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\alpha\beta} + \frac{\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}$ می‌شود. اگر $\alpha = \sqrt{8}$ و $\beta = \sqrt{2}$

بگیریم داریم:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۸. اگر $a = 0$ و $b = 1$ بگیریم $ab = 0$ می‌شود، ولی $a = 0 \wedge b = 0$ نادرست

است. چرا؟

ترکیب عطفی وقتی درست می‌شود که هر دو درست باشند. در این مثالی که

زدیم $a = 0$ درست است ولی $b = 0$ نه! توجه کنید که اگر این‌جوری نوشته بود

« $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ » درست می‌شد، یعنی اگر ضرب دو عبارت صفر باشد،

نتیجه می‌گیریم حداقل یکی برابر صفر است، یعنی اولی صفر بوده است یا دومی.

۱۹. اگر $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{1, 3\}$ و $C = \{1, 4\}$ بگیریم داریم: $\frac{A \cap B}{\{1\}} = \frac{A \cap C}{\{1\}}$

ولی $B \neq C$

۲۰. کافی است $x = 9$ ، $y = 4$ بگیریم:

$$\sqrt{13} = \sqrt{9+4} \neq \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3+2 = 5$$



۳۴. گفته $۲ab$ عددی فرد باشد، پس a, b باید عددی فرد باشند (t ضربشون فرد بشه)، یعنی $a = ۲k + ۱$ و $b = ۲q + ۱$. حالا:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k+1)^2 + (2q+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 2(2k^2 + 2k + 2q^2 + 2q + 1) = 2t \end{aligned}$$

۳۵. عدد فرد وسطی را $۲k + ۱$ می‌گیریم. یکی بیش‌تر $۲k + ۲$ و یکی کم‌تر $۲k$ می‌شود. حالا داریم:

$$\begin{aligned} (2k)(2k+1)(2k+2) &= 4k(k+1)(2k+1) = 4(2q)(2k+1) = 8q(2k+1) \end{aligned}$$

ضرب دو عدد متوالی زوج است.

از طرفی ضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است. پس ضرب این سه عدد هم مضرب ۳ بوده و هم مضرب ۸ ، یعنی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۳۶. دو حالت در نظر می‌گیریم. n زوج باشد یا فرد:

(۱) $n = 2k$ ، پس:

$$\begin{aligned} n^2 + \Delta n - \gamma &= (2k)^2 + \Delta(2k) - \gamma \\ &= 4k^2 + 10k - \gamma = 4k^2 + 10k - 8 + 1 \\ &= 2(2k^2 + 5k - 4) + 1 = 2q + 1 \Rightarrow \text{حاصل فرد است.} \end{aligned}$$

(۲) $n = 2k + 1$ ، پس:

$$\begin{aligned} n^2 + \Delta n - \gamma &= (2k+1)^2 + \Delta(2k+1) - \gamma \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 - \gamma = 4k^2 + 14k - 2 + 1 \\ &= 2(2k^2 + 7k - 1) + 1 = 2q + 1 \Rightarrow \text{حاصل فرد است.} \end{aligned}$$

پس در دو حالت، حاصل عددی فرد است، این یعنی به ازای هر عدد طبیعی n حاصل $n^2 + \Delta n - \gamma$ فرد می‌شود.

۳۷. دو حالت می‌گیریم. n زوج باشد یا فرد:

۱) $n = 2k \Rightarrow n^2 + 2 = (2k)^2 + 2 = 4k^2 + 2 = 4q + 2$
 ۲) $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 + 2 = (2k+1)^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3 = 4(k^2 + k) + 3 = 4q + 3$

پس در هیچ کدام از دو حالت، n به صورت $4q$ در نمی‌آید (باقی‌مانده دارد)، پس هیچ گاه $n^2 + 2$ بر 4 بخش‌پذیر نمی‌شود.

۳۸. دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) زوج $n \Rightarrow n = 2k \Rightarrow A = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$
 پس برای این که A زوج باشد k باید زوج باشد.
 (پس این کلمه نتیجه می‌شه!) $\Rightarrow n = 2k = 4q$

۲) فرد $n \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow A = \frac{n(n+1)}{2}$

شبهه حالت اول $k + 1$ باید زوج باشد پس k فرد است، یعنی $k = 2q + 1$ ، بنابراین $n = 2k + 1 = 4q + 3 = 4q + 3$ (یعنی این کلمه هم نتیجه می‌شه)

۳۹. دو حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) $b = 0$ باشد: در این حالت ترکیب $a = 1$ یا $b = 0$ درست است.

(۲) $b \neq 0$ باشد: در این حالت عدد $\frac{1}{b} \in \mathbb{R}$ وجود دارد، پس:

$$(a-1)b = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{b}} a-1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

یعنی در این حالت $a = 1$ بوده و باز هم ترکیب $a = 1$ یا $b = 0$ درست می‌شود.

پس در هر دو حالت، این ترکیب درست بوده و کل گزاره درست می‌شود.

۴۰. با روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها جلو برویم. بالأخره n برابر با یکی از اعداد $۲, ۳, \dots, ۶$ می‌تواند باشد. یکی یکی این‌ها را امتحان می‌کنیم. اگر

$$\frac{n^2(n^2-1)^2}{36} = \left(\frac{n(n^2-1)}{6}\right)^2$$

زوج بشود، n قبول است. البته $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$ راحت‌تر محاسبه می‌شود.

(۱) اگر $n = 2$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36} = 1$ ؛ پس $n = 2$ قبول نیست.

(۲) اگر $n = 3$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36} = 16$ ؛ پس $n = 3$ قبول است.

$$\left(\text{چون } \frac{n^2(n^2-1)^2}{36} \text{ زوج شد.}\right)$$

(۳) اگر $n = 4$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36} = 100$ ؛ پس $n = 4$ قبول است.

(۴) اگر $n = 5$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36} = 400$ ؛ پس $n = 5$ هم قبول است.

(۵) اگر $n = 6$ باشد، $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36} = 35^2$ ؛ پس $n = 6$ قبول نیست.

$A = \{3, 4, 5\}$ است پس حتماً $n \in A$ بوده است.

۴۱. x را عددی گنگ در نظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم $\frac{1}{x}$ هم گنگ است.

(فرض خلف) فرض کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد، پس گویا است یعنی برابر با عددی گویا

(غیرصفر) مثل $\frac{a}{b}$ می‌شود؛ پس: $\frac{1}{x} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$)

این یعنی x هم گویا است. تناقض حاصل می‌گردد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۲. (فرض خلف) فرض کنیم حکم برقرار نباشد یعنی $\sqrt{2} + 2$ گنگ نباشد، یعنی گویا باشد، پس:

$$\sqrt{2} + 2 = a, a \in \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{توان } 2} \sqrt{2} + 2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{2} = a^2 - 2$$

توان سوم هر عدد گویا، گویا بوده از طرفی تفاضل دو عدد گویا هم گویا است، پس $a^2 - 2$ گویا و در نتیجه $\sqrt{2}$ گویا می‌شود. (ولی گفته $\sqrt{2}$ گنگه!)

تناقض حاصل با فرض مسئله می‌گردد خلاف حکم باطل بوده و خود حکم درست است.

۴۳. شبهه قبلی فرض کنیم $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ گنگ نبوده و گویا باشد باید کاری کنیم که به تناقض با فرض برسیم، یعنی نتیجه بشود که $\sqrt{2}$ گویا است.

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = a, a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{3} = a - \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دوم}} 3 = a^2 + 2 - 2\sqrt{2}a \Rightarrow 2\sqrt{2}a = a^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2 - 1}{2a}$$

$a^2 - 1$ و $2a$ گویا، (مخرج غیرصفر) هستند، پس $\frac{a^2 - 1}{2a}$ هم گویا می‌شود.

این یعنی $\sqrt{2}$ هم گویا است. به تناقض رسیدیم پس خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۴. خلاف حکم را در نظر می‌گیریم، یعنی n فرد نباشد پس n زوج است.

$$n = 2k \Rightarrow 3n - 2 = 3(2k) - 2 = 6k - 2 = 2(3k - 1) = 2q$$

این یعنی $3n - 2$ زوج است در صورتی که گفته فرد است. تناقض حاصل می‌گردد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۵. عدد گویا را a و عدد گنگ را b می‌گیریم. گفته ثابت کنید $a + b$ گنگ

است؛ پس از برهان خلف فرض می‌کنیم $a + b$ گویا باشد.



تذکره: یک جور دیگر هم می‌توانستیم رابطه $a^2 + b^2 + ab = 0$ را به تناقض

برسانیم، ببینید:

$$\xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0 \Rightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 2ab = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 0$$

عبارت‌های توان دوم همگی نامنفی هستند، پس جمع آن‌ها فقط وقتی صفر می‌شود که همگی صفر باشند: $a+b=0, b=0, a=0$. به تناقض رسیدیم، چون در صورت سؤال گفته این‌ها مخالف صفر هستند.

۵۴. خلاف حکم را در نظر می‌گیریم، یعنی $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$

عددی فرد باشد. ضرب ۳ عبارت، عددی فرد شده است، پس هر کدام فرد بوده است، یعنی $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3$ همگی فرد هستند. از طرفی داریم:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = 0$$

مجموع سه عدد فرد، فرد است و نمی‌تواند زوج باشد. تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۵۵. (الف) درست است. دو چیز باید ثابت کنیم:

(۱) اگر n زوج باشد، n^2 هم زوج است. این را به صورت مستقیم ثابت می‌کنیم:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_q) = 2q \Rightarrow n^2 \text{ زوج است.}$$

(۲) اگر n^2 زوج باشد، آن‌گاه n زوج است. این را به صورت غیرمستقیم (با برهان خلف) ثابت می‌کنیم:

فرض کنیم n زوج نباشد، پس n فرد است:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$$

یعنی n^2 فرد است. تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

تذکره: همین ترکیب دوشروطی برای n های فرد هم برقرار است. یعنی: n^2

فرد است اگر و فقط اگر n فرد باشد.

۵۶. واضح است که a و b هر دو با هم صفر نیستند. در این حالت می‌توانیم

ثابت کنیم $a^2 + ab + b^2 > 0$. حالا:

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - b^3 < 0 \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

حواستان باشد اگر n فرد باشد $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$ درست است، اما اگر n زوج باشد $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$ وقتی درست است که a و b نامنفی باشند.

۵۷. اگر $x^2 = 1$ باشد $x = \pm 1$ نتیجه می‌شود، پس ترکیب دوشروطی غلط

است. به زبان دیگر از $x^2 = 1$ الزاماً $x = 1$ نتیجه نمی‌شود مثلاً $(-1)^2 = 1$ می‌شود ولی $-1 \neq 1$.

۵۸. درست است. اگر $x \leq 1$ باشد با ضرب دو طرف در x^2 چون نامنفی است

جهت تغییری نکرده و $x^3 \leq x^2$ نتیجه می‌شود. برعکس اگر $x^3 \leq x^2$ باشد و $x^2 \neq 0$ با تقسیم بر x^2 نتیجه می‌شود $x \leq 1$. اگر $x^2 = 0$ هم باشد یعنی

$x = 0$ باشد خوب $0 \leq 1$ بوده و باز هم $x \leq 1$ نتیجه می‌شود.

در هر قسمت، از حکم شروع کرده و گزاره‌های هم‌راز را می‌نویسیم تا به یک گزاره همواره درست برسیم. بنابراین طبق استدلال بازگشتی حکم اولیه ثابت می‌شود.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \quad \text{۵۹}$$

همواره برقرار $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x+y - 2\sqrt{xy} \geq 0$

$$a + \frac{1}{a} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 1}{a} \leq -2 \quad \text{۶۰}$$

چون $a < 0$ جهت عوض می‌شود

همواره برقرار $(a+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 \geq 0$

$$a + b = c \Rightarrow b = c - a$$

گویا گویا گنگ گویا

به تناقض رسیدیم پس خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۶. خلاف حکم را در نظر می‌گیریم؛ یعنی $\alpha - \beta$ گویا باشد. از طرفی $\alpha + \beta$ هم گویا است، پس جمع این دو عدد هم گویا می‌شود، یعنی داریم:

$$\alpha + \beta + (\alpha - \beta) = 2\alpha$$

پس 2α گویا است یعنی α هم گویا است. تناقض حاصل نشان می‌دهد که خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۷. فرض کنیم $\alpha + 2\beta$ گویا باشد، پس:

$$\alpha + 2\beta = \frac{c}{q} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta + \beta}{q} = \frac{c}{q} \Rightarrow \frac{\beta}{q} = \frac{c - (\alpha + \beta)}{q}$$

گویا گنگ گویا

به تناقض رسیدیم. خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۸. فرض کنیم ax گنگ نباشد پس ax گویا است. یعنی:

$$ax = b, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{b}{a} \xrightarrow{\text{تقسیم عدد گویا بر گویا غیر صفر گویا است.}} x \in \mathbb{Q}$$

پس x گویا شد که تناقض است. پس ببینید در حالت کلی ضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ ممکن است گویا یا گنگ باشد (مثلاً $0 \times \sqrt{2} = 0, \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$).

این ضرب فقط در صورتی گویا می‌شود که عدد گویا برابر صفر باشد و اگر عدد گویا صفر نباشد حاصل قطعاً گنگ است.

۴۹. فرض کنیم $\frac{a}{b}$ گنگ نباشد، پس عددی گویا است؛ فرض کنیم x گویا

$\frac{a}{b} = x$ باشد. پس $a = bx$. طرفین تساوی را در b ضرب می‌کنیم، داریم:

$$ab = b^2 x$$

حالا ab گویا است یعنی $ab = b^2 x$ هم گویا است. طبق فرض b^2 گنگ و x گویا است. چون $x \neq 0$ پس $b^2 x$ طبق تمرین قبلی گنگ است. ($b^2 x$ هم گویا و هم

گنگ شد) تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۵۰. به روش برهان خلف فرض می‌کنیم $f + g = a$ در $f + g = h$ پیوسته باشد، پس

$$f + g = h \Rightarrow g = h - f$$

آن را برابر با تابع پیوسته h می‌گیریم:

f و h هر دو در $x = a$ پیوسته هستند، پس $h - f$ یا g در a پیوسته است.

به تناقض رسیدیم چون g در a ناپیوسته بود.

۵۱. خلاف حکم یعنی خلاف (زوج یا زوج) را در نظر می‌گیریم. طبق

قانون دومرگان خلاف حکم می‌شود.

فرد است و b هم فرد است، پس $a = 2k + 1$ و $b = 2k' + 1$ می‌گیریم:

$$ab = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(\underbrace{2kk' + k + k'}_q) + 1 = 2q + 1$$

یعنی ab فرد است. تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۵۲. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ می‌شود. با توجه به رابطه‌ای که داده

شده، نتیجه می‌شود $2ab = 0$ پس $a = 0$ یا $b = 0$ است. یعنی برای برقراری معادله حداقل یکی از a یا b باید صفر باشد.

۵۳. فرض کنیم a, b دو عدد طبیعی باشند به طوری که رابطه داده شده

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{b+a}{ab} \Rightarrow ab = (a+b)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0 \Rightarrow a^2 + ba + b^2 = 0$$

این را شبیه یک معادله درجه دوم بر حسب a ببینید. $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2 < 0$. می‌شود، پس معادله جواب ندارد. تناقض حاصل می‌گردد هیچ a و b طبیعی

وجود ندارد که $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ بشود.

ردیف	نمونه امتحان شماره ۶ - نهایی خردادماه ۱۴۰۳	رشته ریاضی و فیزیک	ریاضیات گسسته
نمره	Kheilisabz.com	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است. ب) اگر $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ آن گاه: $ (m^5, m^3, m^2) = m^5$ ج) تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 3\}$ ، مضرب ۴ است. د) هر مجموعه احاطه گر مینیمال، یک مجموعه احاطه گر مینیمم است.		
۲	جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید. الف) عدد احاطه گری گراف C_7 برابر است با ب) تعداد راه های توزیع ۳ خودکار متفاوت بین ۵ نفر به طوری که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد، برابر است.		۰/۵
۳	با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^2 + b^2 \geq (a-1)(b+1)$		۱/۵
۴	اگر a عددی طبیعی و داشته باشیم $a \mid 4k+1$ و $a \mid 4k+3$ ، ثابت کنید $a=1$ یا $a=17$.		۱
۵	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a بر ۲۰ بیابید.		۱/۲۵
۶	جواب های عمومی معادله سیاله $22 = 5x + 9y$ را به دست آورید.		۱/۵
۷	با توجه به گراف G مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) مرتبه و اندازه گراف را بنویسید. ب) مسیری به طول ۵ از رأس c به رأس f بنویسید. ج) دوری به طول ۴ بنویسید. د) آیا گراف \bar{G} همبند است؟ چرا؟		۲
۸	با توجه به گراف G ، به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) آیا مجموعه $D = \{a, b, m\}$ یک مجموعه احاطه گر است؟ چرا؟ ب) عدد احاطه گری گراف G را به دست آورید. (با ذکر دلیل) ج) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی از آن بنویسید.		۲
۹	در گراف روبه رو: الف) مجموعه احاطه گر غیر مینیمال $A = \{b, e, g, a, f\}$ را به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کنید. ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمم که شامل رأس e باشد را بنویسید. ج) با اضافه نمودن چه یالی عدد احاطه گری گراف ۲ می شود؟		۱/۵
۱۰	الف) گراف P_{17} را رسم کنید. ب) یک 7 -مجموعه از آن را مشخص کنید.		۱
۱۱	می خواهیم ۱۰ نفر را که دوهو دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر خواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟		۱
۱۲	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $20 = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$ را با شرط های $x_1 > 2$ و $x_2 = 3$ ، $x_3 \geq 4$ به دست آورید.		۱/۵
۱۳	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۲، ۳ و ۲ چند عدد ۱۰ رقمی می توان نوشت؟ (محاسبه جواب آخر الزامی نیست).		۱
۱۴	قرار است سه کارگر با سه نوع ماشین نخریسی و سه نوع الیاف در سه روز اول هفته کار کنند. به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه ریزی کنید.		۱/۲۵
۱۵	تعداد توابع پوشا از مجموعه ۵ عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B را به دست آورید.		۱
۱۶	حداقل چند دانش آموز در حیاط یک دبیرستان حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۱ نفر از آن ها متعلق به یک پایه تحصیلی (دهم، یازدهم، دوازدهم) و یک رشته تحصیلی (ریاضی، تجربی، انسانی) هستند؟		۱
	جمع نمرات		۲۰

پاسخ نامه تشریحی

۱. الف نادرست

ب نادرست

ج درست

د نادرست (هر مورد (۰/۲۵))

 ۲. الف ۳ یا $\left[\frac{7}{3}\right]$ (۰/۲۵)

 ب $\frac{5!}{2!}$ یا 60 (۰/۲۵)

 ۳. $a^r + b^r \geq ab + a - b - 1$ (۰/۲۵)

$$\Leftrightarrow 2a^r + 2b^r - 2ab - 2a + 2b + 2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^r + (a-1)^r + (b+1)^r \geq 0 \quad (۰/۲۵)$$

این رابطه همواره برقرار است. (۰/۲۵)

 ۴. $a \mid vk + 1 \Rightarrow a \mid 2\lambda k + 4$ (۰/۲۵)

$$a \mid 4k + 2 \Rightarrow a \mid 2\lambda k + 2\lambda \quad (۰/۲۵)$$

$$a \mid 17(a \mid -17) \quad a \in \mathbb{N} \quad a = 17 \quad a = 17 \quad (۰/۲۵)$$

۵. روش اول:

$$a = 4q_1 + 2 \quad \Delta a = 20q_1 + 10 \quad (۰/۲۵)$$

$$a = 5q_2 + 3 \quad \Rightarrow \quad \Delta a = 20q_2 + 12 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow a = 20(q_1 - q_2) - 2 \quad (۰/۲۵)$$

$$a = 20q_3 + 18 \Rightarrow r = 18 \text{ یا } r = -2 + 20 = 18 \quad (۰/۲۵)$$

روش دوم:

$$a \equiv 2 \equiv 18 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a = 4k + 18 \quad (۰/۲۵)$$

$$a \equiv 3 \equiv 18$$

$$\Rightarrow \frac{4k + 18}{5} \equiv 18 \Rightarrow \frac{k}{5} \equiv \frac{\Delta t}{5} \Rightarrow a = 20t + 18 \Rightarrow \frac{r}{5} \equiv 18 \quad (۰/۲۵)$$

۶. روش اول:

$$\Delta x \equiv 22 \Rightarrow x \equiv 8 \Rightarrow x = 9k + 8 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Delta(9k + 8) + 9y = 22 \Rightarrow y = -2 - 9k \quad (۰/۲۵)$$

روش دوم:

$$9y \equiv 22 \Rightarrow y \equiv 3 \Rightarrow y = 5k + 3 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Delta x + 9(5k + 3) = 22 \Rightarrow x = -1 - 9k \quad (۰/۲۵)$$

$$p = 7 \quad (۰/۲۵), \quad q = 10 \quad (۰/۲۵)$$

۷. الف

ب cebagf یا ceabgf (۰/۵)

ج ebgfe یا eagfe یا ebage یا eagbe (۰/۵)

 د خیر (۰/۲۵) زیرا رأس e در گراف G ماکزیمم درجه است؛ لذا درجه آن در گراف \bar{G} صفر می‌باشد. یا

$$\deg_{\bar{G}}(e) = p - 1 = \Delta = 6 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(e) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{G} \text{ ناهمبند است.} \quad (۰/۲۵)$$

۸. الف خیر (۰/۲۵) زیرا رأس d احاطه نمی‌شود.

$$N_G[a] \cup N_G[b] \cup N_G[m] \neq V(G) \quad (۰/۲۵)$$

 ب داریم $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{11}{6} \right\rceil = 2$ (۰/۵)

 و از طرفی مجموعه سه عضوی $\{a, m, d\}$ احاطه‌گر مینیمم می‌باشد. (۰/۲۵)

$$\gamma(G) = 3 \quad (۰/۲۵)$$

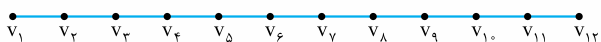
 ج $\{f, g, h, i, j\}$ (۰/۵)

 ۹. الف $\{b, g, a, f\}$ (۰/۵)

 ب $\{c, e, h\}$ (۰/۵)

ج ec یا eh یا gf یا gc (۰/۵)

۱۰. الف رسم گراف (۰/۵)


 ب $\{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$ (۰/۵)

۱۱. روش اول:

$$\underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (2!)^2}_{(۰/۷۵)} = 3840 \quad (۰/۲۵)$$

روش دوم:

$$\underbrace{(1 \times 1) \times (1 \times 1) \times (2 \times 1) \times (2 \times 1) \times (2 \times 1)}_{(۰/۷۵)} = 3840 \quad (۰/۲۵)$$

۱۲. روش اول:

$$x_1 + 2(3) + x_2 + x_3 = 20 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{x_1 - 3}_{y_1} \geq 0 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3, \quad \underbrace{x_2 - 4}_{y_2} \geq 0 \Rightarrow x_2 = y_2 + 4$$

$$\underbrace{y_1 + 3}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{y_2 + 4}_{(۰/۲۵)} + x_3 = 14 \Rightarrow y_1 + y_2 + x_3 = 7 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36 \quad (۰/۲۵)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad (۰/۲۵)$$

روش دوم:

$$\binom{14-3-4+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36 \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{10!}{2! \times 3! \times 4!} \quad (۰/۲۵) \quad (۰/۲۵) \quad (۰/۲۵)$$

۱۳.

۱۴.

	w_1	w_2	w_3
A = شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

	w_1	w_2	w_3
B = شنبه	۳	۱	۲
یکشنبه	۱	۲	۳
دوشنبه	۲	۳	۱

	w_1	w_2	w_3
\Rightarrow شنبه	۱۳	۲۱	۳۲
یکشنبه	۳۱	۱۲	۲۳
دوشنبه	۲۲	۳۳	۱۱

چون اعداد دورقمی تکراری در مربع ساخته شده وجود ندارد؛ پس متعامدند. (۰/۲۵)

$$3^5 - (3 \times 3^5 - 3) = 150 \quad (۰/۲۵)$$

۱۵.

$$n = 3 \times 3 = 9 \quad (۰/۲۵) \text{ تعداد لانه:}$$

۱۶.

$$k + 1 = 21 \Rightarrow k = 20 \quad (۰/۲۵)$$

$$kn + 1 = 20 \times 9 + 1 = 181 \quad (۰/۵) \text{ تعداد کبوترها:}$$