

حد و پیوستگی

مشاوره: از این فصل معمولاً ۳ یا ۴ سؤال (معادل ۱۰٪ تا ۱۳/۳٪) مطرح می‌شود. این مبحث در دسته مباحث نسبتاً سخت قرار می‌گیرد. فصل ۶ از کتاب ریاضی یازدهم و فصل ۳ از کتاب ریاضی دوازدهم به این مبحث اختصاص دارد. این فصل پیش‌نیاز ندارد؛ فقط برای حل سؤالات مربوط به رفع ابهام، تسلط نسبی بر اتحادهای جبری و آشنایی با توابع مثلثاتی لازم است. این فصل پیش‌نیاز فصل‌های مشتق و کاربرد مشتق می‌باشد؛ یعنی برای حل تست‌های این دو فصل، تسلط بر حد و پیوستگی الزامی است.

کنکور	تیر ۱۴۰۱	خارج ۱۴۰۱	دی ۱۴۰۱	تیر ۱۴۰۲	خارج ۱۴۰۲	اردیبهشت ۱۴۰۳	تیر ۱۴۰۳	خارج ۱۴۰۳	اردیبهشت ۱۴۰۴	تیر ۱۴۰۴	خارج ۱۴۰۴
تعداد سؤالات	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۴	۵	۵





تعاریف همسایگی

همسایگی	هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.
همسایگی محذوف	اگر (a, b) یک همسایگی برای عدد حقیقی x_0 باشد، آن‌گاه مجموعه $\{x_0\} - (a, b)$ (یا به بیان دیگر: $(a, x_0) \cup (x_0, b)$) یک همسایگی محذوف برای x_0 است.
همسایگی یک‌طرفه (چپ / راست)	■ اگر $r > 0$ ، آن‌گاه بازه $(x_0, x_0 + r)$ یک همسایگی راست برای x_0 خواهد بود. ■ اگر $r > 0$ ، آن‌گاه بازه $(x_0 - r, x_0)$ یک همسایگی چپ برای x_0 خواهد بود.

تعاریف مربوط به حد

حد یک‌طرفه (چپ / راست)	با فرض تعریف‌شدن تابع f در بازه (a, x_0) ، حد چپ تابع f در x_0 مقدار l است، هرگاه مقادیر تابع را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن که x به اندازه کافی از سمت چپ به x_0 نزدیک شود: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ با فرض تعریف‌شدن تابع f در بازه (x_0, b) ، حد راست تابع f در x_0 مقدار l است، هرگاه مقادیر تابع را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن که x به اندازه کافی از سمت راست به x_0 نزدیک شود: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$
حد (در نقطه x_0)	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ اگر و تنها اگر: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ به عبارت دیگر، تابع f در $x = x_0$ زمانی حد دارد که حد چپ و راست در آن نقطه، موجود و برابر باشند.

نکته: باید توجه داشت که حد داشتن یا نداشتن تابع f در یک نقطه، هیچ ربطی به مقدار تابع در آن نقطه ندارد (تابع می‌تواند در آن نقطه تعریف شده باشد و مقدار تابع در آن نقطه با حد آن برابر نشود! یا اصلاً تابع می‌تواند در آن نقطه تعریف نشده باشد). برای این که حد داشتن یا نداشتن تابع f را در یک نقطه بررسی کنیم، کافی است تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، نه در خود آن نقطه.

محاسبه حد توابع

مقدار حد تابع ثابت در هر نقطه‌ای برابر است با: $\lim_{x \rightarrow k} c = c$

مقدار حد تابع همانی به صورت روبه‌رو است: $\lim_{x \rightarrow k} x = k$

« به‌طور کلی حد تابع چندجمله‌ای در یک نقطه برابر با مقدار تابع در آن نقطه است. مقدار حدهای توابع مثلثاتی برابر مقدار تابع در همان نقطه است؛ مثلاً: $\lim_{x \rightarrow k} \cos(x) = \cos(k)$ »

برای اکثر توابعی که تاکنون مواجه شده‌اید، برای هر $a \in D_f$ داریم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

تنها استثنایی که تاکنون آشنا شده‌اید، حد توابع چندضابطه‌ای (آن هم در نقاط مرزی ضابطه‌ها) هستند. مانند تابع جزء صحیح در نقاط صحیح.

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ و همچنین توابع f و g هر دو در همسایگی دوطرفه (یا یک‌طرفه یکسان) نقطه $x = a$ تعریف شده باشند، آن‌گاه داریم:

- ۱ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$
- ۲ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = L_1 \times L_2$
- ۳ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, (L_2 \neq 0)$
- ۴ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (L_1)^n, \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$

به طور کلی حد مجموع، تفاضل، ضرب، تقسیم (به شرط صفر نشدن مخرج کسر)، توان و ریشه n ام (به شرط تعریف شدن) دو تابع در یک نقطه، به ترتیب برابر با مجموع، تفاضل، ضرب، تقسیم، توان و ریشه n ام حد دو تابع در آن نقطه است. اگر در تقسیم دو تابع، حاصل حد مخرج و حد صورت (به طور همزمان) برابر با صفر شود، جواب این حد مبهم است و باید رفع ابهام شود.

روش‌های رفع ابهام

در یک حد مبهم $\frac{0}{0}$ ، به کمک تجزیه یا تقسیم، عامل مشترک صفرکننده صورت و مخرج را ساده می‌کنیم؛ به عنوان مثال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x-1} = \frac{2}{-2} = -1$$

**حذف عامل
صفرکننده
(به صورت مستقیم)**

ممکن است به دلیل وجود رادیکال، پیدا کردن عامل مشترک سخت باشد. در این حالت، با روش‌هایی مانند ضرب مزدوج (کسری برابر با یک که صورت و مخرج آن، مزدوج صورت یا مخرج کسر داده شده است) یا استفاده از اتحاد چاق و لاغر، تابع را به فرمی ساده‌تر درمی‌آوریم تا عامل مشترک را راحت‌تر پیدا و حذف کنیم؛ به عنوان مثال داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+1)(\sqrt{x} + \sqrt{3}) = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

**حذف عامل
صفرکننده (به صورت
غیر مستقیم)**

بعضی مواقع در یک عبارت $\frac{0}{0}$ ، تشخیص عامل مشترک سخت و یا زمان‌بر است. با مشتق گرفتن از صورت و مخرج، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم و سپس حد می‌گیریم. (در فصل بعدی با قواعد مشتق‌گیری آشنا خواهید شد.)

قاعده هوپیتال: اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ به یکی از حالت‌های مبهم کسری ($\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$) منجر شود، برای رفع ابهام خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به عنوان مثال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 6x + 8} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 3}{2x + 6} = \frac{-4 - 3}{-4 + 6} = -\frac{7}{2}$$

هوپیتال

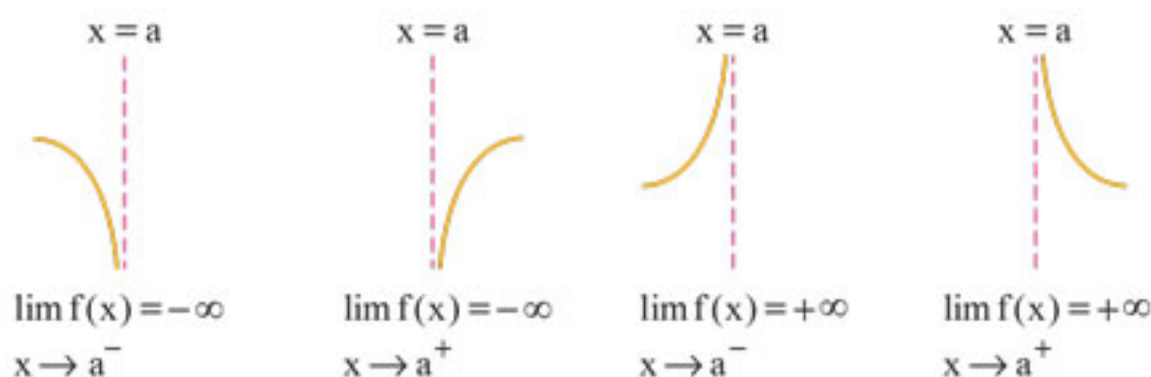
نکته: به طور کلی، برای محاسبه باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $ax + b$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow r = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

به عبارت ساده‌تر، چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر است، اگر و تنها اگر: $P(a) = 0$. به این ترتیب می‌توان $P(x)$ را تجزیه نمود.

حد بی‌نهایت

اگر مقادیر تابع f در نزدیکی نقطه $x = a$ به $\pm\infty$ میل کند، نمودار آن به یکی از صورت‌های زیر خواهد بود:





فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، در این صورت داریم:

الف اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ، به عبارت ساده‌تر:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

ب اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ ، به عبارت ساده‌تر:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

پ اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ ، به عبارت ساده‌تر:

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

ت اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ، به عبارت ساده‌تر:

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

حد در بی‌نهایت

با فرض تعریف شدن تابع f در بازه $(a, +\infty)$ ، رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به این معناست که مقادیر این تابع را به هر مقدار دلخواه به L می‌توان نزدیک کرد، به شرط آن که x به اندازه کافی بزرگ شود. به عبارت ساده‌تر اگر با مقادیر x به سمت $+\infty$ برویم، مقدار تابع f به L میل می‌کند.

با فرض تعریف شدن تابع f در بازه $(-\infty, a)$ ، رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معناست که مقادیر این تابع را به هر مقدار دلخواه به L می‌توان نزدیک کرد، به شرط آن که x به اندازه کافی کوچک (منفی‌تر) شود. به عبارت ساده‌تر اگر با مقادیر x به سمت $-\infty$ برویم، مقدار تابع f به L میل می‌کند.

قضیه‌های مهم حد در بی‌نهایت

۱ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{x^n}\right) = 0$ (به‌طور کلی، اگر صورت عددی مشخص باشد و مخرج به $\pm\infty$ میل کند، حاصل حد برابر با صفر خواهد بود).

۲ برای حد در بی‌نهایت نیز مانند قسمت قبل، تمامی قضایای حدی مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم برای اعمال جبری روی دو تابع برقرار است.

۳ برای عدد طبیعی n و عدد حقیقی غیر صفر a ، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (\text{مثبت } a) \\ -\infty & (\text{منفی } a) \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$$

در عبارات کسری، برای به دست آوردن حاصل حد وقتی در $x \rightarrow \pm\infty$ در صورت و مخرج کسر باید تابعی را پیدا کنیم که بیشترین سرعت رشد را داشته باشد و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کنیم؛ به عنوان مثال اگر صورت یک چندجمله‌ای از درجه n باشد (یعنی بزرگ‌ترین توان x در صورت برابر با n است) و مخرج یک چندجمله‌ای از درجه m باشد (یعنی بزرگ‌ترین توان x در مخرج برابر با m است)، سه حالت زیر پیش می‌آید:

۱ اگر $n > m$ ، حاصل حد برابر با بی‌نهایت خواهد شد.

۲ اگر $n = m$ ، حاصل حد برابر با ضریب بزرگ‌ترین توان x در صورت، به روی بزرگ‌ترین توان x در مخرج است (قاعده پرتوان).

۳ اگر $n < m$ ، حاصل حد برابر با صفر خواهد شد.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (در یک نقطه، حد و مقدار تابع هر دو موجود و با هم برابر باشند.)	پیوستگی در یک نقطه
■ اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ، این تابع از طرف راست پیوسته است. ■ اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ، این تابع از طرف چپ پیوسته است.	پیوستگی یک طرفه (چپ / راست)
تابع $f(x)$ در بازه (a, b) پیوسته است، اگر تابع در تمام نقاط درونی این بازه پیوسته باشد.	پیوستگی در یک بازه باز
تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته است، اگر تابع در تمام نقاط درونی این بازه پیوسته باشد؛ همچنین در نقطه a پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.	پیوستگی در یک بازه بسته

تیب

۱

همسایگی



راهنما: در این سبک از سؤالات، راجع به همسایگی پرسیده می‌شود. برای حل این سؤالات، باید به تعاریف همسایگی مسلط باشید. دقت داشته باشید که همسایگی محذوف، یک بازه نیست، بلکه اجتماع دو بازه است.

تست اگر بازه $(2x-1, 3x+1)$ یک همسایگی برای عدد ۱ باشد، حدود x کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(0, 2)$

پاسخ گزینه «۱» بازه داده شده باید شامل عدد ۱ باشد؛ یعنی $2x-1 < 1 < 3x+1$. داریم:

- ۱ $2x-1 < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1$
- ۲ $1 < 3x+1 \Rightarrow 0 < 3x \Rightarrow 0 < x$

با به دست آوردن اشتراک دو بازه بالا، به گزینه «۱» می‌رسیم.

تیب

۲

باقی مانده در تقسیم چندجمله‌ای



راهنما: در این گونه سؤالات، راجع به تقسیم چندجمله‌ای‌ها از شما می‌پرسند. به‌طور کلی، باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر عبارت $ax+b$ عبارتی از درجه صفر است. پس می‌توانیم باقی مانده را به صورت $P(x) = r$ در نظر بگیریم. طبق رابطه تقسیم داریم:

$$P(x) = (ax+b)Q(x) + r$$

$$\text{بنابراین باقی مانده برابر است با } r = P\left(-\frac{b}{a}\right).$$

در سؤالات پیچیده‌تر، نوشتن رابطه تقسیم به ما کمک می‌کند تا به ایده حل مسئله برسیم.

تست اگر چندجمله‌ای‌های $A(x) = x^2 - mx + 1$ و $B(x) = x^2 - 3x + m$ در تقسیم بر $x-3$ باقی مانده یکسان داشته باشند، m کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

پاسخ گزینه «۲» برای به دست آوردن باقی مانده‌های تقسیم چندجمله‌ای‌های $A(x)$ و $B(x)$ بر عبارت $x-3$ ، باید ریشه این عبارت، یعنی $x=3$ را در این چندجمله‌ای‌ها قرار دهیم. این باقی مانده‌ها باید برابر باشند؛ پس داریم:

$$A(3) = B(3) \Rightarrow (3)^2 - m(3) + 1 = (3)^2 - 3(3) + m \Rightarrow 4m = -8 \Rightarrow m = -2$$



تپ ۳

بررسی حد در یک نقطه



راهنما: در این گونه سؤالات، از شما می‌خواهند که از روی ضابطه تشخیص دهید که تابع داده‌شده، در نقطه‌ای خاص، حد دارد یا نه. برای بررسی حد داشتن در یک نقطه، به ترتیب موارد زیر را بررسی کنید:

- ۱ تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد.
 - ۲ حد چپ و راست تابع در آن نقطه مشخص باشد. یعنی تابع باید به عدد مشخصی میل کند (مثلاً تابع به سمت ∞ میل نکند).
 - ۳ حد چپ و راست تابع در آن نقطه با هم برابر باشند.
- طبیعی است که برای حدهای یک‌طرفه (چپ یا راست) کافی است همسایگی یک‌طرفه (چپ یا راست) را چک کنیم و صرفاً بررسی کنیم که تابع به عددی مشخص میل کند.

تست کدام تابع در $x = 4$ حد دارد؟

$$f(x) = \sqrt{5x - 20} \quad (1)$$

$$g(x) = [5 - 2x] \quad (2)$$

$$h(x) = \sqrt{x - 4} \cdot \sqrt{8 - 2x} \quad (3)$$

$$i(x) = \begin{cases} 2x & ; x > 4 \\ 10 & ; x = 4 \\ 3x - 4 & ; x < 4 \end{cases} \quad (4)$$

پاسخ گزینه «۴» به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

در گزینه «۱»، دامنه تابع به صورت $D_f = [4, +\infty)$ است، پس همسایگی چپ و حد چپ وجود ندارد و در نتیجه تابع در نقطه $x = 4$ حد ندارد.

در گزینه «۲»، حد چپ برابر با -3 و حد راست برابر با -4 است؛ در نتیجه به دلیل برابرنبودن حد چپ و راست، تابع حد ندارد. در گزینه «۳»، تابع در هیچ همسایگی از نقطه $x = 4$ تعریف نشده است. تابع فقط در خود $x = 4$ تعریف شده است که در حدگیری اهمیتی ندارد، پس تابع حد ندارد.

در گزینه «۴»، هر دو حد چپ و راست، برابر با ۸ هستند. مقدار تابع در این نقطه اهمیتی ندارد. پس این تابع در $x = 4$ حد دارد.

تپ ۴

خواندن حد از روی نمودار



راهنما: در برخی سؤالات باید حد را از روی نمودار بخوانیم. دقت کنید که برای حد داشتن، تابع باید در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد. برای به دست آوردن حاصل حد، روی نمودار به سمت نقطه حرکت کنید. حواستان به حدهای یک‌طرفه (چپ یا راست) باشد. در سؤالات سخت‌تر، حد توابع ترکیبی را از شما می‌پرسند. در این سؤالات شما باید از داخلی‌ترین تابع شروع کنید و در هر مرحله، حاصل حد را (با در نظر گرفتن جهت حرکت آن)، به عنوان ورودی به تابع بعدی بدهید.

یادآوری: مقدار تابع در نقطه موردنظر، هیچ تأثیری در حدگیری ندارد.

تست نمودار زیر مربوط به تابع f است. حاصل عبارت‌های $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x))$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x - [x + 1])$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



- (۱) $+\infty$
- (۲) $-\infty$
- (۳) $+\infty$
- (۴) $-\infty$

پاسخ گزینه «۳» برای محاسبه عبارت اول، اگر $x \rightarrow 2^+$ ، عبارت $x+1$ به عدد ۳ از سمت مقادیر بیشتر میل می‌کند؛ پس:

$$[x+1] = 3$$

$$x - [x+1] = 2^+ - 3 = (-1)^+$$

حال عبارت ورودی تابع f به صورت روبه‌رو خواهد شد:

بنابراین باید حد تابع $f(x)$ را زمانی که $x \rightarrow (-1)^+$ محاسبه کنیم. مطابق شکل، اگر از سمت راست به $x = -1$ نزدیک شویم، تابع f به عدد ۲ میل می‌کند.

برای محاسبه عبارت دوم، اگر $x \rightarrow 2^+$ ، تابع f به عدد ۱ میل می‌کند (اما از سمت مقادیر کمتر)؛ بنابراین برای تابع بعدی $x \rightarrow 1^-$ را در نظر می‌گیریم. حال اگر در f از سمت چپ به $x = 1$ نزدیک شویم، تابع f به عدد $+\infty$ میل می‌کند.

تیب

۵

رفع ابهام



راهنما: در تست‌های مربوط به رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ، سعی کنید که تا حد ممکن از قاعده هوییتال استفاده کنید. اگر به‌خوبی بر قواعد مشتق‌گیری مسلط باشید، استفاده از قاعده هوییتال می‌تواند سرعت شما را بیشتر کند. گاهی اوقات استفاده از اتحاد مزدوج یا چاق و لاغر نیز می‌تواند شما را در پیدا کردن عامل صفرکننده یاری کند.

دقت کنید که همیشه بعد از رفع ابهام، قرار نیست حاصل حد عددی مشخص شود. گاهی اوقات بعد از رفع ابهام، متوجه می‌شویم که حد وجود ندارد (مثلاً حاصل حد ∞ می‌شود).

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^3-8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{72}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{36}$ (۴) وجود ندارد.

پاسخ گزینه «۱» **روش اول** در این روش با استفاده از اتحاد مزدوج، کاری می‌کنیم که عامل صفرکننده در صورت نمایان شود؛ سپس به کمک تجزیه (یا تقسیم) آن را ساده می‌کنیم: (در مخرج از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم).

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{(x-2)(x^2+2x+4)} \times \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(\sqrt{x+7}+3)(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{1}{6 \times 12} = \frac{1}{72}$$

روش دوم در این حالت، از قاعده هوییتال برای محاسبه حاصل حد کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+7}}}{3x^2-0} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2+7}}}{3(2)^2} = \frac{1}{72}$$

نکته: در حدهایی که به قدرمطلق یا براکت برمی‌خوریم، باید ابتدا قدرمطلق را تعیین علامت و براکت را تعیین مقدار کنیم. سپس به ادامه حدگیری بپردازیم.

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|x^2+6x+8|}{x^2-x|x|+|-x|}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

پاسخ گزینه «۳» قبل از حدگیری، عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت و براکت را تعیین مقدار می‌کنیم. برای تعیین علامت

عبارت داخل قدرمطلق داریم:

$$|x^2+6x+8| = |(x+2)(x+4)|$$

x	-4	-2	
(x+2)(x+4)	+	-	+

ما این‌جا هستیم

با توجه به جدول تعیین علامت، بین دو ریشه قرار می‌گیریم، پس قرینه عبارت از قدرمطلق خارج می‌شود.



برای تعیین مقدار برکت در مقادیر کمتر از -2 داریم:

$$\begin{cases} [x] = [(-2)^-] = -3 \\ [-x] = [-(-2)^-] = [2^+] = 2 \end{cases}$$

حال حد را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-(x^2 + 6x + 8)}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-(x+2)(x+4)}{(x+1)(x+2)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

تیب
۶

حدهای مثلثاتی



راهنما: در سؤالات مربوط به حدهای مثلثاتی، باید با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، کسر داده‌شده را ساده کنید و عامل صفرکننده را از صورت و مخرج حذف کنید. تسلط بر اتحادهای مثلثاتی لازمه حل این سؤالات است.

تست حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x \cdot \cos(\frac{x}{2})}{1 + \cos x}$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) -2 (۳) 1 (۴) 2

پاسخ گزینه «۱» حد کسر در نقطه $x = \pi$ برابر با $\frac{0}{0}$ است. با استفاده از اتحادهای دو برابر زاویه برای سینوس و کسینوس، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x \cdot \cos(\frac{x}{2})}{1 + \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos(\frac{x}{2})}{1 + 2\cos^2(\frac{x}{2}) - 1} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x \cdot \cos(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2})}{2(\cos x)\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

تیب
۷

مسائل ترکیبی حد



راهنما: در این سؤالات، پارامترهای دیگری هم وجود دارد که باید با توجه به شرایط، مسئله را تحلیل کنیم و آن‌ها را پیدا کنیم. معمولاً در این سؤالات، علاوه بر محاسبه حد، باید معادلات دیگری نیز حل کنیم. به‌عنوان مثال در بعضی سؤالات، حاصل حد را به شما داده‌اند و از شما برخی ضرایب را می‌خواهند. لازم است که در این سؤالات به صورت کسر یا مخرج کسر دقت کنید. اگر مخرج کسر به صفر میل کند، اما حاصل حد موجود باشد، صورت نیز حتماً باید به صفر میل کند (زیرا در غیر این صورت حاصل حد ∞ خواهد شد).

تست مقدار عبارت $a + b$ در حد $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax + b}{\sqrt{6+x} - 2} = 12$ کدام است؟

(۱) 3 (۲) 6 (۳) 9 (۴) 12

پاسخ گزینه «۳» **روش اول** دقت کنید که مخرج به صفر میل می‌کند، اما حاصل حد وجود دارد. بنابراین صورت هم

باید به صفر میل کند: $a(-2) + b = 0 \Rightarrow 2a = b \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$ ★

حال حاصل حد را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax + b}{\sqrt{6+x} - 2} &\times \frac{\sqrt{6+x} + 2}{\sqrt{6+x} + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(ax + b)(4)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x + \frac{b}{a})(4)}{x + 2} = 12 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{\star} b = 6 \Rightarrow a + b = 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

روش دوم با استفاده از قاعده هوییتال، می‌توانستیم راحت‌تر حاصل حد را به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax+b}{\sqrt{6+x}-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a}{\frac{1}{2\sqrt{6+x}}} = 4a = 12 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{\star} b = 6$$

تیپ

۸

مسائل حد بی‌نهایت

راهنما: در این سؤالات با صفرشدن مخرج کسر، حد تابع در یک نقطه خاص به $\pm\infty$ میل می‌کند. گاهی اوقات لازم است که با تعیین علامت، مشخص کنیم که تابع به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند.

تست حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x^3-x}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -\infty & (1) & +\infty & (2) \\ \frac{4}{9} & (3) & \frac{1}{2} & (4) \end{array}$$

پاسخ گزینه «۱» صورت کسر به عدد ۳ میل می‌کند و مخرج نیز به عدد صفر میل می‌کند؛ پس حاصل حد بی‌نهایت است. در مخرج کسر، $x^3 < x$ است؛ زیرا یک عدد بین صفر و ۱، هر چه قدر به توان مثبت برسد، به صفر نزدیک می‌شود (یعنی کوچک‌تر می‌شود)؛ بنابراین مخرج از سمت مقادیر کمتر به صفر میل می‌کند. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x^3-x} = \frac{9}{\infty} = -\infty$$

تست اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2+ax+b} = -\infty$ ، حاصل $a-b$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 3 & (1) & -3 & (2) \\ 4 & (3) & 4 & (4) \end{array}$$

پاسخ گزینه «۲» دقت کنید که حد صورت کسر عددی منفی است. حاصل حد $-\infty$ شده است، یعنی مخرج حتماً باید از سمت راست به عدد صفر میل کند.

به عبارت بهتر، مخرج باید در هر دو حالت $x \rightarrow 1^+$ و $x \rightarrow 1^-$ ، یک علامت را از خود نشان دهد؛ بنابراین $x=1$ حتماً باید ریشه مضاعف مخرج باشد، پس عبارت مخرج به صورت $(x-1)^2$ خواهد بود:

$$x^2+ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$a-b=(-2)-1=-3$$

پس خواسته مسئله برابر است با:

تیپ

۹

مسائل حد در بی‌نهایت

راهنما: در این سؤالات، حد در $\pm\infty$ خواسته می‌شود. برای حل این سؤالات باید به سرعت رشد توابع توجه کنیم، هنگامی که $u \rightarrow +\infty$ ، مقایسه سرعت رشد (میل به سمت بی‌نهایت) توابع به صورت زیر است:

$$\log_a u \ll \dots \ll \sqrt[k]{u} \ll \sqrt{u} \ll u \ll u^2 \ll u^3 \ll \dots \ll \dots \ll 2^u \ll 3^u \ll 4^u \ll \dots \ll u^u$$

که در این حالت می‌توان نتایج مقابل را گرفت:

$$\frac{\text{سرعت رشد کمتر}}{\text{سرعت رشد بیشتر}} = 0 \quad \frac{\text{سرعت رشد بیشتر}}{\text{سرعت رشد کمتر}} = \pm\infty$$

بنابراین در محاسبه حد، از عبارتی استفاده می‌کنیم که تأثیرگذار است (سرعت رشد بیشتری نسبت به بقیه دارد). به این کار، استفاده از قاعده پرتوان می‌گوییم؛ به طور کلی می‌توانیم عبارت‌های طولانی را با استفاده از نکات زیر جایگزین کنیم:

سرعت رشد بیشتر $\sim$ سرعت رشد بیشتر + سرعت رشد کمتر ۱

$$2 \quad a > b > 0 \quad \begin{cases} u \rightarrow +\infty : a^u + b^u \sim a^u \\ u \rightarrow -\infty : a^u + b^u \sim b^u \end{cases}$$



$$\text{۳} \quad u \rightarrow \pm\infty: \frac{au^m + bu^{m-1} + \dots}{a'u^n + b'u^{n-1} + \dots} \sim \frac{au^m}{a'u^n}$$

$$\text{۴} \quad u \rightarrow \pm\infty: \begin{cases} \text{زوج } n: \sqrt[n]{au^n + bu^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a} |u| \\ \text{فرد } n: \sqrt[n]{au^n + bu^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a}(u) \end{cases}$$

تست حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x-1)^2(2x-2)^2}{2x^5 + 3x^3 + x}$ کدام است؟

۷۲ (۴)

۱۲ (۳)

۳۶ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ گزینه «۲» با توجه به قواعد بیان‌شده، تنها به بزرگ‌ترین توان (بیشترین سرعت رشد) صورت و مخرج توجه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x-1)^2(2x-2)^2}{2x^5 + 3x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{(3x)^2(2x)^2}^{\text{بزرگ‌ترین توان صورت}}}{2x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9 \times 4 \times x^4}{2 \times x^5} = 36$$

تست حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1+2x| + \sqrt{4x^2 - 5x}}{\sqrt{-x} + \sqrt{9x^2 - x + 1}}$ کدام است؟

صفر (۴)

 $-\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ گزینه «۲» با توجه به قواعد بیان‌شده، بیشترین سرعت رشد، هم در مخرج و هم در صورت، مربوط به توان اول x است. قبل از حدگیری، باید تکلیف قدرمطلق را روشن کنیم. با توجه به این که $x \rightarrow -\infty$ ، داخل قدرمطلق منفی است؛ بنابراین قرینه آن از قدرمطلق خارج می‌شود.

بزرگ‌ترین توان زیر هر رادیکال را نیز باید در نظر بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1+2x| + \sqrt{4x^2 - 5x}}{\sqrt{-x} + \sqrt{9x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + |2x|}{|3x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + (-2x)}{(-3x)} = \frac{4}{3}$$

تست حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{x-1} + 2^{3x+1}}{5^{x+2} + 2^x}$ کدام است؟

 $+\infty$ (۴)

صفر (۳)

 $\frac{1}{125}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۱)

پاسخ گزینه «۴» دقت کنید که عبارت 2^{3x} معادل 8^x است، بنابراین بیشترین سرعت رشد در صورت کسر، متعلق به 2^{3x+1}

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{x-1} + 2^{3x+1}}{5^{x+2} + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x+1}}{5^{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8^x \times 2}{5^{x+2}} = \frac{\text{سرعت رشد بیشتر}}{\text{سرعت رشد کمتر}} = +\infty$$

است (نه 5^{x-1})، داریم:



پیوستگی

تیب

۱۰

راهنما: در سؤالات مربوط به پیوستگی اگر نقطه‌ای در دامنه نبود، تابع در آن نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شود؛ همچنین باید در نظر داشته باشید که اکثر توابعی که تاکنون با آن آشنا شده‌اید، روی دامنه خود پیوسته هستند. تنها استثناها توابع چندضابطه‌ای، آن هم در نقاط مرزی ضابطه‌ها هستند که باید بررسی شوند؛ مانند تابع جزء صحیح ($y = [x]$) در نقاط صحیح.

تست تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & ; x > 1 \\ -1 & ; x = 1 \\ bx^2+3 & ; x < 1 \end{cases}$ در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $2a-b$ کدام است؟

۱۰ (۴)

-۱ (۳)

۷ (۲)

۲ (۱)

پاسخ گزینه ۴: با توجه به ضابطه داده شده، فقط نقطه $x = 1$ مشکوک به ناپیوستگی است (با توجه به نکات بیان شده، از پیوستگی تابع در ضابطه اول و سوم مطمئن هستیم). در نقطه مرزی ضابطه‌ها (یعنی $x = 1$) باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b(1)^2 + 3 = -1 \Rightarrow b = -4 \quad \text{حد چپ را از ضابطه سوم و حد راست را از ضابطه اول به دست می‌آوریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a(1) + (-4) = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$2a - b = 10$$

بنابراین خواسته مسئله برابر است با:

آزمون اول

۱. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 12x + 1} - (x + 4))$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\frac{-1}{2}$

۲. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x^2-x}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ∞

۳. تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - k} & ; x \neq k \\ -4 & ; x = k \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر $f(3k) = 0$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴. اگر بازه $(3x+1, 7x+8)$ یک همسایگی برای نقطه -3 باشد، محدوده x کدام است؟

- (۱) $(-\frac{11}{7}, -\frac{4}{3})$ (۲) $(\frac{4}{3}, \frac{11}{7})$ (۳) $(-\frac{2}{3}, \frac{11}{7})$ (۴) $(-\frac{4}{3}, \frac{11}{7})$

۵. در تابع $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{kx^2 - \sqrt{-x+6}}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-1}{2}$ (۲) $\frac{-4}{3}$ (۳) $\frac{-2}{3}$ (۴) وجود ندارد.

۶. برای $k \in (a, b)$ عبارت $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - k[x]}{x^2 - 4} = -\infty$ برقرار است. $a + b$ کدام است؟

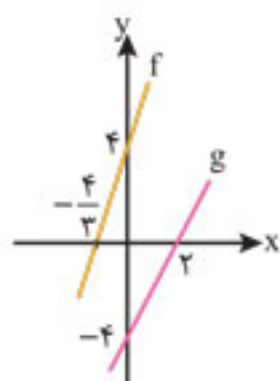
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{-2}{3}$ (۳) $\frac{-5}{3}$ (۴) -۱

۷. اگر $f(x) - 3f(-x) = 4x - 2$ ، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - 1$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۸. نمودار f و g در شکل مقابل مشخص شده‌اند. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۴





۹. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x - 1}{-3x^2 + mx + n} = +\infty$ ، کدام است $m - n$ ؟

- (۱) صفر (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) -۲۴

۱۰. حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{x} \right]$ کدام است ؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) وجود ندارد.

پاسخ‌نامهٔ آزمون اول

مشاوره: نقشهٔ راه هر آزمون به عنوان ابزاری برای مواجههٔ هوشمندانه با سؤالات و دستیابی به بهترین نتیجه طراحی شده است. یکی از کلیدی‌ترین مهارت‌ها در دوران جمع‌بندی و آمادگی برای کنکور، مدیریت زمان و توانایی عبور از سؤالات دشوار یا زمان‌بر است. جهت آشنایی کامل با نحوهٔ بهره‌مندی از این نقشهٔ راه، حتماً به مقدمهٔ کتاب مراجعه کنید.

نقشهٔ راه	دانش‌آموزان سطح A	دانش‌آموزان سطح B	دانش‌آموزان سطح C	پاسخ‌نامهٔ کلیدی
سؤالاتی که باید در دور اول رد می‌کردی	۵	۱، ۵، ۹	۱، ۳، ۵، ۶، ۹	۱. گزینهٔ «۳» ۲. گزینهٔ «۳» ۳. گزینهٔ «۱» ۴. گزینهٔ «۱» ۵. گزینهٔ «۲» ۶. گزینهٔ «۳» ۷. گزینهٔ «۱» ۸. گزینهٔ «۱» ۹. گزینهٔ «۳» ۱۰. گزینهٔ «۱»
سؤالاتی که حتماً باید بعد از آزمون رفع اشکال کنی	۵، ۶، ۱۰	۱، ۳، ۵، ۶، ۹، ۱۰	همهٔ سؤالات	

۱. گزینهٔ «۳»

تیپ ۹

عبارت داده‌شده، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، به صورت $\infty - \infty$ (مبهم) است؛ پس باید رفع ابهام کنیم. ابتدا از اتحاد مزدوج و سپس از قاعدهٔ پرتوان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 12x + 1} - (x + 4)}{\sqrt{x^2 + 12x + 1} + (x + 4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{((x^2 + 12x + 1) - (x + 4)^2)}{(\sqrt{x^2 + 12x + 1} + (x + 4)) \cdot (\sqrt{x^2 + 12x + 1} - (x + 4))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

۲. گزینهٔ «۳»

تیپ ۵

روش اول با استفاده از اتحاد چاق و لاغر سعی می‌کنیم عامل صفرکننده را ساده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x-2} - 1}{x^2 - x} \times \frac{\sqrt[3]{(3x-2)^2} + \sqrt[3]{3x-2} + 1}{\sqrt[3]{(3x-2)^2} + \sqrt[3]{3x-2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{x(x-1)(3)} = \frac{3}{3} = 1$$

روش دوم با استفاده از قاعدهٔ هسپیتال هم می‌توانیم حاصل حد را به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x-2} - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{2\sqrt[3]{(3x-2)^2}}}{2x-1} = \frac{3}{1} = 1$$

۳. گزینهٔ «۱»

تیپ ۱۰

با توجه به این که $f(3k) = 0$ ، پس $3k$ ریشهٔ صورت است؛ همچنین یک ریشهٔ صورت باید k باشد تا تابع پیوسته شود (زیرا تابع در این نقطه باید حد داشته باشد). داریم:

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{(x-k)(x-3k)}{(x-k)} = -4 \Rightarrow k - 3k = -4 \Rightarrow k = 2$$

بنابراین صورت کسر به صورت زیر خواهد بود:

$$(x-2)(x-6) = x^2 - 8x + 12 = x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 12 \end{cases}$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$a + b = (-8) + 12 = 4$$

۴. گزینهٔ «۱»

تیپ ۱

با توجه به «همسایگی برای نقطهٔ -۳» داریم:

$$3x + 1 < -3 < 7x + 8 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 < -3 \Rightarrow x < -\frac{4}{3} \\ -3 < 7x + 8 \Rightarrow 7x > -11 \Rightarrow x > -\frac{11}{7} \end{cases}$$

از اشتراک دو بازه داریم:

$$-\frac{11}{7} < x < -\frac{4}{3} \Rightarrow x \in \left(-\frac{11}{7}, -\frac{4}{3}\right)$$

نیم ۲

گزینه ۱

برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ ، باید $f(1)$ را محاسبه کنیم. عبارت داده شده را دو بار مقداردهی می کنیم:

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=1} f(1) - 3f(-1) = 2 \\ \xrightarrow{x=-1} f(-1) - 3f(1) = -6 \\ \xrightarrow{x^2} 3f(-1) - 9f(1) = -18 \end{cases}$$

با جمع کردن دو معادله بالا داریم:

$$-8f(1) = -16 \Rightarrow f(1) = 2$$

نیم ۴ و ۹

گزینه ۱

مطابق نمودار، با داشتن دو نقطه از هر خط، معادله آن را می نویسیم. معادله تابع f به صورت $f(x) = 3x + 4$ ، و معادله تابع g به صورت $g(x) = 2x - 4$ خواهد بود؛ بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{2x-4} = \frac{3}{2}$$

نیم ۸

گزینه ۳

با توجه به این که وقتی $x \rightarrow 2$ ، صورت به یک عدد منفی میل می کند، مخرج باید به صفر میل کند تا حاصل حد نامتناهی شود. دقت کنید که هم وقتی $x \rightarrow 2^+$ و هم وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، مخرج باید از سمت چپ (مقادیر کمتر) به صفر نزدیک شود.

نتیجه می گیریم که مخرج ریشه مضاعف دارد و تغییر علامت نمی دهد؛ پس فرم کلی مخرج به صورت $\alpha(x-2)^2$ است. با در نظر گرفتن ضریب x^2 ، مخرج دقیقاً به صورت زیر خواهد بود:

$$-3(x-2)^2 = -3x^2 + 12x - 12 = -3x^2 + mx + n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ n = -12 \end{cases}$$

$$m - n = 12 - (-12) = 24 \quad \text{پس داریم:}$$

نیم ۹

گزینه ۱

دقت کنید که وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت داخل براکت از سمت راست (مقادیر بیشتر) به صفر نزدیک می شود:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \right] = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = [0^+] = 0$$

بنابراین حاصل براکت دقیقاً برابر با صفر است که به آن صفر مطلق می گویند. می دانیم صفر مطلق در هر عددی ضرب شود حاصل صفر خواهد بود؛ پس حاصل این حد نیز صفر است.

نیم ۵ و ۹

گزینه ۲

چه $x \rightarrow -\infty$ و $x \rightarrow +\infty$ ، چون داخل قدرمطلق x^2 داریم، عبارت داخل قدرمطلق مثبت است و خودش خارج می شود. اگر بیشترین سرعت رشد را انتخاب کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - x - 2|}{kx^2 - \sqrt{-x+6}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{kx^2 - \sqrt{-x+6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{kx^2} = \frac{1}{k} = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

حال حاصل حد خواسته شده را محاسبه می کنیم. با توجه به این که $x = -1$ و $x = 2$ ریشه های صورت هستند، اگر از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک شویم، بین دو ریشه قرار داریم و در نتیجه عبارت داخل قدرمطلق منفی خواهد بود. با ضرب مزدوج مخرج، رفع ابهام را انجام می دهیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - x - 2)}{\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{-x+6}} &\times \frac{\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{-x+6}}{\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{-x+6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)(4)}{\frac{1}{4}x^4 + x - 6} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

روش اول مخرج را تجزیه و $(x-2)$ را از صورت و مخرج ساده می کنیم:

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)(4)}{(x-2)\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 3\right)} = \frac{-12}{9} = \frac{-4}{3}$$

روش دوم از هسپیتال استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4(x^2 - x - 2)}{\frac{1}{4}x^4 + x - 6} &\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4(2x-1)}{x^3 + 1} \\ &= -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

نیم ۸

گزینه ۳

حد راست و چپ را جدا حساب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2+2k}{0^-} = -\infty \Rightarrow 2+2k > 0 \Rightarrow k > -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{2+2k}{0^+} = -\infty \Rightarrow 2+2k < 0 \Rightarrow k < -1$$

با اشتراک دو بازه به دست آمده داریم $-1 < k < -1$ ، بنابراین داریم:

$$a + b = (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}$$



آزمون دوم

۱. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 6x^2 + 11x - 6} - \frac{3}{x^2 - 4x^2 + 3x} \right)$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) وجود ندارد.

۲. اگر بازه $(2y, 4x + 3y)$ یک همسایگی چپ برای نقطه -2 و بازه $(-y + 2x, -x - 5y)$ یک همسایگی راست برای نقطه -3 باشد، حاصل ضرب طول این دو بازه کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۹۰ (۳) ۴۰ (۴) ۳۶

۳. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2x + a^2}{ax + \sqrt{4a^2x^2}} = -1$ ، مقدار ممکن برای a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) -1

۴. اگر تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}$ در $x = k$ حد داشته باشد، اما پیوسته نباشد و $x = k$ یکی از ریشه‌های معادله $ax^2 + 2x - b = 0$ باشد، آن‌گاه $a + b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{12}{3}$ (۳) $-\frac{8}{3}$ (۴) $-\frac{4}{6}$

۵. اگر بدانیم $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - nx} - m}{x^2 + 3x} = \frac{1}{6}$ ، حاصل $m + n$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -2 (۴) ۴

۶. اگر چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8kx$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x - k$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۶ (۳) -5 (۴) ۳

۷. مقدار $f\left(\frac{1}{4}\right)$ کدام باشد تا تابع $f(x) = \frac{[2x] - 2x}{1 - \sqrt{2x}}$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ از راست پیوسته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۸. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 + 2| \sqrt{4x^2}}{[-2x^2](x + 1)}$ ، برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) ۱ (۳) -1 (۴) $-\infty$

۹. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ در بازه $(-12, 12)$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) بی‌شمار

۱۰. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 7x + 12|}{x^2 - x[x] + [-x]}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخنامه آزمون دوم

نقشه راه	دانش آموزان سطح A	دانش آموزان سطح B	دانش آموزان سطح C	پاسخنامه کلیدی
سؤالاتی که باید در دور اول رد می‌کردی	۴	۱، ۴، ۹	۱، ۳، ۴، ۹، ۱۰	۱ گزینه ۳ ۲ گزینه ۲ ۳ گزینه ۳ ۴ گزینه ۳ ۵ گزینه ۱
سؤالاتی که حتماً باید بعد از آزمون رفع اشکال کنی	۴، ۸، ۹	۱، ۳، ۴، ۸، ۹	همه سؤالات	۶ گزینه ۳ ۷ گزینه ۲ ۸ گزینه ۲ ۹ گزینه ۲ ۱۰ گزینه ۳

تیب ۹

۳. گزینه ۳
با توجه به این که باید از بیشترین سرعت رشد استفاده کنیم، برای محاسبه ضرایب x در صورت و مخرج کسر، دو حالت داریم: اگر $a > 0$ باشد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2 x + a^2}{ax + |2ax|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2 x + a^2}{ax + (-2ax)} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{-a} = -1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1$$

اگر $a < 0$ باشد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2 x + a^2}{ax + |2ax|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2 x + a^2}{ax + (2ax)} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{3a} = -1 \Rightarrow a^2 = -3 \quad \times$$

بنابراین تنها مقدار ممکن برای a برابر با ۱ خواهد بود.

تیب ۳، ۵ و ۷

۴. گزینه ۳
با توجه به فرضیات سؤال، $x = k$ باید هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج تابع f باشد؛ پس $k = 2$ ، بنابراین $x = 2$ ریشه دو عبارت است:

$$\begin{cases} (2)^2 + a(2) + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -4 \\ a(2)^2 + 2(2) - b = 0 \Rightarrow 4a - b = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{4}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

بنابراین عبارت خواسته شده برابر است با:

$$a + b = \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

تیب ۵ و ۷

۵. گزینه ۱
در ابتدا باید توجه شود که چون مخرج به سمت صفر میل می‌کند و حاصل حد موجود است، صورت نیز حتماً باید به سمت صفر میل کند؛ پس زمانی که $x \rightarrow 0$ ، عبارت صورت باید به سمت صفر حرکت کند: $\sqrt{1-n(0)} - m = 0 \Rightarrow m = 1$

تیب ۵

۱. گزینه ۳
عبارت داده شده، وقتی $x \rightarrow 3$ ، به صورت $\infty - \infty$ (مبهم) است. پس باید رفع ابهام کنیم.

از آن جایی که مقدار عبارت $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ به ازای $x = 3$ برابر صفر می‌شود، پس $x - 3$ یکی از عوامل در تجزیه این عبارت است. با تقسیم این چندجمله‌ای بر $x - 3$ داریم:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 3)(x^2 - 3x + 2)$$

با تجزیه عبارت درجه دوم داریم:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 3)(x - 2)(x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{(x - 3)(x - 2)(x - 1)} - \frac{3}{x(x - 1)(x - 3)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{6-2x}{x-3(x-2)}}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2(x-3)}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{-2}{3 \times 2 \times 1} = -\frac{1}{3}$$

تیب ۲

۲. گزینه ۲
از همسایگی چپ -2 داریم:
 $2x - 2y = -2$
از همسایگی راست -3 داریم:
 $-y + 2x = -3$
با حل دستگاه دو معادله دو مجهول مقدار x و y را محاسبه می‌کنیم:
 $2x = 2y - 2 \Rightarrow -y + (2y - 2) = -3 \Rightarrow y = -1$
با جای گذاری در معادله دوم داریم:

$$-(-1) + 2x = -3 \Rightarrow x = -2$$

با جای گذاری مقادیر به دست آمده، دو بازه به صورت زیر خواهند بود:

$$(4x + 3y, 2x - 2y) = (-11, -2)$$

$$(-y + 2x, -x - 5y) = (-3, 7)$$

پس طول بازه اول برابر ۹ و طول بازه دوم برابر ۱۰ است. در نتیجه حاصل ضرب طول دو بازه برابر است با: $9 \times 10 = 90$



حال با استفاده از اتحاد مزدوج، رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-nx}-1}{x^2+3x} \times \frac{\sqrt{1-nx}+1}{\sqrt{1-nx}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-nx-1}{(x^2+3x)(2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-nx}{(x)(x+3)(2)} = \frac{-n}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow n = -1$$

بنابراین داریم: $m+n=1+(-1)=0$

۶. گزینه «۳» **نیم ۲**

برای به دست آوردن باقی‌مانده چندجمله‌ای $P(x)$ در تقسیم بر $x-2$ ، کافی است ریشه مقسوم‌علیه، یعنی $x=2$ را در این چندجمله‌ای قرار دهیم. با توجه به این که $P(x)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$P(2)=0 \Rightarrow (2)^3 + 2(2)^2 - 16k = 0 \Rightarrow k=1$$

باقی‌مانده تقسیم $P(x)=x^3+2x^2-8x$ بر $x-k$ برابر است با:

$$P(k)=P(1)=1+2-8=-5$$

۷. گزینه «۲» **نیم ۱۰**

از آن جایی که تابع از راست پیوسته است، حد راست تابع در نقطه $\frac{1}{2}$ با مقدار $f(\frac{1}{2})$ برابر است، پس داریم:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{[2x]-2x}{1-\sqrt{2x}}$$

$$\stackrel{\text{تعیین مقدار براکت}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1-2x}{1-\sqrt{2x}} \times \frac{1+\sqrt{2x}}{1+\sqrt{2x}}$$

$$\stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{(1-2x)(1+\sqrt{2x})}{1-2x} = 2$$

۸. گزینه «۲» **نیم ۹**

دقت کنید که در عبارت $[u]$ ، وقتی $u \rightarrow \pm\infty$ ، حضور یا عدم حضور براکت، تأثیری در $\pm\infty$ شدن عبارت ندارد؛ پس می‌توانیم با کمی فکر براکت را برداریم. حال در صورت و مخرج، عبارتی که بیشترین سرعت رشد را دارد، نگه می‌داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2+2|\sqrt{4x^2}}{[-2x^2](x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2|2x|}{(-2x^2)(x)} = \frac{-2x^3}{-2x^3} = 1$$

۹. گزینه «۲»

نیم ۱۰

در نقاطی که مقدار $y = \frac{x}{3}$ صحیح می‌شود، تابع مشکوک به ناپیوستگی است. با توجه به این که تابع $y = \frac{x}{3}$ مینیمم ندارد و همچنین پشت تابع براکت عامل صفرکننده نداریم، تمام نقاطی که $y = \frac{x}{3}$ را صحیح می‌کنند، ناپیوسته هستند. برای به دست آوردن این نقاط داریم:

$$\frac{x}{3} = k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = 3k \Rightarrow -12 < 3k < 12 \\ \Rightarrow -4 < k < 4 \Rightarrow k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

بنابراین به ازای ۷ مقدار برای k (که ۷ مقدار برای x می‌سازد)، تابع داده‌شده ناپیوسته خواهد بود.

۱۰. گزینه «۳» **نیم ۵**

ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را وقتی $x \rightarrow 3^-$ مشخص می‌کنیم:

$$x^2 - 7 + 12 = (x-3)(x-4)$$

با جای‌گذاری مقدار x ، عبارت قدرمطلق به صورت $+$ است؛ پس خود عبارت از قدرمطلق خارج می‌شود. برای تعیین براکت‌ها داریم:

$$x^2 - x[x] + [-x] = x^2 - x(2) + (-3)$$

عبارت داده‌شده وقتی $x \rightarrow 3^-$ به صورت $\frac{0}{0}$ بوده و نیاز به رفع ابهام دارد. باید عامل صفرکننده را حذف کنیم:

روش اول

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+1)} = \frac{-1}{4}$$

روش دوم با استفاده قاعده هسپیتال نیز می‌توانیم حاصل حد آخر را به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 7x + 12|}{x^2 - x[x] + [-x]} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 2x - 3} \\ = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 7}{2x - 2} = -\frac{1}{4}$$

آزمون سوم

۱. اگر تابع $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 6x + 3}{x^3 + ax^2 + bx + c}$ در $x = 1$ حد داشته باشد، اما پیوسته نباشد و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ ، آن‌گاه $a^2 - 3b - c$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱ (۴) ۱۵

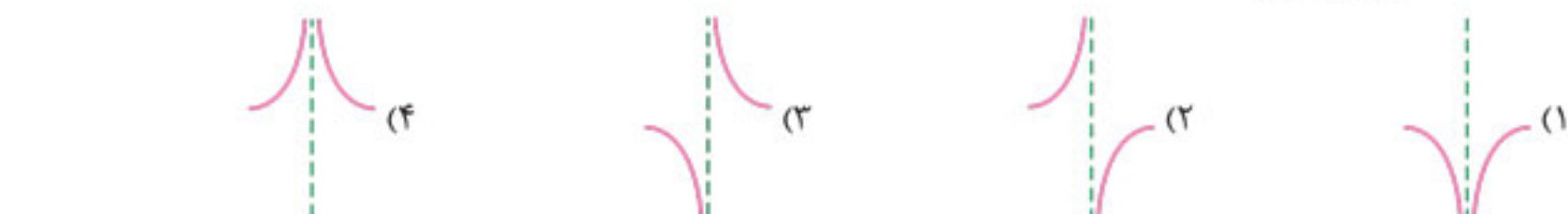
۲. اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x - 8$ برابر با ۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x^2)$ بر $7x - 14$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۱۲۵ (۴) ۸

۳. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1-x^4}}{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^4}}$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) وجود ندارد.

۴. نمودار تابع $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ در نزدیکی $x = 1$ کدام است؟



۵. تابع مقابل، چند نقطه ناپیوستگی دارد؟



۶. حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} [\frac{1}{x}] + \lim_{x \rightarrow \pi} [\frac{1}{\cos x}]$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۵ (۴) وجود ندارد.

۷. اگر $(-2, 8) \cup (3x + 2, 5x + 10)$ یک همسایگی محذوف باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{12}{5}$ (۳) ۲ (۴) گزینه «۲» و «۳» هر دو صحیح هستند.

۸. حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x^2}}{x + \sqrt{4x^2 - 5x}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) -۱ (۴) -۳

۹. تابع $f(x) = [x^2 - 25](3x^2 - 5x + 3)$ در چند نقطه با طول صحیح پیوسته است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰. حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$



پاسخ‌نامهٔ آزمون سوم

نقشهٔ راه	دانش‌آموزان سطح A	دانش‌آموزان سطح B	دانش‌آموزان سطح C	پاسخ‌نامهٔ کلیدی
سؤالاتی که باید در دور اول رد می‌کردی	۶	۱, ۶, ۹	۱, ۳, ۶, ۹, ۱۰	۱ گزینهٔ «۲» ۲ گزینهٔ «۱» ۳ گزینهٔ «۲» ۴ گزینهٔ «۴» ۵ گزینهٔ «۳»
سؤالاتی که حتماً باید بعد از آزمون رفع اشکال کنی	۱, ۶, ۹	۱, ۳, ۶, ۹, ۱۰	همهٔ سؤالات	۶ گزینهٔ «۲» ۷ گزینهٔ «۴» ۸ گزینهٔ «۴» ۹ گزینهٔ «۲» ۱۰ گزینهٔ «۱»

۱. گزینهٔ «۲»

۸ و ۷ تیب

با توجه به فرضیات مسئله، باید $x = 1$ ریشهٔ مخرج و صورت باشد؛ همچنین با توجه به این که وقتی $x \rightarrow 3^+$ و وقتی $x \rightarrow 3^-$ حد $x \rightarrow 3$ شده است، این تابع در $x = 3$ باید ریشهٔ مضاعف (از مرتبهٔ زوج) داشته باشد؛ بنابراین مخرج تابع باید به صورت زیر باشد:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-1)(x-3)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 15 \\ c = -9 \end{cases}$$

بنابراین عبارت خواسته شده برابر است با: $a^2 - 3b - c = 13$

۲. گزینهٔ «۱»

۲ تیب

با توجه به این که باقی ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - 8$ برابر با ۵ است، داریم:

برای به دست آوردن باقی ماندهٔ تقسیم $f(x^3)$ بر $7x - 14$ ، باید ریشهٔ مقسوم‌علیه، یعنی $x = 2$ را در مقسوم قرار دهیم:

$$\xrightarrow{x=2} f(x^3) = f(2^3) = f(8) = 5$$

۳. گزینهٔ «۲»

۵ تیب

برای صورت از اتحاد مزدوج و برای مخرج از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^4}} &\times \frac{\sqrt{1+x^4} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^4} + \sqrt{1-x^2}} \\ &\times \frac{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{(1+x^2)(1-x^4)} + \sqrt[3]{(1-x^4)^2}}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{(1+x^2)(1-x^4)} + \sqrt[3]{(1-x^4)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+x^4) - (1-x^2))(3)}{((1+x^2) - (1-x^4))(2)} \\ &= \frac{3}{2} x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2}{x^2 + x^4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

۴. گزینهٔ «۴»

۸ و ۴ تیب

در نزدیکی $x = 1$ ، صورت کسر به عددی مثبت میل می‌کند و مخرج کسر به سمت صفر می‌رود. با توجه به این که مخرج به فرم $(x-1)^2$ است، هم در حالت $x \rightarrow 1^+$ و هم در حالت $x \rightarrow 1^-$ حاصل حد $\frac{1}{+} = +\infty$ خواهد بود؛ پس گزینهٔ «۴» درست است.

۵. گزینهٔ «۳»

۱۰ و ۴ تیب

این تابع در سه نقطه ناپیوسته است. در $x = -2$ ناپیوسته است؛ زیرا حد تابع با مقدار آن برابر نیست. در $x = 1$ ناپیوسته است؛ زیرا در این نقطه مقدار تابع تعریف نشده است.

در $x = 2$ ناپیوسته است؛ زیرا در این نقطه حد راست با حد چپ و مقدار تابع برابر نیست.

۶. گزینهٔ «۲»

۴ تیب

برای عبارت سمت چپ، با توجه به خواص نامساوی‌ها داریم:

$$x < \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} > -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \left[\frac{1}{x} \right] = -2$$

برای عبارت سمت راست نیز دقت کنید که $\cos x$ همواره بین -1 و 1 است و هیچ‌گاه کمتر از -1 نمی‌شود؛ بنابراین برای مخرج همواره $(-1)^+$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left[\frac{1}{\cos x} \right] = \left[\frac{1}{(-1)^+} \right] = -2$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر با $(-2) + (-2) = -4$ خواهد بود.

Mars برای هر دو حالت می‌توانیم به جای مقادیر حدی،

عدد بگذاریم؛ به عنوان مثال در $x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-$ ، می‌توانیم

$x = -\frac{1}{6}$ قرار دهیم که در این صورت $\frac{1}{x} = -\frac{1}{6}$ می‌شود و به جواب می‌رسیم.

نیم ۱۰

۹. گزینه ۲ در نقاطی که عبارت $x^2 - 25$ مقداری صحیح می‌شود، تابع مشکوک به ناپیوستگی است. با توجه به این که عبارت $3x^2 - 5x + 3 = 0$ ریشه ندارد، در صورتی که تابع $y = x^2 - 25$ در نقطه‌ای به کمترین مقدار خود برسد، پیوسته می‌شود؛ در غیر این صورت در همه نقاطی که مقدار تابع $y = x^2 - 25$ مقداری صحیح شود، تابع ناپیوسته است. تابع $y = x^2 - 25$ در $x = 0$ به کمترین مقدار خود می‌رسد، پس تابع f در این نقطه پیوسته خواهد بود. توجه داشته باشید در هر دو حالت وقتی $x \rightarrow 0^+$ و $x \rightarrow 0^-$ ، مقادیر x^2 با مقادیر بیشتر از صفر به صفر میل می‌کند، پس $y = x^2 - 25$ با مقادیر بیشتر به -25 میل می‌کند؛ در نتیجه $[x^2 - 25] = -25$ ، بنابراین این تابع فقط در یک نقطه پیوسته خواهد بود.

نیم ۶

۱۰. گزینه ۱ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x (\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x (\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})} = 1 \end{aligned}$$

در قسمت دوم به جای $(-1)^+$ ، $(-9/9)$ قرار می‌دهیم؛ در این صورت داریم:

$$\left[\frac{1}{-9/9} \right] = \left[\frac{-1^0}{9} \right] = -2$$

نیم ۴

۷. گزینه ۴ با توجه به این که اجتماع خاصیت جابه‌جایی دارد، نقطه محذوف می‌تواند ۸ یا -2 باشد؛ پس دو حالت ایجاد می‌شود، اما باید مطمئن شویم به ازای هر کدام از جواب‌های x ، ترتیب نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ها رعایت شود.

$$5x + 10 = -2 \Rightarrow x = -\frac{12}{5}$$

حالت اول

با جای‌گذاری مقدار x داریم:

$$(3x + 2, 5x + 10) \cup (-2, 8) = \left(-\frac{26}{5}, -2\right) \cup (-2, 8)$$

پس این حالت قابل قبول است.

$$3x + 2 = 8 \Rightarrow x = 2$$

حالت دوم

با جای‌گذاری مقدار x داریم:

$$(3x + 2, 5x + 10) \cup (-2, 8) = (8, 20) \cup (-2, 8)$$

این حالت نیز قابل قبول است؛ در نتیجه هر دو مقدار به دست آمده برای x قابل قبول است.

نیم ۹

۸. گزینه ۴ در صورت و مخرج باید عبارت با سرعت رشد بیشتر را انتخاب کنیم. دقت کنید که $x \rightarrow -\infty$ ، علامت‌ها را باید با دقت تعیین کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^3 - 3x^2}}{x + \sqrt{4x^2 - 5x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{x + |2x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x - 2x} = -3 \end{aligned}$$

آزمون چهارم

۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{27^x + 2 \times 3^{x+1} - 7}{9 - 3^{2-x}}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲. اگر بازه $(-8 - a, 2a - 6) \cup (-2 - b, 2b - 4)$ یک همسایگی محذوف برای نقطه -4 باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

(۱) $(0, -4)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(1, -4)$ (۴) $(1, 2)$

۳. حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2^x}{2x + 3^x}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۴. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \sin(\pi x)[x]$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار



۵. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} [3x^2 - ax] = b$ ، آن‌گاه $a^2 + b^2$ کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۲۵ (۲) ۴۱ (۳) ۴۵ (۴) ۴۰

۶. اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^2 + 3x - 4$ برابر با $3x - 1$ باشد، باقی‌مانده تقسیم عبارت $f(-x) + 2f(x - 3)$ بر $x + 1$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴ (۳) ۲۶ (۴) -۲۴

۷. اگر $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x)}{\sin x} = -\infty$ ، کدام مورد می‌تواند تابع f باشد؟

- (۱) $[\frac{3x}{\pi}] - 4$ (۲) $-[\frac{3x}{\pi}] + 4$ (۳) $[\frac{2x}{\pi}] - 3$ (۴) $[\frac{x-1}{\pi}] - 1$

۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2(\sin x^2)}{3x^2 + x(\cos x^2)}$ کدام است؟

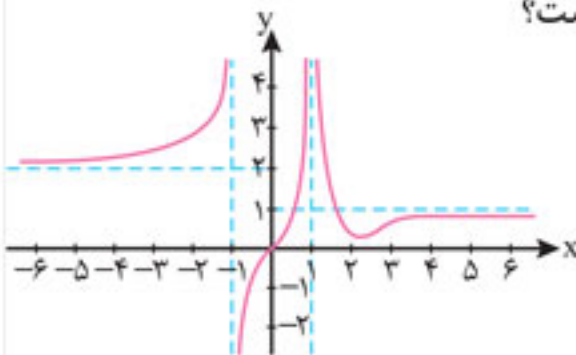
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۹. اگر تابع $f(x) = (x^2 - ax + b)[x]$ در نقاط $x = 1$ و $x = 5$ حد داشته باشد، $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱۱ (۳) ۱۱ (۴) امکان ندارد.

۱۰. نمودار تابع f مطابق شکل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} [f(f(x))] + \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $+\infty$



پاسخ‌نامهٔ آزمون چهارم



نقشهٔ راه	دانش‌آموزان سطح A	دانش‌آموزان سطح B	دانش‌آموزان سطح C	پاسخ‌نامهٔ کلیدی
سؤالاتی که باید در دور اول رد می‌کردی	۵، ۱۰	۱، ۵، ۱۰	۱، ۳، ۴، ۵، ۱۰	۱. گزینه ۱ ۲. گزینه ۴ ۳. گزینه ۳ ۴. گزینه ۱ ۵. گزینه ۳ ۶. گزینه ۴ ۷. گزینه ۲ ۸. گزینه ۱ ۹. گزینه ۱ ۱۰. گزینه ۲
سؤالاتی که حتماً باید بعد از آزمون رفع اشکال کنی	۱، ۵، ۱۰	۱، ۳، ۴، ۵، ۱۰	همهٔ سؤالات	

۱. گزینه ۱

۵. تیب ۵

۲. گزینه ۴

۴. تیب ۱

حالت اول اگر بازه $(-8 - a, 2a - 6)$ همسایگی راست نقطه -4 باشد، بازه $(-2 - b, 2b - 4)$ همسایگی چپ این نقطه خواهد بود، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} 2b - 4 = -4 \Rightarrow b = 0 \\ -8 - a = -4 \Rightarrow a = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-2 - b, 2b - 4) \cup (-8 - a, 2a - 6)$$

$$= (-2, -4) \cup (-4, -14)$$

که به وضوح همسایگی محذوف -4 نیست.

عبارت داده‌شده وقتی $x \rightarrow 0$ ، به صورت $\frac{0}{0}$ (مبهم) است؛ پس باید رفع ابهام کنیم. با تغییر متغیر $3^x = t$ ، وقتی $x \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌شود $t \rightarrow 1$ ؛ پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x)^2 + 6 \times 3^x - 7}{9 - \frac{9}{3^x}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + 6t - 7}{9 - \frac{9}{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2 + t + 7)}{9(t-1)} = \frac{9}{9} = 1$$

حال برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $f(-x) + 2f(x-3)$ بر $x+1$ ، کافی است $x = -1$ را در عبارت قرار دهیم:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{x=-1} f(-(-1)) + 2f((-1)-3) \\ &= f(1) + 2f(-4) = 2 + 2(-13) = -24 \end{aligned}$$

۷. گزینه «۲» **نکته ۸**

با توجه به این که وقتی $x \rightarrow \pi^+$ ، $\sin x \rightarrow 0^-$ ، پس صورت کسر باید عددی مثبت باشد.

بررسی تک تک گزینه‌ها:

گزینه (۱): $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \left(\left[\frac{3x}{\pi} \right] - 4 \right) = [3^+] - 4 = 3 - 4 = -1$

گزینه (۲): $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \left(-\left[\frac{3x}{\pi} \right] + 4 \right) = -[3^+] + 4 = -3 + 4 = 1$

گزینه (۳): $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \left(\left[\frac{2x}{\pi} \right] - 3 \right) = [2^+] - 3 = 2 - 3 = -1$

گزینه (۴): $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \left(\left[\frac{x-1}{\pi} \right] - 1 \right) = 0 - 1 = -1$

فقط در گزینه «۲»، صورت کسر، عددی مثبت می‌شود.

۸. گزینه «۱» **نکته ۹**

می‌دانیم توابع مثلثاتی سینوسی و کسینوسی بین -1 و 1 محدود هستند، پس هنگام استفاده از قاعده پرتوان تأثیری ندارند. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2(\sin x^2)}{3x^3 + x(\cos x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$$

۹. گزینه «۱» **نکته ۱۰**

تابع $y = [x]$ در هیچ نقطهٔ صحیحی حد ندارد؛ پس اگر می‌خواهیم تابع f در نقاط $x = 1$ و $x = 5$ حد داشته باشد، باید حد چپ و راست $y = [x]$ را در این نقاط صفر کنیم؛ بنابراین $x = 5$ و $x = 1$ باید ریشه‌های عبارت پشت براکت باشند. با توجه به قوانین جمع و ضرب ریشه‌های معادله درجهٔ دوم داریم:

$$\begin{cases} S = 5 + 1 = 6 = a \\ P = 5 \times 1 = 5 = b \end{cases} \Rightarrow a - b = 6 - 5 = 1$$

۱۰. گزینه «۲» **نکته ۱۱**

مطابق شکل، برای عبارت اول از سمت چپ، وقتی $x \rightarrow 1$ ، مقادیر تابع f به $+\infty$ میل می‌کند. این نتیجه را دوباره به f می‌دهیم. در f ، $x \rightarrow +\infty$ ، تابع از سمت مقادیر کمتر به عدد 1 میل می‌کند که چون براکت داریم، حاصل حد صفر خواهد شد.

برای عبارت سمت راست، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، تابع f به عدد 1 میل می‌کند؛ بنابراین حاصل حد برابر با 1 است. در نهایت قرار است از حاصل حد براکت بگیریم که براکت عدد 1 ، همان 1 خواهد بود؛ بنابراین مجموع دو عبارت خواسته شده برابر است با: $0 + 1 = 1$

حالت دوم اگر بازه $(-8-a, 2a-6)$ همسایگی چپ نقطه -4 باشد، بازه $(-2-b, 2b-4)$ همسایگی راست این نقطه خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -2-b = -4 \Rightarrow b = 2 \\ 2a-6 = -4 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \\ & \Rightarrow (-8-a, 2a-6) \cup (-2-b, 2b-4) \\ &= (-9, -4) \cup (-4, 0) \end{aligned}$$

شرط همسایگی محذوف برقرار است؛ پس زوج مرتب (a, b) برابر $(1, 2)$ خواهد بود.

۳. گزینه «۳» **نکته ۱۲**

توجه کنید که وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت $\frac{1}{x}$ به صفر میل می‌کند و در نتیجه عبارت‌های 2^x و 3^x هر دو به عدد 1 میل می‌کنند؛ بنابراین اگر بخواهیم سرعت رشد بیشتر را در نظر بگیریم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2^x}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 1}{2^x + 1} = \frac{3}{2}$$

۴. گزینه «۱» **نکته ۱۳**

تابع $y = [x]$ در تمام نقاط صحیح ناپیوسته است، اما دقت کنید که تابع $y = \sin(\pi x)$ در تمام نقاط صحیح صفر می‌شود؛ پس این عبارت در تمام نقاط صحیح، عدد صفر را در عبارت $[x]$ ضرب می‌کند؛ بنابراین تابع f نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۵. گزینه «۳» **نکته ۱۴**

با توجه به صحیح بودن a ، عبارت داخل براکت نیز در نقاط صحیح، صحیح است؛ پس وقتی $x \rightarrow 1$ تابع حد دارد، یعنی کمترین مقدار تابع داخل براکت در این نقطه اتفاق می‌افتد:

$$-\frac{(-a)}{2 \times 3} = 1 \Rightarrow a = 6$$

یادآوری: می‌دانیم طول رأس سهمی برابر با $\frac{-b}{2a}$ است که در آن، a و b به ترتیب ضرایب x^2 و x هستند.

با جای گذاری $a = 6$ و قرار دادن $x = 1$ ، در تابع داخل براکت داریم:

$$3(1)^2 - (6)(1) = b = -3$$

بنابراین عبارت خواسته شده برابر است با:

$$a^2 + b^2 = (6)^2 + (-3)^2 = 45$$

۶. گزینه «۴» **نکته ۱۵**

با توجه به رابطه تقسیم، برای به دست آوردن باقی مانده چندجمله‌ای $f(x)$ در تقسیم بر هر عبارتی، باید ریشه (یا ریشه‌های) مقسوم علیه را در $f(x)$ قرار دهیم. با استفاده از رابطه تقسیم داریم:

$$f(x) = (x^2 + 3x - 4)q(x) + 3x - 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-4) = -13 \end{cases}$$

