

مقدمه ویرایش جدید

درسنامه و تست‌های دهم، یازدهم و دوازدهم رو همراه پاسخ‌های تشریحی اون‌ها توی یک کتاب آوردیم! برای این‌که حجم کتاب خیلی بالا نره، شروع به دست‌چین کردن تست‌ها و پیرایش درسنامه‌ها کردیم. توی این کار چنان وسواسی به خرج دادیم که مثال‌زدنیه! از مؤلفای باتجربه خودمون، استادان وهاب تقی‌زاده و علیرضا نداف‌زاده (دبیر دبیرستان‌های ممتاز علامه) خواستیم تا همه درسنامه‌ها و تست‌های کتاب رو دوباره بررسی کنن. ولی به این‌جا بسنده نکردیم! از یه گروه از بهترین دبیرا خواستیم تا (اون‌ها هم) کتاب رو بررسی و نقد کنن تا حتی ایرادهای کوچیک باقی‌مونده هم برطرف شه. کاری کردیم که حداکثر استفاده خرد جمعی رو به کار برده باشیم تا شما تو حداقل زمان به بهترین نتیجه برسین. تست‌های کنکور امسال رو هم به کتاب اضافه کردیم. روی بندها و جمله‌ها و تست‌های کتاب وقت گذاشتیم. شاید باورتون نشه ولی برای درک مفاهیم کتاب، کلی جلسه با مؤلفای محترم کتاب درسی داشتیم؛ خلاصه، قدر این کتاب رو بدونین. خوبه بدونید ما توی درس شیرین ریاضی براتون چیکار کردیم. هر فصل رو به **سه قسمت** تقسیم کردیم:

قسمت اول: درسنامه

■ توی این قسمت، یه درسنامه مفصل آوردیم که تمام مباحث رو موبه‌مو بهت یاد میده که پر از مثال‌ها و تست‌های آموزشی دوست‌داشتنیه؛ خلاصه، این قسمت گل‌کتابه.

توی حل تست‌های آموزشی **یه استراتژی حل** برات آوردیم که مطمئنم جایی ندیدی!

مهم یه جاهایی که مهم بوده و باید حفظ باشی رو برات **مهر مهم** زدیم تا بیشتر وقت بذاری.

هر جا دیدیم که بیشتر بچه‌ها راه‌حل رو اشتباه میرن، برات **هشدار** گذاشتیم.

اون جاهایی هم که دیدیم درس سنگین شده و فقط به درد بچه‌های قوی می‌خوره، **یک‌گام فراتر** گذاشتیم، این بخش رو تو اولویت اول مطالعات نذار.

از همه مهم‌تر! یه راه‌حلی رو استفاده کردیم که اصلاً نیاز به فرمول نداره، اسمش رو گذاشتیم **فرمول ممنوع**، این دیگه آخرشه، بدون این‌که تست رو حل کنی، جواب رو پیدا می‌کنی.

نکته، **دقت کنید** و **تذکره** هم که جای خودشون رو دارن.

قسمت دوم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای

■ تعدادی تست که توسط باتجربه‌ترین معلم‌ها و مؤلف‌ها دست‌چین شدن که هر کدام از این مؤلف‌ها، به وزنه‌ای هستن تو ریاضی!

راستی به سری از تست‌های کنکور سراسری هم که پای ثابت این بخش هستن رو برات تو این قسمت آوردیم. تا یادم نرفته بگم، تک‌تک تمرین‌ها، فعالیت‌ها، مثال‌ها و ... کتاب رو خوندم و به تست تبدیلشون کردیم تا چیزی از دستمون در نره!

شمارهٔ بعضی از تست‌ها رو با رنگ آبی مشخص کردیم که سؤال‌های سخت و مهمی هستن. به سری تست‌هایی هم اومده به نام برای ۱۰۰، واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰ بزنن و برای همه لازم نیست. با توجه به کنکورهای ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۲، بخش برای ۱۰۰٪ رو خیلی تقویت کردیم؛ به طوری که برخی تست‌ها واقعاً دشوار هستن. بچه‌های قوی، براتون خوراک عالی تستی آوردیم.

در آخر، آزمون گذاشتیم تا ببینیم چند مرده حلاجید.

برای اولین بار، تست‌ها رو دسته‌بندی کردیم؛ مثلاً تو بخش رفع ابهام $\frac{2}{3}$ ، تعیین کردیم کدام‌ها مثلثاتی کمان غیرصفرند، کدام‌ها مثلثاتی کمان صفرند و ...

قسمت سوم: پاسخ‌نامه تشریحی

■ خیلی از تست‌ها رو با دو روش و حتی بعضی جاها تا سه روش هم حل کردیم که مطمئنم تا حالا این روش‌ها و مسائل یک‌جا توی هیچ کتاب دیگه‌ای به کار نرفتن.

به همهٔ همکارام توصیه کردم تا اون‌جا که میشه فارسی‌نویسی کنن، چون همهٔ اساتید ریاضی دوست دارن فقط از علائم ریاضی در حل مسائل استفاده کنن و شاید این طوری کسی که داره پاسخ رو می‌خونه چیزی متوجه نشه. تو پاسخ‌هامون استراتژی حل داریم تا بفهمی مرحله به مرحله چیکار داریم می‌کنیم و در آخر هر چیزی که مهم بوده رو با راهبرد مشخص کردیم تا بیشتر به این قسمت‌ها اهمیت بدی.

قدردانی

توی تهیهٔ این کتاب خیلی‌ها تأثیرگذار بودن، از جمله:

- ◀ آقای احمد اختیاری، مدیر انتشارات که واقعاً مثل یک کاپیتان، کشتی بزرگ مهروماه رو هدایت می‌کنن.
- ◀ استاد محمدحسین انوشه، مدیر شورای تألیف که راهنمایی‌ها و مشاوره‌هاشون بسیار مفید بود.
- ◀ خانم زهرا رسولی، مسئول ویراستاری، خانم میترا آقایی و آقایان مهدی مرادی، مهدی حصار، امیرحسین عباسی، وحید جعفری و مهرشاد حسنی که اگه نبودن چاپ کتاب شاید تا سه سال دیگه هم طول می‌کشید.
- ◀ گروه هنری خلاق و دوست‌داشتنی انتشارات مهروماه به مدیریت آقای محسن فرهادی و تیم حرفه‌ایشون، خانم الهام اسلامی و آقای تایماز کاویانی که با طراحی‌های زیبا روح تازه‌ای به کتاب بخشیدند.
- ◀ از گروه تولید انتشارات مهروماه به مدیریت سرکار خانم مریم تاجداری، صفحه‌آرهای چیره‌دست خانم‌ها الهام عربی، فرشته سلطانی و رسام محترم خانم مریم صابری، کمال تشکر را دارم که در مراحل تولید و ویرایش جدید کتاب با صبر و پشتکار فراوان این امر را میسر نمودند.

از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز، صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند. و نظرات خود را از طریق اینستاگرام به آیدی زیر ارسال نمایند.

@ashrafi.official

عباس اشرفی

فهرست

۹۷	فصل ۸: جزء صحیح و ویژگی‌های آن	۷	فصل ۱: عبارت‌های جبری (اتحادها)
	• مفهوم جزء صحیح و ویژگی‌های آن		• اتحادها
	• نمودار توابع شامل جزء صحیح		• تجزیه
			• مخرج مشترک
۱۰۹	فصل ۹: مثلثات (دهم و یازدهم)	۱۷	فصل ۲: توان‌های گویا (ریشه و رادیکال)
	• درجه و رادیان		• ریشه و توان
	• نسبت‌های مثلثاتی		• توان‌های گویا
	• مثلثات در حل مسائل کاربردی		• گویا کردن مخرج کسرها
	• شیب خط و $\tan \alpha$		
	• دایره مثلثاتی	۲۷	فصل ۳: نامعادله و تعیین علامت
	• روابط بین نسبت‌های مثلثاتی		• بازه‌ها
	• نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2} \pm \theta (k \in \mathbb{Z})$		• تعیین علامت
	• روابط بین نسبت‌های مثلثاتی (کمان $\alpha \pm \beta$) و نتایج آن‌ها		• نامعادله
	• نمودار توابع مثلثاتی و ویژگی‌های آن‌ها	۳۹	فصل ۴: الگو و دنباله
۱۴۷	فصل ۱۰: تابع (دهم و یازدهم)		• الگو
	• مفهوم تابع و مدل‌سازی (نمایش جبری)		• دنباله
	• بررسی تابع بودن یک رابطه		• دنباله حسابی
	• معرفی توابع خاص		• مجموع جملات دنباله حسابی
	• دامنه توابع		• دنباله هندسی
	• برد توابع		• ترکیب دنباله حسابی و هندسی (واسطه‌ها)
	• برابری توابع		• مجموع جملات دنباله هندسی
	• توابع یک‌به‌یک	۵۷	فصل ۵: هندسه تحلیلی (خط)
	• وارون تابع و تابع وارون		• مختصات
	• اعمال جبری روی توابع		• نقطه و خط
	• ترکیب توابع	۷۱	فصل ۶: معادلات گویا و گنگ
	• ترکیب تابع مرکب و وارون تابع		• معادلات شامل عبارت‌های گویا
۱۸۳	فصل ۱۱: معادله و تابع درجه ۲		• حل مسائل به کمک معادلات گویا
	• معادله درجه دوم و مسائل کاربردی		• معادلات شامل عبارت‌های گنگ
	• روابط مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها	۸۱	فصل ۷: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
	• روابط بین ضرایب و علامت جواب‌های معادله درجه دوم		• تعریف قدرمطلق
	• ساختن معادله درجه دوم جدید		• رسم نمودار توابع قدرمطلق
	• معادله دوم‌جذوری		• معادلات قدرمطلق
	• نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$		• نامعادلات قدرمطلق



فصل ۱۲:

توابع نمایی و لگاریتمی

- توابع نمایی و نمودار آن‌ها
- معادلات و نامعادلات نمایی
- توابع لگاریتمی و نمودار آن‌ها
- دامنه و برد توابع لگاریتمی
- قوانین لگاریتم
- معادلات و نامعادلات لگاریتمی
- استفاده از لگاریتم در حل مسائل

فصل ۱۳:

حد و پیوستگی

- همسایگی یک نقطه
- حد توابع و حدهای یک‌طرفه
- محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)
- محاسبه حد توابع کسری (هم‌ارزی‌ها)
- پیوستگی توابع در نقطه
- پیوستگی توابع روی بازه

فصل ۱۴:

تابع (دوازدهم)

- انتقال نمودار توابع
- تبدیل نمودار توابع
- نمودار تابع $y = |f(x)|$
- نمودار تابع $y = f(|x|)$
- نمودار تابع درجه ۳
- یکنوایی توابع
- بخش‌پذیری و تقسیم
- اتحادهای $x^n \mp a^n$

فصل ۱۵:

مثلثات (دوازدهم)

- تناوب
- نمودار توابع \sin و \cos
- توابع \tan و \cot و نمودار آن‌ها
- معادلات مثلثاتی

فصل ۱۶:

حدهای نامتناهی و حد در بی‌نهایت

- حدهای نامتناهی
- حد در بی‌نهایت
- مجانب قائم



۲۰۵



۲۲۷

۲۵۵



۲۸۵

• مجانب افقی

• مسائل ترکیبی از مجانب قائم و افقی

فصل ۱۷:

مشتق

۳۶۳

- تعبیر هندسی مشتق
- تعریف مشتق
- نیم‌مماس‌ها و مشتق‌های چپ و راست (استفاده از تعریف مشتق)
- مشتق‌پذیری توابع در نقطه و نقاط مشتق‌ناپذیر مهم (استفاده از تعریف مشتق)
- تابع مشتق و قواعد مشتق‌گیری
- مشتق تابع مرکب
- خط مماس (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)
- نیم‌مماس‌ها و مشتق‌های چپ و راست (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)
- مشتق‌پذیری توابع در نقطه (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)
- مشتق‌پذیری توابع روی بازه
- مشتق مراتب بالاتر
- آهنگ تغییر
- قاعده هوییتال (HOP)

فصل ۱۸:

کاربردهای مشتق

۴۱۵

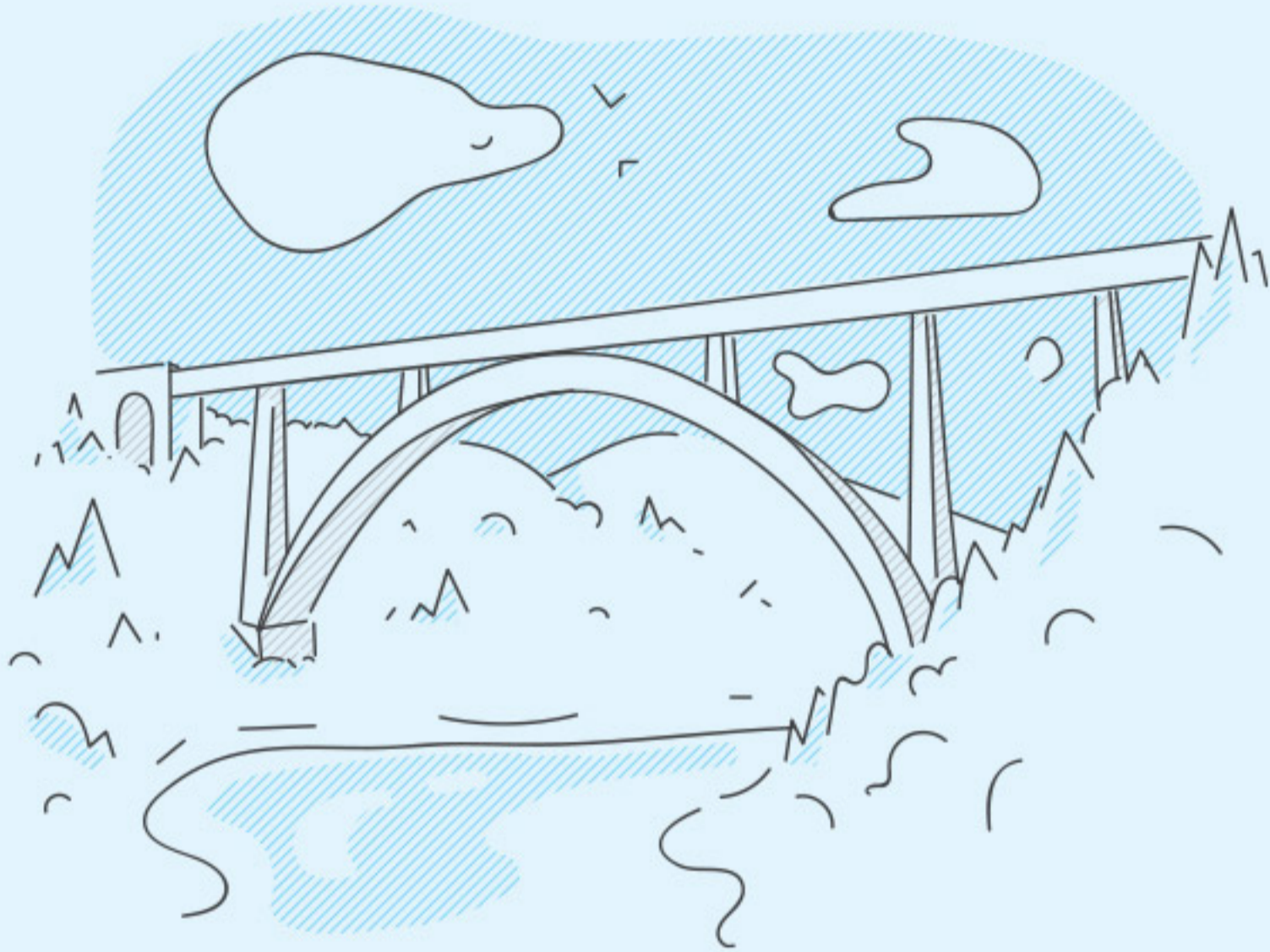
- نقاط بحرانی توابع
- اکسترمم‌ها (نمودار)
- اکسترمم‌های مطلق
- بهینه‌سازی
- ارتباط مشتق و یکنوایی توابع
- اکسترمم‌های نسبی
- جهت تقعر نمودار توابع
- ترکیب یکنوایی و جهت تقعر نمودار توابع
- نقطه عطف
- ترکیب نقطه عطف، یکنوایی و اکسترمم‌های توابع
- ارتباط بین نمودار f ، f' و f''
- توابع هموگرافیک
- معادله و تابع درجه ۳

۴۶۹

پاسخ‌نامه تشریحی

۶۹۴

پاسخ‌نامه کلیدی



نامعادلہ و تعیین علامت

در این فصل با حل نامعادلات چند جمله‌ای با درجهٔ بیش از یک، کسری و ... آشنا می‌شوید. این فصل پیش‌نیاز فصل‌های تابع، قدرمطلق و کاربرد مشتق است.

بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص‌اند، بازه نامیده می‌شوند.

برای نمونه: می‌توان مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$ را به صورت بازه $[-1, 5]$ نوشت.

اگر نقاط ابتدایی و انتهایی، عضو بازه باشند، آن را **بازه بسته** و اگر این دو نقطه عضو بازه نباشند، آن را **بازه باز** می‌نامیم.

برای نمونه:
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$ بازه بسته

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\} = (-1, 5)$ بازه باز

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\} = [-1, 5)$

اگر فقط یکی از نقاط ابتدایی یا انتهایی، عضو بازه باشد، آن را **بازه نیم‌باز** می‌نامیم. **برای نمونه:**

اگر تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک عدد یا تمام اعداد حقیقی کوچک‌تر از یک عدد معین، موردنظر باشد، در بازه از نماد ∞ استفاده می‌شود. **برای نمونه:**

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\} = [-2, +\infty)$

بازه‌ها را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد. ($a < b$)

نمایش نموداری	بازه	نمایش مجموعه‌ای
	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

تست: m باید عضو کدام بازه باشد تا اشتراک دو بازه $(-1, 3]$ و $[2m+1, 7)$ برابر تهی شود؟

(۴) $(-\infty, 1]$

(۳) $(1, 3)$

(۲) $(1, +\infty)$

(۱) $[1, +\infty)$

پاسخ: گزینه «۳»

اگر اشتراک این دو بازه تهی باشد، باید عدد انتهایی بازه $(-1, 3]$ یعنی ۳، از عدد ابتدایی بازه $[2m+1, 7)$ یعنی $2m+1$ ، کوچک‌تر باشد، بنابراین:

$$3 < 2m+1 \Rightarrow 2 < 2m \Rightarrow 1 < m$$

از طرفی $2m+1 < 7$ ، پس $m < 3$ است. اشتراک دو مجموعه‌جواب به دست آمده برابر بازه $(1, 3)$ می‌شود.

تعیین علامت

برای آن‌که بدانیم علامت عبارتی دلخواه، به ازای چه مقادیری از متغیرش مثبت، منفی یا صفر است، به فرآیندی نیاز داریم که آن را **تعیین علامت** می‌نامیم.

تعیین علامت عبارت‌های درجه اول

برای تعیین علامت چندجمله‌ای‌های درجه اول $ax + b$ ، ابتدا جواب معادله $ax + b = 0$ (یعنی $x = -\frac{b}{a}$) را می‌یابیم. این عبارت به ازای x های

قبل از $x = -\frac{b}{a}$ علامتی مخالف علامت a و به ازای x های بعد از $x = -\frac{b}{a}$ علامتی موافق علامت a دارد.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	مخالف علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

به زبان ریاضی جدول روبه‌رو را رسم می‌کنیم:

برای نمونه: چندجمله‌ای $-2x + 1$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$-2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x+1$	+	-	+

تعیین علامت عبارتهای درجه دوم

تعیین علامت چندجمله‌ای‌های درجه دوم، بسته به علامت دلتا به سه حالت زیر تقسیم می‌شوند:

	<p>اگر $\Delta > 0$ باشد، عبارت دو ریشه x_1 و x_2 دارد. علامت چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ بین دو ریشه x_1 و x_2 مخالف علامت a و در بازه‌های طرفین دو ریشه، موافق علامت a است. ($x_1 < x_2$)</p>
	<p>اگر $\Delta = 0$ باشد، عبارت دارای ریشه مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$ است و علامت چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ به جز در ریشه مضاعف (که برابر صفر است) همواره موافق علامت a است.</p>
	<p>اگر $\Delta < 0$ باشد، عبارت ریشه حقیقی ندارد و علامت چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ همواره موافق علامت a است.</p>

نکته: با توجه به مطالب گفته‌شده، می‌توان نتیجه گرفت که علامت عبارت $ax^2 + bx + c$ زمانی:

- الف) همواره مثبت است که $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد.
- ب) همواره منفی است که $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد.
- پ) همواره نامنفی است که $\Delta \leq 0$ و $a > 0$ باشد.

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

ت) همواره ناممثبت است که $\Delta \leq 0$ و $a < 0$ باشد.

مثال: عبارت $P = 2x^2 - 3x + 1$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ: ریشه‌های عبارت را می‌یابیم و جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(2x - 2)(2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x \\ \hline -\infty \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad +\infty \\ \hline 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline + \quad - \quad + \end{array}$$

علامت عبارت فوق در بازه‌های $(1, +\infty)$ و $(-\infty, \frac{1}{2})$ مثبت، در بازه $(\frac{1}{2}, 1)$ منفی و در نقاط $x = 1, \frac{1}{2}$ صفر است.

تست: حدود m کدام باشد تا علامت عبارت درجه دوم $mx^2 - mx - 1$ همواره منفی باشد؟

۴) $-4 < m < 0$

۳) $-2 < m < 0$

۲) $-4 \leq m \leq 0$

۱) $-2 \leq m \leq 0$

پاسخ: گزینه «۴»

برای این که علامت عبارت درجه دوم $mx^2 - mx - 1$ همواره منفی باشد، باید:

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow m < 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0 \end{cases}$$

مجموعه جواب، اشتراک دو مجموعه $m < 0$ و $-4 < m < 0$ است:

مجموعه جواب: $-4 < m < 0$

تعیین علامت عباراتی به صورت حاصل ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها

برای تعیین علامت این عبارات به روش کلی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

- ۱) ریشه‌های عوامل ضرب یا تقسیم را می‌یابیم و ریشه‌ها را به صورت صعودی در سطر اول می‌نویسیم.
- ۲) هر یک از عوامل ضرب یا تقسیم را در یک طبقه از جدول قرار می‌دهیم و جداگانه تعیین علامت می‌کنیم.
- ۳) علامت طبقه آخر از ضرب علامت‌های هر ستون به دست می‌آید.
- ۴) در جدول تعیین علامت، در ستون ریشه‌های صورت، صفر قرار می‌دهیم و در ستون ریشه‌های مخرج، تعریف نشده قرار می‌دهیم.

نکته: علامت عبارت $(P(x))^{2n+1}$ با علامت $P(x)$ یکسان و علامت عبارت $(Q(x))^{2m}$ همواره نامنفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

مثال: عبارت $A = \frac{(-3x+3)^5}{5x^2-12x+4}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ: جواب‌های معادله‌های $(-3x+3)^5 = 0$ و $5x^2-12x+4 = 0$ را می‌یابیم و جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم (دقت کنید توان ۵ در تعیین علامت صورت کسر تأثیری ندارد):

$$\begin{cases} (-3x+3)^5 = 0 \Rightarrow -3x+3=0 \Rightarrow x=1 \\ 5x^2-12x+4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}(5x-2)(5x-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	1	2	$+\infty$
$(-3x+3)^5$	+	+	+	-	-
$5x^2-12x+4$	+	+	-	-	+
A	+	+	-	+	-

تست: علامت عبارت $A = \frac{(x^2+3x-4)^7}{(x-2)^2(x-3)^5}$ در بازه $(a, 1)$ مثبت است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) وجود ندارد ۳) صفر ۴) -۴

پاسخ: گزینه ۴

ریشه‌های عوامل کسر را می‌یابیم:

$$(x^2+3x-4)^7 = 0 \Rightarrow x^2+3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x=2, \quad (x-3)^5 = 0 \Rightarrow x=3$$

با توجه به این که توان‌های ۷ و ۵ به ترتیب در تعیین علامت x^2+3x-4 و $x-3$ تأثیری ندارند و علامت عبارت $(x-2)^2$ همواره نامتغی است، جدول تعیین علامت آن را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-4	1	2	3	$+\infty$
$(x^2+3x-4)^7$	+	+	-	+	+	+
$(x-2)^2$	+	+	+	+	+	+
$(x-3)^5$	-	-	-	-	-	+
A	-	+	-	-	-	+

علامت عبارت A در بازه‌های $(-4, 1)$ و $(3, +\infty)$ و زیرمجموعه‌های آن‌ها مثبت است؛ پس کمترین مقدار a برابر -۴ است.

یک گام فراتر: تعیین علامت تستی

در روش تستی، عبارت‌هایی به صورت $(x-x_0)$ و $|x-x_0|$ را عبارات بی‌تأثیر و سایر عبارت‌های جبری را عبارات اثرگذار می‌نامیم. برای استفاده از تعیین علامت تستی، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

- ۱) عبارات را تا حد ممکن ساده می‌کنیم و ریشه عبارات موجود را می‌یابیم.
- ۲) ریشه‌ها را به صورت صعودی در جدول تعیین علامت یک‌سطری می‌نویسیم.
- ۳) علامت جملات پرتوان عبارت‌های اثرگذار را تعیین می‌کنیم.
- ۴) علامت پیداشده را در اولین ستون از سمت راست جدول تعیین علامت می‌گذاریم.
- ۵) از سمت راست به چپ می‌رویم در عبور از هر ستون، اگر ریشه، مربوط به عبارت‌های بی‌تأثیر باشد، علامت عوض نمی‌شود و اگر ریشه، مربوط به عبارت‌های اثرگذار باشد، علامت عوض می‌شود.

مثال: عبارت $A = \frac{(x^2+x-2)^4(x^2-9)^7}{(x-1)^8(x+5)^2|x-4|}$ را به روش تستی تعیین علامت کنید.

پاسخ: ۱) عبارت را ساده و ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$A = \frac{(x+2)^4(x-1)^4(x-3)^7(x+3)^7}{(x-1)^8(x+5)^2|x-4|} = \frac{(x+2)^4(x-3)^7(x+3)^7}{(x-1)^4(x+5)^2|x-4|}$$

عبارت‌های $(x+2)^4$ ، $(x-1)^4$ و $|x-4|$ بی‌تأثیر و عبارت‌های $(x+3)^7$ ، $(x-3)^7$ و $(x+5)^2$ تأثیرگذارند.

۲) ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم. برای ریشه‌های صورت، صفر و برای ریشه‌های مخرج، تعریف‌نشده (تن) می‌گذاریم:

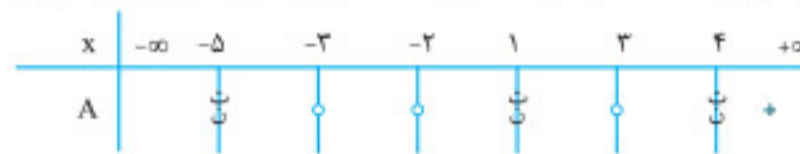
x	$-\infty$	-5	-3	-2	1	3	4	$+\infty$
A		+	+	+	+	+	+	

۳) علامت جمله‌های پرتوان عبارت‌های اثرگذار را تعیین می‌کنیم:

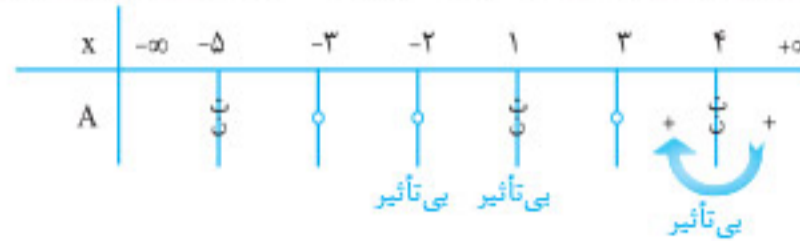
$$\text{جمله پرتوان عبارت اثرگذار} = \frac{x^7 \times x^7}{x^2} = +x^{11}$$

علامت این جمله، مثبت است.

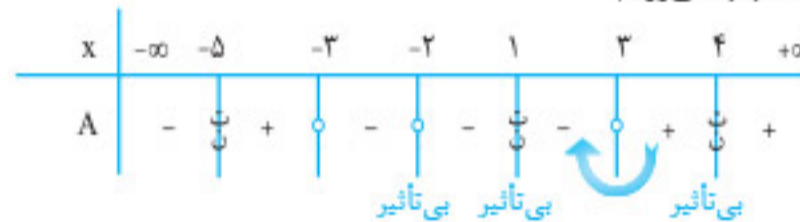
۴ جدول تعیین علامت تستی را رسم می‌کنیم و علامت مثبت را (که در قسمت قبل یافتیم) در اولین ستون از سمت راست جدول می‌گذاریم:



۵ از سمت راست به چپ برمی‌گردیم. در عبور از ریشه‌های $x = 4$, $x = 1$, و $x = -2$ که مربوط به عبارات بی‌تأثیرند، علامت تغییر نمی‌کند و در عبور از سایر ریشه‌ها، علامت تغییر می‌کند.



به همین ترتیب مرحله به مرحله از راست به چپ می‌رویم.



۱ تست: علامت عبارت $A = \frac{(x^2 - 81)^2 |x+1|}{(x^2 - 4)^5}$ در بزرگ‌ترین مجموعه ممکن به صورت $(a, b) - [c, d]$ ، منفی است. حاصل $ab - cd$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۲ (صفر)

-۵ (۱)

پاسخ: گزینه «۱»

عبارت را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{(x^2 + 9)^2 (x - 3)^2 (x + 3)^2 |x + 1|}{(x - 2)^5 (x + 2)^5}$$

عبارت $|x + 1|$ بی‌تأثیر و سایر عبارات می‌توانند تأثیرگذار باشند.

ریشه‌های عبارات را به دست می‌آوریم:

علامت جمله پرتوان عبارات اثرگذار را می‌یابیم:

$$x = 3, x = -3, x = -1, x = 2, x = -2$$

$$A \text{ جمله پرتوان عبارات اثرگذار} = \frac{(x^2)^2 x^2 \times x^2}{x^5 \times x^5} = +x^2$$

جدول تعیین علامت تستی را رسم می‌کنیم:

بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که در آن علامت عبارت، منفی است، به صورت $[-2, 2] - (-3, 3)$ است، پس:

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow ab - cd = -9 - (-4) = -5$$

نامعادله

$$A \geq B, A > B, A \leq B, A < B$$

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت مقابل هستند:

خواص نامساوی‌ها

طرفین نامساوی‌ها را همواره می‌توان با هر عبارت دلخواهی جمع کرد.	$A \leq B \xrightarrow{+C} A + C \leq B + C$	۱
طرفین یک نامساوی را همواره می‌توان در یک عدد مثبت C ضرب یا تقسیم کرد.	$A \geq B \xrightarrow{C>0} AC \geq BC$	۲
	$A \leq B \xrightarrow{C>0} \frac{A}{C} \leq \frac{B}{C}$	۳
طرفین یک نامساوی را می‌توان در عددی منفی ضرب یا تقسیم کرد، اما جهت نامساوی عوض می‌شود.	$A \geq B \xrightarrow{C<0} AC \leq BC$	۴
	$A \leq B \xrightarrow{C<0} \frac{A}{C} \geq \frac{B}{C}$	۵

اگر طرفین نامساوی هم‌علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی)، می‌توان دو طرف نامساوی را معکوس کرد، اما جهت نامساوی عوض می‌شود. $(A, B \neq 0)$	$A > B \xrightarrow{AB > 0} \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$	۶
طرفین نامساوی را همواره می‌توان بدون هیچ مشکلی به توان فرد رساند یا از طرفین نامساوی، رادیکال با فرجه فرد گرفت.	$A \leq B \xrightarrow{(\)^{2n+1}} A^{2n+1} \leq B^{2n+1}$	۷
	$A \leq B \xrightarrow{\sqrt[2n+1]{\ }} \sqrt[2n+1]{A} < \sqrt[2n+1]{B}$	۸
اگر هر دو عدد یا عبارت نامثبت باشند، جهت نامساوی عوض می‌شود و اگر علامت طرفین نامساوی متفاوت بود، جواب یا \mathbb{R} است یا \emptyset .	$0 \leq A \leq B \xrightarrow{(\)^{2n}} A^{2n} \leq B^{2n}$	۹
	$A \leq B \leq 0 \xrightarrow{(\)^{2n}} A^{2n} \geq B^{2n}$	۱۰
اگر از دو طرف نامساوی فرجه زوج گرفتید، برای اعداد حاصل، قدرمطلق قرار دهید، ولی اگر هر دو عدد نامنفی باشند، بدون هیچ مشکلی می‌توان از طرفین نامساوی رادیکال با فرجه زوج گرفت.	$A^{2n} \leq B^{2n} \xrightarrow{\sqrt[2n]{\ }} A \leq B $	۱۱
	$0 \leq A \leq B \xrightarrow{\sqrt[2n]{\ }} \sqrt[2n]{A} \leq \sqrt[2n]{B}$	۱۲

حل نامعادله‌های درجه اول

برای حل نامعادله درجه اول، مانند حل معادله درجه اول رفتار می‌کنیم، با این تفاوت که در هنگام ضرب یا تقسیم بر عددی منفی، جهت نامساوی تغییر می‌کند. **برای نمونه:**

$$2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$$

روند حل نامعادلات دوگانه را در مثال زیر می‌بینید:

مثال: نامعادله مقابل را حل کنید.

$$\frac{x-1}{6} < \frac{2x-1}{2} < \frac{x}{3}$$

پاسخ: طرفین نامعادله را در ک.م.م. مخرج‌ها یعنی ۶ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x-1}{6} < \frac{2x-1}{2} < \frac{x}{3} \xrightarrow{\times 6} x-1 < 9x-3 < 2x$$

دو نامعادله زیر را حل می‌کنیم و از جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x-1 < 9x-3 \Rightarrow 8x > 2 \Rightarrow x > \frac{1}{4} \\ 9x-3 < 2x \Rightarrow 7x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{7} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{3}{7}$$

تست: مجموعه جواب مشترک دو نامعادله $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} > 1$ و $\frac{3}{2}x + 2 > 2x - 3$ ، کدام است؟

۴ < x < ۷ (۴)

۴ < x < ۱۰ (۳)

۲ < x < ۱۰ (۲)

۲ < x < ۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$2x - 2(x-1) > 6 \Rightarrow 2x - 2x + 2 > 6 \Rightarrow x > 4$$

طرفین نامعادله $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} > 1$ را در ۶ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{3}{2}x + 2 > 2x - 3 \Rightarrow \frac{3}{2}x > 2x - 5 \Rightarrow 3x > 4x - 10 \Rightarrow x < 10$$

طرفین نامعادله $\frac{3}{2}x + 2 > 2x - 3$ را در ۲ ضرب می‌کنیم:

اشتراک $x < 10$ با $x > 4$ برابر $4 < x < 10$ است.

حل نامعادله‌های درجه دوم

در نامعادلات درجه دوم، همه جملات را به یک طرف نامعادله (ترجیحاً سمتی که ضریب بزرگ‌ترین جمله درجه دوم مثبت شود) می‌بریم. ریشه‌ها را در صورت وجود می‌یابیم، جدول تعیین علامت را رسم کرده و قسمت‌های خواسته‌شده را انتخاب می‌کنیم.

تست: مقادیر $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ در بازه (a, b) بزرگ‌تر از $\frac{7}{2}$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۶ (۴)

۵/۵ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \xrightarrow{\times (-2)} x^2 - 4x - 12 < -7 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$$

روش اول نامعادله را تشکیل می‌دهیم:

ریشه‌های عبارت، $x = 5$ و $x = -1$ هستند.



بزرگ‌ترین مجموعه‌جواب نامعادله، بازه $(-1, 5)$ است، بنابراین $b - a = 5 - (-1) = 6$.

روش دوم

استراتژی حل: اگر در نامعادله $x^2 - 4x - 5 < 0$ ریشه‌ها a و b باشند، عبارت در بازه (a, b) منفی است و مطلوب تست، مقدار $b - a$ یعنی تفاضل ریشه‌هاست.

$$| \text{تفاضل ریشه‌ها} | = | b - a | = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{36}}{|1|} = 6$$

حل نامعادله‌های گویا

در نامعادلات گویا، باید همه عبارت‌ها را به یک طرف نامعادله انتقال دهیم و به کمک رسم جدول تعیین علامت، آن را حل کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: نامعادله $\frac{2x-1}{x+1} < 1$ را حل کنید.

$$\frac{2x-1}{x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{(2x-1) - (x+1)}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} < 0$$

پاسخ: عدد ۱ را به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا یک طرف نامعادله برابر صفر شود:

جدول تعیین علامت عبارت $\frac{x-2}{x+1}$ را رسم می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 2 & +\infty \\ \hline x-2 & - & - & 0 & + \\ x+1 & - & 0 & + & + \\ \hline \frac{x-2}{x+1} & + & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow -1 < x < 2$$

جواب

هشدار: علامت عبارت $x+1$ برای ما نامشخص است، بنابراین اجازه نداریم که طرفین نامعادله را در $x+1$ ضرب یا به اصطلاح آن را طرفین وسطین کنیم.

(تجرب ۹۶)

تست: مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{3x+1}{x-2} < -1$ به کدام صورت است؟

$$\frac{1}{2} < x < 2 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} < x < 2 \quad (3)$$

$$x < 2 \quad (2)$$

$$x < \frac{1}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول نامعادله را به دو نامعادله زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{cases} -1 < \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow \frac{3x+1}{x-2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{4x-2}{x-2} > 0 \\ \frac{3x+1}{x-2} < 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-2} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{10}{x-2} < 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases} \Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > 2$$

جواب

مجموعه جواب، اشتراک مجموعه‌های به دست آمده، یعنی $x < \frac{1}{2}$ است.

روش دوم

فرمول ممنوع: عددی مانند $x=2$ را انتخاب می‌کنیم که در گزینه «۱» نیست و در سه گزینه بعدی قرار دارد.

$$-1 < \frac{3x+1}{x-2} < 3 \xrightarrow{x=2} -1 < \frac{7}{-1} < 3 \Rightarrow \frac{-1 < -7 < 3}{\text{نادرست}}$$

$x=2$ را در نامعادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$x=2$ در نامعادله صادق نیست، پس گزینه‌هایی که $x=2$ عضو آن‌هاست نادرست هستند؛ بنابراین گزینه «۱» درست است.

تست: مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x^2-1}{x^2+x+1} \leq x-1$ به صورت $(a, +\infty) \cup \{b\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۳»

علامت دلتای چندجمله‌ای درجه دوم $x^2 + x + 1$ منفی و ضریب x^2 آن مثبت می‌باشد، پس علامت این عبارت همواره مثبت است و عبارت را در طرفین نامعادله ضرب می‌کنیم:

$$3x^2 - 1 \leq (x-1)(x^2 + x + 1) \Rightarrow 3x^2 - 1 \leq x^3 - 1 \Rightarrow x^3 - 3x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(x-3) \geq 0$$

اتحاد جاق ولاغر

۳) معادلاتی که به کمک مجهول معاون حل می‌شوند: در برخی از معادلات می‌توان یک عبارت مشترک را در معادله، A فرض نمود و معادله را بر حسب مجهول معاون A حل کرد. با پیداشدن مقدار A می‌توانیم به راحتی مجهول اصلی (x یا ...) را بیابیم.

📌 تست: معادله $\sqrt{x^2 + 4x\sqrt{x} + 4x} + \sqrt{x+2\sqrt{x}} = 6$ چند جواب حقیقی دارد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

عبارت $\sqrt{x+2\sqrt{x}}$ را A فرض می‌کنیم، دقت کنید که اگر A به توان ۲ برسد، به شکل زیر درمی‌آید:

$$A = \sqrt{x+2\sqrt{x}} \Rightarrow A^2 = \sqrt{(x+2\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + 4x\sqrt{x} + 4x}$$

بنابراین معادله را می‌توان این گونه نوشت:

$$A^2 + A = 6 \Rightarrow A^2 + A - 6 = 0 \Rightarrow (A+3)(A-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2\sqrt{x}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x+2\sqrt{x} + 1 = 9 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = -3 \Rightarrow \sqrt{x} = -4 \times \\ \sqrt{x} + 1 = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \checkmark \end{cases} \\ \sqrt{x+2\sqrt{x}} = -3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+2\sqrt{x} = -9 \Rightarrow x+2\sqrt{x} + 1 = -8 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 = -8 \times \end{cases}$$

در نتیجه معادله فقط یک جواب دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

معادلات شامل عبارت‌های گویا

حل معادله‌های گویا

۳۴۲. جواب معادله $\frac{x+2}{x-1} = 1 - \frac{3}{x+5}$ چه عددی است؟

-۲ (۴)

۱ (۳)

-۵ (۲)

صفر (۱)

۳۴۳. تعداد جواب‌های معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} = x-1$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۳۴۴. منحنی $y = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ و خط $y = 2x+1$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۳۴۵. معادله $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x-2}$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۳۴۶. جواب معادله گویای $\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = ax^{-1}$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

$\frac{3}{2}a$ (۴)

$\frac{1}{2}a$ (۳)

$\frac{2}{3}a$ (۲)

$\frac{1}{3}a$ (۱)

۳۴۷. جواب معادله $\frac{x^2-3x}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x-2} = 0$ کدام است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

۳۴۸. معادله $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{7(x+1)}{9(x-1)}$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۳۴۹. مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$ کدام است؟

۲/۲۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۷۵ (۲)

۱ (۱)

۳۵۰. معادله $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2x}{x^2-1}$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۵۱. اگر $x = -\frac{10}{3}$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{x-5}{x+5} + \frac{7-a}{x} = 9x^2$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) $\frac{95}{21}$ (۴) $-\frac{95}{21}$

۳۵۲. اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{5-m}{2x} + \frac{m-3}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4}$ باشد، آن‌گاه جواب دیگر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۵ (۴) -۵

۳۵۳. معادله $\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^2+8} = \frac{6x}{x^2-2x+4}$ دارای چند جواب مثبت است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱

۳۵۴. حاصل ضرب جواب‌های معادله $\frac{1}{2x^2-x+1} + \frac{3}{2x^2-x+3} = \frac{10}{2x^2-x+7}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۲

۳۵۵. جواب‌های معادله $\frac{x^2}{x^2+3x+2} + \frac{2x^2+6x+4}{x^2} = 3$ چگونه‌اند؟

- (۱) سه جواب منفی (۲) دو جواب منفی و یک جواب مثبت
(۳) دو جواب مثبت (۴) دو جواب منفی و دو جواب مثبت

(ریاضی دی ۱۴۰۱)

حل مسائل به کمک معادلات گویا



۳۵۶. حوضی دارای دو فواره است، هر کدام به تنهایی حوضی را در ۱۲ ساعت و ۸ ساعت پر می‌کنند، اگر هر دو فواره با هم باز شوند، این حوض در مدت ۴ ساعت و چند دقیقه پر می‌شود؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۴۸ (۴) ۵۴

۳۵۷. بهزاد و علی با هم یک اتاق را در ۳ ساعت و علی به تنهایی همان اتاق را در ۴ ساعت رنگ می‌کند. در صورتی که بهزاد خسته باشد و سرعت رنگ زدن او نصف شده باشد، اتاق را به تنهایی در چند ساعت رنگ می‌زند؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۱۸

۳۵۸. بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند، اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

(ریاضی ۹۸)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

۳۵۹. یک آشپز به همراه شاگردش غذایی را در ۷۲ دقیقه آماده می‌کند. اگر شاگرد بخواهد به تنهایی آن غذا را آماده کند، یک ساعت بیشتر از مدت زمانی طول می‌کشد که آشپز بخواهد آن را به تنهایی آماده کند. آشپز آن غذا را به تنهایی در چند ساعت آماده می‌کند؟

- (۱) $2\frac{1}{5}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $1\frac{1}{5}$

۳۶۰. مریم و سارا برای درست کردن کیک تولد با هم به ۴ ساعت زمان نیاز دارند و اگر مریم تنها باشد می‌تواند آن را در ۶ ساعت درست کند. اگر تصمیم بگیرند با هم کیک را درست کنند و پس از یک ساعت برای مریم کاری پیش آید و سارا به تنهایی ادامه دهد، سارا چند ساعت پس از رفتن مریم برای درست کردن کیک زمان نیاز دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۸

۳۶۱. علی به همراه دوستانش به یک موزه رفتند و پول بلیتشان روی هم ۲۰۰۰۰ تومان شد، اما هر کدام از دوستانش تصمیم گرفتند ۱۰۰۰ تومان اضافه پول بدهند تا علی پول خود را ندهد. تعداد همراهان علی چند نفر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۶۲. سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه رارفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

(تجربی ۹۸)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵



۳۶۳. پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۶ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

(تجربین خارج ۹۸)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۱۳/۵ (۴) ۱۵

۳۶۴. خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه امام متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری این مسیر را از شمال به جنوب با سرعت ثابت ۷ کیلومتر بر ساعت و بدون توقف طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال از سرعت قطار ۱۰ km/h کم شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت می‌شود، سرعت برگشت قطار کدام است؟

- (۱) ۴۰ km/h (۲) ۳۰ km/h (۳) ۲۰ km/h (۴) ۱۰ km/h

۳۶۵. علی و حسین برای برنامه‌نویسی یک بازی رایانه‌ای به ۱/۲ روز زمان نیاز دارند. اگر هر دو به تنهایی این برنامه را بنویسند حسین ۱ روز دیرتر تمام می‌کند. در صورتی که فرهاد دو برابر سریع‌تر از علی کار کند، فرهاد و حسین با هم به چند روز زمان نیاز دارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۳/۴ (۳) ۲/۳ (۴) ۱/۲

معادلات شامل عبارتهای گنگ



۳۶۶. مجموعه جواب معادله $x + \sqrt{2x-1} = 5$ کدام است؟

- (۱) $\{6 + \sqrt{10}, 6 - \sqrt{10}\}$ (۲) $\{6 + \sqrt{10}\}$ (۳) $\{6 - \sqrt{10}\}$ (۴) $\{\}$

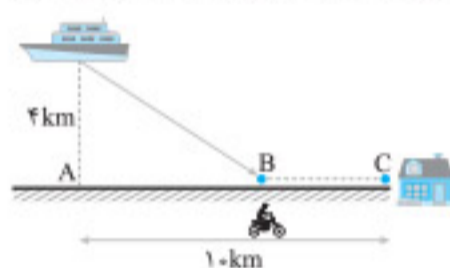
۳۶۷. تعداد جواب‌های معادله $|x-3| - \sqrt{x-1} = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۶۸. مجموع طول و عرض مختصات نقطه‌ای روی خط $y = 3x - 1$ که از دو نقطه $A(1, 1)$ و $B(3, -1)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) ۲

۳۶۹. مطابق شکل، فاصله یک قایق تفریحی تا ساحل (نقطه A) ۴ کیلومتر است. افراد داخل قایق می‌خواهند کلاً با مصرف ۲۴ لیتر سوخت در نقطه‌ای مانند



B در خط ساحلی پیاده شوند و از آنجا ادامه مسیر تا C را با موتور طی کنند. اگر قایق برای هر کیلومتر ۴ لیتر و موتور برای هر کیلومتر ۲ لیتر سوخت مصرف کند و فاصله AC برابر ۱۰ کیلومتر باشد، آن‌ها در کدام فاصله از نقطه A، می‌توانند سوار موتور شوند؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(تجربین خارج ۹۸)

۳۷۰. اگر $2a + \sqrt{3a+16} = 1$ باشد، مقدار $4a+9$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۵ (۴) ۲۱

(تجربین ۹۸)

۳۷۱. اگر $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$ باشد، مقدار $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

- (۱) ۱/۵ (۲) ۲/۵ (۳) ۳/۵ (۴) ۴/۵

(تجربین تیرا ۱۴۰۱)

۳۷۲. معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(تجربین خارج تیرا ۱۴۰۱)

۳۷۳. معادله $\frac{1}{\sqrt{2-x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۳۷۴. برای چند مقدار صحیح و یک‌رقمی a، جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ ، عددی صحیح است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۷۵. معادله $(2x+3\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{4x^2+7x^2+2x-1} = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(تجربین دی ۱۴۰۱)

۳۷۶. معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۳۷۷. معادله $5\sqrt{9-x^2} + 3\sqrt{x^2+x-3} = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۷۸. معادله $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{2x+2} - \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۳۷۹. تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x+\sqrt{-x^2+4x^2+25x-100}} + \sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}} = x+2$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۳۸۰. مجموع جواب‌های معادله $2\sqrt{x^2+2x} = (x+1)^2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۳۸۱. مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{x-3} + \frac{7}{\sqrt{x-3}+1} = 7$ کدام است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۸ (۳) ۳۹ (۴) ۱۹

۳۸۲. معادله $\frac{1}{\sqrt{x-1}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{4\sqrt{x-1}}$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار



برای ۱۰۰٪

۳۸۳. معادله $\sqrt{2x+4} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2}(x+3)$ چند جواب عضو اعداد صحیح دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۳۸۴. جواب معادله $x + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$ از جواب معادله ${}^n\sqrt{x-a} + {}^n\sqrt{a-x} = 0, (n \in \mathbb{N})$ یک واحد کمتر است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۳ (۴) ۱

۳۸۵. اگر داشته باشیم $\sqrt{\frac{20}{a}} = 7$ ، آن‌گاه $a - \sqrt{5a}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۳۸۶. اگر حاصل ضرب جواب‌های معادله $\frac{x}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{a}{x^2-4}$ برابر $-\frac{3}{2}$ باشد، قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۳۸۷. اگر جواب معادله $\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}$ طول نقطه رأس سهمی $f(x) = x^2 + 2ax + 3$ باشد، حاصل $f(1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{20}{3}$ (۲) ۶ (۳) $\frac{19}{3}$ (۴) $\frac{17}{3}$

۳۸۸. اگر معادله $\frac{a}{x} + \frac{2x-2}{x+1} = 1$ جواب حقیقی نداشته باشد، آن‌گاه مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(9, +\infty)$ (۲) $(1, 9)$ (۳) $(-1, 9)$ (۴) \emptyset

۳۸۹. مجموع جواب‌های معادله $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt{x-2} = 1$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱۶ (۳) ۱۹ (۴) ۱۷

۳۹۰. به ازای چند مقدار a ، معادله $\frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x} + \frac{a}{2x+2}$ فقط دارای یک جواب است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۹۱. اگر مجموعه جواب معادله $\frac{m+1}{3x} = \frac{5-x}{4x-x^2}$ تهی باشد، مجموع مقادیر موجود برای m کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) -۲ (۳) $\frac{11}{4}$ (۴) $\frac{19}{4}$

۳۹۲. اگر دو دستگاه با هم کار کنند می‌توانند کاری را در شش ساعت انجام دهند. اگر دستگاه اول به تنهایی به مدت ۴ ساعت و سپس دستگاه دوم نیز

به تنهایی به مدت ۶ ساعت کار کند، آن‌ها ۸۰ درصد تمام کار را انجام می‌دهند. اگر هر یک از آن‌ها بخواهند به تنهایی کل کار را انجام دهند، دستگاه

سریع‌تر چند ساعت زودتر از دستگاه دیگر کار را انجام می‌دهد؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰



آزمون فصل

۳۹۳. مجموع مربعات جواب‌های معادله $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 1$ چه قدر است؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۳۳ (۳) ۴۷ (۴)

۳۹۴. معادله $\frac{x^2+x-1}{x^2+x-2} = 1 + \frac{1}{x^2+2x-3}$ چند جواب دارد؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۳۹۵. معادله $\frac{2x+5}{2x-2} - \frac{7}{x^2-1} = \frac{2x-5}{2x+2}$ چند جواب دارد؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۳۹۶. قطاری ایستگاه A را با سرعت ثابت به مقصد B ترک می‌کند. بعد از طی ۴۵۰ کیلومتر که ۷۵ درصد مسافت بین A و B را تشکیل می‌دهد متوقف می‌شود و بعد از تیم ساعت شروع به حرکت می‌کند. راننده سرعت قطار را ۱۵ کیلومتر بر ساعت افزایش می‌دهد تا به موقع به مقصد B برسد. سرعت ثابت قطار چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

- ۶۰ (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۵۰ (۴)

۳۹۷. پرنده‌ای فاصله ۴۰ کیلومتر را در خلاف جهت باد پرواز کرده و همان فاصله را برمی‌گردد. مدت زمان رفت و برگشت $\frac{2}{5}$ ساعت و سرعت باد ۳۰ کیلومتر در ساعت است. سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر بر ساعت است؟

- ۴۵ (۱) ۵۰ (۲) ۵۴ (۳) ۶۰ (۴)

۳۹۸. معادله $x\sqrt{x^2+15} - 2 = \sqrt{x}\sqrt{x^2+15}$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۳۹۹. مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{2-2\sqrt{1-x^2}} = -1 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ کدام است؟

- صفر (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

۴۰۰. مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+3)(4-x)} = 4$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴)

۴۰۱. معادله $ax - \sqrt{x-2} = 2a$ دو جواب دارد. حدود a کدام است؟

- $0 < a < 1$ (۱) $a \neq 0$ (۲) $a > 0$ (۳) $a > 1$ (۴)

۴۰۲. مجموع جواب‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = \sqrt{14+4x-x^2}$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴)



برای دریافت پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌های برای ۱۰۰٪ و آزمون‌های فصل، رمزیننه مقابل را اسکن کنید.

ترکیب توابع



تذکره ترکیب

۷۶۹. توابع $f = \{(-1, 3), (-2, 0), (1, 4), (5, 6)\}$ و $g = \{(1, 2), (0, 3), (6, 2), (4, -1)\}$ مفروض اند. تابع $g \circ f$ چند عضو دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۷۷۰. توابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $f \circ g \in f$ و $g \circ f \in g$ باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

- (۱) (۴, ۵) (۲) (۱, ۲) (۳) (۳, ۵) (۴) (۴, ۷) (ریاضی ۹۰)

۷۷۱. اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, -1), (4, 7)\}$ باشد، آن گاه $(f+g) \circ f$ چند عضو دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

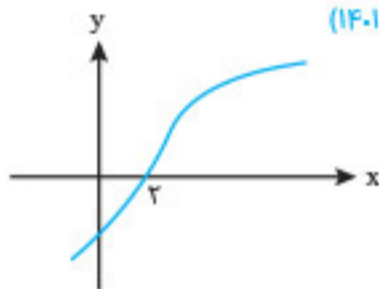
۷۷۲. اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ و $g(x) = [x] + [-x]$ باشد، حاصل $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ به ترتیب کدام هستند؟

- (۱) صفر و ۱ (۲) ۱ و صفر (۳) صفر و -۱ (۴) ۱ و -۱

۷۷۳. اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد، آن گاه عدد a کدام است؟ (تجربی ۹۱)

- (۱) ۹ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۷۴. اگر $f(x) = |\frac{1}{4}x - 1|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۷۷۵. تابع g با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار f ، محور x ها را در دو نقطه به طول های ۶ و $\frac{1}{4}$ قطع کند، آن گاه نمودار تابع $f \circ g$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟ (ریاضی خارج ۹۴)

- (۱) ۴ و $\frac{1}{9}$ (۲) ۹ و $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۴) ۹ و ۴

۷۷۶. فرض کنید $f(x) = [x] + [1-x]$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ باشد. اگر تساوی $(g \circ f)(x) = 3$ همواره برقرار باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۴

۷۷۷. اگر $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x - 5$ و $f(x) = x^2 - 6x + 1$ باشد، ضابطه $g(x)$ کدام می تواند باشد؟

- (۱) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 3} - 3$ (۲) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 3} + 3$
(۳) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - 3$ (۴) $g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3} + 3$

۷۷۸. اگر $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x-1}{x+3}$ باشد، آن گاه $g(2)$ کدام است؟

- (۱) -۹ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۷۷۹. اگر $(g \circ f)(x) = 5x^2 + 11$ و $f(x) = 2x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-7)$ چه قدر است؟ (تجربی تیرا ۱۴۰۱)

- (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۷۸۰. اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۷۸۱. اگر $f(x - \frac{1}{x}) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ باشد، آن گاه $f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) $x^2 - 3x$ (۲) $x^2 + 3x$ (۳) $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}$ (۴) $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$

۷۸۲. اگر $f(\frac{3x+1}{x-2}) = \frac{x+4}{x-3}$ باشد، آن گاه $f(\frac{4-x}{2x+1})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{28x+3}{21x+6}$ (۲) $\frac{-28x+13}{21x+6}$ (۳) $\frac{21x+6}{-28x+13}$ (۴) $\frac{21x-6}{28x-13}$

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۷۸۳. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & ; x < -1 \\ x & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. ماکزیمم مقدار تابع $f \circ g - g \circ f$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۷۸۴. اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (-1, 0), (-2, 4)\}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، آنگاه مجموع اعضای غیر تکراری دامنه $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۷۸۵. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، دامنه تابع $(g \circ f)(x)$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) بی شمار

(ریاضی ۹۶)

۷۸۶. اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشد، $D_{f \circ g}$ کدام است؟

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $\{0\}$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

(ریاضی خارج ۹۶)

۷۸۷. اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) \mathbb{R} (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

۷۸۸. اگر $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ و $f(x) = 2x - 1$ و $g = \{(3, -1), (2, 1), (1, 5), (4, -3)\}$ باشد، برد تابع $f \circ g$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی شمار

(تجربین خارج ۹۹)

۷۸۹. اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشد، برد تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 1)$ (۲) $(-1, 1]$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$

۷۹۰. اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \frac{3-x}{x+2}$ باشد، برد تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -\frac{2}{3}]$ (۲) $(-1, \frac{2}{3}]$ (۳) $(-1, \frac{2}{3}]$ (۴) $(-\infty, -\frac{2}{3}]$

ترکیب تابع مرکب و وارون تابع

۷۹۱. دو تابع $f = \{(1, -1), (2, 0), (3, 2), (4, 1)\}$ و $g = \{(0, 1), (-1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ مفروض اند. تابع $f \circ g^{-1} + f^{-1} \circ g$ کدام است؟

- (۱) $\{(3, 4), (4, 5)\}$ (۲) $\{(3, 2), (0, 4)\}$ (۳) $\{(3, 2), (4, 5)\}$ (۴) \emptyset

(ریاضی ۹۸)

۷۹۲. اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشد، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

- (۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$ (۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$

- (۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$ (۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$

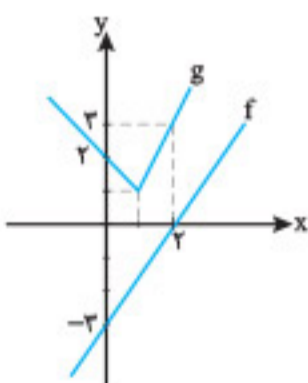
۷۹۳. اگر $f(x) = \frac{5x-1}{2x-6}$ و $g(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g^{-1}(f(5))$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۹

(تجربین خارج ۱۴۰۱)

۷۹۴. با توجه به نمودارهای f و g در شکل مقابل، حاصل $(g \circ f^{-1})(-2) \times (g \circ g)(0)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۶



۷۹۵. اگر $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2x+7}$ و $(f \circ g^{-1})(x) = x - 3$ تابعی یک به یک باشد، $f^{-1}(5)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۳۶

۷۹۶. با فرض $f(x) = x^2 - 4x + 9; x \geq 2$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$. حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۷۹۷. اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشد. مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۷۹۸. دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. حاصل $f^{-1}(f^{-1}(g(\frac{7}{6})))$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱ (۴) ۴

۷۹۹. دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد. a کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۷

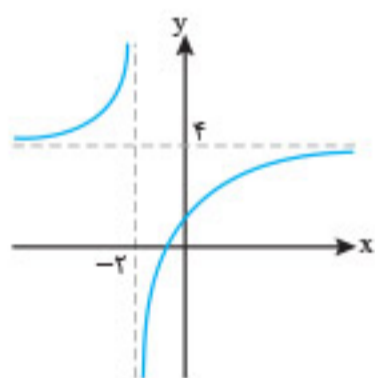
۸۰۰. دو تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد. مقدار a چه قدر است؟
 (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۸۰۱. اگر $f = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{4}, 3), (\frac{1}{4}, -3)\}$ و $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ باشد. مقدار a کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۸۰۲. اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند. برد تابع $(g^{-1} \circ f) - f$ کدام است؟
 (۱) $\{-1, 4\}$ (۲) $\{2, 3\}$ (۳) $\{3, 4\}$ (۴) $\{2, -1\}$

۸۰۳. توابع $f(x) = \log(2x-5)$ و $g(x) = x + \sqrt{2x-4}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ محور y ها را در α قطع کند. مقدار α کدام است؟
 (۱) $4 - \sqrt{2}$ (۲) $4 - \sqrt{3}$ (۳) $4 + \sqrt{2}$ (۴) $4 + \sqrt{3}$

(ریاضی دی ۱۴۰۱)



۸۰۴. به ازای چند عدد صحیح m . رابطه $\{(m^2+1, 3), (2, m+5), (m-3, 4), (5, 6)\}$ تابع نیست؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) صفر

۸۰۵. نمودار تابع هموگرافیک h با ضابطه $h(x) = ((\frac{f}{g}) \circ g)(x)$ به صورت مقابل است. اگر $f(x) = 4x - 2$ باشد. حاصل $g(2)$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) صفر

۸۰۶. اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2+ax+b}$ برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ باشد. حاصل ضرب جوابهای معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ کدام است؟
 (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۸۰۷. دو تابع $f(x) = \sqrt{ax}\sqrt{x+4}$ و $g(x) = \sqrt{(a^2-2)x^2+bx}$ با هم برابرند. حاصل $a+b$ کدام است؟
 (۱) -۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) -۲

۸۰۸. اگر $f(x) = |x-3| - 4$ و $D_g = (-2, 4)$ باشد. دامنه تابع $(g^{\circ} \circ (5f))(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۰۹. اگر $f(\frac{-2x+4}{x+3}) = \sqrt{3x-12}$ باشد. دامنه تابع $f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۸۱۰. اگر $f(x) = \sqrt{x-9}$ و $g(x) = \sqrt{16-x^2}$ باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برد تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۸۱۱. اگر $f(x) = x + n[x]$ و $g(x) = x - n[x]$ باشد، به ازای چند عدد صحیح n دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ با هم برابر هستند؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) بی‌شمار (۴)

۸۱۲. اگر $f(x) = (-1)^{|x|} \sqrt{1-x^2}$ با دامنه $\{-1, 1\}$ باشد، ضابطه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

- $f(\frac{1}{x})$ (۱) $-f(-x)$ (۲) $-f(x)$ (۳) $-f(-\frac{1}{x})$ (۴)

۸۱۳. اگر $f(x) = 2g^{-1}(3x-1)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(2)$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴)

۸۱۴. اگر $f(x+2) = \frac{3g(x-1)+1}{g(x-1)-2}$ و $f^{-1}(3x-\frac{1}{2}) = 8x^2 + 2x - 1$ باشد، حاصل $g^{-1}(0)$ کدام است؟

- ۸ (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴)

۸۱۵. اگر داشته باشیم $f(x) = x^2 + 2x$ ، جواب معادله $f^{-1}(2x+6) = 2f^{-1}(x)$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

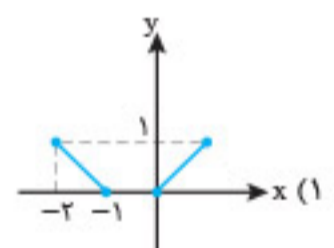
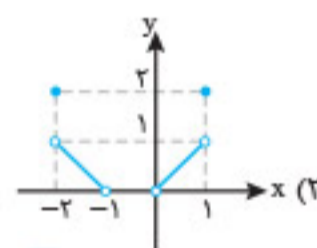
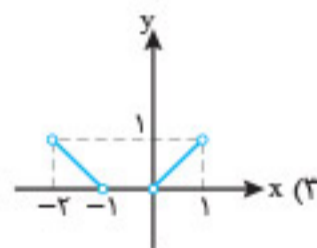
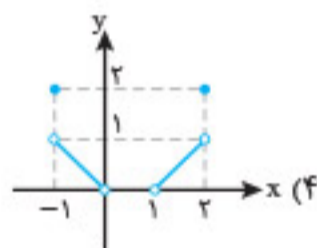
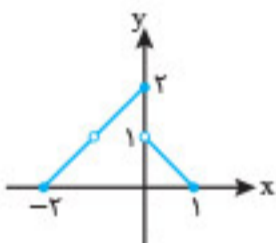
۸۱۶. برد تابع $f(x) = |x + \frac{1}{2}|$ با دامنه A به صورت $\{1, 2, 3\}$ است. چند مجموعه متمایز برای A وجود دارد؟

- ۲۷ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴)

۸۱۷. برد تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 1}$ کدام است؟

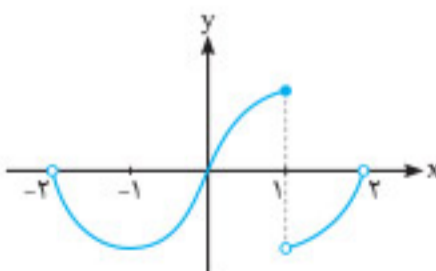
- $[-\frac{2}{\sqrt{3}}, 1]$ (۱) $[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $[-1, \frac{2}{\sqrt{3}}]$ (۴)

۸۱۸. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = (f \circ f)(x)$ کدام است؟



آزمون فصل

۸۱۹. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(x^2-1)f(x)}$ کدام است؟



- $[-1, 1]$ (۱)

- $[-1, 0]$ (۲)

- $[-1, 0] \cup \{1\}$ (۳)

- $(-2, 0] \cup [1, 2)$ (۴)

۸۲۰. اگر دو تابع $f(x) = \frac{ax^2 + b}{2x^2 - c}$ و $g: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ با هم مساوی باشند، $a+b+c$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

۸۲۱. وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $5y - 10x = 12$ را در نقطه‌ای به عرض $7/2$ قطع می‌کند. مقدار $f(\frac{7}{m})$ کدام است؟ (ریاض خارج ۱۴۰۲)

- $2\sqrt{3}$ (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{15}$ (۳) $2\sqrt{15}$ (۴)

۸۲۲. اگر $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x-1}}$ باشد، آن گاه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$
 (۲) $f^{-1}(x) = x^2 - 4x^2 + 5$
 (۳) $f^{-1}(x) = x^2 + 4x^2 - 5$
 (۴) $f^{-1}(x) = x^2 - 4x^2 - 5$

۸۲۳. اگر $D_f = (-3, 5)$ و $D_g = [0, 9]$ باشد، دامنه تابع $y = -3f(\frac{3x-1}{5}) + 4g(2x-1)$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{14}{3}, 5)$ (۲) $[\frac{1}{2}, \frac{26}{3}]$ (۳) $[\frac{1}{2}, 5]$ (۴) $(-\frac{14}{3}, \frac{26}{3})$

(تجربین خارج ۱۴۰۲)

۸۲۴. حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{3 \cdot y}{1+|y|}\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

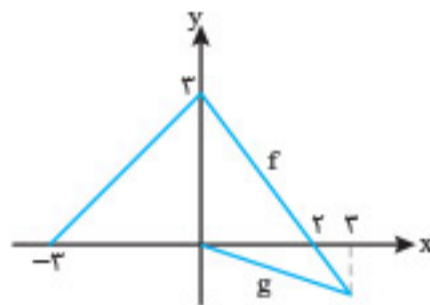
- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

(تجربین خارج ۱۴۰۰)

۸۲۵. فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله نقطه M از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{2}$

۸۲۶. نمودار دو تابع f و g به شکل‌های زیر هستند. معادله $f(g(x)) = k$ دارای یک جواب است. حدود k کدام است؟



- (۱) $[0, 3)$
 (۲) $[0, 3]$
 (۳) $[-\frac{3}{2}, 0]$
 (۴) $[\frac{3}{2}, 3]$

۸۲۷. اگر $f(x+1) = x^2 - 3x + 4$ باشد، آن گاه $f(x-4)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 - 8x - 22$ (۲) $x^2 + 8x - 22$ (۳) $x^2 - 8x + 22$ (۴) $x^2 - 13x + 44$

۸۲۸. اگر $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$ و $g(x) = \frac{x+3}{x-3}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) ۶ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) صفر

۸۲۹. اگر $f(x) = |x-1| + 1$ و $g(x) = x^2 - 4x + 6$ باشد، با فرض $x \in [\frac{1}{2}, 3]$ چند عدد صحیح عضو برد تابع $g \circ f$ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۳۰. اگر $f(x) = \frac{x-2}{3}$ و $(f \circ g)^{-1}(x) = 2 - (4-x)^2$ باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

- (۱) $14 + 3\sqrt[3]{x-2}$ (۲) $14 + 3\sqrt{x-4}$ (۳) $14 - 3\sqrt{x-2}$ (۴) $12 - 3\sqrt{x-4}$

۸۳۱. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ و $g(x) = \sqrt{|x|-2}$ باشد، چند عدد صحیح در دامنه تابع $f \circ g$ قرار ندارد؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۹ (۳) ۲۱ (۴) بی‌شمار

۸۳۲. تابع $f(x) = 4 - \sqrt{x+2}$ مفروض است. برد تابع $y = 2(f^{-1} \circ f)(x) + f^{-1}(x)$ کدام است؟

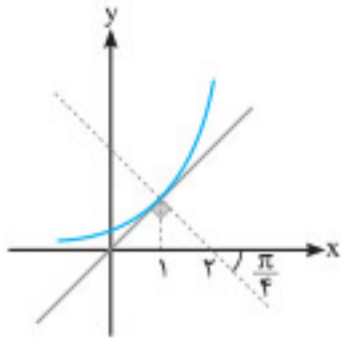
- (۱) $[5, 30]$ (۲) $(5, +\infty)$ (۳) $[5, 6]$ (۴) $[1, 30]$

۸۳۳. طول نقطه برخورد وارون تابع $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ و خط $y = 2 - x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{9}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{17}{3}$ (۴) $\frac{14}{9}$



برای دریافت پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌های برای ۱۰۰٪ و آزمون‌های فصل، رمزینده مقابل را اسکن کنید.



۱۷۵۵. اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+2h) - f^2(1-h)}{h}$ کدام است؟

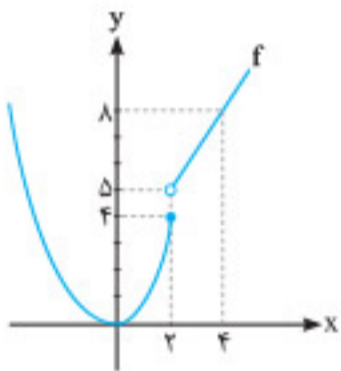
- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۶
- (۴) ۴

(۴) ۱

۱۷۵۶. مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x^2+x+1)^2}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$
- (۲) صفر
- (۳) $\frac{8}{9}$
- (۴) ۱

نیم‌ماس‌ها و مشتق‌های چپ و راست (استفاده از تعریف مشتق)



۱۷۵۷. اگر نمودار تابع f اجتماع یک تابع خطی و یک تابع درجه دوم باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $f'(2) = 4$
- (۲) $f'_-(2) = 4$
- (۳) $f'_+(2) = \frac{3}{2}$
- (۴) نقطه $x = 2$ برای تابع f یک نقطه گوشه‌ای است.

شیب خط نیم‌ماس‌های چپ و راست

۱۷۵۸. با توجه به جدول مقابل، نمودار تابع f در اطراف نقطه $x = 2$ کدام می‌تواند باشد؟

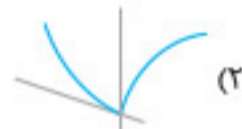
x	$1/999$	2	$2/0000001$
$f(x)$	$0/001$	0	$0/2$



(۴) $\frac{1}{2}$



(۳) صفر



(۲) ۱



(۱) -۱

۱۷۵۹. اگر $f(x) = x|x-1|$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h^2) - f(1)}{h^2}$ کدام است؟

۱۷۶۰. مشتق راست تابع $f(x) = x[-x^2]$ در نقطه‌ای به طول $x = -1$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) -۲

(۲) -۱

(۱) ۱

۱۷۶۱. مشتق راست تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - \sqrt{2x^2 - 1}}$ در $x = 1$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) -۲

(۲) ۲

(۱) $-\sqrt{2}$

۱۷۶۲. اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ در نزدیکی نقطه $x = a$ به کدام شکل است؟



(۴)



(۳)



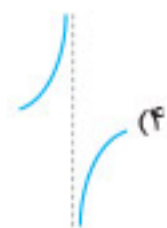
(۲)



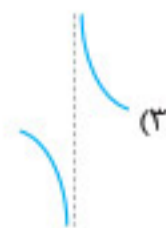
(۱)

خط مماس قائم

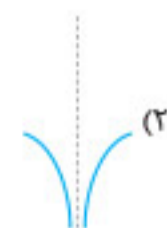
۱۷۶۳. نمودار تابع مشتق $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ در اطراف $x = 2$ به کدام صورت است؟



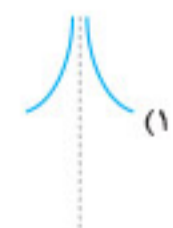
(۴)



(۳)

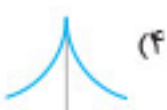


(۲)



(۱)

۱۷۶۴. رفتار تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x^3}$ در اطراف نقطه $x = 0$ چگونه است؟ (همه مماس‌ها قائم هستند.)



(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

مشتق پذیری توابع در نقطه و نقاط مشتق ناپذیر مهم (استفاده از تعریف مشتق)



مشتق پذیری توابع در نقطه

۱۷۶۵. اگر تابع f در x مشتق پذیر و $f'(x) = 2$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $2 - f(x_0)$ (۲) $2 + f(x_0)$ (۳) 2 (۴) -2

۱۷۶۶. اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد و $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -2$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $2 - f(a)$ (۲) $2 + f(a)$ (۳) 2 (۴) -2

۱۷۶۷. دامنه تابع مشتق $f(x) = (x-1)|x^2 - x^3|$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

۱۷۶۸. اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2}) - f'_-(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۱۷۶۹. اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|} [x]$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۷۷۰. تابع $f(x) = [x^2]$ در بازه $(-1, 2)$ در چند نقطه فاقد مشتق است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۱۷۷۱. تابع $f(x) = ax + [ax]$ در بازه $(0, 4)$ دارای γ نقطه مشتق ناپذیر است. مقدار a کدام می تواند باشد؟

- (۱) 3 (۲) -1 (۳) 1 (۴) -2

۱۷۷۲. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & ; x < -1 \\ x & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که $g \circ f$ یا $f \circ g$ در آن ها مشتق پذیر نیست، کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۰)

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

نقاط مشتق ناپذیر

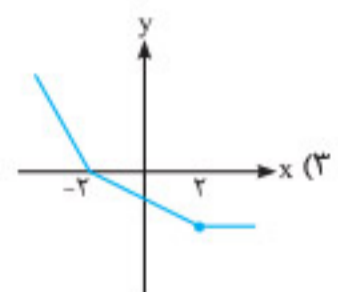
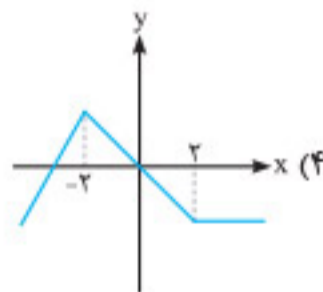
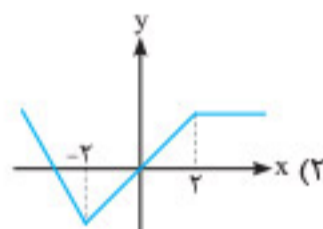
تابع مشتق و قواعد مشتق گیری



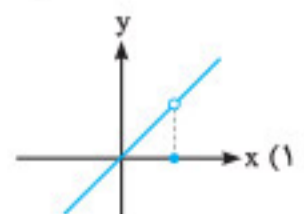
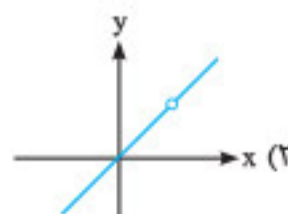
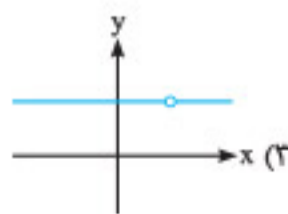
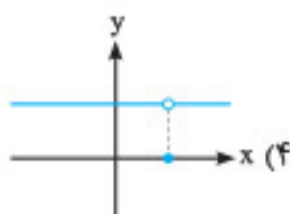
تابع مشتق

۱۷۷۳. کدام یک از نمودارهای زیر می تواند نمودار تابع پیوسته f با ویژگی های مقابل در مورد تابع مشتق آن باشد؟

- $f'(x) > 0$; $x < -2$
 $f'(x) < 0$; $-2 < x < 2$
 $f'(x) = 0$; $x > 2$



۱۷۷۴. اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & ; x \neq 3 \\ -1 & ; x = 3 \end{cases}$ باشد، آن گاه نمودار $f'(x)$ کدام است؟



۱۸۱۲. مشتق تابع $f(x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲

۱۸۱۳. اگر $f(x) = \sin x \cos^3 x$ و $g(x) = \cos x \sin^3 x$ باشد، مقدار $f'(\frac{\pi}{12}) - g'(\frac{\pi}{12})$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(تجربین خارج ۹۶)

۱۸۱۴. مشتق تابع $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

(تجربین خارج ۹۰)

۱۸۱۵. مشتق تابع $y = \cos^2 \frac{\pi}{3x}$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{96}$ (۲) $\frac{\pi}{72}$ (۳) $\frac{\pi}{48}$ (۴) $\frac{\pi}{32}$

(تجربین ۹۶)

۱۸۱۶. مشتق تابع $y = 2 \cos^2(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(تجربین خارج ۹۳)

۱۸۱۷. مشتق تابع $y = \sin^2 \sqrt{2x}$ به ازای $x = \frac{\pi^2}{18}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8\pi}$ (۲) $\frac{9}{4\pi}$ (۳) $\frac{27}{8\pi}$ (۴) $\frac{27}{4\pi}$

(تجربین خارج ۹۱)

۱۸۱۸. مشتق عبارت $\sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}}$ به ازای $x = \frac{3}{\pi}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-2\pi^2 \sqrt{3}}{9}$ (۲) $\frac{-2\pi^2}{9}$ (۳) $\frac{2\pi^2}{9}$ (۴) $\frac{2\pi^2 \sqrt{3}}{9}$

(ریاضی ۹۱)

۱۸۱۹. اگر $f(x) = \sin^2 \pi x$ و $g(x) = \frac{1}{4} \sqrt{5x-9}$ باشد، مشتق تابع $f \circ g$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{4} \pi$ (۴) $\frac{5}{8} \pi$

۱۸۲۰. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ باشد، مشتق تابع $f(2 \tan x)$ در نقطه $x = \frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

(ریاضی ۹۹)

۱۸۲۱. اگر f یک تابع مشتق پذیر، $g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x})$ و $g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

(ریاضی خارج ۹۹)

۱۸۲۲. اگر f یک تابع مشتق پذیر، $g(x) = f(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x})$ و $g'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، مقدار $f'(\frac{1}{3})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{4}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

(ریاضی خارج تیرا ۱۴۰۱)

۱۸۲۳. اگر f تابع مشتق پذیر، $g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$ و $g'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$ باشد، مقدار $f'(2)$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

خط مماس (استفاده از قواعد مشتق گیری)



۱۸۲۴. به ازای کدام مقدار b ، منحنی $f(x) = ax^2 + 2x$ بر خط $g(x) = x + b$ در $x = 1$ مماس است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

(تجربین خارج تیرا ۱۴۰۱)

۱۸۲۵. اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱



۱۸۲۶. خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$ با بیشترین شیب ممکن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۷)

- (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{5}{3}$ (۳) $-\frac{7}{3}$ (۴) $-\frac{8}{3}$

۱۸۲۷. نقطه‌ای روی منحنی $f(x) = x^2 + x$ وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه، موازی خط قاطعی است که دو نقطه به طول‌های $x=1$ و $x=3$ واقع بر منحنی تابع را به هم وصل می‌کند. عرض این نقطه کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۸۲۸. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ و دامنه $[-1, 8]$ ، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۸)

- (۱) -۲ (۲) $-1/5$ (۳) -۱ (۴) $-0/5$

۱۸۲۹. معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x+3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $4y - 3x = n$ است. مقدار $m+n$ چه قدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

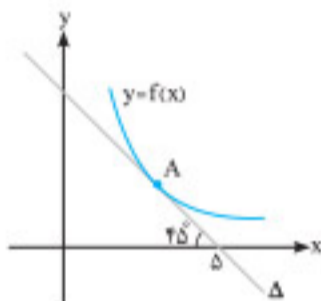
- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۸۳۰. خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x=4$ واقع بر آن، محور x ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (ریاضی ۹۹)

- (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۳

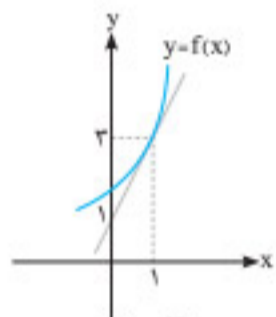
۱۸۳۱. خط Δ بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x=3$ مماس است. شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول ۳ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $-\frac{8}{3}$ (۴) $-\frac{3}{8}$



۱۸۳۲. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، شیب خط قائم بر نمودار تابع $y = \frac{x}{f(x)}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر نمودار کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) -۹ (۴) $-\frac{1}{9}$



۱۸۳۳. اگر معادله خط مماس بر تابع پیوسته $y=f(x)$ در نقطه $x=-1$ واقع بر تابع به صورت $y=3x+4$ باشد، معادله خط مماس بر تابع $g(x) = f(\frac{1-3x}{x+1})$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر تابع g کدام است؟

- (۱) $y=4-3x$ (۲) $y=-3x-2$ (۳) $y=x+2$ (۴) $y=x-2$

۱۸۳۴. خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y=x^2+1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

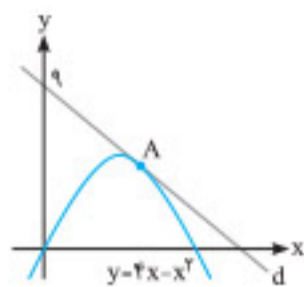
- (۱) $1/25$ (۲) $3/25$ (۳) $0/75$ (۴) $2/75$

۱۸۳۵. در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات، خط مماس بر $g(x)$ رسم می‌شود. فاصله نقطه برخورد این خط با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی مجدد ۱۴۰۱)

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

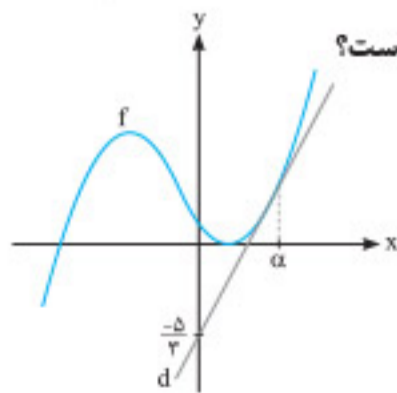
۱۸۳۶. در شکل مقابل، خط d بر منحنی تابع $y=f(x)$ مماس است. طول نقطه A کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{8}{3}$



۱۸۳۷. در شکل مقابل، خط d در نقطه $x=\alpha$ بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ مماس است. حاصل $f(\alpha) + f'(\alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{10}{3}$ (۴) $\frac{13}{3}$



۱۸۳۸. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

(تجربین خارج ۱۴۰۰ با تغییر)

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴) -۱۲

۱۸۳۹. معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- (۱) $y = x - 8$ (۲) $y = 2x - 8$ (۳) $y = 2x - 10$ (۴) $y = 4x - 14$

(تجربین ۹۲ با تغییر)

۱۸۴۰. عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $1 - \frac{\pi}{4}$ (۲) $1 + \frac{\pi}{4}$ (۳) $1 - \frac{\pi}{2}$ (۴) $1 + \frac{\pi}{2}$

(تجربین خارج ۹۴ با تغییر)

۱۸۴۱. عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{17}{9}$ (۳) $\frac{9}{17}$ (۴) $\frac{1}{2}$

(ریاض ۹۵)

۱۸۴۲. به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $(m+2)y = mx$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{1+x^2}$ است؟

- (۱) $m > -1$ (۲) $m < -1$ (۳) $m > 1$ (۴) $m < 1$

(ریاض خارج ۹۵)

۱۸۴۳. امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ با نیمساز ربع سوم، زاویه α می‌سازد. $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $0/5$ (۲) $0/2$ (۳) $0/25$ (۴) $0/3$

۱۸۴۴. از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x) = \sqrt{x} + 2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر زاویه حاده بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(2\alpha)$ کدام است؟

(ریاض خارج ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{7}{15}$ (۲) $\frac{8}{15}$ (۳) $\frac{225}{289}$ (۴) $\frac{240}{289}$

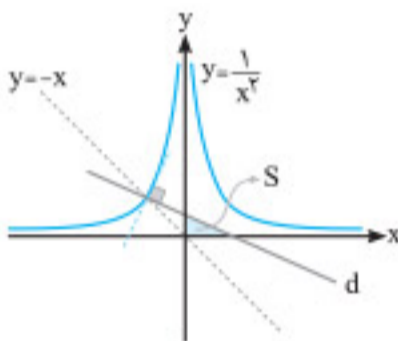
۱۸۴۵. در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = \sin x + \frac{1}{4}\cos x$ و $g(x) = \frac{3}{4}\sin x$ در بازه $[0, \pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

(ریاض تیرا ۱۴۰۱)

- (۱) $\frac{\pi}{4} - 1$ (۲) $\frac{\pi}{4} - 3$ (۳) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}$ (۴) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8}$

۱۸۴۶. از نقطه برخورد $y = \frac{1}{x^2}$ با نیمساز ربع دوم، قائمی بر منحنی رسم می‌کنیم تا با محورهای مختصات در ربع اول مثلثی بسازد. مساحت مثلث کدام است؟

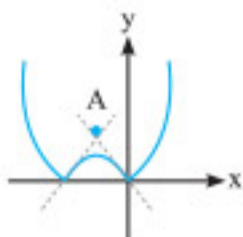
- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$



نیم‌مماس‌ها و مشتق‌های چپ و راست (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)



۱۸۴۷. نیم‌مماس‌های رسم‌شده در تابع $f(x) = |x^2 + 4x|$ ، یکدیگر را در نقطه A قطع نموده‌اند. عرض نقطه A کدام است؟



- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

(ریاض ۹۰)

۱۸۴۸. اگر مماس چپ و مماس راست تابع $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطه گوشه آن عمود بر هم باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{-1, 1\}$ (۴) \emptyset

(تجربین ۹۰)

۱۸۴۹. در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ ، مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(ریاض ۹۳)

۱۸۵۰. مشتق راست تابع با ضابطه $f(x) = (|x|-|x|)\sqrt[3]{9x}$ در نقطه $x = -3$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{16}{3}$ (۲) -۵ (۳) -۴ (۴) $\frac{7}{3}$

شیب خط نیم‌مماس‌های چپ و راست (تجربین)



(ریاض ۹۷)

۱۸۵۱. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x] + |x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

(ریاض ۹۴)

۱۸۵۲. اگر θ زاویه بین مماس چپ و راست نمودار تابع $f(x) = [x + \frac{1}{4}]x + x^2$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۸۵۳. معادله خط نیممماس راست بر تابع $f(x) = |x^2 - 4| + [2x^2] + x^2 + 2$ در نقطه‌ای به طول $x = -2$ واقع بر تابع کدام است؟ ([] نماد تابع جزء صحیح است.)

- (۱) $y = 40x + 74$ (۲) $y = 40x + 76$ (۳) $y = 44x + 82$ (۴) تابع در این نقطه خط نیممماس راست ندارد.

(تجربى خارج ۹۵)

۱۸۵۴. در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} & ; x > 0 \\ \sin 2x & ; x \leq 0 \end{cases}$ مقدار $f'_-(0) - f'_+(0)$ کدام است؟

- (۱) $0/75$ (۲) 1 (۳) $1/25$ (۴) $1/5$

۱۸۵۵. با فرض $f(x) = \begin{cases} 2 \sin \pi x - 3x & ; x \leq 1 \\ [\frac{x}{4}] \cos \pi x + 3 & ; x > 1 \end{cases}$ حاصل $f'_-(1) + f'_+(\frac{9}{4})$ کدام است؟ ([] نماد تابع جزء صحیح است.)

- (۱) $-4\pi - 3$ (۲) $2\pi - 1$ (۳) $2\pi + 1$ (۴) $-3\pi + 2$

۱۸۵۶. اگر θ زاویه بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [2 + \cos \frac{x}{4}] \sin 2x$ در نقطه $x = \pi$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟ (ریاض خارج ۹۴)

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۱۸۵۷. خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x) = |\sin(2x)| + 1$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با

(ریاض ۱۴۰۰)

نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۴) $2\sqrt{2}$

مشتق‌پذیری توابع در نقطه (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)



(تجربى ۹۷)

۱۸۵۸. اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq -2 \\ x^2 - x & ; x < -2 \end{cases}$ همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

(ریاض اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱۸۵۹. به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx + c & ; x < a \\ \frac{1}{x} & ; x \geq a \end{cases}$ روی \mathbb{R} مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) -2 (۴) 2

(تجربى خارج ۱۴۰۰)

۱۸۶۰. فرض کنید $g(x) = ax^2 + 5x + b$ اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \leq 2 \\ g'(x) & ; x > 2 \end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{15}{2}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{15}{2}$

۱۸۶۱. اگر تابع $f(x)$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + |x - 1| & ; x \geq 1 \\ [x] - b & ; x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

(ریاض خارج ۹۲)

۱۸۶۲. در تابع $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) $3 - \sqrt{2}$ (۲) $2 - \sqrt{2}$ (۳) $2 - 2\sqrt{2}$ (۴) $3 - 2\sqrt{2}$

(تجربى خارج ۹۸)

۱۸۶۳. در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{8}{ax + b} & ; x > 2 \\ -x^2 + 6x & ; x \leq 2 \end{cases}$ اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

شیب خط نیممماس‌های چپ و راست (مثلثاتی)

حاصل a_1 و a_n را در فرمول S_n جای گذاری می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(4 + k + 4n + k) = \frac{n}{2}(4n + 2k + 4)$$

$$= \frac{4n^2}{2} + \frac{2kn}{2} + \frac{4n}{2} = 2n^2 + kn + 2n = 2n^2 + (2+k)n$$

حاصل S_n را با عبارت داده‌شده در صورت سؤال برابر قرار می‌دهیم:

$$2n^2 + (2+k)n = bn^2 + 7n$$

از برابری دو مقدار فوق نتیجه می‌شود که باید ضرایب n^2 با هم و ضرایب n نیز با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} 2 = b \\ 2+k = 7 \Rightarrow k = 5 \end{cases}$$

روش دوم

در فرمول S_n ، قدرنسبت دو برابر ضریب n^2 است و همچنین در فرمول a_n ضریب n برابر قدرنسبت است، بنابراین:

$$\begin{cases} a_n = 4n + k \Rightarrow d = 4 \\ S_n = bn^2 + 7n \Rightarrow d = 2b \end{cases} \Rightarrow b = 2$$

چون $S_1 = a_1$ است، پس اگر $n = 1$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$2(1)^2 + 7(1) = 4(1) + k \Rightarrow k = 5 \Rightarrow k + b = 7$$

۲۱۹. **گزینه ۴** مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم، یعنی:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$$

جمله عمومی مجموع جملات را داریم که به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. دقت کنید که مجموع خواسته‌شده، مجموع جملات هفتم تا هجدهم است، پس

$$S_6 \text{ (مجموع ۶ جمله اول)} \text{ را از } S_{18} \text{ (مجموع ۱۸ جمله اول)} \text{ کم می‌کنیم. چرا؟}$$

$$S_{18} - S_6 = a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$$

این همان عبارتی است که حاصل آن را می‌خواهیم: پس با توجه به رابطه S_n داریم:

$$\frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6} = a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$$

$$\Rightarrow a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = 9 - (-9) = 18$$

پس خوب دقت کنید که سؤال، مجموع را با شروع از چه جمله‌ای می‌خواهد، اگر این جا $S_{18} - S_7$ را محاسبه می‌کردیم، جمله هفتم حذف می‌شد.

۲۲۰. **گزینه ۱**

روش اول

راهنما: اگر در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول دنباله با

مجموع m جمله اول دنباله برابر باشند، آن‌گاه مجموع $m+n$ جمله اول

دنباله برابر صفر می‌شود. ($m \neq n$) $S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$

به کمک راهنما فوق، از $S_5 = S_1$ به سادگی نتیجه می‌گیریم $S_{5+1} = S_5 = 0$ است.

روش دوم فرض کنید راهنما را به خاطر ندارید و می‌خواهید سؤال را به صورت تشریحی حل کنید. برای این منظور فرمول‌های S_5 و S_1 را باز می‌کنیم:

$$S_5 = S_1 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = \frac{1}{2}(2a_1 + 0d)$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 4d = 4a_1 + 0d \Rightarrow 2a_1 + 4d = 0$$

حال مجموع ۱۵ جمله اول را می‌یابیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + (15-1)d) = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = \frac{15}{2}(0) = 0$$

فرمول مجموع جملات دنباله حسابی را می‌نویسیم و به جای a_1 ، $-27d$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(-27d) + (n-1)d)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(-54d + (n-1)d) = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} -54d + (n-1)d = 0$$

$$\xrightarrow{d \neq 0} -54 = n-1 \Rightarrow n = 55$$

۲۱۴. **گزینه ۲** مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی ۳۰ است.

اکنون برای محاسبه جمله یازدهم دنباله به a_1 و d نیاز داریم. با توجه به اطلاعات مسئله، مجموع نه جمله اول (مجموع چهار جمله اول (۱۵) به اضافه مجموع پنج جمله بعد (۳۰)) برابر ۴۵ است: در نتیجه:

$$\begin{cases} S_4 = 15 \Rightarrow \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 15 \\ S_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3d = 7.5 \\ 2a_1 + 8d = 10 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 5d = 2.5 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

مقدار d را در معادله اول قرار می‌دهیم: $2a_1 + 3(\frac{1}{2}) = 7.5 \Rightarrow 2a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 3$

حال جمله یازدهم را محاسبه می‌کنیم: $a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10(\frac{1}{2}) = 8$

۲۱۵. **گزینه ۳** تعداد جملات دسته‌ها به صورت مقابل است: $1, 2, 3, \dots, 40$

حال باید ببینیم جمله آخر دسته چهارم، چندمین عدد است: پس مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰ را می‌یابیم.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{n=40} S_{40} = 20(1 + 40) = 820$$

جمله ۸۲۰ام اعداد طبیعی فرد را طبق الگوی زیر به دست می‌آوریم:

$$t_n = 2n - 1 \Rightarrow t_{820} = 2(820) - 1 = 1639$$

۲۱۶. **گزینه ۳**

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \dots$$

شماره آخرین جمله واقع در دسته بیستم $= 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_{191} + a_{210}) = 10(191 + 210) = 10 \times 401 = 4010$$

۲۱۷. **گزینه ۳** جملات b_n را می‌سازیم:

$$b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \\ b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{5+9}{2} = 7 \\ b_3 = \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{9+13}{2} = 11 \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۴ و جمله اول ۳ داریم:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2(3) + (20-1) \times 4) = 820$$

۲۱۸. **گزینه ۳** روش اول مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از فرمول

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ به دست می‌آید، با داشتن جمله n ام $(a_n = 4n + k)$ ، می‌توانیم مقدار هر جمله دلخواه از جمله a_1 را بیابیم: بنابراین:

$$a_n = 4n + k \Rightarrow a_1 = 4(1) + k \Rightarrow a_1 = 4 + k$$

با استفاده از فرمول مجموع جمله‌های دنباله حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14(4)) = 75 \Rightarrow a_1 = -23$$

به کمک جمله عمومی دنباله، جمله سوم را می‌یابیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_3 = -23 + 2(4) = -19$$

۲۲۵. **گزینه ۳** در صورت کسر مجموع ۶ جمله ردیف زوج با شروع از a_2 و

در مخرج کسر مجموع ۶ جمله ردیف فرد با شروع از a_3 را داریم: بنابراین

ابتدا مخرج کسر را به کمک فرمول جمله عمومی دنباله حسابی به صورت زیر

بازنویسی می‌کنیم: $a_3 + a_5 + \dots + a_{13} = a_3 + a_5 + \dots + a_{11} + (a_1 + 12d)$

$$= \underbrace{a_1 + a_3 + \dots + a_{11}}_{7d} + 12d = 7d + 12d = 19d$$

با توجه به مطالب گفته شده داریم:

$$\Rightarrow a_3 + a_5 + \dots + a_{13} = a_1 + a_3 + \dots + a_{11} + 6d = 7d + 6d = 13d$$

اکنون مقدارهای به دست آمده را در عبارت خواسته شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{a_3 + a_5 + \dots + a_{13}}{a_3 + a_5 + \dots + a_{13}} = \frac{13d}{19d} = \frac{13}{19}$$

۲۲۶. **گزینه ۱**

راهنمایی: اگر a_1, a_2, \dots, a_n جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right)$$

بنابراین با توجه به راهنمایی بالا داریم:

$$\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10-1}{20} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{20} \right) = \frac{3}{20} = 0.15$$

۲۲۷. **گزینه ۲** با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی، به ساده کردن رابطه داده شده می‌پردازیم:

$$a_2 a_4 = 2a_5 \Rightarrow a_1 q \times a_1 q^3 = 2a_1 q^4 \Rightarrow a_1^2 q^4 = 2a_1 q^4 \Rightarrow a_1 = 2$$

۲۲۸. **گزینه ۴** می‌دانیم فرمول جمله عمومی دنباله هندسی به صورت

$a_n = a_1 q^{n-1}$ است، بنابراین در تساوی داده شده به جای جملات می‌توان

معادل آن‌ها را قرار داد، یعنی:

$$\frac{a_1 q^2 + a_1 q^4}{a_1 q^5 + a_1 q^7} = 16$$

حال از صورت و مخرج، ب.م.م عبارت را فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{a_1 q^2 (1 + q^2)}{a_1 q^5 (1 + q^2)} = 16 \Rightarrow \frac{1}{q^3} = 16 \Rightarrow q^3 = \frac{1}{16} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

۲۲۹. **گزینه ۴** ابتدا جمله عمومی دنباله هندسی را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}$$

تعداد جملات دنباله هندسی داده شده برابر شماره جمله $\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ است:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \Rightarrow 2n-1 = k-1 \Rightarrow n = \frac{k}{2}$$

۲۳۱. **گزینه ۲**

راهنمایی: در هر دنباله حسابی می‌توان مجموع تعداد فردی از جملات

دنباله را از رابطه (جمله وسط) \times تعداد $= S_n$ به دست آورد.

$$255 = (2n+1) \times 17 \Rightarrow 15 = 2n+1 \Rightarrow n = 7$$

توجه کنید که $2n+1$ فرد است.

۲۳۲. **گزینه ۲** مجموع جملات دنباله حسابی را (با جمله اول a و جمله آخر b)

بدون در نظر گرفتن a و b ، از فرمول $S_n = \frac{n(a+b)}{2}$ به دست می‌آوریم.

$$S_n = \frac{n(4+6)}{2} \quad \text{مجموع واسطه‌های حسابی بین ۴ و ۶:}$$

از آن جایی که مجموع همه جملات باید بیش از ۵۰ شود، می‌توان نوشت:

$$4+6 + \frac{n(4+6)}{2} > 50 \Rightarrow \frac{10n}{2} > 40 \Rightarrow n > 8$$

حداقل مقدار n برابر ۹ می‌شود.

۲۳۳. **گزینه ۱** روش اول

راهنمایی: اگر در یک دنباله حسابی $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ باشد، آن‌گاه:

$$\textcircled{1} d = 2a_1 \quad \textcircled{2} \frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

با توجه به راهنمایی فوق، از آن جایی که $\frac{S_5}{S_3} = \frac{25}{9}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{2(5)-1}{2(3)-1} \quad \text{است، یعنی} \quad \frac{a_5}{a_3} = \frac{9}{5} \quad \text{است.}$$

روش دوم فرض کنید راهنمایی را به خاطر ندارید و می‌خواهید سؤال را به صورت

تشریحی حل کنید: برای این منظور فرمول‌های S_3 و S_5 را باز می‌کنیم:

$$\frac{S_5}{S_3} = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{\frac{5}{2}(2a_1 + 4d)}{\frac{3}{2}(2a_1 + 2d)} = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{2a_1 + 4d}{2a_1 + 2d} = \frac{5}{3}$$

$$6a_1 + 12d = 10a_1 + 10d \Rightarrow 2d = 4a_1 \Rightarrow d = 2a_1$$

حالا به محاسبه نسبت خواسته شده می‌پردازیم:

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + 2d} = \frac{a_1 + 4(2a_1)}{a_1 + 2(2a_1)} = \frac{9a_1}{5a_1} = \frac{9}{5}$$

۲۳۴. **گزینه ۱**

راهنمایی: اگر مجموع k جمله اول ردیف فرد را از مجموع k جمله اول

ردیف زوج کم کنیم، حاصل برابر kd می‌شود:

$$\underbrace{(a_2 + a_4 + \dots + a_{2k})}_{\text{جمله اول ردیف زوج}} - \underbrace{(a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1})}_{\text{جمله اول ردیف فرد}} = kd$$

مجموع ۱۵ جمله فرد و ۱۵ جمله زوج را داریم، مطابق راهنمایی گفته شده داریم:

$$(a_2 + a_4 + \dots + a_{30}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{29}) = 15 \times d$$

$$\Rightarrow 105 - 75 = 15d \Rightarrow d = 2$$

جمله‌های ردیف فرد دنباله را کنار هم می‌نویسیم.

$$\begin{array}{ccccccc} & +2d & & +2d & & & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ a_1 & , & a_3 & , & a_5 & , & \dots & , & a_{29} \end{array}$$

این جمله‌ها، دنباله‌ای حسابی با ۱۵ جمله، جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ هستند.



واسطه هندسی جفت‌های داده‌شده، a_6 است:

$$a_6^2 \times a_6^2 \times a_6^2 \times a_6^2 = (3^2 \times 3) \times (3^2 \times 2) = 6^4 \Rightarrow a_6^4 = 6^4$$

$$\Rightarrow a_6 = \pm \sqrt[4]{6^4} \xrightarrow{\text{جملات دنباله مثبت‌اند}} a_6 = \sqrt{6}$$

حاصل ضرب سه جمله وسط را محاسبه می‌کنیم:

$$a_5 \times a_6 \times a_7 = (a_5 \times a_7) \times a_6 = a_6^2 \times a_6 = a_6^3 = (\sqrt{6})^3 = 6\sqrt{6}$$

۲۲۴. **گزینه ۴** ابتدا واسطه حسابی و واسطه هندسی این دو عدد را به دست می‌آوریم:

$$2 - \sqrt{3}, x, \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{واسطه حسابی: } 2x = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2x = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = 2$$

$$2 - \sqrt{3}, y, \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{واسطه هندسی: } y^2 = (2 - \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \right) = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

تفاضل واسطه حسابی از واسطه هندسی برابر است با:

$$y - x = \begin{cases} 1 - 2 = -1 \\ -1 - 2 = -3 \end{cases}$$

هشدار: توجه کنید تفاضل a از b برابر $b - a$ است.

۲۲۵. **گزینه ۲** با توجه به تعریف واسطه حسابی و واسطه هندسی، می‌توان

$$a, y, b \Rightarrow y = \frac{a+b}{2} \quad \text{مقادیر } a \text{ و } b \text{ را تعیین کرد.}$$

$$\Rightarrow a + b = 14 \quad (1)$$

$$a, b, 25 \Rightarrow b^2 = 25a \quad (2)$$

از رابطه (1) می‌توان نوشت $a = 14 - b$. با جای‌گذاری آن در رابطه (2) مقدار b را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$b^2 = 25(14 - b) \Rightarrow b^2 = 350 - 25b \Rightarrow b^2 + 25b - 350 = 0$$

$$\Rightarrow (b - 10)(b + 35) = 0 \xrightarrow{b \in \mathbb{N}} \begin{cases} b = 10 \quad \checkmark \\ b = -35 \quad \times \end{cases}$$

۲۲۶. **گزینه ۳** با توجه به صعودی بودن دنباله، آرایش اعداد به شکل

$$2, a, b, c, d, 486$$

مقابل است:

عدد ۴۸۶ ششمین جمله دنباله هندسی با جمله اول ۲ است:

$$486 = 2(q^{6-1}) \Rightarrow 243 = q^5 \Rightarrow q = 3$$

$$2, 6, 18, 54, 162, 486 \quad \text{حال دنباله را بازنویسی می‌کنیم:}$$

واسطه حسابی ۶ و ۱۸، میانگین آن‌ها یعنی ۱۲ است.

۲۲۷. **گزینه ۱** چهار عدد t_1, t_2, t_3, t_4 را بین a_4 و a_5 درج می‌کنیم:

$$a_4, a_4, t_1, t_2, t_3, t_4, a_5$$

با توجه به این که a_4 جمله دوم و a_5 جمله هفتم دنباله حسابی است، پس می‌توانیم به کمک این جمله‌ها قدرنسبت دنباله حسابی را بیابیم.

$$d = \frac{a_5 - a_4}{7 - 2}$$

از طرفی اختلاف جمله‌های a_4 و a_5 نیز قدرنسبت دنباله حسابی است.

$$d = a_4 - a_3$$

$$\frac{a_5 - a_4}{7 - 2} = a_4 - a_3 \Rightarrow \frac{a_1 q^5 - a_1 q^2}{5} = a_1 q^2 - a_1 q^1$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{a_1 q^2 (q - 1)}{5} = a_1 q^2 (q - 1) \Rightarrow q = 5$$

۲۲۰. **گزینه ۱** با توجه به فرمول جمله عمومی دنباله هندسی داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_8 = a_1 q^7 = 8, \quad a_{10} \times a_{18} = 2^{18}$$

$$\Rightarrow a_1 q^9 \times a_1 q^{17} = 2^{18} \Rightarrow a_1^2 \times q^{26} = 2^{18} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \pm a_1 q^{13} = 2^9$$

$$\frac{\pm a_1 q^{13}}{a_1 q^7} = \frac{2^9}{2^7} = 2^2 \Rightarrow \pm q^6 = 2^2 \xrightarrow{\text{دنباله صعودی است}} q = 2$$

$$\Rightarrow a_1 \times 2^7 = 2^2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2^5}$$

جمله سی‌ودوم این دنباله برابر است با:

$$a_{32} = a_1 q^{31} = \frac{1}{2^5} \times 2^{31} = 2^{26}$$

۲۲۱. **گزینه ۴** به کمک جمله عمومی دنباله، جملات a_4 و a_5 را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_5}{a_2} = 2 \Rightarrow \frac{aq^4}{(aq)^2} + \frac{aq}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{aq^2}{a^2 q^2} + \frac{aq}{a^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{a^2} + \frac{q}{a} = 2 \Rightarrow \left(\frac{q}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{a}\right) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{q}{a} + 2\right)\left(\frac{q}{a} - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{q}{a} = -2 \\ \frac{q}{a} = 1 \end{cases} \quad (*)$$

عبارت خواسته‌شده نسبت a^2 به a^2 است: پس:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a^2}{aq} = \frac{a}{q} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} \frac{a}{q} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark \\ \frac{a}{q} = 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

که $-\frac{1}{2}$ در بین گزینه‌ها وجود دارد.

۲۲۲. **گزینه ۴** ابتدا جمله عمومی دنباله هندسی را می‌نویسیم و

$$\{q \in \mathbb{N}; q \geq 2\} \text{ را در نظر می‌گیریم:}$$

$$a_1 q^{n-1} \leq 100 \Rightarrow a_1 (2)^{n-1} \leq 100$$

با توجه به این که تعداد جملات ۵ تا است، به جای n عدد ۵ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a_1 (2)^{5-1} \leq 100 \Rightarrow 16a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 \leq \frac{100}{16} \Rightarrow a_1 \leq 6 \frac{1}{4}$$

بنابراین $a_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می‌تواند باشد.

اگر q را ۳ در نظر بگیریم:

$$a_1 q^{n-1} \leq 100 \Rightarrow a_1 (3)^{n-1} \leq 100 \xrightarrow{n=5} a_1 (3)^{5-1} \leq 100$$

$$\Rightarrow a_1 (3^4) \leq 100 \Rightarrow 81a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 \leq \frac{100}{81} \Rightarrow a_1 \leq 1 \frac{1}{81}$$

بنابراین $a_1 = 1$ می‌تواند باشد.

توجه کنید که به ازای $q \geq 4$ نیز نمی‌توان ۵ جمله با شرایط سؤال یافت. در مجموع،

۷ دنباله به صورت گفته‌شده به دست می‌آید.

دقت کنید: در این تست می‌توانیم به جای این که با تعیین قدرنسبت، جمله اول را بیابیم، با تعیین جمله اول، قدرنسبت‌ها را محاسبه کنیم: ولی این روش زمان بیشتری را می‌گیرد.

۲۲۳. **گزینه ۲** در این دنباله با توجه به اطلاعات داده‌شده داریم:

$$a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_{11}$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 24$$

$$a_{11} \times a_{10} \times a_9 \times a_8 = 54$$

$$\text{ضرب طرفین: } (a_1 \times a_{11}) \times (a_2 \times a_{10}) \times (a_3 \times a_9) \times (a_4 \times a_8) = 24 \times 54$$