



ریاضی یازدهم

میکرو فرنی | ویژه رشته
علوم تجربی

مؤلف: محمدحسین صابری

درسنامه های کامل + تست های فراوان + پاسخ های روان
[برای آمادگی در کنکور سراسری و آزمون های آزمایشی]

مقدمه مؤلف



تقدیم به محمدعلی و علی
تقریباً صفر ساله از تهران.

هیجان‌انگیزترین قسمت از نوشتن کتاب برای من، همیشه مقدمه است. به جورایی انگار با نوشتن مقدمه، خستگی این چند ماه از تن آدم در میره. ماه‌هایی که برای من سخت‌ترین روزهای زندگی‌ام محسوب می‌شد. فقدان پدر  که هنوز داغش برایم سرد نشده بدترین اتفاق ممکن در این روزها بود. (روحش شاد) البته عمو و دایی شدنم در این مدت خیلی کیف داد و این دو تا کوچولو، شدن انگیزه این روزهای زندگی‌ام.

اما یک اذعای بزرگ!

برای کتاب میکرو یازدهم همه خودم را گذاشتم (تمام تجربه خودم از تألیف چندین و چند جلد کتاب و سال‌های تدریس). همه چیز را خیلی اصولی و حساب شده کنار هم چیدیم، از درسنامه و تست‌ها گرفته تا پاسخ‌نامه که واسه خودش یک تدریس فوق‌العاده کامل است. همه جای کتاب خودم را جای دانش‌آموزها گذاشتم که خدای نکرده، جایی از کتاب برایشان سخت و غیرقابل درک نباشد. خلاصه این‌که من همه انرژی‌ام را گذاشتم که بخوانید، یاد بگیرید و البته لذت ببرید...

چرا ریاضی یازدهم میکرو قرن جدید؟

- این کتاب پاسخگوی نیاز دانش‌آموزان رشته تجربی در سطوح مختلف آموزشی می‌باشد، چرا که دربردارنده؛
- درسنامه‌های روان و قابل فهم همراه با چیدمان مطالب آموزشی به صورت کارشناسی شده و منحصر به فرد
- مثال‌ها و تست‌های آموزشی متعدد در درسنامه
- تست‌های جامع و در عین حال متنوع و مطابق با ساختار کتاب درسی
- پاسخ‌نامه‌های کاملاً تشریحی و روان به همراه چندین روش حل

شیوه مطالعه کتاب

برای مطالعه هرچه دقیق‌تر کتاب در هر فصل و در شروع هر درس، در مرحله اول به مطالعه دقیق درسنامه و نکات گفته شده بپردازید سپس به سراغ تحلیل دقیق مثال‌ها و تست‌های آموزشی بروید و پاسخ‌های آن‌ها را خیلی موشکافانه بررسی کنید تا ابهامات شما در آن مبحث به صورت کامل برطرف گردد. قبل از شروع هر درسنامه در بالا و سمت چپ درسنامه در صورت لزوم شماره تست‌هایی که مربوط به آن درسنامه هستند ذکر شده‌اند تا بتوانید بعد از مطالعه هر درسنامه به بررسی و حل آن تست‌ها بپردازید.

توجه کنید که تست‌های بعضی از درسنامه‌ها با درسنامه‌های بعدی و یا قبلی آن ترکیب شده است و توضیحات آن در بالای همان درسنامه وجود دارد چرا که آن درسنامه به تنهایی اهمیتی برای طرح تست نداشته است.

رنگ بندی تست ها:

- * **گام اول:** حل تست های **سبز**: به منظور بررسی، تحلیل و تثبیت داده ها در ذهن
- * **گام دوم:** حل تست های **زرد**: به منظور تسلط هرچه کامل تر بر مبحث مورد نظر
- * **گام سوم:** حل تست های **بنفش**: به منظور مواجهه با تست های چالشی و نکته دار

تشکر ویژه:

از دبیران برجسته و توانمند آقایان افشین ملاک پور، سید علی مقدم نیا و مجید رفعتی که تجربه چندین ساله خود را در اختیار من قرار دادند، کمال تشکر را دارم و همچنین آقایان معین کرمی، آرش عمید، امیر هوشنگ انصاری، علیرضا شریف خطیبی، سامان سلامیان، حامد حسین خانی و امید شیرینژاد عزیز و در آخر از آقایان علیرضا شعبانی و نیما رضایی که همیشه بهترین هستند و خواهند بود بسیار ممنونم.

پل ارتباطی ما



Mohamadhoseinsaberi



فهرست مطالب

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی ۲۱۱

- درس اول: تابع نمایی ۲۱۲
- درس دوم: تابع لگاریتم ۲۲۵
- درس سوم: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی ۲۴۶
- پاسخنامه تشریحی فصل پنجم ۵۰۳

فصل ششم: حد و پیوستگی ۲۴۹

- درس اول: فرآیندهای حدی و محاسبه حد از روی نمودار و ضابطه ۲۵۰
- درس دوم: رفع ابهام صفر صفر ۲۶۷
- درس سوم: پیوستگی ۲۷۸
- پاسخنامه تشریحی فصل ششم ۵۳۹

فصل هفتم: آمار و احتمال ۲۹۱

- درس اول: یادآوری احتمال دهم ۲۹۲
- درس دوم: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل ۲۹۷
- درس سوم: آمار توصیفی ۳۰۸
- پاسخنامه تشریحی فصل هفتم ۵۷۲

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر ۷

- درس اول: هندسه تحلیلی ۸
- درس دوم: معادله درجه دوم ۳۱
- درس سوم: تابع درجه دوم ۵۰
- درس چهارم: معادلات گویا و گنگ ۶۷
- پاسخنامه تشریحی فصل اول ۳۲۷

فصل دوم: هندسه ۷۹

- درس اول: ترسیم‌های هندسی ۸۰
- درس دوم: نسبت و تناسب، استدلال و تالس ۸۸
- درس سوم: تشابه و روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ۱۰۳
- پاسخنامه تشریحی فصل دوم ۳۹۶

فصل سوم: تابع ۱۱۷

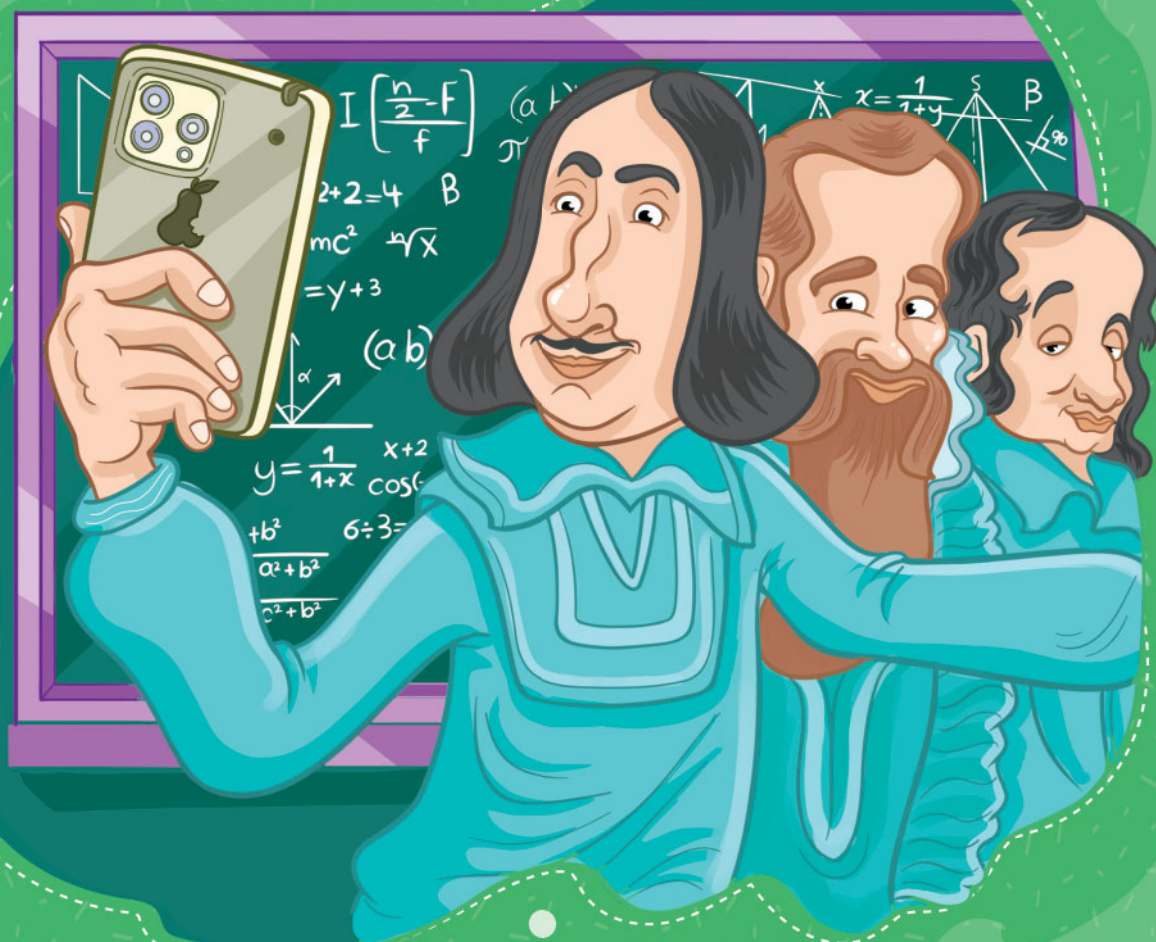
- درس اول: یادآوری تابع دهم ۱۱۸
- درس دوم: آشنایی با برخی از انواع توابع ۱۲۴
- درس سوم: تابع یک‌به‌یک و مفهوم وارون یک تابع ۱۴۷
- درس چهارم: اعمال جبری روی توابع و انتقال ۱۶۲
- پاسخنامه تشریحی فصل سوم ۴۲۵

فصل چهارم: مثلثات ۱۷۹

- درس اول: یادآوری مثلثات دهم ۱۸۰
- درس دوم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۱۸۴
- درس سوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۹۲
- درس چهارم: توابع مثلثاتی ۲۰۲
- پاسخنامه تشریحی فصل چهارم ۴۷۴

فصل چهارم: مثلثات

- درس اول: یادآوری مثلثات دهم
- درس دوم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
- درس سوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
- درس چهارم: توابع مثلثاتی





درس اول: یادآوری مثلثات دهم

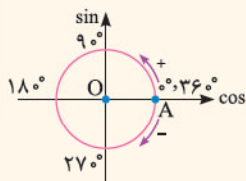
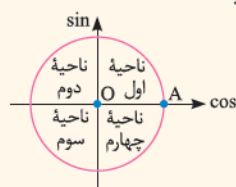


تست‌های مربوط به این درسنامه: ۹۳۸ تا ۹۷۰

یادآوری مثلثات



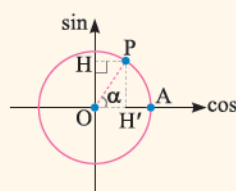
دایره مثلثاتی

دایره‌ای به شعاع واحد که مرکز آن $O(0, 0)$ ، نقطه آغازین آن $A(1, 0)$ و جهت حرکت در دایره پادساعتگرد است.همان‌طور که در شکل بالا مشاهده می‌کنید، در دایره مثلثاتی محور x ها را محور کسینوس‌ها و محور y ها را محور سینوس‌ها می‌نامیم.
تذکر: محورهای سینوس و کسینوس دایره مثلثاتی را به ۴ ناحیه مختلف تقسیم می‌کند که شماره‌گذاری این ناحیه‌ها به صورت مقابل است:

سال دهم کاری با محورهای تانژانت و کتانژانت نداشتیم. فعلاً حفظ کردن دو فرمول مقابل را در دستور کار قرار دهید:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

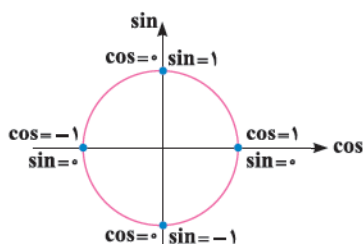
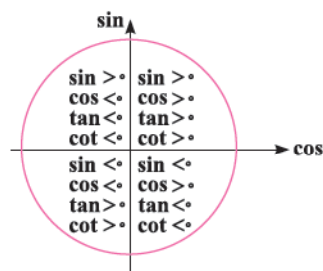
پیدا کردن مقدار $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ مطابق شکل زیر، اگر نقطه P روی محیط دایره مثلثاتی، نشان‌دهنده زاویه مرکزی α باشد، برای پیدا کردن هر یک از مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ باید از نقطه P به ترتیب به محورهای خودشان عمود کنیم. در این صورت فاصله مرکز دایره تا پای عمود می‌شود مقدار سینوس یا کسینوس زاویه α .

$$OH = \sin \alpha$$

$$OH' = \cos \alpha$$



این هم دو شکل مهم که دانستنش برای امسال هم الزامی است:





نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

در جدول عظیم‌الجثه (بزرگ) زیر مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف را آورده‌ایم. حتماً آن‌ها را با دقت حفظ کنید و بعد مثلثات یازدهم را شروع کنید.

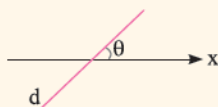
زاویه α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تن	۰	تن	۰
$\cot \alpha$	تن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تن	۰	تن

زاوای متمم: وقتی دو زاویه جمعشان 90° شود، به آن‌ها متمم گفته می‌شود ($\alpha + \beta = 90^\circ$) و برای دو زاویه متمم داریم:

$$\sin \alpha = \cos \beta \quad \cos \alpha = \sin \beta \quad \tan \alpha = \cot \beta \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

برای مثال $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ و $\tan 11^\circ = \cot 79^\circ$ می‌باشد.

رابطه تانژانت با شیب خط: شیب هر خط مساوی تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، ببینید:



$$d = \tan \theta$$

فرمول‌های مثلثاتی

در این جا فرمول‌های مهم مثلثاتی دهم را یک جا برایتان می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\textcircled{4} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

یادداشت:



تست‌های درس اول



یادآوری مثلثات

۹۴۸ اگر زاویه $5\alpha + 3^\circ$ در ربع دوم دایره مثلثاتی باشد، حدود α کدام است؟

۴ $12^\circ < \alpha < 60^\circ$

۳ $12^\circ < \alpha < 30^\circ$

۲ $15^\circ < \alpha < 30^\circ$

۱ $15^\circ < \alpha < 60^\circ$

۹۴۹ اگر $\sin \theta < 0$ و $\tan \theta > 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

۴ چهارم

۳ سوم

۲ دوم

۱ اول

۹۵۰ اگر $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha < 0$ و $-\tan^2 \alpha < 0$ باشد، α کدام زاویه زیر می‌تواند باشد؟

۴ 291°

۳ 49°

۲ 183°

۱ 176°

۹۵۱ انتهای کمان x مطابق شکل، دایره مثلثاتی را در نقطه P قطع می‌کند. $\sin x \cos x$ کدام است؟

۱ $0/12$

۲ $0/24$

۳ $0/36$

۴ $0/48$

۹۵۲ در شکل زیر، نقاط P و Q روی دایره مثلثاتی قرار دارند. اگر $\sin \theta = 0/7$ و $\cos \alpha = -0/8$ باشد، $\cos^2 \theta + \sin \alpha$ چند است؟

۱ $0/09$

۲ $1/11$

۳ $-0/09$

۴ $-0/11$

۹۵۳ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار عبارت $A = 2 - 3 \sin x$ به ترتیب m و M باشد، $M - m$ کدام است؟

۴ ۸

۳ ۷

۲ ۵

۱ ۶

۹۵۴ کم‌ترین مقدار عبارت $A = 3 - 2 \cos^2 x$ کدام است؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۹۵۵ اگر $3^\circ \leq x \leq 180^\circ$ و $\sin x = \frac{m-1}{3}$ باشد، مجموع مقادیر صحیح m کدام است؟

۴ ۲۱

۳ ۱۵

۲ ۱۰

۱ ۶

۹۵۶ کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟

۴ $\sin 17^\circ$

۳ $\sin 55^\circ$

۲ $\sin 11^\circ$

۱ $\sin 8^\circ$

۹۵۷ کدام عدد از همه اعداد داده شده کوچک‌تر است؟

۴ $\cos 13^\circ$

۳ $\cos 11^\circ$

۲ $\cos(-2^\circ)$

۱ $\cos 15^\circ$

۹۵۸ کدام گزینه درست است؟

۴ $\cos 40^\circ > \sin 40^\circ$

۳ $\cos 7^\circ = \cos 187^\circ$

۲ $\sin 91^\circ > \sin 89^\circ$

۱ $\sin 44^\circ > \cos 44^\circ$

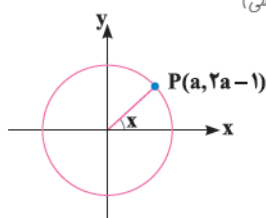
۹۵۹ اگر $A = \sin 3^\circ \cos 3^\circ$ و $B = \tan^2 6^\circ + 1$ باشند، مقدار AB کدام است؟

۴ $\sqrt{3}$

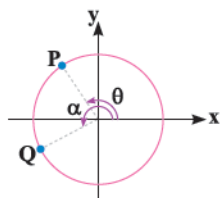
۳ ۳

۲ $\sqrt{2}$

۱ ۲



(برگرفته از کتاب درسی)





فصل چهارم: مثلثات

کاج

۹۶۰ حاصل عبارت $A = \frac{(2\cos^2 3^\circ - 1)(\tan 45^\circ + 1)}{\sin^2 45^\circ}$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۹۶۱ حاصل عبارت $A = \frac{\sin 2^\circ + 3\cos 7^\circ}{2\sin 2^\circ}$ کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۹۶۲ اگر $A = \tan 1^\circ \tan 89^\circ$ و $B = \tan 2^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 88^\circ$ باشند، مقدار عددی $2A + B$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۹۶۳ در مثلث ABC، اگر $\sin(\hat{A} + 3^\circ) - \cos(\hat{B} + 2^\circ) = 0$ باشد، زاویه $\hat{C}$ کدام است؟

- ۱ ۴۰° ۲ ۱۵° ۳ ۱۶۰° ۴ ۱۷۰°

۹۶۴ اگر $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل $\cot \theta + \cos \theta$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۲ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ۳ $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴ $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

۹۶۵ اگر $\tan \alpha = -2$ و انتهای کمان α در ناحیه دوم مثلثاتی باشد، $\sin \alpha + \cos \alpha$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۲ $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ۳ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ۴ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۹۶۶ اگر $\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = -3$ و $\cot x = \frac{5a-3}{4}$ باشد، a کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۳ ۳ ۲ ۴ ۱

۹۶۷ ساده شده عبارت $A = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$ کدام است؟

- ۱ $\sin^2 x$ ۲ $\cos^2 x$ ۳ $1 + \cot^2 x$ ۴ $1 - \cot^2 x$

۹۶۸ ساده شده عبارت $\sin^2 x(1 + \cot^2 x) - \cos^2 x(1 + \tan^2 x)$ کدام است؟

- ۱ $\sin x$ ۲ $\cos x$ ۳ $\sin^2 x$ ۴ $\cos^2 x$

۹۶۹ اگر $\frac{1+\cot^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{2}$ باشد، $\sin^2 x$ کدام است؟

- ۱ ۰/۴ ۲ ۰/۸ ۳ ۰/۳ ۴ ۰/۶

۹۷۰ اگر $\frac{1+\cot^2 x}{\sin x} = 27$ و $\sin x + \cos x < 0$ باشد، انتهای کمان x در ناحیه مثلثاتی و مقدار $\tan x$ برابر با است.

- ۱ اول، $2\sqrt{2}$ ۲ اول، $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۳ دوم، $-2\sqrt{2}$ ۴ دوم، $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(تجربی قارچ ۹۸)

یادداشت:



درس دوم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه



تست‌های مربوط به این درسنامه: ۹۷۱ تا ۹۹۳

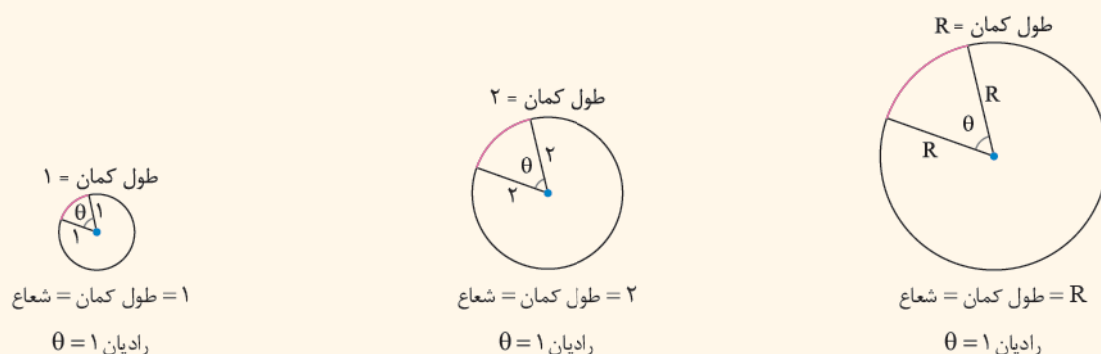
واحدهای اندازه‌گیری زاویه



همان‌طور که مثلاً برای اندازه‌گیری وزن واحدهای مختلفی مثل کیلوگرم، پوند، قیراط، انس و ... داریم، برای اندازه‌گیری زاویه هم واحدهای مختلفی داریم. از کودکی با درجه (Degree) آشنا شده‌اید. الان نوبت شناخت واحد جدیدی برای اندازه‌گیری زاویه هستیم که نامش رادیان (Radian) است.

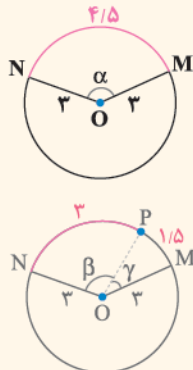
رادیان

هر رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی‌ای که طول کمان روبه‌روی آن برابر شعاع دایره می‌باشد. برای مثال در همه دایره‌های زیر زاویه θ معادل ۱ رادیان است، ببینید:



تذکره: دقت کنید که اگر زاویه θ برحسب درجه باشد به صورت « θ° » و اگر برحسب رادیان باشد یا به صورت « θ » و یا به صورت « $\theta \text{ rad}$ » نمایش داده می‌شود.

مثال آموزشی: در شکل مقابل اندازه زاویه α چند رادیان است؟



پاسخ: نقطه‌ای مانند P را روی کمان MN به صورتی در نظر می‌گیریم که طول کمان NP برابر ۳ باشد، در این صورت زاویه مرکزی روبه‌روی کمان NP یعنی β برابر ۱ رادیان می‌شود و هم‌چنین با توجه به این که طول کمان PM نصف شعاع دایره است (قبوله؟)، پس زاویه γ مساوی $\frac{1}{4}$ رادیان می‌باشد و در نتیجه $\alpha = \beta + \gamma = \frac{3}{4} \text{ rad}$ است.

رابطه بین رادیان و درجه

در حال حاضر به دنبال پیدا کردن فرمولی بین رادیان و درجه هستیم. فرمول می‌گوید که اگر D اندازه زاویه برحسب درجه و R اندازه زاویه برحسب رادیان باشد، تساوی مقابل بین آن‌ها برقرار است:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

کار کردن با این فرمول خیلی آسان است، مثلاً اگر $D = 30^\circ$ باشد، اندازه آن برحسب رادیان برابر است با:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \xrightarrow{D=30^\circ} \frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6}$$

یا مثلاً اگر زاویه‌ای برحسب رادیان $R = \frac{\pi}{4}$ باشد، اندازه آن برحسب درجه برابر است با:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \xrightarrow{R=\frac{\pi}{4}} \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

نکته

برای تبدیل سریع‌تر رادیان و درجه به هم از تکنیک زیر استفاده کنید:

$$\times \frac{180^\circ}{\pi} \text{ : از رادیان به درجه}$$

$$\times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ : از درجه به رادیان}$$



فصل چهارم: مثلثات

کاج

$$15^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}, \quad \frac{2\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$$

برای مثال زاویه 15° معادل $\frac{\pi}{12}$ رادیان و زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان معادل 120° است، ببینید:



هر رادیان تقریباً 57.3° و هر درجه تقریباً 0.017 رادیان است. عزیزانی که هیچ چیزی را بدون دلیل نمی پذیرند (مَشُونَم گِرم)، دلیلش را هم ببینند ($\pi \approx 3.14$):

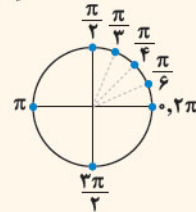
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \xrightarrow{R=1} D = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \xrightarrow{D=1^\circ} \frac{1^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180^\circ} = 0.017 \text{ rad}$$

خلاصه این که قابل نتیجه گیری است که تقریباً ۱ رادیان برابر 57° ، ۲ رادیان برابر 114° ، ۳ رادیان برابر 171° و ... می باشد.

تذکر: حفظ کردن جدول و دایره زیر اَوْجِبِ واجبات است.

زاویه	درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
رادیان		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

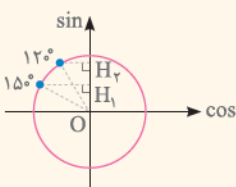


راستی بعضی ها هم هستند که π رادیان را همان 180° می گیرند و از روی آن بقیه زاویه ها را به دست می آورند.

مثال آموزشی: دو زاویه $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ را روی دایره مثلثاتی نمایش دهید و مقادیر سینوس آن ها را با هم مقایسه کنید.

پاسخ: ابتدا هر یک از زاویه های $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ را به درجه تبدیل می کنیم و سپس به کمک دایره مثلثاتی، سینوس های آن ها را با هم مقایسه می کنیم:

$$\frac{2\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ, \quad \frac{5\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$$



همان طور که از روی دایره مثلثاتی مقابل مشاهده می کنید $\sin 120^\circ = OH_1$ و $\sin 150^\circ = OH_2$ است و به وضوح داریم:

$$OH_2 > OH_1 \Rightarrow \sin 120^\circ > \sin 150^\circ$$

مثال آموزشی: جاهای خالی را با علامت های $<$ $=$ $>$ پر کنید.

پ) $\sin 2 \bigcirc \sin 3$

ب) $\sin 2^\circ \bigcirc \sin 1$

الف) $\sin \frac{\pi}{6} \bigcirc \cos \frac{\pi}{4}$

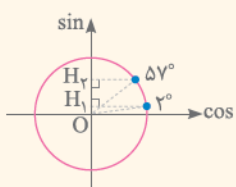
ج) $\sin \frac{5\pi}{6} \bigcirc \sin 31^\circ$

ث) $\cos 178^\circ \bigcirc \cos \frac{7\pi}{6}$

ت) $\cos \frac{2\pi}{3} \bigcirc \cos 140^\circ$

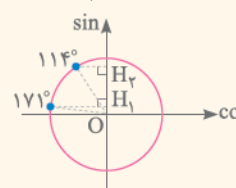
پاسخ: الف) $\frac{\pi}{6}$ همان 30° و $\frac{\pi}{4}$ همان 45° است، پس داریم:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} < \cos \frac{\pi}{4}$$



ب) وقتی علامت درجه نیامده، یعنی زاویه برحسب رادیان است، پس منظور از ۱، همان ۱ رادیان است که تقریباً معادل 57° می باشد و مطابق دایره مثلثاتی مقابل داریم:

$$OH_1 < OH_2 \Rightarrow \sin 2^\circ < \underbrace{\sin 57^\circ}_{\approx \sin 1} \Rightarrow \sin 2^\circ < \sin 1$$

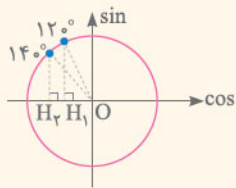


پ) زاویه های ۲ و ۳ برحسب رادیان هستند، پس این دو زاویه به ترتیب برحسب درجه تقریباً معادل 114° و 171° هستند و با توجه به دایره مقابل می توان نوشت:

$$OH_1 < OH_2 \Rightarrow \underbrace{\sin 171^\circ}_{\approx \sin 3} < \underbrace{\sin 114^\circ}_{\approx \sin 2} \Rightarrow \sin 2 > \sin 3$$



ت) ابتدا زاویه $\frac{2\pi}{3}$ را برحسب درجه می نویسیم و سپس به کمک دایره مثلثاتی خواسته مسئله را پیدا می کنیم:

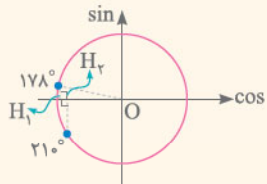


$$\frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 120^\circ$$

$$OH_1 > OH_2 \Rightarrow \cos 12^\circ > \cos 14^\circ \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{3} > \cos 14^\circ$$

توجه کنید که $OH_2 < OH_1$ هر دو منفی هستند و به همین دلیل $OH_2 < OH_1$ است.

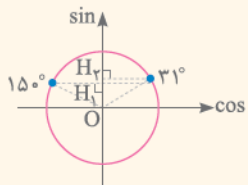
ث) ابتدا زاویه $\frac{7\pi}{6}$ را به درجه تبدیل کرده و سپس خواسته مسئله را به کمک دایره مثلثاتی پیدا می کنیم:



$$\frac{7\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 210^\circ$$

$$OH_1 < OH_2 \Rightarrow \cos 178^\circ < \cos 21^\circ$$

ج) ابتدا زاویه $\frac{5\pi}{6}$ را به درجه تبدیل کرده و سپس خواسته مسئله را پیدا می کنیم:



$$\frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 150^\circ$$

$$OH_1 < OH_2 \Rightarrow \sin 15^\circ < \sin 31^\circ \Rightarrow \sin \frac{5\pi}{6} < \sin 31^\circ$$

تست آموزشی حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{4 \cos \frac{\pi}{6} \times \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{2}}$ کدام است؟

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۲ ۴ ۱

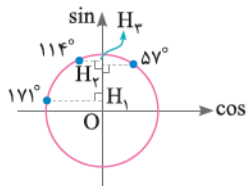
باسخ گزینه ۱ زاویای $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ برحسب درجه به ترتیب معادل $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ و 90° هستند، پس خواسته مسئله برابر است با:

$$A = \frac{2 \sin 30^\circ + \tan 45^\circ}{4 \cos 30^\circ \times \sin 60^\circ - \sin 90^\circ} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) - 1} = \frac{1+1}{3-1} = 1$$

تست آموزشی کدام گزینه درست است؟

۱ $\sin 1 > \sin 2 > \sin 3$ ۲ $\sin 2 > \sin 1 > \sin 3$ ۳ $\sin 3 > \sin 2 > \sin 1$ ۴ $\sin 1 > \sin 3 > \sin 2$

باسخ گزینه ۲ زاویه های داده شده در گزینه ها برحسب رادیان و به ترتیب از کوچک به بزرگ معادل $57^\circ, 114^\circ$ و 171° هستند. حالا برای مقایسه سینوس این زوایا از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم، ببینید:



$$OH_1 < OH_2 < OH_3 \Rightarrow \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$$

توجه کنید که اگر زاویه های داده شده برحسب درجه باشند، رابطه بین آن ها به صورت $\sin 3^\circ > \sin 2^\circ > \sin 1^\circ$ است.

تست های مربوط به این درسنامه: ۹۹۳ تا ۱۰۱۶

طول کمان دایره



مطابق شکل، بر روی دایره ای به شعاع r ، اگر زاویه θ کمانی به طول ℓ ایجاد کند، رابطه زیر برقرار است:

$$\ell = r\theta$$

لطفاً به این موضوع توجه کنید که در این رابطه، θ حتماً باید برحسب رادیان باشد.

مثال آموزشی اگر در یک دایره، کمان روبه رو به زاویه 15° برابر 3° سانتی متر باشد، شعاع دایره چند سانتی متر است؟

باسخ ابتدا زاویه داده شده را برحسب رادیان می نویسیم و سپس سراغ فرمول $\ell = r\theta$ می رویم، پس می توان نوشت:

$$\theta = 15^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ رادیان} \quad \ell = r\theta \Rightarrow \frac{\ell=3}{\theta=\frac{5\pi}{6}} = r \times \frac{5\pi}{6} \Rightarrow r = \frac{36}{\pi} \text{ cm}$$



فصل چهارم: مثلثات

کاج

تست آموزشی ماهواره‌ای در ارتفاع ۴۰۰ کیلومتری از سطح زمین قرار دارد. اگر در مدار خود ۶۰° جابه‌جا شود، تقریباً چه مسافتی (برحسب کیلومتر) را روی مدارش طی خواهد کرد؟ (شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر است.)

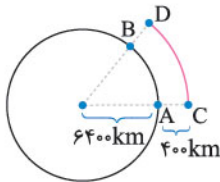
۷۲۱۰ ۴

۷۱۲۰ ۳

۶۷۰۰ ۲

۷۶۰۰ ۱

پاسخ‌گزینۀ ۳ برای درک بهتر مسئله، شکل مقابل را در نظر بگیرید:



$$\ell = \widehat{CD}, r = 6400 + 400 = 6800 \text{ km}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

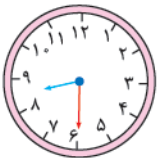
$$\ell = r\theta \Rightarrow \ell = 6800 \times \frac{\pi}{3} = 6800 \times \left(\frac{3.14}{3}\right) = 7120 \text{ km}$$

نکته

به یاد قدیم‌ت‌ها این نکته را هم بگوییم که اگر در یک ساعت بخواهیم زاویه بین عقربه دقیقه‌شمار (m) و عقربه ساعت‌شمار (h) را پیدا کنیم، می‌توانیم سراغ فرمول مقابل برویم:

$$\theta = \left| \frac{11}{2}m - 30h \right|$$

برای مثال در ساعت ۸:۳۰ زاویه بین دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار برابر است با:



$$\theta = \left| \frac{11}{2} \times 30 - 30 \times 8 \right| = |165 - 240| = |-75| \Rightarrow \theta = 75^\circ$$

تست آموزشی در یک ساعت مچی، زاویه بین عقربه‌های ۲ و ۴ چقدر با زاویه عقربه‌های ساعت در زمان ۷:۴۵ اختلاف دارد؟

$\frac{5\pi}{24}$ ۴

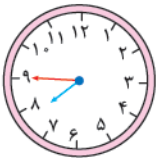
$\frac{\pi}{8}$ ۳

$\frac{\pi}{24}$ ۲

$\frac{3\pi}{8}$ ۱

پاسخ‌گزینۀ ۴ دور تا دور دایره ۳۶۰° یا معادل ۲π رادیان است. از طرفی چون عقربه‌های موجود در دایره ۱۲ تا است، پس فاصله بین دو عدد متوالی برابر با $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان است و در نتیجه زاویه بین دو عدد ۲ و ۴ مساوی $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$ رادیان می‌باشد. حالا برای محاسبه زاویه بین عقربه‌های ساعت در زمان ۷:۴۵ دو روش ارائه می‌کنیم:

روش اول: اول از همه به این موضوع توجه کنید که وقتی عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل یعنی ۲π رادیان طی می‌کند، عقربه ساعت‌شمار $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان را طی می‌کند. (فهمیری اینو؟)



از طرفی هنگامی که از ساعت ۷ به ۷:۴۵ می‌رسیم، عقربه دقیقه‌شمار $\frac{3}{4}$ دایره را طی می‌کند، پس عقربه ساعت‌شمار هم باید $\frac{3}{4} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{8}$ رادیان را طی کند. در واقع باید عدد $\frac{\pi}{8}$ رادیان را از فاصله بین دو عدد ۷ و ۹ از دایره که برابر $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$ رادیان است کم کنیم تا فاصله بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت ۷:۴۵ به دست آید، پس داریم:

$$7:45 \text{ زاویه بین عقربه‌های ساعت در زمان } 7:45 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8} = \frac{8\pi - 3\pi}{24} = \frac{5\pi}{24}$$

روش دوم: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار به کمک فرمول $\theta = \left| \frac{11}{2}m - 30h \right|$ به دست می‌آید، داریم:

$$m = 45, h = 7 \Rightarrow \theta = \left| \frac{11}{2} \times 45 - 30 \times 7 \right| = |247.5 - 210| = 37.5^\circ$$

حالا اندازه زاویه $\theta = 37.5^\circ$ را برحسب رادیان پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$\text{زاویه برحسب رادیان} = 37.5^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{24}$$



تست‌های درس دوم

 $\pi \approx \frac{22}{7}$

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۹۷۱ حاصل عبارت $\cot \frac{\pi}{6} + 2 \tan \frac{\pi}{4} \times \sin \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ۲ $2\sqrt{3}$ ۳ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ۴ $\sqrt{3}$

۹۷۲ اگر $A = \frac{\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \pi}{2 \sin \pi + \cos 2\pi}$ و $B = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} (\tan \frac{\pi}{4} + 1)^2$ باشند، $B - A$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۷۳ حاصل عبارت $\frac{\tan^2(\frac{\pi}{3}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{6}) - \cos^2(\frac{\pi}{6})} + \sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ$ کدام است؟

- ۱ ۱۳ ۲ ۱۴ ۳ ۱۵ ۴ ۱۶

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۷۴ اگر $\sin x = -\frac{1}{3}$ و $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، $\tan x$ کدام است؟

- ۱ $2\sqrt{2}$ ۲ $-2\sqrt{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۷۵ اگر $\cot \alpha = -2$ و $2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ باشد، $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

- ۱ -0.2 ۲ 0.2 ۳ -0.4 ۴ -0.6

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۷۶ کدام گزینه نادرست است؟

- ۱ زاویه 36° برابر با $-\frac{\pi}{5}$ رادیان است.
۲ زاویه 12° برابر با $\frac{2\pi}{3}$ رادیان است.
۳ زاویه $\frac{\pi}{36}$ رادیان برابر با 5° است.
۴ زاویه $\frac{5\pi}{4}$ رادیان برابر با 235° است.

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۷۷ انتهای زاویه $2-$ رادیان در ناحیه مثلثاتی است و تانژانت آن عددی است.

- ۱ دوم - منفی ۲ دوم - مثبت ۳ سوم - منفی ۴ سوم - مثبت

۹۷۸ زوایای $\frac{6\pi}{5}$ رادیان و $7-$ رادیان به ترتیب در کدام نواحی مثلثاتی قرار می‌گیرند؟

- ۱ سوم - اول ۲ سوم - چهارم ۳ دوم - اول ۴ دوم - چهارم

(آزمون‌های گاج)

۹۷۹ اگر $\alpha = 5\text{rad}$ باشد، مقدار $[\sin \alpha]$ چقدر است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ -۱ ۴ $\frac{1}{2}$

۹۸۰ زاویه 12° برحسب رادیان کدام است؟

- ۱ $\frac{4\pi}{3}$ ۲ $\frac{2\pi}{3}$ ۳ $\frac{5\pi}{3}$ ۴ $\frac{7\pi}{3}$

۹۸۱ متمم زاویه 55° را α و مکمل زاویه 205° را β می‌نامیم. $\alpha + \beta$ برحسب رادیان کدام است؟

- ۱ $\frac{\pi}{5}$ ۲ $\frac{2\pi}{5}$ ۳ $\frac{2\pi}{3}$ ۴ $\frac{4\pi}{3}$

۹۸۲ در یک مثلث قائم‌الزاویه، یکی از زوایای حاده ۵ برابر دیگری است. اندازه زاویه بزرگ‌تر برحسب رادیان کدام است؟

- ۱ $\frac{3\pi}{8}$ ۲ $\frac{5\pi}{12}$ ۳ $\frac{\pi}{8}$ ۴ $\frac{\pi}{12}$



فصل چهارم: مثلثات

کاج

۹۸۳ زوایای داخلی یک مثلث تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. اگر بزرگ‌ترین زاویه مثلث به اندازه 40° بزرگ‌تر از کوچک‌ترین زاویه آن باشد، اندازه

کوچک‌ترین زاویه مثلث برحسب رادیان کدام است؟

- ۱ $\frac{\pi}{9}$ ۲ $\frac{2\pi}{9}$ ۳ $\frac{\pi}{3}$ ۴ $\frac{4\pi}{9}$

۹۸۴ نقطه $A(-1, 0)$ را روی دایره مثلثاتی به اندازه $\frac{4\pi}{3}$ در جهت مثبت دایره مثلثاتی دوران می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. فاصله دو نقطه A و A'

(برگرفته از کتاب درسی)

کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ $\sqrt{3}$ ۳ $2\sqrt{3}$ ۴ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۹۸۵ انتهای کمان روبه‌رو به زوایای $\pm \frac{\pi}{3}$ و $\pm \frac{2\pi}{3}$ رادیان را روی دایره مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. مساحت چهارضلعی حاصل کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ $\sqrt{2}$ ۳ $\sqrt{3}$ ۴ ۲

۹۸۶ اگر $a = \sin 1$ ، $b = \cos 1$ و $c = \sin 2$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- ۱ $a < b < c$ ۲ $c < b < a$ ۳ $c < a < b$ ۴ $b < a < c$

۹۸۷ کدام مقایسه نادرست است؟

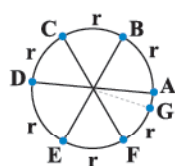
- ۱ $\cos 1 < \cos 6$ ۲ $\sin 4 > \cos 4$ ۳ $\sin 1 > \cos 1$ ۴ $\cos 6 > \sin 6$

۹۸۸ مطابق شکل مقابل، شش زاویه برابر با هم در دایره مشخص شده است. به طوری که کمان مقابل به هر زاویه برابر با

(برگرفته از کتاب درسی)

شعاع دایره است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان AG تقریباً چند درجه است؟

- ۱ 16° ۲ 18° ۳ 20° ۴ 22°



۹۸۹ اگر $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ و $\sin x = \frac{1-m}{4}$ باشد، حدود m کدام است؟

- ۱ $0 \leq m \leq 2$ ۲ $-1 \leq m \leq 2$ ۳ $1 \leq m \leq 2$ ۴ $0 \leq m \leq 1$

۹۹۰ اگر $|x| < \frac{\pi}{12}$ باشد، برد تابع $f(x) = 2\cos 4x + 1$ کدام است؟

- ۱ $[2, 3]$ ۲ $[2, 3]$ ۳ $(2, 3)$ ۴ $(2, 3)$

(تقریبی قارچ ۱۳۰)

۹۹۱ اگر $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ و $\sin 2x = \frac{m-1}{4}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

- ۱ $(-1, 5)$ ۲ $(-1, 5]$ ۳ $(-1, 1)$ ۴ $(-1, 1]$

(تقریبی دافل ۱۳۰)

۹۹۲ اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-m}{2+m}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

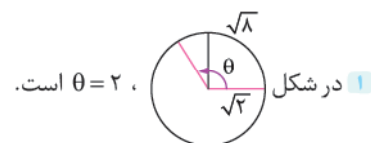
- ۱ $(-2, 1)$ ۲ $(-2, 1]$ ۳ $(-1, 2]$ ۴ $(-1, 2)$

۹۹۳ اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد، کدام یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

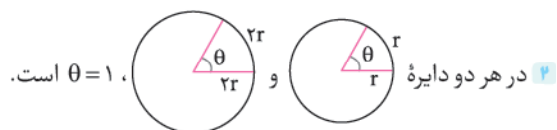
- ۱ $\cos \alpha > \sin \alpha$ ۲ $\cot \alpha > \tan \alpha$ ۳ $\tan \alpha > \sin \alpha$ ۴ $\cot \alpha < \cos \alpha$

طول کمان دایره

۹۹۴ کدام گزینه نادرست است؟



۱ در شکل $\theta = 2$ است.



۲ در هر دو دایره $\theta = 1$ است.



۴ در دایره $\theta = 2$ است. شعاع دایره $r = 0.5$ است.



۳ در دایره A اندازه کمان $AB = 1/5$ است.



۹۹۵ در کدام گزینه مجهول مسئله به درستی محاسبه نشده است؟

۱ $\ell = ۰/۱ \text{ متر} \Rightarrow \theta = ۲ \text{ رادیان}$	۲ $\ell = ۵ \text{ سانتی متر} \Rightarrow \theta = ۱ \text{ رادیان}$
۳ $\ell = ۲ \text{ متر} \Rightarrow \theta = ۲ \text{ رادیان}$	۴ $\ell = ۲۰۰ \text{ سانتی متر} \Rightarrow \theta = ۴ \text{ رادیان}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۹۶ چه تعداد از عبارات زیر درست است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- (الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک تر از اندازه هر یک از ساق های آن است.
- (ب) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر، طول کمان روبه روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با $۳/۱۴$ سانتی متر است.
- (پ) انتهای کمان زاویه $(-\frac{7\pi}{8})$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.
- (ت) اگر دو زاویه از مثلثی $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{9}$ رادیان باشند، زاویه سوم این مثلث $\frac{2\pi}{9}$ رادیان است.

۹۹۷ در یک دایره، توسط اضلاع مرکزی θ ، کمانی به طول ۲ برابر شعاع دایره ایجاد شده است. زاویه θ تقریباً چند درجه است؟

۱ $\frac{1}{2}$	۲ $\frac{2}{3}$	۳ $\frac{57}{114}$	۴ $\frac{114}{57}$
-----------------	-----------------	--------------------	--------------------

۹۹۸ در یک دایره اندازه کمان مرکزی مقابل به زاویه $\theta = ۲^\circ$ برابر با ۲ سانتی متر است. محیط این دایره کدام است؟

۱ ۱۸	۲ ۲۴	۳ ۳۲	۴ ۳۶
------	------	------	------

۹۹۹ در شکل مقابل اگر طول کمان $\widehat{ABC}$ برابر با ۳۶π باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱ ۱۶	۲ ۱۸	۳ ۲۰	۴ ۲۴
------	------	------	------

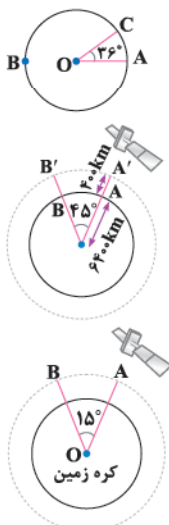
۱۰۰۰ ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه A تا نقطه B که با مرکز زمین زاویه ۴۵° می سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می دهد؟

(برگرفته از کتاب درسی)

۱ ۵۳۳۸km	۲ ۶۸۰۰km
۳ ۴۳۳۵km	۴ ۵۳۴۵km

۱۰۰۱ مطابق شکل ماهواره ای در حال گردش روی مسیر دایره ای است. اگر این ماهواره از نقطه A تا نقطه B مسیر ۲۰۰۰π کیلومتری را طی کند، فاصله اش تا سطح زمین چند کیلومتر است؟ (شعاع تقریبی کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)

۱ ۲۴۰۰۰	۲ ۱۸۴۰۰
۳ ۱۷۶۰۰	۴ ۱۷۴۰۰



(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۰۲ با گذشت ۹۰ دقیقه نوک عقربه ساعت شمار با طول $\frac{20}{\pi}$ سانتی متر، چه مسافتی را بر حسب سانتی متر طی می کند؟

۱ ۳	۲ ۴	۳ ۵	۴ ۸
-----	-----	-----	-----

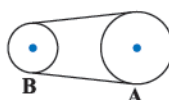
۱۰۰۳ اتومبیلی با سرعت ثابت، دور یک میدان دایره ای به شعاع ۵۰۰ متر به اندازه ۲۷° چرخش می کند. اگر این کار را در مدت زمان ۲۵ ثانیه انجام دهد، تندی اتومبیل چند متر بر ثانیه است؟

۱ ۱۰π	۲ ۱۰	۳ ۳۰π	۴ ۳۰
-----------	------	-----------	------

۱۰۰۴ در یک تراکتور اگر چرخ کوچک با شعاع ۲۵ سانتی متر ۴ دور کامل بچرخد، چرخ بزرگ ۱۸° دوران می کند. شعاع چرخ بزرگ چند متر است؟

۱ $۱/۵$	۲ $۵/۵$	۳ ۱	۴ ۲
---------	---------	-----	-----

۱۰۰۵ در شکل زیر، دو قرقره توسط یک تسمه به هم متصل هستند. اگر شعاع قرقره A سه برابر شعاع قرقره B باشد، به ازای چرخش ۳° قرقره B، میزان چرخش قرقره A کدام است؟

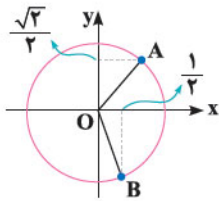


۱ $\frac{\pi}{۱۸}$	۲ $\frac{\pi}{۹}$
۳ $\frac{\pi}{۶}$	۴ $\frac{\pi}{۲}$



فصل چهارم: مثلثات

کاج



۱۰۰۶ در دایره مثلثاتی مقابل، محیط قطاع OAB از دایره کدام است؟

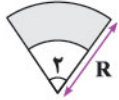
۲ + $\frac{7\pi}{12}$ ۲

۲ + $\frac{5\pi}{12}$ ۱

۴ + $\frac{\pi}{12}$ ۴

۲ + $\frac{\pi}{12}$ ۳

۱۰۰۷ در یک برف پاک‌کن با طول R، بخشی از طول برف پاک‌کن شامل تیغه است و محیط ناحیه‌ای که این برف پاک‌کن با دوران ۲ رادیان تمیز می‌کند ۸



می‌باشد. طول برف پاک‌کن کدام است؟

۲ ۲

۱ ۱

۶ ۴

۴ ۳



۱۰۰۸ در شکل مقابل، مساحت و محیط ناحیه رنگی اندازه یکسان دارند. حاصل $[\cos 2\theta]$ کدام است؟

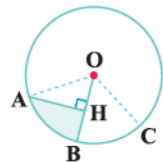
صفر ۲

۱ ۱

-۲ ۴

-۱ ۳

۱۰۰۹ مطابق شکل مقابل در دایره‌ای به محیط 2π ، AH عمود منصف OB است. محیط قسمت هاشور خورده



چقدر از محیط مثلث OAH بزرگ‌تر است؟

(تقریبی خارج ۱۳۰۲)

$\frac{2\pi-3}{6}$ ۲

$\frac{2\pi-1}{3}$ ۱

$\frac{\pi-3}{3}$ ۴

$\frac{\pi-1}{6}$ ۳

۱۰۱۰ چرخ‌وفلکی دارای تعدادی کابین است که در فاصله‌های مساوی از هم قرار دارند. اگر زاویه بین کابین‌های شماره ۲ و ۶ برابر با $\frac{4\pi}{9}$ باشد، تعداد

کابین‌ها کدام است؟

۱۸ ۴

۱۲ ۳

۹ ۲

۶ ۱

۱۰۱۱ چرخ‌وفلکی دارای ۴۰ کابین است که در فاصله‌های مساوی از هم قرار دارند. اگر در آغاز حرکت درون کابین شماره ۴ قرار داشته باشیم، پس از $\frac{9\pi}{4}$

دوران در موقعیت کدام کابین قرار می‌گیریم؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها و همچنین جهت حرکت چرخ‌وفلک هم جهت با دایره مثلثاتی است.)

۱۲ ۴

۱۰ ۳

۹ ۲

۸ ۱

۱۰۱۲ چرخ‌وفلکی دارای ۱۸ کابین است. اگر شعاع این چرخ‌وفلک برابر با $\frac{45}{\pi}$ متر باشد، کابین شماره ۱ پس از طی کردن چه مسافتی در موقعیت کابین

شماره ۵ قرار می‌گیرد؟

۳۲ ۴

۲۵ ۳

۲۰ ۲

۱۵ ۱

۱۰۱۳ در یک ساعت عقربه‌ای وقتی عقربه ساعت‌شمار به اندازه $\frac{7\pi}{15}$ دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

۱۷۸ ۴

۱۶۸ ۳

۱۵۸ ۲

۱۴۸ ۱

۱۰۱۴ اندازه زاویه‌ای که عقربه ساعت‌شمار در یک زمان مشخص طی می‌کند $\frac{3\pi}{8}$ رادیان است. اندازه زاویه‌ای که عقربه دقیقه‌شمار در این مدت طی

می‌کند برحسب رادیان کدام است؟

$\frac{5\pi}{2}$ ۴

$\frac{7\pi}{2}$ ۳

$\frac{\pi}{32}$ ۲

$\frac{9\pi}{2}$ ۱

۱۰۱۵ تقریباً چند دقیقه طول می‌کشد تا عقربه ساعت‌شمار به اندازه $\frac{1}{57}$ رادیان دوران کند؟ ($\pi \approx 3.14$)

۲۱۰ ۴

۱۸۰ ۳

۱۶۰ ۲

۱۵۰ ۱

۱۰۱۶ در ساعت ۸:۱۰ زاویه بین عقربه‌های دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار کدام است؟

۱۹۵° ۴

۱۸۵° ۳

۱۷۵° ۲

۱۶۵° ۱



فصل چهارم: مثلثات



می دانیم اگر یک زاویه در ربع دوم دایره مثلثاتی باشد بین 90° تا 180° است، پس داریم:

۳ / ۹۴۸

$$90^\circ < 5\alpha + 3^\circ < 180^\circ \xrightarrow{-3^\circ} 6^\circ < 5\alpha < 177^\circ \xrightarrow{+5} 12^\circ < \alpha < 35^\circ$$

باتوجه به این که $\sin \theta < 0$ است، انتهای کمان θ در ناحیه سوم یا چهارم مثلثاتی قرار دارد، از طرفی طبق فرض مسئله $\tan \theta > 0$ می باشد، پس انتهای کمان θ در ربع اول یا سوم مثلثاتی است. از اشتراک ناحیه های به دست آمده می توان نتیجه گرفت انتهای کمان θ در ربع سوم دایره مثلثاتی است.

۳ / ۹۴۹

می دانیم $\sin^2 \alpha \geq 0$ است، پس برای برقراری نامساوی $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha < 0$ باید $\cos \alpha < 0$ باشد و این یعنی α زاویه ای در ناحیه دوم یا سوم است. از طرفی وقتی $-\tan^3 \alpha < 0$ ، پس $\tan^3 \alpha > 0$ و در نتیجه $\tan \alpha > 0$ می باشد، یعنی α زاویه ای در ناحیه اول یا سوم است. در آخر برای برقراری هر دو شرط داده شده، α باید زاویه ای در ناحیه سوم باشد، پس α می تواند 183° باشد.

۲ / ۹۵۰

باتوجه به این که نقطه P روی دایره مثلثاتی و محل برخورد انتهای کمان x با دایره مثلثاتی است، پس $\cos x = a$ و $\sin x = 2a - 1$ است. حالا با استفاده از رابطه $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ مقدار a را به دست می آوریم:

۴ / ۹۵۱

$$a^2 + (2a-1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 4a^2 - 4a + 1 = 1 \Rightarrow 5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(5a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (X)} \\ a = \frac{4}{5} \text{ (✓)} \end{cases}$$

در نتیجه $\cos x = a = \frac{4}{5}$ و $\sin x = 2a - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$ می باشد و در نهایت خواسته مسئله برابر است با:

$$\sin x \cos x = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25} = 0.48$$

با کمک گرفتن از تساوی $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ و $\sin \alpha$ و $\cos^2 \theta$ را به دست می آوریم، ببینید:

۳ / ۹۵۲

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow (0.7)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 0.51$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + (-0.8)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 0.36 \Rightarrow \sin \alpha = \pm 0.6 \xrightarrow[\sin \alpha < 0]{\alpha \text{ در ناحیه سوم}} \sin \alpha = -0.6$$

در نهایت، خواسته مسئله برابر $-0.9 = -0.51 + (-0.6) = -0.9$ است.

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\times (-2)} 3 \geq -3 \sin x \geq -3 \xrightarrow{+2} -1 \leq 2 - 3 \sin x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq A \leq 5$$

می دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ است، پس داریم:

در نتیجه $M - m = 5 - (-1) = 6$ و $M = 5$ ، $m = -1$ می باشد.

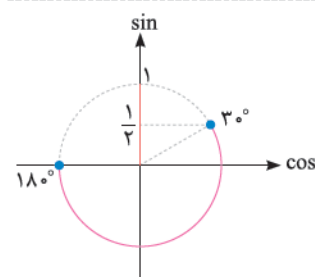
۱ / ۹۵۳

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ است، پس $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ است و می توان نوشت:

۱ / ۹۵۴

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2 \cos^2 x \leq 2 \xrightarrow{\times (-1)} -2 \leq -2 \cos^2 x \leq 0 \xrightarrow{+3} 1 \leq 3 - 2 \cos^2 x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq A \leq 3$$

پس کم ترین مقدار A برابر ۱ است.

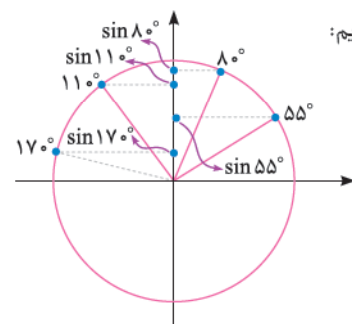


ابتدا با توجه به محدوده داده شده برای x، حدود $\sin x$ را به دست می آوریم، همان طور که مشاهده می کنید محدوده $\sin x$ به صورت $[0, 1]$ است و در نتیجه می توان نوشت:

۲ / ۹۵۵

$$0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{m-1}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq m-1 \leq 3 \xrightarrow{+1} 1 \leq m \leq 4$$

پس مقادیر صحیح m به صورت $\{1, 2, 3, 4\}$ هستند که مجموع آن ها برابر ۱۰ می باشد.



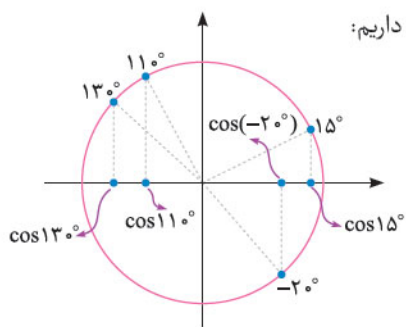
همه زوایا را بر روی دایره مثلثاتی نمایش داده و مقدار سینوس آن ها را با هم مقایسه می کنیم، پس داریم:

۱ / ۹۵۶

همان طور که مشاهده می کنید $\sin 8^\circ > \sin 11^\circ > \sin 55^\circ > \sin 17^\circ$ است.

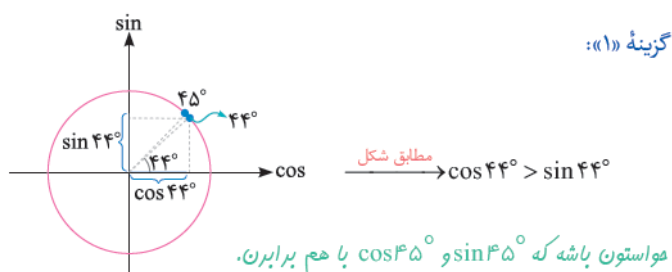


همه زوایا را بر روی دایره مثلثاتی نمایش داده و مقدار کسینوس آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم، داریم:
همان‌طور که مشاهده می‌کنید $\cos 15^\circ < \cos(-2^\circ) < \cos 11^\circ < \cos 13^\circ$ است.

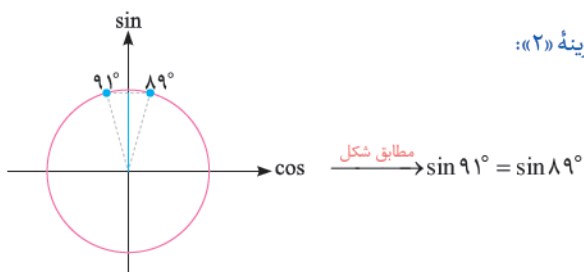


به کمک دایره مثلثاتی، تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

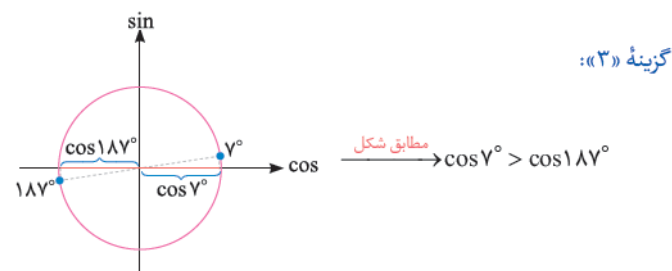
گزینه «۱»:



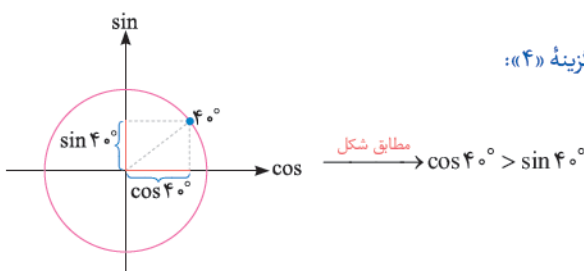
گزینه «۲»:



گزینه «۳»:



گزینه «۴»:



می‌دانیم $\sin 3^\circ = \frac{1}{4}$ ، $\cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ و $\tan 6^\circ = \sqrt{3}$ است، پس داریم:

$$A = \sin 3^\circ \cos 3^\circ = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}, \quad B = \tan^2 6^\circ + 1 = (\sqrt{3})^2 + 1 = 3 + 1 = 4$$

در نتیجه $AB = \left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)(4) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ می‌باشد.

می‌دانیم $\cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ، $\tan 45^\circ = 1$ و $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است، پس برای محاسبه مقدار عددی A می‌توان نوشت:

$$A = \frac{(2(\frac{\sqrt{3}}{4})^2 - 1)(1+1)}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{(2(\frac{3}{16}) - 1)(2)}{\frac{1}{2}} = \frac{(\frac{3}{8} - 1)(2)}{\frac{1}{2}} = \frac{(-\frac{5}{8})(2)}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$$

دو زاویه 2° و 7° متمم یکدیگرند، پس سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است، یعنی $\cos 7^\circ = \sin 2^\circ$ می‌باشد، پس داریم:

$$A = \frac{\sin 2^\circ + 3 \cos 7^\circ}{2 \sin 2^\circ} = \frac{\sin 2^\circ + 3 \sin 2^\circ}{2 \sin 2^\circ} = \frac{4 \sin 2^\circ}{2 \sin 2^\circ} = \frac{4}{2} = 2$$



۹۶۲ ۳ زوایای 1° و 89° و زوایای 2° و 88° متمم یکدیگر هستند، می‌دانیم اگر دو زاویه، متمم یکدیگر باشند، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است، پس در نهایت برای محاسبه مقادیر A و B با توجه به این که تانژانت و کتانژانت زوایای گفته شده معکوس هم‌دیگرند، می‌توان نوشت:

$$A = \tan 1^\circ \tan 89^\circ = \tan 1^\circ \cot 1^\circ = \tan 1^\circ \left(\frac{1}{\tan 1^\circ} \right) = 1$$

$$B = \tan 2^\circ \tan 88^\circ = \tan 2^\circ \cot 2^\circ = \tan 2^\circ \left(\frac{1}{\tan 2^\circ} \right) = 1$$

در نتیجه $2A + B = 2 + 1 = 3$ است.

۹۶۳ ۱ طبق فرض مسئله $\sin(\hat{A} + 3^\circ) - \cos(\hat{B} + 2^\circ) = 0$ و در نتیجه $\sin(\hat{A} + 3^\circ) = \cos(\hat{B} + 2^\circ)$ است. از طرفی می‌دانیم برای دو زاویه α و β اگر $\sin \alpha = \cos \beta$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت دو زاویه α و β متمم یکدیگر هستند، یعنی مجموع این دو زاویه 90° است، پس داریم:

$$\hat{A} + 3^\circ + \hat{B} + 2^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + 5^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 85^\circ$$

و چون مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است، $\hat{C} = 95^\circ$ می‌باشد.

۹۶۴ ۲ روش اول: ابتدا با استفاده از رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ مقدار $\cos \theta$ را تعیین می‌کنیم، داریم:

$$\frac{1}{9} + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{8}{9} \xrightarrow{\theta \text{ در ناحیه سوم}} \cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

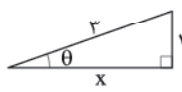
$$\cot \theta = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

حالا مقدار $\cot \theta$ را با استفاده از رابطه $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ به دست می‌آوریم، ببینید:

$$\cot \theta + \cos \theta = 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

و در نهایت خواسته مسئله برابر است با:

روش دوم: طبق فرض مسئله $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ و θ در ناحیه سوم مثلثاتی است، پس داریم:



$$1^2 + x^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

$$\cot \theta + \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{1} + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} = 2\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

۹۶۵ ۴ روش اول: ابتدا با استفاده از رابطه $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ و با توجه به این که α در ربع دوم مثلثاتی است، مقدار $\cos \alpha$ را به دست می‌آوریم:

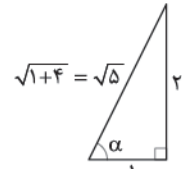
$$1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

حالا با استفاده از رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ مقدار $\sin \alpha$ را به دست می‌آوریم، می‌توان نوشت:

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \xrightarrow{\sin \alpha > 0} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:



$$|\sin \alpha| = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{\sin \alpha > 0} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

روش دوم: با توجه به این که $\tan \alpha = -2$ است، می‌توان نوشت:

والی آخر ...

۹۶۶ ۴ ابتدا با توجه به تساوی $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = -3$ ، مقدار $\tan x$ را به دست می‌آوریم، داریم:

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = -3 \Rightarrow 1 + \tan x = -3 + 3 \tan x \Rightarrow 2 \tan x = 4 \Rightarrow \tan x = 2$$

$$\frac{5a - 3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 10a - 6 = 4 \Rightarrow 10a = 10 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی می‌دانیم $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}$ می‌باشد، پس برای محاسبه مقدار a می‌توان نوشت:

$$A = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sin^2 x} \xrightarrow{1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}} A = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

روش اول: می‌دانیم $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس داریم:



$$\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = \frac{1}{\tan^2 x} + 1 = \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{\frac{1}{\tan^2 x} = \cot^2 x}{\tan^2 x} = \cot^2 x + 1$$

$$A = \frac{1 + (1)^2}{(1)^2} = 2$$

روش دوم: ابتدا عبارت داده شده را تفکیک می‌کنیم، پس داریم:

روش سوم: با جای‌گذاری $x = 45^\circ$ در $A = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x}$ داریم:

حالا گزینه‌ای درست است که مقدار آن به ازای $x = 45^\circ$ برابر با ۲ شود:

گزینه «۱»: $\sin^2(45^\circ) = \frac{1}{2} \neq 2$ ✗

گزینه «۲»: $\cos^2(45^\circ) = \frac{1}{2} \neq 2$ ✗

گزینه «۳»: $1 + \cot^2(45^\circ) = 1 + (1)^2 = 2$ ✓

گزینه «۴»: $1 - \cot^2(45^\circ) = 1 - (1)^2 = 0 \neq 2$ ✗

روش اول: با استفاده از روابط $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ می‌توان نوشت:

$$\sin^2 x (1 + \cot^2 x) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x) = \sin^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right) - \cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

روش دوم: حاصل عبارت داده شده را به ازای $x = 30^\circ$ به دست می‌آوریم:

$$x = 30^\circ: \sin^2 30^\circ (1 + \cot^2 30^\circ) - \cos^2 30^\circ (1 + \tan^2 30^\circ) = \frac{1}{4} (1 + 3) - \frac{9}{16} (1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{4} (4) - \frac{9}{16} (\frac{4}{3}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

پس گزینه‌ای درست است که به ازای $x = 30^\circ$ برابر $\frac{1}{4}$ شود که این اتفاق فقط در گزینه «۳» رخ می‌دهد.

$$x = 30^\circ: \sin^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

می‌دانیم $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ و $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ است، پس داریم:

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{\cot^2 x} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \cot^2 x = \frac{1}{4}$$

برای محاسبه $\sin^2 x$ می‌توان نوشت:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{5} = 0.8$$

گفتیم که $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1 + \cot^2 x}{\sin x} = 27 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\sin x} = 27 \Rightarrow \frac{1}{\sin^3 x} = 27 \Rightarrow \sin^3 x = \frac{1}{27} \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} \sin x = \frac{1}{3}$$

از طرفی چون $\sin x + \cos x < 0$ است و $\sin x = \frac{1}{3}$ می‌باشد، پس حتماً $\cos x < 0$ است و در نتیجه انتهای کمان x در ناحیه دوم دایره مثلثاتی قرار دارد. حالا برای محاسبه $\tan x$ می‌توان نوشت:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\frac{1}{9}} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = 9 \Rightarrow \cot^2 x = 8 \xrightarrow{\text{در ربع دوم است}} \cot x = -2\sqrt{2} \xrightarrow{\tan x = \frac{1}{\cot x}} \tan x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

با توجه به این‌که همه نسبت‌های مثلثاتی را برای زوایای $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ می‌دانیم برای محاسبه خواسته مسئله می‌توان نوشت:

$$\cot \frac{\pi}{6} + 2 \tan \frac{\pi}{6} \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} + 2(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

هر یک از مقادیر A و B را با توجه به این‌که نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده شده را می‌دانیم، به دست می‌آوریم، پس داریم:

$$A = \frac{\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \pi}{2 \sin \pi + \cos 2\pi} = \frac{(-1) + (-1)}{2(0) + 1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$B = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \left(\tan \frac{\pi}{6} + 1\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1 + 1)^2 = \frac{3}{4} - 4 = -\frac{13}{4}$$

در آخر $B - A = 3 - (-2) = 5$ است.



۹۷۳ ۳ ابتدا باید دقت داشته باشید برای هر زاویه دلخواه مانند x ، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ است، پس $\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = 1$ می شود. حالا با توجه به این که نسبت های مثلثاتی سایر زوایا را می دانیم برای محاسبه خواسته مسئله می توان نوشت:

$$\frac{\tan^2(\frac{\pi}{3}) + \sin^2(\frac{\pi}{6})}{\cot^2(\frac{\pi}{6}) - \cos^2(\frac{\pi}{6})} + \sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2})^2}{(1)^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + 1 = \frac{3 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}} + 1 = \frac{\frac{13}{4}}{\frac{1}{4}} + 1 = 13 + 1 = 14$$

۹۷۴ ۳ **روش اول:** ابتدا باید دقت کنید با توجه به این که طبق فرض مسئله $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ است، انتهای این زاویه در ربع سوم قرار دارد. حالا با استفاده از رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و با معلوم بودن مقدار $\sin x$ ، مقدار $\cos x$ را به دست می آوریم، داریم:

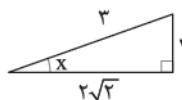
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (-\frac{1}{3})^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9} \xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در آخر برای به دست آوردن مقدار $\tan x$ می توان نوشت:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

گویا کردن

روش دوم: با معلوم بودن $\sin x = -\frac{1}{3}$ ، یک مثلث به صورت زیر در نظر می گیریم، چون x در ناحیه سوم است برای به دست آوردن مقدار $\tan x$ می توان نوشت:



$$\xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \tan x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\tan x > 0$

۹۷۵ ۳ ابتدا با معلوم بودن مقدار $\cot \alpha = -2$ و این که α زاویه ای در ربع چهارم است، با استفاده از رابطه $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ ، مقدار $\sin \alpha$ را به دست می آوریم، پس داریم:

$$1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{در ربع چهارم}} \sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

حالا با معلوم بودن مقدار $\sin \alpha$ ، با استفاده از رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، مقدار $\cos \alpha$ را نیز به دست می آوریم، می توان نوشت:

$$(-\frac{\sqrt{5}}{5})^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{در ربع چهارم}} \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

در آخر خواسته مسئله برابر است با:

$$\sin \alpha \cos \alpha = (-\frac{\sqrt{5}}{5})(\frac{2\sqrt{5}}{5}) = \frac{-10}{25} = \frac{-2}{5} = -0.4$$

۹۷۶ ۴ می دانیم برای تبدیل درجه به رادیان، زاویه را در $\frac{\pi}{180^\circ}$ و برای تبدیل رادیان به درجه، زاویه را در $\frac{180^\circ}{\pi}$ ضرب می کنیم، پس داریم:

$$\text{گزینه «۱»} \quad -36^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{\pi}{5} \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه «۲»} \quad 12^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \quad \checkmark$$

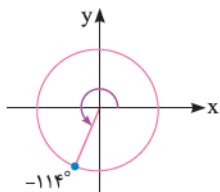
$$\text{گزینه «۳»} \quad \frac{\pi}{36} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 5^\circ \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه «۴»} \quad \frac{5\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ \quad \times$$

۹۷۷ ۴ هر رادیان تقریباً 57° است، پس داریم:

$$-2 \text{ rad} \approx -2 \times 57^\circ = -114^\circ$$

همان طور که ملاحظه می کنید، انتهای این زاویه در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد و تنازانت آن عددی مثبت است.



۹۷۸ ۲ ابتدا هر دو زاویه داده شده را به درجه تبدیل می کنیم. با توجه به این که می دانیم π رادیان برابر با 180° و رادیان تقریباً 57° است، داریم:

$$\frac{6\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 216^\circ, \quad -7 \times 57^\circ \approx -399^\circ$$

حالا زوایای به دست آمده را روی دایره مثلثاتی نمایش می دهیم، ببینید:

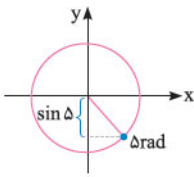


همان طور که مشاهده می کنید زوایای داده شده به ترتیب در ناحیه های سوم و چهارم قرار می گیرند.



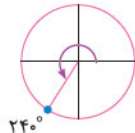
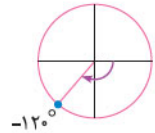
فصل چهارم: مثلثات

کاج



همان طور که گفتیم هر رادیان تقریباً 57° است، پس ۵ رادیان تقریباً 285° می باشد، یعنی این زاویه در ناحیه چهارم قرار دارد. از طرفی می دانیم در ناحیه چهارم، $0 < \sin x < 1$ است، پس داریم:

$$-1 < \sin \Delta < 0 \Rightarrow [\sin \Delta] = -1$$



ابتدا توجه داشته باشید انتهای زاویه های 120° و 240° بر روی دایره مثلثاتی در یک نقطه قرار دارد، ببینید:

$$240^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{4\pi}{3}$$

حالا زاویه 240° را به رادیان تبدیل می کنیم و می دانیم برای این کار کافی است آن را در $\frac{\pi}{180^\circ}$ ضرب کنیم، پس داریم:

هواستون باشه با توجه به اینکه گزینه ها همه مثبت بودن، چنین کاری کردیم!

می دانیم مجموع دو زاویه متمم 90° و مجموع دو زاویه مکمل 180° است، پس داریم:

$$\alpha + (-55^\circ) = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 145^\circ, \quad \beta + 205^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = -25^\circ$$

در نتیجه $120^\circ = 145^\circ - 25^\circ = \alpha + \beta$ است که با ضرب کردن آن در $\frac{\pi}{180^\circ}$ ، اندازه زاویه برحسب رادیان $\frac{2\pi}{3}$ به دست می آید.

می دانیم در مثلث قائم الزاویه مجموع دو زاویه حاده 90° است. با فرض این که زوایای حاده α و β باشند، چون طبق فرض مسئله $\beta = 5\alpha$ است،

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha + 5\alpha = 90^\circ \Rightarrow 6\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ, \quad \beta = 75^\circ$$

می توان نوشت:

$$\beta = 75^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{12}$$

در نتیجه زاویه بزرگ تر 75° است که برای نوشتن زاویه برحسب رادیان با ضرب کردن آن در $\frac{\pi}{180^\circ}$ داریم:

زوایای داخلی مثلث را به صورت $\theta + d$ ، θ و $\theta - d$ در نظر می گیریم، چون مجموع این زوایا برابر با 180° است، می توان نوشت:

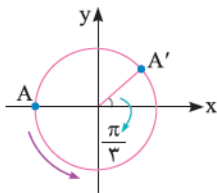
$$(\theta - d) + \theta + (\theta + d) = 180^\circ \Rightarrow 3\theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

پس زوایای مثلث $60^\circ + d$ ، 60° و $60^\circ - d$ هستند و چون طبق فرض مسئله بزرگ ترین زاویه مثلث به اندازه 40° بزرگ تر از کوچک ترین زاویه آن است، داریم:

$$(60^\circ + d) - (60^\circ - d) = 40^\circ \Rightarrow 2d = 40^\circ \Rightarrow d = 20^\circ$$

در نتیجه زوایای مثلث 80° ، 60° و 40° هستند. کوچک ترین زاویه مثلث 40° است و برای تبدیل کردن آن به رادیان با ضرب آن در $\frac{\pi}{180^\circ}$ می توان نوشت:

$$40^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9}$$

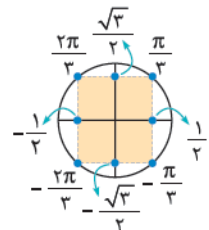


نقاط A و A' در دایره مثلثاتی به صورت زیر هستند:

پس مختصات نقطه A' به صورت $A'(\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3})) = A'(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ است، در نتیجه برای محاسبه فاصله دو نقطه A و A' می توان نوشت:

$$A(-1, 0), A'(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow AA' = \sqrt{(\frac{1}{2} - (-1))^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

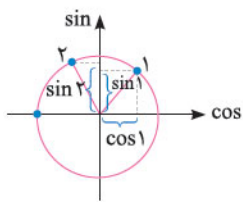
می دانیم $\pm \frac{\pi}{3}$ همان $\pm 60^\circ$ و $\pm \frac{2\pi}{3}$ همان $\pm 120^\circ$ است، پس این زوایا روی دایره مثلثاتی به صورت زیر هستند و همان طور که مشاهده می کنید از وصل کردن آن ها به هم یک مستطیل ایجاد می شود که برای به دست آوردن مساحت آن می توان نوشت:



$$\text{طول} = \frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{عرض} = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

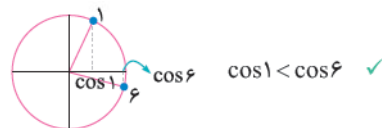
در نتیجه مساحت مستطیل $S = (\sqrt{3})(1) = \sqrt{3}$ است.



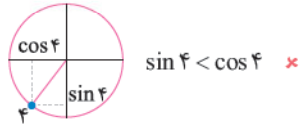
ابتدا توجه داشته باشید زوایای داده شده برحسب رادیان هستند و بهتر است ابتدا آن‌ها را برحسب درجه بیان کنیم. چون می‌دانیم ۱ رادیان معادل با 57° است، داریم: $2 \approx 2 \times 57^\circ = 114^\circ$ ، $1 \approx 57^\circ$ رادیان
حالا زوایای داده شده را روی دایره مثلثاتی نمایش داده و مقادیر خواسته شده را با هم مقایسه می‌کنیم، پس داریم:
همان‌طور که از روی دایره مثلثاتی مقابل مشاهده می‌کنید، بیشترین مقدار مربوط به $\sin 2$ و کمترین مقدار مربوط به $\cos 1$ است، پس می‌توان نوشت:
 $\cos 1 < \sin 1 < \sin 2 \Rightarrow b < a < c$

ابتدا توجه داشته باشید زوایای داده شده برحسب رادیان هستند و چون ۱ رادیان تقریباً 57° است، می‌توان گفت ۴ رادیان برابر $4 \times 57^\circ = 228^\circ$ و ۶ رادیان برابر $6 \times 57^\circ = 342^\circ$ است. حالا به کمک دایره مثلثاتی به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

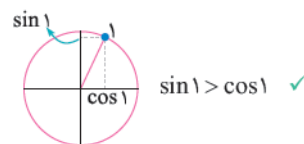
گزینه «۱»:



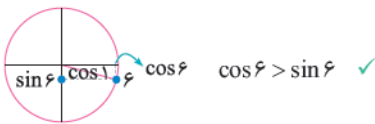
گزینه «۲»:



گزینه «۳»:

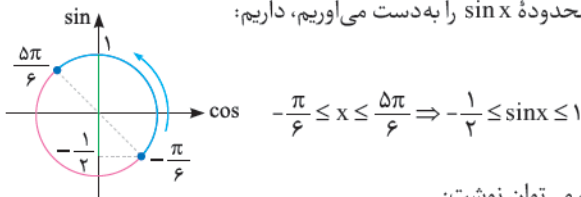


گزینه «۴»:



طول کمان $\widehat{ADG} = 6r$ و شعاع دایره است، پس زاویه مرکزی مقابل به آن $\theta = \frac{6r}{r} = 6$ رادیان است و چون می‌دانیم هر ۱ رادیان برابر با 57° است، θ برحسب درجه برابر با $6 \times 57^\circ = 342^\circ$ به دست می‌آید و در نتیجه خواسته مسئله $360^\circ - 342^\circ = 18^\circ$ است.

ابتدا به کمک دایره مثلثاتی زیر و توجه به این‌که $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\Delta\pi}{6}$ است، محدوده $\sin x$ را به دست می‌آوریم، داریم:



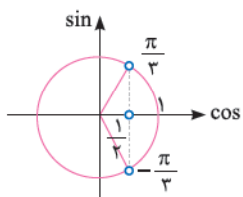
حالا چون طبق فرض مسئله $\sin x = \frac{1-m}{4}$ است، مجموعه مقادیر m را به دست می‌آوریم، می‌توان نوشت:

$$-\frac{1}{4} \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \frac{1-m}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -1 \leq 1-m \leq 4 \xrightarrow{-1} -2 \leq -m \leq 3 \xrightarrow{\times (-1)} -3 \leq m \leq 2$$

ابتدا با توجه به این‌که طبق فرض مسئله $|x| < \frac{\pi}{12}$ است، محدوده $\cos 4x$ را به دست می‌آوریم، داریم:

$$|x| < \frac{\pi}{12} \Rightarrow -\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12} \xrightarrow{\times 4} -\frac{\pi}{3} < 4x < \frac{\pi}{3}$$

حالا با توجه به محدوده به دست آمده و به کمک دایره مثلثاتی، مجموعه مقادیر ممکن برای $\cos 4x$ را به دست می‌آوریم، ببینید:



$$-\frac{\pi}{3} < 4x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{4} < \cos 4x \leq 1$$

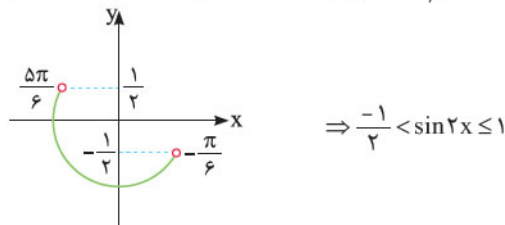
$$\frac{1}{4} < \cos 4x \leq 1 \xrightarrow{\times 2} 1 < 2 \cos 4x \leq 2 \xrightarrow{+1} 2 < 2 \cos 4x + 1 \leq 3$$

در آخر برای محاسبه برد تابع $f(x)$ می‌توان نوشت:

در نتیجه برد تابع $f(x)$ بازه $[2, 3]$ است.



۹۹۱ ۲ چون طبق فرض مسئله $\frac{-\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت $\frac{-\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$ است و برای به دست آوردن محدوده $\sin 2x$ از دایره مثلثاتی استفاده می‌کنیم. ببینید:



در آخر برای به دست آوردن مجموعه مقادیر m می‌توان نوشت:

$$\frac{-1}{2} < \sin 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq 4 \xrightarrow{+1} -1 < m \leq 5$$

۹۹۲ ۱ طبق فرض مسئله $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ است و برای به دست آوردن محدوده $(\frac{\pi}{4} - x)$ می‌توان نوشت:

$$\frac{-\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\times (-1)} \frac{-\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4} \xrightarrow{+\frac{\pi}{4}} 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

در ربع اول

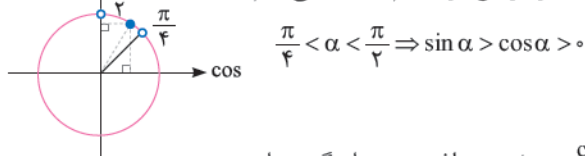
پس $\tan(\frac{\pi}{4} - x) > 0$ است و برای به دست آوردن مجموعه مقادیر m با استفاده از تعیین علامت، داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{4} - x) > 0 \Rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0$$

	-2	1
1-m	+	-
2+m	-	+
$\frac{1-m}{2+m}$	-	+

$\Rightarrow -2 < m < 1$

۹۹۳ ۳ برای پاسخ به این تست، ابتدا یک دایره مثلثاتی می‌کشیم و سپس $\sin$ و $\cos$ را در این بازه با هم مقایسه می‌کنیم:



در نتیجه گزینه «۱» نادرست است. حالا با توجه به آن که می‌دانیم $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ و $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ، سراغ بررسی سایر گزینه‌ها می‌رویم:

گزینه «۲»: $\cot \alpha > \tan \alpha \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha > \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha > \sin \alpha$ ✗

گزینه «۳»: $\tan \alpha > \sin \alpha \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} > 1 \Rightarrow \cos \alpha < 1$ ✓

گزینه «۴»: $\cot \alpha < \cos \alpha \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} < \cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} < 1 \Rightarrow \sin \alpha > 1$ ✗

۹۹۴ ۳ با استفاده از رابطه $\ell = r\theta$ به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $\ell = \sqrt{A} = 2\sqrt{2}$, $r = \sqrt{2} \Rightarrow \theta = \frac{\ell}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ ✓

گزینه «۲»: $\theta = \frac{\ell}{r} = \frac{2r}{2r} = 1$ ✓

گزینه «۳»: $\theta = 3$, $r = 2 \Rightarrow AB = \ell = r\theta = 2 \times 3 = 6$ ✗

گزینه «۴»: $\ell = 1$, $\theta = 2 \Rightarrow r = \frac{\ell}{\theta} = \frac{1}{2} = 0.5$ ✓

۹۹۵ ۴ می‌دانیم رابطه $\ell = r\theta$ بین طول کمان، شعاع و زاویه برقرار است، فقط باید توجه داشته باشیم در این رابطه ℓ و r ، هم واحد و زاویه θ برحسب رادیان است. حالا به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $r = 5\text{cm}$, $\theta = 2 \Rightarrow \ell = r\theta = 2(5) = 10\text{cm} = 0.1\text{m}$ ✓

گزینه «۲»: $\ell = 500\text{cm}$, $r = 5\text{m} = 500\text{cm} \Rightarrow \theta = \frac{\ell}{r} = \frac{500}{500} = 1$ ✓

گزینه «۳»: $\ell = 2\text{m} = 200\text{cm}$, $r = 100\text{cm} \Rightarrow \theta = \frac{200}{100} = 2$ ✓

گزینه «۴»: $\ell = 200\text{cm}$, $\theta = 4 \Rightarrow r = \frac{\ell}{\theta} = \frac{200}{4} = 50\text{cm} = 0.5\text{m}$ ✗



۹۹۶ ۳ به بررسی تک تک عبارات می پردازیم:

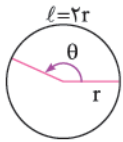
الف) با توجه به این که می دانیم ۱ رادیان تقریباً 57° است، پس اندازه هر یک از دو زاویه روبه رو به ساق تقریباً $61/5^\circ$ است (قبول داری؟). بنابراین کوچک ترین زاویه مثلث در واقع همان زاویه بین دو ساق است و چون می دانیم ضلع مقابل به زاویه کوچک تر در یک مثلث، کوچک تر از ضلع مقابل به زاویه بزرگ تر است، اندازه قاعده از اندازه هر یک از ساق ها کوچک تر است. ✓

ب) با استفاده از رابطه $\ell = r\theta$ با توجه به این که $r = 1$ و $\theta = \pi$ است، $\ell = (1)(\pi) = \pi \approx 3/14$ به دست می آید. ✓

پ) با ضرب این زاویه در $\frac{180^\circ}{\pi}$ ، اندازه زاویه برحسب درجه برابر با $157/5^\circ$ به دست می آید که در ناحیه سوم قرار دارد. ✗

ت) می دانیم مجموع زوایای داخلی مثلث 180° یا π رادیان است، با فرض اینکه زاویه سوم θ باشد، داریم:

$$\theta + \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \pi \Rightarrow \theta + \frac{2\pi}{9} = \pi \Rightarrow \theta = \pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{7\pi}{9} \quad \checkmark$$



$$\theta = \frac{\ell}{r} = \frac{2r}{r} = 2$$

۹۹۷ ۴ طبق فرض مسئله $\ell = 2r$ است. با استفاده از رابطه $\ell = r\theta$ برای محاسبه زاویه θ می توان نوشت:

توجه داشته باشید عدد به دست آمده برحسب رادیان است و چون هر ۱ رادیان تقریباً 57° است، پس $\theta = 2 \times 57^\circ = 114^\circ$ می باشد.

$$\theta = 2^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{9}$$

۹۹۸ ۴ ابتدا با ضرب کردن زاویه 2° در $\frac{\pi}{180^\circ}$ اندازه آن را برحسب رادیان به دست می آوریم، پس داریم:

$$r = \frac{\ell}{\theta} = \frac{2}{\frac{\pi}{9}} = \frac{18}{\pi}$$

حالا با استفاده از رابطه $\ell = r\theta$ با توجه به این که $\ell = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{9}$ است، شعاع دایره را به دست می آوریم، می توان نوشت:

در آخر محیط دایره برابر با $P = 2\pi r = 2\pi(\frac{18}{\pi}) = 36$ است.

$$36^\circ = 36^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{5} \text{ رادیان}$$

۹۹۹ ۳ ابتدا زاویه 36° را برحسب رادیان می نویسیم، پس داریم:

از طرفی با توجه به این که محیط دایره 2π رادیان است، زاویه مقابل به کمان $\widehat{ABC}$ برابر $\frac{9\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 2\pi$ رادیان است و برای محاسبه شعاع دایره با استفاده از رابطه $\ell = r\theta$ می توان نوشت:

$$\theta = 45^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$$

۱۰۰۰ ۱ ابتدا زاویه مرکزی $\theta = 45^\circ$ را با ضرب کردن آن در $\frac{\pi}{180^\circ}$ به رادیان تبدیل می کنیم، پس داریم:

از طرفی شعاع مدار دایره ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد $r = 6400 + 400 = 6800$ کیلومتر است، پس با استفاده از رابطه $\ell = r\theta$ و با توجه به این که $\pi \approx 3/14$ است، برای محاسبه طول کمان $\widehat{A'B'}$ می توان نوشت:

$$\theta = 15^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{12}$$

۱۰۰۱ ۳ ابتدا زاویه 15° را برحسب رادیان می نویسیم، داریم:

حالا چون طبق فرض مسئله اندازه کمان $\widehat{AB}$ برابر با 200π کیلومتر است، با استفاده از رابطه $\ell = r\theta$ شعاع مدار حرکت ماهواره را به دست می آوریم، می توان نوشت:

$$r = \frac{\ell}{\theta} = \frac{200\pi}{\frac{\pi}{12}} = 2400 \text{ km}$$

در آخر فاصله ماهواره از سطح زمین $17600 = 24000 - 6400$ کیلومتر است.

۱۰۰۲ ۳ می دانیم عقربه ساعت شمار در هر ساعت $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان چرخش می کند. پس با توجه به این که 90 دقیقه در واقع همان $1/2$ ساعت است،

$$\theta = \frac{3}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$$

میزان چرخش عقربه ساعت شمار برابر است با:

$$\ell = r\theta = \frac{20}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = 5$$

حالا طبق رابطه $\ell = r\theta$ مسافتی که نوک این عقربه طی کرده است را به دست می آوریم: