

تقدیم به همسر مهربانم تقدیم به عزیزترین...
پیام ابراهیم‌نژاد سپهر متولی

مقدمه ناشر

شاید برای شما خیلی سبزی‌ها هم اتفاق بیفتد!

این‌که نمودار کسینوس یادت بره!

اتحاد چاق و لاغر یادت بره!

تعریف دو پیشامد ناسازگار (یعنی پیشامدهایی با هم دعوا دارن!) یادت بره!

دیگه اوضاع خیلی بحرانی بشه و یادت بره چطوری نقطه بحرانی یه تابع رو پیدا کنی!

...

خیلی وقتا پیش میاد وقتی که واسه کنکور یه فرمولی یه تعریفی یه نکته کنکوری ... خلاصه یه چیزی یادتون می‌ره دیگه! حالا بیا جمعش کن! باید کلی تو کتابات بگردی تو جزوه‌ها بگردی تا پیدااش کنی! تازه از بس ورق زدی کتابارو دستاتم ممکنه پینه بزنه! 😊

نگران نباش! چون تو فرمول‌نامه ریاضیات رو تو جیبیت داری!

با این کتاب می‌تونی خیلی راحت همه فرمول‌ها، تعاریف، نمودارها و نکات کنکوری رو سریع مرور کنی!

این کتاب حاصل دسترنج همه دوستان تألیف و تولید خیلی سبزه که زحمت زیادی براش کشیدن. دم همتون گرم!

مقدمه مؤلف

اون موقعی که کنکور داشتم و یه کتاب کنکوری می خریدم بلافاصله مقدمشو می خوندم تا با تفکرات مؤلف آشنا بشم علی الخصوص کتابای خیلی سبز، اصلاً مقدمه های خیلی سبز یه چیز دیگه بودن! حالا نوبت خودم شده تا برای خیلی سبز مقدمه بنویسم. فرصت زیادی ندارم ولی بگم با این کتابی که دستتونه تو مدت کوتاهی مثلاً چند ساعت، می تونین یه مرور خوب و کافی از کل ریاضی کنکور تون داشته باشید... البته کارکرد این کتاب خیلی بیشتر از این حرفاست. قبل از هر آزمون برای دوره کردن مطالب یا برای چک کردن هر چیزی که فراموش کردید می تونید از این کتاب استفاده کنید.

فصل های کتاب به صورت موضوعی دسته بندی شدن و تمامی کتاب های ریاضی پایه، حسابان ها، هندسه ها، گسسته و آمار و احتمال رو پوشش می دن. هر فصل شامل تمامی فرمول ها، تعاریف، نمودارها، روابط و نکات کنکوره. جاهایی هم که نیاز بوده از مثال استفاده کردیم تا مطلب حسابی براتون جا بیفته!

در تألیف این کتاب دوستان زیادی تلاش کردند که قدردان همشون هستیم. تشکر ویژه از:

- دکتر کمیل نصری که فرصت تألیف این کتاب رو به ما دادند.
 - احسان حسینیان عزیز مدیر تألیف خوب و خوش ذوق انتشارات.
 - کیوان صارمی بابت کمک هاش
 - و بچه های خوب تولید خیلی سبز که زحمت زیادی برای این کتاب کشیدند.
- و در پایان ممنون می شیم ایرادات کتاب رو باهامون در میون بذارید.

@payamebrahimnejad پیام ابراهیم نژاد @mathmots سپهر متولی

بهار ۱۴۰۲

فهرست مطالب

۷	الگو و دنباله	فصل اول
۱۴	توان‌های گویا و عبارتهای جبری	فصل دوم
۱۹	معادله، نامعادله و تعیین علامت	فصل سوم
۲۹	هندسه تحلیلی	فصل چهارم
۳۵	قدرمطلق و جزءصحیح	فصل پنجم
۴۳	تابع	فصل ششم
۶۵	توابع نمایی و لگاریتمی	فصل هفتم
۷۱	مثلثات	فصل هشتم
۸۲	حد و پیوستگی	فصل نهم
۱۰۳	مشتق	فصل دهم
۱۱۳	کاربرد مشتق	فصل یازدهم
۱۲۵	مجموعه‌ها	فصل دوازدهم
۱۳۴	منطق ریاضی	فصل سیزدهم

۱۴۱	آشنایی با نظریهٔ اعداد	فصل چهاردهم
۱۵۰	گراف و مدل‌سازی	فصل پانزدهم
۱۶۱	ترکیبیات (شمارش)	فصل شانزدهم
۱۷۰	احتمال	فصل هفدهم
۱۷۷	آمار	فصل هجدهم
۱۹۴	ترسیم‌های هندسی و استدلال	فصل نوزدهم
۲۰۲	قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن	فصل بیستم
۲۱۱	چندضلعی‌ها	فصل بیست و یکم
۲۲۵	تجسم فضایی	فصل بیست و دوم
۲۳۵	دایره	فصل بیست و سوم
۲۴۸	تبدیل‌های هندسی و کاربردها	فصل بیست و چهارم
۲۵۸	روابط طولی در مثلث	فصل بیست و پنجم
۲۶۲	ماتریس و کاربردها	فصل بیست و ششم
۲۷۴	آشنایی با مقاطع مخروطی	فصل بیست و هفتم
۲۹۲	بردارها	فصل بیست و هشتم

الگو و دنباله

فصل ۱

- ۱ الگو: ساختاری منظم از شکل‌ها یا اعداد که تکرار شونده باشند.
- ۲ جمله عمومی الگو: رابطه‌ای که ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند.

مثال

$$2, 5, 8, 11, \dots, a_n = 3n - 1$$

جمله عمومی = جمله n ام

جمله چهارم a_4 ، جمله سوم a_3 ، جمله دوم a_2 ، جمله اول a_1

به کمک جمله عمومی می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد.

الگوهای مهم

۳ الگوی خطی:

$$\text{جمله عمومی: } t_n = an + b$$

اختلاف هر دو جمله متوالی این الگو، برابر عددی ثابت (a) است.

۴ الگوی درجه دوم:

$$\text{جمله عمومی: } t_n = an^2 + bn + c$$

اعداد حاصل از اختلاف هر دو جمله متوالی الگوی درجه دوم، یک الگوی خطی، تشکیل می‌دهند که اختلاف جملات این الگوی خطی، برابر $2a$ است.

مثال

$$t_n = n^2 - 1$$

۳ ، ۸ ، ۱۵ ، ۲۴ ، ...

الگوی خطی ... → الگوی خطی

۵ الگوی مربعی:

$$\text{جمله عمومی: } t_n = n^2$$



۶ الگوی مثلثی:

$$\text{جمله عمومی: } t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



۷ الگوی بازگشتی: الگویی که هر جمله آن از روی جملات قبلی، به دست می آید.

مثال

$$\text{الگوی فیبوناچی: } \begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \end{cases}$$

جملات الگو: ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ...

۸ دنباله: تعدادی عدد که پشت سر هم نوشته می شوند.



۹ دنباله حسابی: اختلاف هر دو جمله متوالی برابر عددی ثابت است که به این عدد ثابت، قدرنسبت (d) می‌گوییم.

[تذکره] دنباله حسابی، یک نوع دنباله خطی است.

۱۰ جمله عمومی دنباله حسابی:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

قدرنسبت: d و جمله اول دنباله: a_1

ضریب n در جمله عمومی دنباله حسابی برابر قدرنسبت (d) است.

مثال

$$a_n = 3n + 4 \Rightarrow \text{قدرنسبت} = d = 3$$

۱۱ تعداد جملات در یک دنباله حسابی:

$$n = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{قدرنسبت}} + 1$$

مثال

$$4, 8, 12, \dots, 80 \Rightarrow \text{تعداد جملات} = \frac{80 - 4}{4} + 1 = 20$$

۱۲ روابط بین جملات دنباله حسابی:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

$$a_n - a_m = (n - m)d$$

$$n + m = r + q \Rightarrow a_n + a_m = a_r + a_q$$

اگر به دنبال سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشیم، بهتر است آن‌ها را به صورت $a - d, a, a + d$ بنویسیم.

۱۳ واسطه حسابی:

$$a, b, c \text{ واسطه حسابی } a, b, c \text{ است.} \rightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

مفهوم در سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی، جمله وسطی میانگین دو جمله دیگر است.

۱۴ **درج واسطه حسابی:** قراردادان k عدد بین دو عدد a و b ، به طوری که همه اعداد با هم تشکیل دنباله حسابی دهند:

$$d = \frac{b-a}{k+1} = \text{قدرنسبت}$$

مثال

$$a = 14, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 59 \xrightarrow[k=4]{\text{درج ۴ واسطه حسابی}}$$

$$d = \frac{b-a}{k+1} = \frac{59-14}{5} = 9 \xrightarrow[\text{دنباله}]{\text{جملات}} 14, (23), (32), (41), (50), 59$$

۱۵ **دنباله‌های حسابی و افزایشی:**

قدرنسبت	نوع دنباله
$d < 0$	کاهشی
$d > 0$	افزایشی

۱۶ **مجموع جملات دنباله حسابی:**

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

تعداد جملات: n و جمله اول: a_1 و جمله آخر: a_n

مثال

$$2, 7, 12, \dots \xrightarrow[d=5]{a_1=2} S_n = \frac{n}{2}(2 \times 2 + (n-1)5)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(\Delta n - 1)$$

اگر n عددی فرد و a_k جمله وسط دنباله حسابی باشد:

$$S_n = na_k$$



۱۷ مجموع‌های معروف:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\underbrace{(1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1)}_{tn} = n^2$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

۱۸ جمله عمومی از روی مجموع جملات دنباله

$$a_1 = S_1$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$



$$S_n = n^2 - 3n \xrightarrow[\text{۵۲ است؟}]{\text{جمله چندانم دنباله}} S_{n-1} = (n-1)^2 - 3(n-1)$$

$$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 3n - [n^2 - 2n + 1 - 3n + 3] = 2n - 4$$

$$\Rightarrow 52 = 2n - 4 \Rightarrow n = 28$$

۱۹ پیدا کردن جملات مشترک دو دنباله: اولین جمله مشترک دو دنباله، جمله اول

دنباله مشترک و ک.م.م قدرنسبت‌های دو دنباله، قدرنسبت دنباله مشترک است.



$$1, 5, 9, 13, \dots \rightarrow d_1 = 4 \quad 3, 6, 9, 12, \dots \rightarrow d_2 = 3$$

$$[3, 4] = 12 = \text{قدرنسبت}, 9 = \text{اولین جمله مشترک}$$

$$\text{جملات دنباله مشترک: } 9, 21, 33, \dots$$

۲۰ دنباله هندسی: هر جمله از ضرب جمله قبلی در عددی ثابت (به جز

صفر) به دست می‌آید. به عدد ثابت دنباله هندسی، قدرنسبت (r) می‌گویند.

۲۱ جمله عمومی دنباله هندسی:

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

جمله اول: t_1 و قدرنسبت: r

مثال

$$5, 15, 45, 135, \dots \xrightarrow[r=3]{t_1=5} \text{جمله عمومی} = 5 \times 3^{n-1}$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\times 3} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\times 3} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\times 3}$

۲۲ روابط بین جملات دنباله هندسی:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = r$$

$$\frac{t_n}{t_m} = r^{n-m}$$

$$n + m = p + q \Rightarrow t_n \times t_m = t_p \times t_q$$

مثال

$$2, 6, 18, 54, 162, \dots \rightarrow t_v = ?$$

$$4 + 4 = 1 + 7 \Rightarrow t_4 \times t_4 = t_1 \times t_7$$

$$\Rightarrow 54^2 = 2 \times t_v \Rightarrow t_v = \frac{54^2}{2} = 1458$$

۲۳ واسطه هندسی:

$$a, b, c \xrightarrow[\text{هندسی}]{\text{واسطه } b} b^2 = ac$$

مفهوم در سه جمله متوالی یک دنباله هندسی، مربع عدد وسطی، برابر با حاصل ضرب دو عدد دیگر است.

۲۴ درج واسطه هندسی: قراردادن k عدد بین دو عدد a و b ، به طوری که همه اعداد با هم تشکیل دنباله هندسی دهند:

$$r^{k+1} = \frac{b}{a}$$

مثال

$$a = 256, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, b = 16 \xrightarrow[k=3]{\text{درج ۳ واسطه هندسی}}$$

$$r^{3+1} = \frac{16}{256} \Rightarrow r^4 = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$



۲۵ دنباله‌های هندسی افزایشی یا کاهشی: در دنباله هندسی با قدرنسبت r ، اگر جمله اول مثبت باشد، آن گاه:

مفهوم	نوع دنباله	قدرنسبت
جملات دنباله در حال افزایش	دنباله افزایشی	$r > 1$
جملات دنباله در حال کاهش	دنباله کاهشی	$0 < r < 1$
جملات دنباله، یکی در میان مثبت یا منفی هستند.	نه افزایشی، نه کاهشی	$r < 0$

۲۶ مجموع جملات دنباله هندسی:

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}$$

تعداد جملات: n و قدرنسبت: r ، جمله اول: t_1



مثال

$$75, 15, 3, \frac{3}{5}, \dots \xrightarrow[r = \frac{1}{5}, t_1 = 75]{\text{مجموع } 10 \text{ جمله اول}} S_{10} = \frac{75(1 - (\frac{1}{5})^{10})}{1 - \frac{1}{5}}$$

۲۷ دنباله ثابت: تمام جملات دنباله، یکسان هستند.

دنباله ثابت، هم دنباله هندسی است، هم دنباله حسابی.

۲۸ ترکیب دنباله هندسی و حسابی: اگر جملات n_m ، m_m و p_m از یک

دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با:

$$r = \frac{p - n}{n - m}$$

احتمال

فصل ۱۷

۱ پدیده تصادفی: آزمایشی است که نتیجه آن قبل از وقوع به طور دقیق مشخص نیست، اما تمام حالت‌های ممکن آن قبل از به وقوع پیوستن، مشخص است.

۲ فضای نمونه:

$S = \{ \text{تمام حالت‌های ممکن در یک پدیده تصادفی} \}$

۳ برآمد: هر عضو فضای نمونه‌ای

۴ پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای

اگر فضای نمونه‌ای دارای n عضو باشد، تعداد پیشامدهای این فضای نمونه‌ای 2^n است.

مثال

پیشامدهای تصادفی	برآمدها	فضای نمونه‌ای	آزمایش تصادفی
$\{ \text{پشت} \} \{ \text{رو} \}$	پشت رو	$\{ \text{رو، پشت} \}$	پرتاب سکه

۵ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای:

تعداد اعضای S	آزمایش تصادفی
2^n	پرتاب n سکه
6^n	پرتاب n تاس
$2^m \times 6^n$	پرتاب n تاس و m سکه
2^n	جنسیت فرزندان (n فرزند)
$\binom{m}{n}$	انتخاب n شیء از m شیء



۶ مجموع اعداد روشده در پرتاب دو تاس:

مجموع اعداد روشده در پرتاب تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

تذکره -- تمامی اعمال و قوانینی که برای مجموعه‌ها گفته شده، برای پیشامدها نیز برقرار است.

۷ احتمال رخ دادن یک پیشامد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

A پیشامدی از S

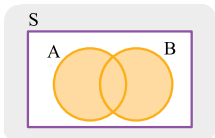
نکته الف اگر A پیشامدی از S باشد، آن گاه: $0 \leq P(A) \leq 1$

ب اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه: $P(A) \leq P(B)$

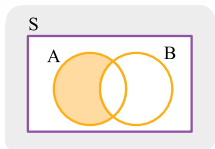
قوانین احتمال

الف $P(\emptyset) = 0$ ، $P(S) = 1$

ب احتمال اجتماع: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



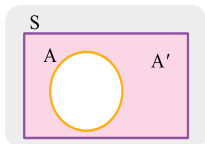
ب احتمال تفاضل: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$





$$P(A') = 1 - P(A)$$

ت احتمال متمم:



الف $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

نتیجه

ب $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

ب اگر $B \subseteq A$ ، آن گاه:

ت اگر A و B ناسازگار باشند:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{و} \quad P(A - B) = P(A)$$

ت اگر A ، B ، و C دو به دو ناسازگار باشند:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

۸ احتمال غیرهم‌شانس: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده (پیشامد تک‌عضوی) از فضای نمونه‌ای S احتمال نابرابر داشته باشند، به S فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

۹ قوانین احتمال غیرهم‌شانس: اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس باشد، آن گاه:

الف $0 \leq P(A) \leq 1$

ب $P(S) = 1$

ب $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$

۱۰ احتمال شرطی:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B ناتهی است.

تعریف: احتمال رخ دادن A به شرط آن که B رخ داده باشد.



۱۱ قانون ضرب احتمال:

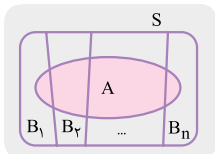
$$P(A \cap B) = P(B)P(A | B)$$

۱۲ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B | A)P(C | (A \cap B))$$

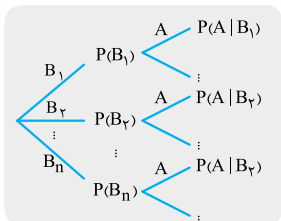
۱۳ قانون احتمال کل:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + \dots + P(B_n)P(A | B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A | B_k)$$



شرط: B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهای ناتهی باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند و A پیشامدی دلخواه.

۱۴ حل مسائل احتمال کل به کمک نمودار درختی:




$$P(A) = \underbrace{P(B_1) \times P(A | B_1)}_{\text{حاصل ضرب احتمال‌های شاخه اول}} + \underbrace{P(B_2) \times P(A | B_2)}_{\text{حاصل ضرب احتمال‌های شاخه دوم}} + \dots + \underbrace{P(B_n) \times P(A | B_n)}_{\text{حاصل ضرب احتمال‌های شاخه n ام}}$$



۱۵ نتیجه قانون احتمال کل:

$$P(A) = P(B)P(A | B) + P(B')P(A | B')$$

شرط: $0 < P(B) < 1$ و A دلخواه.

 اگر در برخی مسائل کیسه و مهره، مهره یا مهره‌هایی را بدون دیدن رنگ آن‌ها، از کیسه کنار بگذاریم، تأثیری در احتمال مهره‌های خارج‌شده بعد از آن ندارد.

مثال

در کیسه‌ای که ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز وجود دارد ۲ مهره بدون دیدن، برداشته و کنار می‌گذاریم. احتمال این که مهره سوم قرمز باشد، $\frac{4}{7}$ است.

۱۶ قانون بیس:

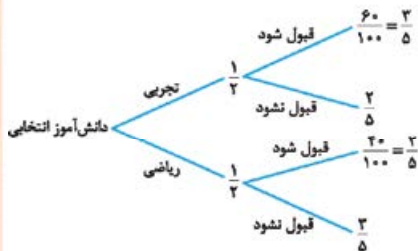
$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A | B_k)}$$

احتمال کل

شرط: B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهای ناتهی که فضای نمونه‌ای را افزاز می‌کنند، A دلخواه و $1 \leq i \leq n$.

مثال

در مدرسه‌ای دو گروه دانش‌آموز تجربی و ریاضی داریم. احتمال قبولی دانش‌آموزان رشته تجربی در کنکور ۶۰ درصد و احتمال قبولی دانش‌آموزان رشته ریاضی ۴۰ درصد است. یک دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم؛ اگر بدانیم این فرد در کنکور قبول شده باشد، آنگاه احتمال این که از رشته تجربی باشد برابر است با:



$$P(\text{قبول} | \text{تجربی}) = ?$$

$$P(\text{قبول}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10}$$

$$P(\text{قبول} \cap \text{تجربی}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{قبول} | \text{تجربی}) = \frac{P(\text{قبول} \cap \text{تجربی})}{P(\text{قبول})} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{5}$$

۱۷ پیشامدهای مستقل و وابسته: به پیشامدهای A و B مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. به دو پیشامدی که مستقل نباشد، وابسته می‌گوییم.

۱۸ شرط مستقل بودن دو پیشامد:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

اگر A و B مستقل باشند، آن‌گاه

الف $P(B | A) = P(B)$ و $P(A | B) = P(A)$

ب (B', A) ، (A', B') و (A', B) نیز مستقل هستند.

۱۹ سه پیشامد مستقل: سه پیشامد A ، B و C مستقل هستند، هرگاه شرط‌های زیر به طور هم‌زمان برقرار باشد:

الف $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

ب $P(A \cap C) = P(A)P(C)$

پ $P(B \cap C) = P(B)P(C)$

ت $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

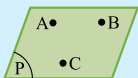
الف در n بار پرتاب سکه:

$$\text{احتمال } k \text{ بار «پشت» آمدن} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \text{احتمال } k \text{ بار «رو» آمدن}$$

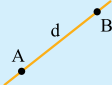
ب در بین n فرزند:

$$\text{احتمال } k \text{ تا پسر داشتن} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \text{احتمال } k \text{ تا دختر داشتن}$$

۱ نحوه نمایش نقطه، خط و صفحه:



صفحه BAC ، ABC ، ...
یا صفحه P



خط AB یا BA ، یا خط d

نقطه A

۲ ویژگی نقطه، خط و صفحه در فضا:

ویژگی	شکل
از یک نقطه در صفحه (یا فضا)، بی شمار خط می گذرد.	
از هر دو نقطه متمایز در صفحه (فضا)، یک و تنها یک خط می گذرد.	
از هر سه نقطه متمایز در فضا که در یک راستا (روی یک خط) نباشند، یک و تنها یک صفحه می گذرد.	
از هر سه نقطه متمایز در فضا که در یک راستا هستند (روی یک خط باشند)، بی شمار صفحه می گذرد.	

ویژگی	شکل
از یک خط و یک نقطه خارج آن، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.	

۳ حالت‌های مختلف دو خط در صفحه:

مقاطع	موازی	
	غیر منطبق	منطبق

از دو خط موازی و هم‌چنین از دو خط متقاطع و هم‌چنین از دو خط موازی در صفحه، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

۴ حالت‌های مختلف دو خط در فضا

حالت	ویژگی	شکل
مقاطع	دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند.	
موازی	دو خط هیچ نقطه اشتراکی ندارند اما صفحه‌ای وجود دارد که شامل هر دوی آنهاست.	
متنافر	دو خط هیچ نقطه اشتراکی ندارند و هیچ صفحه‌ای که شامل هر دوی آنها باشد، وجود ندارد.	

در حالتی که دو خط بر هم منطبق می‌شوند، آنها را یک خط در نظر می‌گیریم.

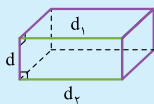


توجه در صفحه یا فضا: الف از هر نقطه خارج یک خط، تنها یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.

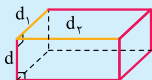
ب دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند.

۵ دو خط عمود بر یک خط: در صفحه، دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند، اما در فضا، دو خط عمود بر یک خط، ممکن است موازی، متقاطع یا متناظر باشند.

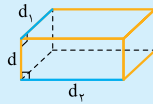
خط‌های d_1 و d_2 بر خط d عمودند.



d_1 و d_2 موازی



d_1 و d_2 متقاطع



d_1 و d_2 متناظر

۶ حالت‌های مختلف خط و صفحه:

خط واقع بر صفحه	متقاطع	موازی

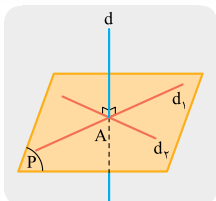
۷ حالت‌های مختلف دو صفحه

متقاطع	موازی

خط d فصل مشترک دو صفحه P و Q است.

تذکره -- وقتی دو صفحه بر هم منطبق می‌شوند، آن‌ها را یک صفحه در نظر می‌گیریم.

تعامد



۸ عمودبودن خط بر صفحه: خط d بر صفحه P عمود است، هرگاه صفحه P را در نقطه A قطع کند و بر تمام خطهای صفحه P که از نقطه A می‌گذرند، عمود باشد.

۹ ویژگی‌های خط عمود بر صفحه:

الف اگر خطی فقط بر یکی از خطهای آن صفحه عمود باشد، ممکن است بر آن صفحه عمود نباشد.

ب اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای، در محل تقاطع آنها عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

پ دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.

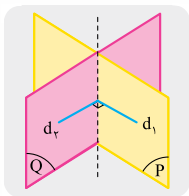
ت دو صفحه عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

ث اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

ج اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، خط دیگر نیز بر این صفحه عمود است.

۱۰ عمودبودن دو صفحه: دو صفحه بر هم عمودند؛ هرگاه هر کدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.

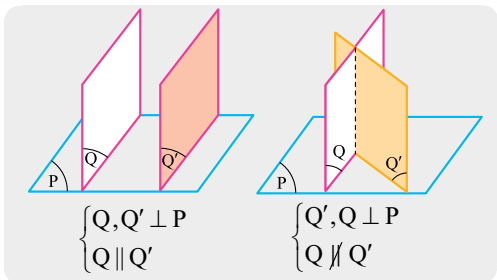
$P \perp Q \Rightarrow$ خط d_1 از صفحه P عمود بر خط d_2 از صفحه Q





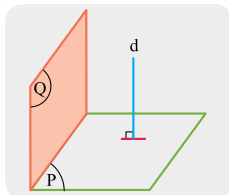
۱۱ ویژگی‌های دو صفحه عمود برهم:

الف دو صفحه عمود بر یک صفحه ممکن است موازی یا متقاطع باشند.



ب اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر خط عمود بر یکی از آنها، با دیگری موازی است.

$$\begin{cases} P \perp Q \\ d \perp P \end{cases} \Rightarrow d \parallel Q$$



ب اگر دو صفحه متقاطع بر صفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترک آنها بر آن صفحه عمود است.

$$L \text{ و } P \text{ و } Q \text{ عمود بر } L$$

