مقدمه

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای ریاضی۳ تجربی سال دوازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آنها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آنها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همهٔ تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در انتهای هر فصل آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مهدیه جمشیدی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو و همچنین از خانم شیرین دانشی‌پور و آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: تابع

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

فصل چهارم: مشتق

فصل پنجم: کاربرد مشتق

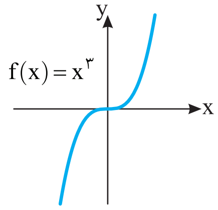
درس اول: توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

تعریف هر تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را که ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۱x+a_۰$ است، که در اینجا n عددی صحیح و نامنفی است و $a_۰$، $a_۱$، ... و a_n عددهایی حقیقی هستند و $a_n \neq ۰$، **تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ n** می‌نامند.

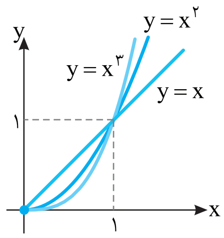
مثال: تابع‌های $f(x)=۲$، $f(x)=۳x-۱$، $f(x)=x^۲+۴$ و $f(x)=x^۳-\sqrt{۳}x^۲+x-۱$ همگی تابع‌هایی چندجمله‌ای هستند. تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲+۱}$ تابعی چندجمله‌ای نیست (زیرا ضابطه‌اش به صورت چندجمله‌ای نیست).

همین‌طور تابع f با دامنهٔ $[۰,۱]$ و ضابطهٔ $f(x)=x$ تابعی چندجمله‌ای نیست (زیرا دامنه‌اش $\mathbb{R}$ نیست).



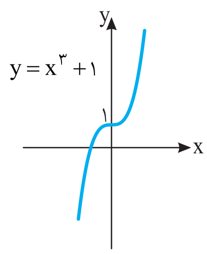
نمودار تابع چندجمله‌ای درجهٔ ۳ با ضابطهٔ $f(x)=x^۳$ به صورت روبه‌رو است.
چون هر خط موازی محور x نمودار این تابع را قطع می‌کند، پس برد این تابع $\mathbb{R}$ است (توجه کنید که طبق تعریف، دامنهٔ این تابع هم $\mathbb{R}$ است). همین‌طور، چون هر خط موازی محور x این نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند، پس این تابع یک‌به‌یک نیز هست. به این ترتیب، تابع f وارون‌پذیر است.

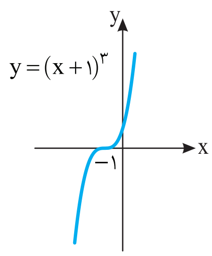
مسئله ۱ نمودار تابع‌های با ضابطهٔ $y=x$، $y=x^۲$ و $y=x^۳$ را روی بازهٔ $[۰,+\infty)$ در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



راه‌حل اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه $a^۳<a^۲<a$، بنابراین روی بازهٔ $(۰,۱)$، نمودار $y=x^۳$ زیر نمودار $y=x^۲$ است و نمودار $y=x^۲$ زیر نمودار $y=x$ است. اگر $a>۱$، آن‌گاه $a<a^۲<a^۳$، بنابراین روی بازهٔ $(۱,+\infty)$، نمودار $y=x^۳$ بالای نمودار $y=x^۲$ است و نمودار $y=x^۲$ بالای نمودار $y=x$ است. توجه کنید که اگر $a=۰$ یا $a=۱$، آن‌گاه $a=a^۲=a^۳$، پس هر سه نمودار در نقطه‌های $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ مشترک‌اند.

مسئله ۲ نمودار تابع‌های $y=x^۳+۱$ و $y=(x+۱)^۳$ را رسم کنید.

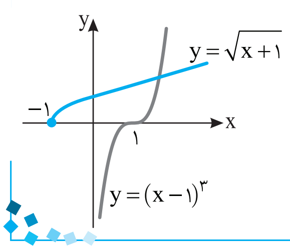




راه‌حل برای رسم نمودار تابع $y=x^۳+۱$، ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را رسم می‌کنیم، سپس این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=x^۳+۱$ به‌دست بیاید. برای رسم نمودار تابع $y=(x+۱)^۳$، ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را رسم می‌کنیم، سپس این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=(x+۱)^۳$ به‌دست بیاید.

تست ۱ نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}$ در چند نقطه نمودار تابع $y=(x-۱)^۳$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



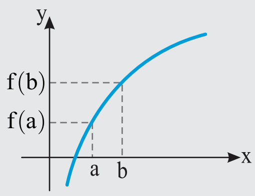
راه‌حل نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}$ به‌دست بیاید. نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=(x-۱)^۳$ به‌دست بیاید. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که این دو نمودار یک نقطهٔ تقاطع دارند.

توابع صعودی و نزولی

تعریف تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ **اکیداً صعودی** می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$$

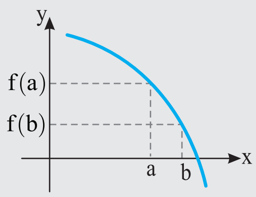
اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **اکیداً صعودی** است.



- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ **اکیداً نزولی** می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$$

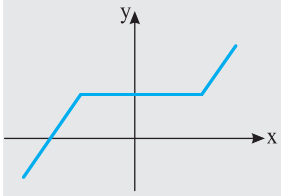
اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **اکیداً نزولی** است.



- اگر تابع f روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A **اکیداً یکنواست**.
- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ **صعودی** می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)\le f(b)$$

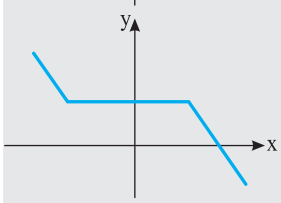
اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **صعودی** است.



- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ **نزولی** می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)\ge f(b)$$

اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **نزولی** است.

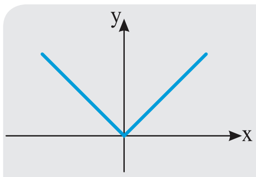


- اگر تابع f روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A **یکنواست**.

تذکر تابع ثابت روی هر زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش هم صعودی است و هم نزولی. همچنین، تابعی که روی مجموعه‌ای هم صعودی است و هم نزولی، روی این مجموعه تابعی ثابت است.

تذکر وقتی می‌گوییم «تابع f صعودی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش صعودی است و وقتی می‌گوییم «تابع f نزولی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش نزولی است.

تعریف اگر تابع f روی مجموعهٔ $A\subseteq D_f$ نه صعودی باشد و نه نزولی، روی این مجموعه تابعی **غیریکنواست**.



تابعی غیریکنوا

تست ۲ به‌ازای چند عدد صحیح x تابع $f=\{(-2,4x-3),(0,x^2),(x^2,9)\}$ صعودی است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

راه‌حل با توجه به دو زوج مرتب $(0,x^2)$ و $(-2,4x-3)$ می‌توان نوشت:

$$-2<0\Rightarrow 4x-3\le x^2\Rightarrow x^2-4x+3\ge 0\Rightarrow x\le 1 \ \text{یا}\ x\ge 3$$

با توجه به دو زوج مرتب $(x^2,9)$ و $(-2,4x-3)$ می‌توان نوشت:

$$-2<x^2\Rightarrow 4x-3\le 9\Rightarrow 4x\le 12\Rightarrow x\le 3$$

اگر $x=0$، $f=\{(-2,-3),(0,0),(0,9)\}$، که در این صورت f تابع نیست. پس با توجه به دو زوج مرتب $(x^2,9)$ و $(0,x^2)$ می‌توان نوشت:

$$0<x^2\Rightarrow x^2\le 9\Rightarrow -3\le x\le 3$$

چون x مقدار صحیح است، از اشتراک شرایط به‌دست آمده نتیجه می‌شود: $x\in\{3,1,-1,-2,-3\}$. بنابراین پنج مقدار صحیح برای x وجود دارد.

تست ۳

تابع $f=\{(۱,a-۲),(۲,۳a+۴),(۳,۲a-b)\}$ **هم صعودی است و هم نزولی. مقدار** $a+b$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) -۲ ۳) -۴ ۴) -۵

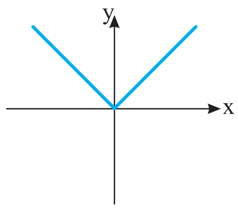
راه‌حل تنها تابعی که هم صعودی است و هم نزولی تابع ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین

$$f(۱)=f(۲)=f(۳)\Rightarrow a-۲=۳a+۴=۲a-b\Rightarrow a=-۳\,,\,b=-۱$$

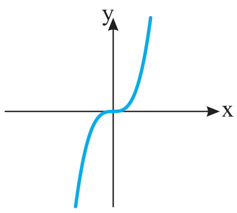
در نتیجه $a+b=-۴$.

تذکر ممکن است تابعی روی دامنه‌اش غیریکنوا باشد، اما روی زیرمجموعه‌هایی از دامنه‌اش یکنوا باشد.

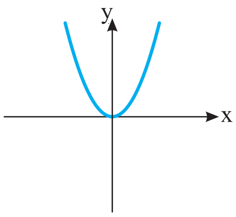
مثال: نمودار توابع معروف را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم. با توجه به نمودار آنها صعودی (اکید)، نزولی (اکید) یا غیریکنوا بودن هر تابع مشخص است.



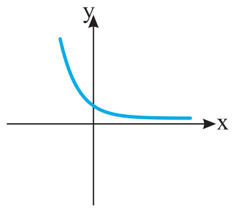
$y=|x|$, غیریکنوا



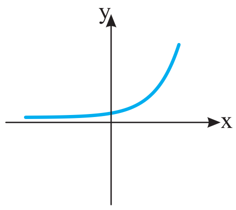
$y=x^۳$, اکیداً صعودی



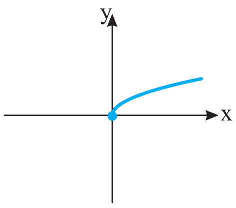
$y=x^۲$, غیریکنوا



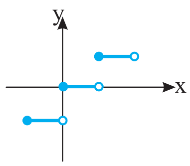
$y=a^x$, $۰<a<۱$, اکیداً نزولی



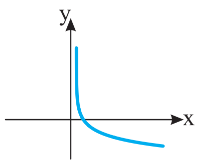
$y=a^x$, $a>۱$, اکیداً صعودی



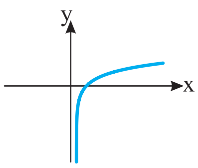
$y=\sqrt{x}$, اکیداً صعودی



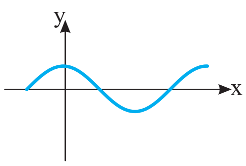
$y=[x]$, صعودی



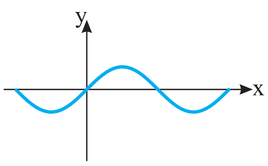
$y=\log_a x$, $۰<a<۱$, اکیداً نزولی



$y=\log_a x$, $a>۱$, اکیداً صعودی

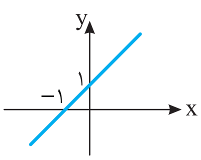


$y=\cos x$, غیریکنوا

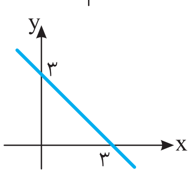


$y=\sin x$, غیریکنوا

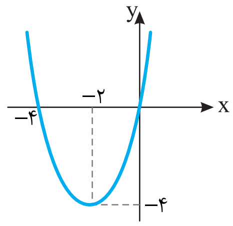
مثال: تابع $y=x+۱$ یک تابع اکیداً صعودی است، زیرا با افزایش x، y افزایش می‌یابد، یعنی نمودار آن با افزایش x رو به بالا حرکت می‌کند.



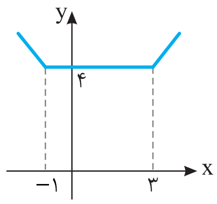
- تابع $y=-x+۳$ یک تابع اکیداً نزولی است، زیرا با افزایش x، y کاهش می‌یابد، یعنی نمودار آن با افزایش x رو به پایین حرکت می‌کند.



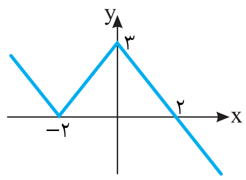
- تابع $y=x^{۲}+۴x$ در دامنهٔ خود یک تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست. اما این تابع روی بازهٔ $(-\infty,-۲]$ اکیداً نزولی است، زیرا در این بازه نمودار آن با افزایش x رو به پایین حرکت می‌کند و روی بازهٔ $[-۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است زیرا در این بازه با افزایش x، y افزایش می‌یابد.



- نمودار تابع $y=|x+۱|+|x-۳|$ به شکل مقابل است. این تابع روی بازهٔ $[۳,+\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $(-\infty,-۱]$ اکیداً نزولی است. روی بازهٔ $[-۱,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی نیست، ولی صعودی است، زیرا با افزایش x، y کاهش پیدا نمی‌کند، در واقع یا ثابت می‌ماند یا زیاد می‌شود. به همین ترتیب روی بازهٔ $(-\infty,۳]$ تابع اکیداً نزولی نیست، ولی نزولی است.



تست ۴ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. تابع f روی کدام بازهٔ زیر اکیداً نزولی است؟

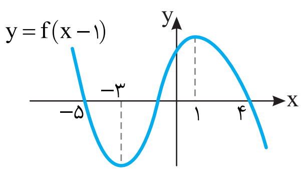


۱) $(-۴,۰)$ ۲) $(-۲,۲)$

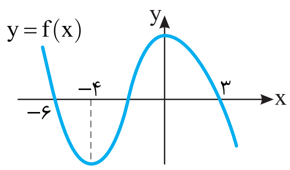
۳) $(۱,۴)$ ۴) $(-۱,+\infty)$

راه‌حل تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-۲]$ و $[۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(۱,۴)$ زیرمجموعهٔ یکی از این دو بازه است.

مسئله ۳ نمودار تابع $y=f(x-۱)$ در شکل مقابل رسم شده است. تابع f روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟



راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست بیاید. اکنون از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که این تابع روی بازهٔ $[-۴,۰]$ اکیداً صعودی است.



تست ۵ اگر $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<-۲ \\ ۲ & -۲\le x<۳ \\ -۲x+۴ & x\ge ۳ \end{cases}$، و تابع f روی بازهٔ $[a,+\infty)$ نزولی باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

راه‌حل تابع $y=x-۳$ روی بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً صعودی است. تابع $y=۲$ روی بازهٔ $[-۲,۳)$ تابعی ثابت است، پس هم نزولی است هم صعودی. تابع $y=-۲x+۴$ روی بازهٔ $[۳,+\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۲,+\infty)$ نزولی است. پس حداقل مقدار a برابر -۲ است.

تست ۶ تابع نمایی $f(x)=(۳k+۱)^{x}$ اکیداً نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $۰<k<\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}<k<۰$ ۳) $-\frac{۱}{۳}<k<\frac{۱}{۳}$ ۴) $k>۰$

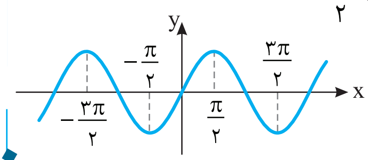
راه‌حل اگر تابع $y=a^{x}$ اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه $۰<a<۱$. بنابراین $۰<۳k+۱<۱$، پس $-\frac{۱}{۳}<k<۰$.

تست ۷

تابع $f(x)=\sin x$ روی بازهٔ $[a,\frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

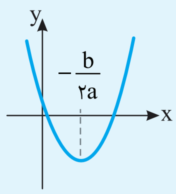
راه‌حل: با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ معلوم می‌شود که حداقل مقدار a برابر $\frac{\pi}{2}$ است.



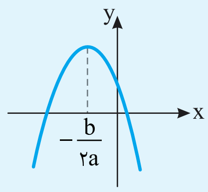
نکته

تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست.

- اگر $a>0$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است.
- اگر $a<0$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً نزولی است.



$f(x)=ax^2+bx+c\,,a>0$



$f(x)=ax^2+bx+c\,,a<0$

تست ۸

تابع $f(x)=x^2-6x$ روی بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

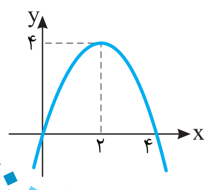
راه‌حل: تابع $f(x)=x^2-6x$ روی بازهٔ $(-\infty,3]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[3,+\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین حداقل مقدار a برابر ۳ است.

تست ۹

بزرگ‌ترین مقدار k که به‌ازای آن تابع f با دامنهٔ $(-\infty,k]$ و ضابطهٔ $f(x)=-x^2+4x$ اکیداً صعودی است کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل: طول رأس سهمی به معادلهٔ $y=-x^2+4x$ برابر است با $-\frac{b}{2a}=2$. بنابراین از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که این تابع روی بازهٔ $(-\infty,2]$ اکیداً صعودی است. بنابراین بزرگ‌ترین مقدار k برابر با ۲ است.



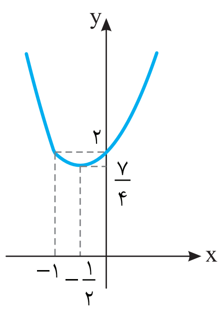
مسئله ۴

بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x)=x^2+|x+1|+1$ روی آنها اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

راه‌حل: توجه کنید که

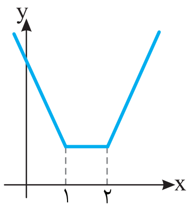
$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+1+1 & x\ge -1\\ x^2-(x+1)+1 & x<-1\end{cases}=\begin{cases}x^2+x+2 & x\ge -1\\ x^2-x & x<-1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به شکل مقابل است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[-\frac{1}{2},+\infty)$ اکیداً صعودی است.



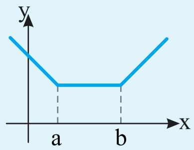
مسئله ۵ نمودار تابع $f(x)=|x-۱|+|x-۲|$ را رسم کنید و بازه‌هایی را که تابع f روی آن بازه‌ها یکنوا است، مشخص کنید.

راه‌حل نمودار تابع f به شکل مقابل است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty, ۲]$ نزولی، روی بازهٔ $(-\infty, ۱]$ اکیداً نزولی، روی بازهٔ $[۱, +\infty)$ صعودی، روی بازهٔ $[۲, +\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[۱, ۲]$ هم صعودی و هم نزولی است.



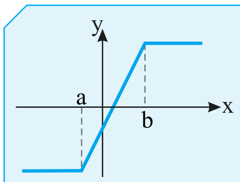
نکته

نمودار تابع $f(x)=|x-a|+|x-b|$ به شکل مقابل است $(a<b)$. واضح است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty, b]$ نزولی، روی بازهٔ $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی، روی بازهٔ $[a, +\infty)$ صعودی، روی بازهٔ $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) است.

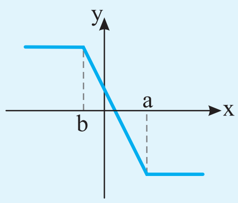


نکته

اگر $a<b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ اکیداً صعودی، روی بازه‌های $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ صعودی است.



اگر $a>b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[b, a]$ اکیداً نزولی، روی بازه‌های $(-\infty, b]$ و $[a, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ نزولی است.



توابع اکیداً یکنوا و نابرابری‌ها

اگر تابع f روی بازهٔ I اکیداً صعودی باشد، به‌ازای هر a و b در I،

$$a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$$

اگر تابع f روی بازهٔ I اکیداً نزولی باشد، به‌ازای هر a و b در I،

$$a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$$

اکنون توجه کنید که

۱) تابع $y=x^۳$ و در حالت کلی تابع $y=x^{۲n+۱}$ $(n\in\mathbb{N})$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی هستند. پس

$$a<b \Rightarrow a^۳<b^۳ , \quad a<b \Rightarrow a^{۲n+۱}<b^{۲n+۱}$$

در واقع می‌توان دو طرف نابرابری را بدون هیچ شرطی به توان فرد رساند.

۲) تابع‌های $y=x^۲$ و $y=\sqrt{x}$ و در حالت کلی تابع‌های $y=x^{۲n}$ و $y=\sqrt[۲n]{x}$ $(n\in\mathbb{N})$ روی بازهٔ $[۰, +\infty)$ اکیداً صعودی هستند. پس به‌ازای هر دو عدد حقیقی و نامنفی مانند a و b،

$$\begin{cases} ۰\le a<b \Rightarrow a^{۲n}<b^{۲n} \\ ۰\le a<b \Rightarrow \sqrt[۲n]{a}<\sqrt[۲n]{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} ۰\le a<b \Rightarrow a^۲<b^۲ \\ ۰\le a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b} \end{cases}$$

۳) تابع $y=x^۲$ و در حالت کلی تابع $y=x^{۲n}$ $(n\in\mathbb{N})$ روی بازهٔ $(-\infty, ۰]$ اکیداً نزولی هستند. پس به‌ازای هر دو عدد حقیقی و غیر مثبت مانند a و b،

$$a<b\le ۰ \Rightarrow a^۲>b^۲ , \quad a<b\le ۰ \Rightarrow a^{۲n}>b^{۲n}$$

در واقع وقتی دو طرف نابرابری غیر مثبت است، با توان زوج رساندن دو طرف، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

۴) اگر $a>1$، تابع $y=\log_a x$ روی $(0,+\infty)$ و تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی هستند. پس

$$0<x_1<x_2 \Rightarrow \log_a x_1<\log_a x_2\ ,\quad x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$$

۵) اگر $0<a<1$، تابع $y=\log_a x$ روی $(0,+\infty)$ و تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی هستند. پس

$$0<x_1<x_2 \Rightarrow \log_a x_1>\log_a x_2\ ,\quad x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$$

در حقیقت، با لگاریتم گرفتن از دو طرف نابرابری یا اثر دادن تابع نمایی، جهت نابرابری تغییر می‌کند. همچنین با حذف این توابع از دو طرف نابرابری، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

نکته

اگر تابع f صعودی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a<b$.

اگر تابع f نزولی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a>b$.

تست ۱۰

تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی است و $f(2x+1)<f(2-x)$. حدود x کدام است؟

۱) $x>1$ ۲) $x<1$ ۳) $x>\frac{1}{3}$ ۴) $x<\frac{1}{3}$

راه‌حل

چون تابع f نزولی است، پس

$$f(2x+1)<f(2-x) \Rightarrow 2x+1>2-x \Rightarrow 3x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{3}$$

تست ۱۱

اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(2)=0$، دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,0)$

راه‌حل

توجه کنید که $D_g=\{x \mid x\in D_f, f(x)>0\}$. از طرف دیگر، چون تابع f اکیداً نزولی است و $f(2)=0$، پس

$$f(x)>0 \Rightarrow f(x)>f(2) \Rightarrow x<2$$

بنابراین $D_g=(-\infty\ ,2)$.

تست ۱۲

از نابرابری $a<b<0$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $\sqrt{-a}<\sqrt{-b}$ ۲) $\frac{3}{a}>\frac{3}{b}$ ۳) $2^a<2^{b+1}$ ۴) $\log|a|<\log|b|$

راه‌حل

توجه کنید که

گزینهٔ (۱)

$$-a>-b>0 \Rightarrow \sqrt{-a}>\sqrt{-b}$$

گزینهٔ (۲)

$$a<b<0 \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0 \Rightarrow \frac{3}{b}<\frac{3}{a}$$

گزینهٔ (۳)

$$a<b \Rightarrow 2^a<2^b$$

از مثبت بودن 2^b، نتیجه می‌شود که $2^b<2\times 2^b$. بنابراین

$$\begin{cases} 2^a<2^b \\ 2^b<2^{b+1} \end{cases} \Rightarrow 2^a<2^{b+1}$$

گزینهٔ (۴)

$$a<b<0 \Rightarrow 0<-b<-a \Rightarrow \log(-b)<\log(-a) \Rightarrow \log|b|<\log|a|$$

مسئله ۶ **اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، ثابت کنید تابع $f+g$ صعودی است.**

راه‌حل فرض کنید a و b دو عضو دلخواه از دامنهٔ تابع $f+g$ باشند. اگر $a<b$، از صعودی بودن توابع f و g نتیجه می‌شود

$$f(a)\le f(b)\,,\quad g(a)\le g(b)$$

از جمع کردن دو طرف نابرابری‌های فوق نتیجه می‌شود

$$f(a)+g(a)\le f(b)+g(b)\Rightarrow (f+g)(a)\le (f+g)(b)$$

بنابراین تابع $f+g$ صعودی است.

نتیجه
اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ صعودی است.
اگر تابع‌های f و g نزولی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ نزولی است.

مسئله ۷ **تابعی مانند f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ مثال بزنید که تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(x)+[x]$ اکیداً صعودی باشد.**

راه‌حل تابـع بـا ضابطهٔ $y=[x]$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ صعودی اسـت. بنابراین، اگر f تابعی اکیداً صعودی باشـد، تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(x)+[x]$ اکیداً صعودی است:

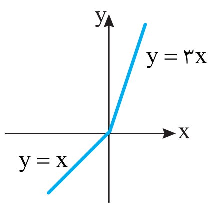
$$x<y\Rightarrow\begin{cases}f(x)<f(y)\\ [x]\le[y]\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} f(x)+[x]<f(y)+[y]$$

مثلاً می‌توانیم فرض کنیم $f(x)=x$. به این ترتیب، تابع g با ضابطهٔ $g(x)=x+[x]$ ویژگی مورد نظر را دارد.

مسئله ۸ **دامنهٔ تابع‌های f و g یکسان است، تابع f یکنواست ولی تابع g یکنوا نیست. آیا تابع $f+g$ لزوماً یکنوا نیست؟**

راه‌حل ممکن اسـت تابع $f+g$ یکنوا باشـد. مثلاً، اگر $f(x)=۲x$ و $g(x)=|x|$ (با دامنهٔ $\mathbb{R}$)، آن‌گاه تابع f یکنواست، تابع g یکنوا نیست ولی

$$(f+g)(x)=\begin{cases}۳x & x\ge ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$



پس تابع $f+g$ یکنواست (اکیداً صعودی است).

مسئله ۹ **دو تابع مانند f و g مثال بزنید که هر دو صعودی باشند و تابع $h(x)=(f-g)(x)$**

الف) صعودی باشد. **ب) نزولی باشد.** **پ) غیریکنوا باشد.**

راه‌حل الف) توابع $f(x)=۳x$ و $g(x)=۲x$ صعودی‌اند و تابع $(f-g)(x)=x$ نیز صعودی است.

ب) توابع $f(x)=۲x$ و $g(x)=۳x$ صعودی‌اند و تابع $(f-g)(x)=-x$ نزولی است.

پ) توابع $f(x)=x^۳$ و $g(x)=۳x$ صعودی‌اند و تابع $h(x)=(f-g)(x)=x^۳-۳x$ غیریکنواست. زیرا مثلاً

$$۰<۲\Rightarrow h(۰)<h(۲)$$

پس تابع h نزولی نیست. همچنین

$$-\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow h(-\frac{۱}{۲})>h(\frac{۱}{۲})$$

پس تابع h صعودی نیست.

مسئله ۱۰ **دامنهٔ تابع‌های f و g یکسان است و هر دو اکیداً صعودی‌اند. آیا تابع $f\times g$ نیز لزوماً اکیداً صعودی است؟**

راه‌حل ممکن اسـت تابع $f\times g$ اکیداً صعودی نباشـد. مثلاً اگر $f(x)=g(x)=x$ (با دامنهٔ $\mathbb{R}$)، آن‌گاه $f(x)\times g(x)=x^۲$، و این تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نیست.

مسئله ۱۱ **اگر تابع‌های f و g با دامنهٔ یکسان صعودی باشند و مقادیر این توابع مثبت باشند، ثابت کنید تابع $f\times g$ صعودی است.**

راه‌حل فرض کنید a و b دو عضو دلخواه از دامنهٔ تابع $f\times g$ باشند. اگر $a<b$، از صعودی بودن توابع f و g نتیجه می‌شود

$$0<f(a)\le f(b),\quad 0<g(a)\le g(b)$$

اگر دو طرف نابرابری‌های فوق را در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود

$$f(a)g(a)\le f(b)g(b)\Rightarrow (f\times g)(a)\le (f\times g)(b)$$

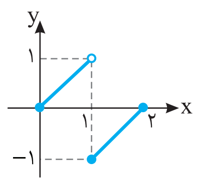
بنابراین تابع $f\times g$ صعودی است.

نتیجه

اگر تابع‌های f و g صعودی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f\times g$ نیز صعودی است.

اگر تابع‌های f و g نزولی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f\times g$ نیز نزولی است.

مسئله ۱۲ **تابع f روی هر یک از مجموعه‌های A و B اکیداً صعودی است. آیا تابع f روی مجموعهٔ $A\cup B$ نیز لزوماً اکیداً صعودی است؟**

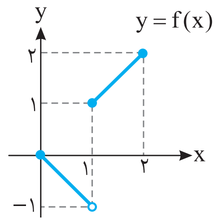


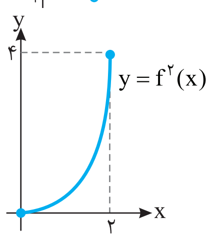
راه‌حل ممکن است تابع f روی مجموعهٔ $A\cup B$ اکیداً صعودی نباشد. مثلاً تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ x-2 & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

روی هر یک از مجموعه‌های $[0,1)$ و $[1,2]$ اکیداً صعودی است. اما روی اجتماع این دو مجموعه، یعنی $[0,2]$ اکیداً صعودی نیست، زیرا مثلاً $0<1$، اما $f(0)>f(1)$.

مسئله ۱۳ **تابع f یکنوا نیست. آیا تابع f^2 نیز لزوماً یکنوا نیست؟**





راه‌حل ممکن است تابع f^2 یکنوا باشد. مثلاً، تابع

$$f(x)=\begin{cases} -x & 0\le x<1 \\ x & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

یکنوا نیست، اما

$$f^2(x)=x^2,\quad 0\le x\le 2$$

پس تابع f^2 یکنواست.

مسئله ۱۴ **ثابت کنید اگر f تابعی صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی است.**

راه‌حل اگر f تابعی صعودی باشد، a و b در دامنهٔ f باشند و $a<b$، آن‌گاه $f(a)\le f(b)$. اگر دو طرف این نابرابری را در -1 ضرب کنیم، به‌دست می‌آید $-f(b)\le -f(a)$، یعنی تابع $-f$ نزولی است.

نتیجه

اگر f تابعی صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی است.

اگر f تابعی نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است.

مسئله ۱۵ **اگر تابع f صعودی باشد و $R_f\subseteq(0,+\infty)$، ثابت کنید تابع $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ نزولی است.**

راه‌حل از صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود به‌ازای هر a و b از دامنهٔ f که $a<b$، $f(a)\le f(b)$. چون برد تابع زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $(0,+\infty)$ است، پس مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ مثبت هستند و از $f(a)\le f(b)$ نتیجه می‌شود $\frac{1}{f(a)}\ge\frac{1}{f(b)}$. بنابراین

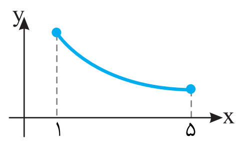
$$a<b\Rightarrow g(a)\ge g(b)$$

پس تابع g نزولی است. توجه کنید که اگر $R_f\subseteq(-\infty,0)$، نتیجهٔ فوق درست است. ولی اگر شرط‌های فوق وجود نداشته باشند، ممکن است تابع g غیریکنوا باشد.

مثلاً تابع $f(x)=x$ صعودی است و تابع $g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}$ غیریکنواست. در این مثال $R_f=\mathbb{R}-\{0\}$.

نتیجه اگر f تابعی صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ نزولی است. همچنین اگر f تابعی نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ صعودی است.

تست ۱۳ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام تابع اکیداً صعودی است؟



۱) $y=\frac{1}{f(x)}$ ۲) $y=f^{2}(x)$

۳) $y=x^{2}f(x)$ ۴) $y=xf(x)$

راه‌حل f تابعی اکیداً نزولی با مقادیر مثبت است. بنابراین تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ اکیداً صعودی است.

تست ۱۴ اگر مقادیر تابع f عددهایی مثبت باشند و تابع f^{2} صعودی باشد، کدام‌یک از تابع‌های زیر حتماً نزولی است؟

۱) $y=f(x)+2x^{2}$ ۲) $y=x^{2}f(x)$ ۳) $y=x^{2}-f(x)$ ۴) $y=\frac{1}{f(x)}$

راه‌حل توجه کنید که دامنهٔ تابع‌های f و f^{2} یکسان است. همچنین، اگر a و b در دامنهٔ f باشند، چون تابع f^{2} صعودی است و مقادیر f مثبت‌اند، پس

$$a<b\Rightarrow f^{2}(a)\le f^{2}(b)\Rightarrow f(a)\le f(b)\Rightarrow \frac{1}{f(b)}\le\frac{1}{f(a)}$$

یعنی تابع $\frac{1}{f}$ حتماً نزولی است.

تمرین

نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید. (۱-۳)

۱- $f(x)=|x|^{3}+1$ ۲- $f(x)=|x^{3}+1|$

۳- $f(x)=(x-1)^{3}-1$

۴- صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f=\{(-1,-2),(-2,-3),(2,1),(1,0),(3,2)\}$

ب) $g=\{(2,-5),(-1,0),(1,-2),(\frac{3}{2},-4)\}$

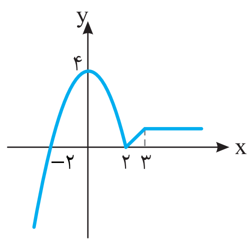
پ) $h=\{(-1,0),(2,5),(1,-4)\}$

۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مشخص کنید تابع روی کدام بازه

الف) اکیداً صعودی

ب) اکیداً نزولی

پ) ثابت است.



۶- ابتدا نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<0 \\ 2 & 0\le x\le 2 \\ \frac{1}{x} & x>2 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس مشخص کنید که تابع روی چه بازه‌ای اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی یا ثابت است.

۷- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

اگر تابع $y=f(x)$ روی بازهٔ $[-2,5]$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه

الف) تابع $y=f(x+3)$ روی بازهٔ .... اکیداً .... است.

ب) تابع $y=-f(x)$ روی بازهٔ .... اکیداً .... است.

پ) تابع $y=f(-x)$ روی بازهٔ .... اکیداً .... است.

ت) تابع $y=f(x)+3$ روی بازهٔ .... اکیداً .... است.

۸- نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ را رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را بررسی کنید.

۹- وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=kx-|2x-3|$ را برحسب مقادیر مختلف k بررسی کنید.

۱۰- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(2)=0$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{(x^2-4)f(x)}$ را مشخص کنید.

۱۱- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد و $f(a^3)<f(a^2)$، حدود a را به‌دست آورید.

۱۲- اگر f تابعی نزولی روی $\mathbb{R}$ باشد و $f(\frac{1}{m})<f(m)$، حدود m را مشخص کنید.

۱۳- اگر f تابعی صعودی باشد، $D_f=[0,+\infty)$ و $f(2)=0$، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $f(2x-1)<0$ را مشخص کنید.

۱۴- اگر تابع‌های f و g با دامنهٔ یکسان اکیداً یکنوا باشند، آیا تابع $f+g$ نیز لزوماً اکیداً یکنواست؟

۱۵- دامنهٔ تابع‌های f و g یکسان است و هر دو غیریکنوا هستند. آیا تابع $f+g$ نیز لزوماً غیریکنواست؟

۱۶- اگر تابع‌های f و g با دامنهٔ یکسان صعودی باشند و مقادیر این دو تابع منفی باشند، ثابت کنید تابع $f\times g$ نزولی است.

۱۷- دو تابع مانند f و g مثال بزنید که هر دو صعودی باشند و تابع $\frac{f}{g}$

الف) صعودی باشد. ب) نزولی باشد. پ) غیریکنوا باشد.

۱۸- هر نقطه از دامنهٔ تابع f را که درنظر بگیرید، یک بازهٔ باز شامل آن نقطه وجود دارد که این تابع روی آن یکنواست. آیا تابع f لزوماً یکنواست؟

۱۹- ثابت کنید تابع $f(x)=x[x]$ روی بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۰- نشان دهید تابع $f(x)=\frac{\log_{0/5} x}{2^x}$ روی بازهٔ $(0,1)$ اکیداً نزولی است.

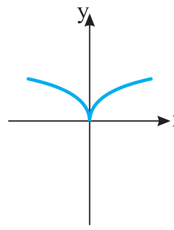
درس اول: توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

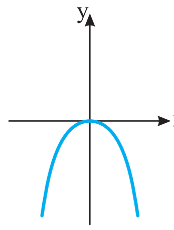
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

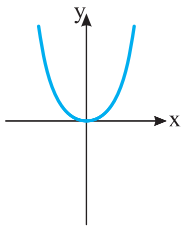
۱- نمودار تابع $y=x^{۳}+۱$ چند بار خط $y=-x$ را قطع می‌کند؟

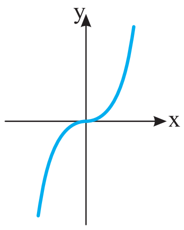
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲- نمودار تابع $y=|-x^{۳}|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۷$ چند بار خط $y=-x$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴- کدام تابع صعودی است؟

۱) $f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۲)\}$ ۲) $g=\{(-۱,۱),(۲,۱),(۳,۲)\}$

۳) $h=\{(۲,۰),(۱,۱),(۰,۲)\}$ ۴) $k=\{(۲,۰),(۰,۱),(۱,-۲)\}$

۵- تابع $f=\{(۱,m-۱),(۲,۲m),(۳,m+۳)\}$ صعودی است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶- تابع $f=\{(-a^{۲}-۱,a),(۰,۲),(a^{۲}+۱,۲a+۱)\}$ صعودی است. حدود a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\le a\le ۲$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\le a\le ۲$ ۳) $-\frac{۱}{۲}\le a\le \frac{۱}{۲}$ ۴) $-۲\le a\le ۲$

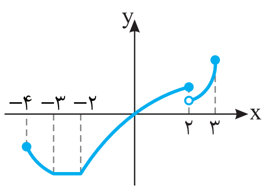
۷- اگر تابع $f=\{(۳,a+b),(۲,a-b),(۱,۴)\}$ هم صعودی و هم نزولی باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) ۱۶- ۴) ۱۶

۸- چند تابع اکیداً صعودی با دامنهٔ $\{۱,۲,۳\}$ و برد $\{۴,۵,۶\}$ وجود دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱

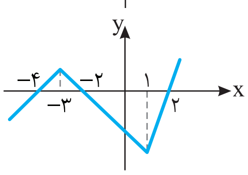
۹- شکل روبه‌رو نمودار تابع به ضابطهٔ $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن صعودی است کدام است؟



۱) $[۰,۳]$ ۲) $[-۳,۲]$

۳) $[-۲,۲]$ ۴) $[-۲,۳]$

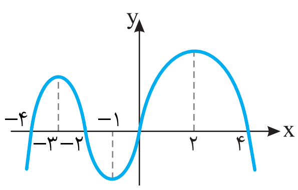
۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع $-f$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟



۱) $[-۳,۲]$ ۲) $(-\infty,-۳]$

۳) $[-۳,۱]$ ۴) $[۱,+\infty)$

۱۱- نمودار تابع $y=f(x-۱)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(x)|$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟



۱) $(-۳,-۲)$ ۲) $(۲,۴)$

۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(-۲,-۱)$

۱۲- تابع $f(x)=-4x^2+6x-1$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(\frac{3}{4},+\infty)$ ۲) $(-\infty,\frac{3}{4})$ ۳) $(-\frac{3}{4},+\infty)$ ۴) $(-\infty,-\frac{3}{4})$

۱۳- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+4x$ و دامنهٔ $[k,+\infty)$ نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\le 2$ ۲) $k\ge 2$ ۳) $k\le -2$ ۴) $k\ge -2$

۱۴- تابع نمایی $f(x)=(2k-3)^x$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k>0$ ۲) $k>1$ ۳) $k>2$ ۴) $k>\frac{3}{2}$

۱۵- تابع $f(x)=\log_{(k+1)}(x+2)$ اکیداً صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k>0$ ۲) $k>1$ ۳) $0<k<1$ ۴) $-1<k<0$

۱۶- کدام تابع نزولی است؟

۱) $y=\frac{1}{x}$ ۲) $y=\sqrt{x-1}$ ۳) $y=x^2-1$ ۴) $y=-\sqrt{x+1}$

۱۷- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 1 \\ 1-x^2 & x\le 0 \end{cases}$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) غیر یکنوا ۴) هم صعودی و هم نزولی

۱۸- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 0 \\ -x+1 & x<0 \end{cases}$ مفروض است. تابع f روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[-2,+\infty)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۹- تابع $f(x)=x[x]$ روی بازهٔ $(-\infty,0)$ چگونه است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.)

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) هم صعودی و هم نزولی ۴) غیر یکنوا

۲۰- تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ روی بازهٔ $(a,+\infty)$ نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۲۱- تابع $f(x)=3\sin x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},a]$ صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۲۲- اگر f یک تابع صعودی روی $\mathbb{R}$ باشد و $f(2m-1)\ge f(m+1)$، حدود m کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $m\ge 2$ ۳) $m<2$ ۴) $m\le 2$

۲۳- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم $f(a^2-3)>f(2a)$، حدود a کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(\sqrt{3},+\infty)$ ۳) $(-1,3)$ ۴) $(-3,1)$

۲۴- اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و $f(0)=0$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,0]$

۲۵- اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، $f(1)=0$ و $D_f=\mathbb{R}$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,0]$ ۳) $\mathbb{R}-(0,1)$ ۴) $[0,1]$

۲۶- اگر f تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و اکیداً نزولی باشد و $f(1)=2$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x-2)-2}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,3]$ ۲) $(-\infty,1]$ ۳) $[3,+\infty)$ ۴) $(2,+\infty)$

۲۷- اگر $f+g$ و $f-g$ توابعی صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشند، کدام تابع صعودی است؟

۱) f　۲) g　۳) $f\times g$　۴) $\frac{f}{g}$

۲۸- اگر f تابعی صعودی باشد، کدام تابع حتماً صعودی است؟

۱) $y=xf(x)$　۲) $y=x+f(x)$　۳) $y=x-f(x)$　۴) $y=\frac{x}{f(x)}$

۲۹- اگر تابع f نزولی باشد، کدام تابع حتماً نزولی است؟

۱) $y=f(x)-\sqrt{x}$　۲) $y=\sqrt{x}f(x)$　۳) $y=\frac{\sqrt{x}}{f(x)}$　۴) $y=f(x)+\sqrt{x}$

۳۰- اگر تابع $g(x)=x^{۳}+f(x)$ صعودی و تابع $h(x)=x^{۳}-f(x)$ نزولی باشد، آن‌گاه تابع f

۱) صعودی است.　۲) نزولی است.　۳) ثابت است.　۴) غیر یکنواست.

۳۱- اگر تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ نزولی باشد، کدام تابع حتماً صعودی است؟

۱) $y=x^{۲}f(x)$　۲) $y=f(x^{۲})$　۳) $y=-f^{۲}(x)$　۴) $y=-f^{۳}(x)$

۳۲- تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x+۱}}$

۱) صعودی است.　۲) نزولی است.

۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است.　۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۳۳- کدام تابع یکنوا است؟

۱) $y=x^{۲}-x$　۲) $y=x^{۲}+x$　۳) $y=x^{۳}+x$　۴) $y=x^{۳}-x$

۳۴- تابع $f(x)=\frac{۲^{x}+۱}{۲^{x}}$

۱) صعودی است.　۲) نزولی است.

۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است.　۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۳۵- حدود a که به‌ازای آن تابع $f(x)=\begin{cases} x+a & x\geq ۱ \\ ۲x+۱ & x<۱ \end{cases}$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $a\geq ۲$　۲) $a>۱$　۳) $a\leq ۳$　۴) $a\leq ۲$

۳۶- تابع $f(x)=kx+|x-۱|$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq ۱$　۲) $k\geq -۱$　۳) $-۱\leq k\leq ۱$　۴) $k\leq -۱$

کنکور سراسری

۳۷- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (تجربی - ۹۸)

۱) $(-\infty,-۲)$　۲) $(-\infty,۱)$　۳) $(-۲,۱)$　۴) $(۱,+\infty)$

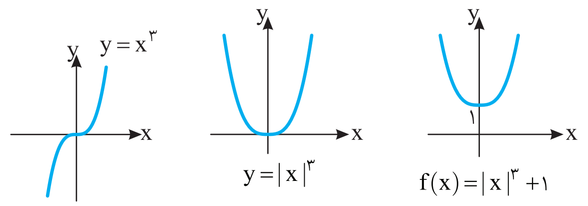
۳۸- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۸)

۱) $(-\infty,۲)$　۲) $(-۱,+\infty)$　۳) $(-۱,۲)$　۴) $(۲,+\infty)$

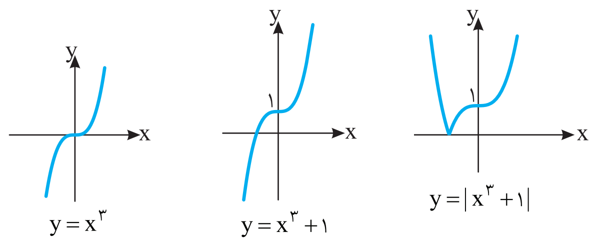
فصل هشتم

راه‌حل تمرین‌ها

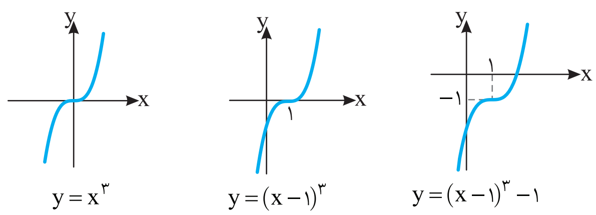
۱ به‌ترتیب زیر نمودار تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم.



۲ به‌ترتیب زیر نمودار تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم.



۳ به‌ترتیب زیر نمودار تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم.



۴ الف)

$$\begin{cases} \text{وضعیت xها}: -2<-1<1<2<3 \\ \quad\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \text{وضعیت yها}: -3<-2<0<1<2 \end{cases}$$

با افزایش xها، yها زیاد می‌شوند، پس تابع f اکیداً صعودی است.

ب)

$$\begin{cases} \text{وضعیت xها}: -1<1<\frac{3}{2}<2 \\ \quad\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \text{وضعیت yها}: 0>-2>-4>-5 \end{cases}$$

با افزایش xها، yها کاهش می‌یابند، پس تابع g اکیداً نزولی است.

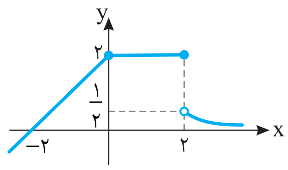
پ)

$$\begin{cases} \text{وضعیت xها}: -1>1>2 \\ \quad\downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \text{وضعیت yها}: 0\not<-4<5 \end{cases}$$

تابع h نه صعودی است و نه نزولی.

۵ تابع $y=f(x)$ روی بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً صعودی است، زیرا با افزایش xها، yها نیز زیاد شده است. تابع روی بازهٔ $[0,2]$ اکیداً نزولی است، زیرا با افزایش xها، yها کاهش می‌یابد. تابع روی بازهٔ $[2,3]$ اکیداً صعودی است، زیرا با افزایش xها، yها افزایش می‌یابد و تابع روی بازهٔ $[3,+\infty)$ ثابت است.

۶ با توجه به نمودار، تابع روی بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً صعودی، روی بازهٔ $[0,2]$ ثابت و روی بازه $(2,+\infty)$ اکیداً نزولی است.



۷ الف) ابتدا دامنهٔ تابع $y=f(x+3)$ را می‌یابیم:

$$-2\le x+3\le 5 \xrightarrow{-3} -5\le x\le 2$$

از طرف دیگر،

$$x_2>x_1 \Rightarrow x_2+3>x_1+3$$

$$\xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی}} f(x_2+3)>f(x_1+3)$$

بنابراین تابع $y=f(x+3)$ روی بازهٔ $[-5,2]$ اکیداً صعودی است.

ب) دامنهٔ تابع $y=-f(x)$ همان دامنهٔ تابع f است. از طرف دیگر،

$$x_2>x_1 \xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی}} f(x_2)>f(x_1)$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -f(x_2)<-f(x_1)$$

بنابراین تابع $y=-f(x)$ روی بازهٔ $[-2,5]$ اکیداً نزولی است.

پ) ابتدا دامنهٔ تابع $y=f(-x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-2\le x\le 5 \Rightarrow -5\le -x\le 2$$

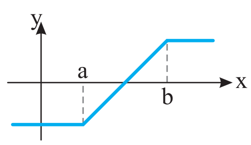
از طرف دیگر،

$$x_2>x_1 \Rightarrow -x_2<-x_1 \xrightarrow[\text{صعودی}]{\text{f اکیداً}} f(-x_2)<f(-x_1)$$

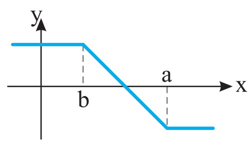
بنابراین تابع $y=f(-x)$ روی بازهٔ $[-5,2]$ اکیداً نزولی است.

ت) اگر نمودار تابع f را سه واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)+3$ به‌دست می‌آید. بنابراین این تابع همانند تابع f اکیداً صعودی است و دامنهٔ آن همان دامنهٔ تابع f است. پس تابع $y=f(x)+3$ روی بازهٔ $[-2,5]$ اکیداً صعودی است.

۸ نمودار تابع f در حالتی که $a<b$، به شکل زیر است. در این حالت تابع صعودی است.



در حالتی که $a>b$، نمودار تابع f به شکل زیر است و تابع نزولی است.



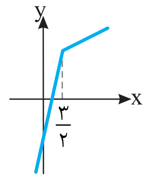
در حالتی که $a=b$، f تابع ثابت صفر است و در این حالت تابع هم صعودی است و هم نزولی.

۹ ابتدا توجه کنید که

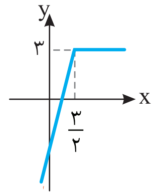
$$x\ge \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=kx-(۲x-۳)=(k-۲)x+۳$$

$$x\le \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=kx+(۲x-۳)=(k+۲)x-۳$$

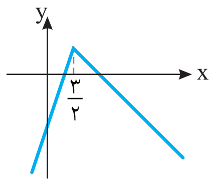
اگر $k>۲$، آن‌گاه نمودار تابع به شکل مقابل است که در این صورت تابع اکیداً صعودی است.



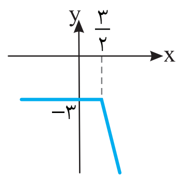
اگر $k=۲$، آن‌گاه نمودار تابع به شکل مقابل است و در این صورت تابع صعودی است.



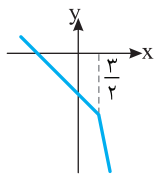
اگر $-۲<k<۲$، آن‌گاه نمودار تابع به شکل مقابل است و در این صورت تابع غیریکنواست.



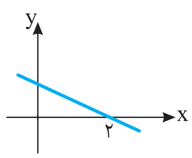
اگر $k=-۲$، آن‌گاه نمودار تابع به شکل مقابل است و در این صورت تابع نزولی است.



اگر $k<-۲$، آن‌گاه نمودار تابع به شکل مقابل است و در این صورت تابع اکیداً نزولی است.



۱۰ اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و $f(۲)=۰$، می‌توان تابعی به‌صورت زیر برای f درنظر گرفت. بدیهی است برای $x<۲$، $f(x)>۰$ و برای $x>۲$، $f(x)<۰$.



برای یافتن دامنهٔ تابع g، زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$(x^۲-۴)f(x)\ge۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۴=۰\Rightarrow x=\pm۲\\ f(x)=۰\Rightarrow x=۲\end{cases}$$

پس طبق جدول تعیین علامت زیر، دامنهٔ تابع g برابر است با $(-\infty,-۲]\cup\{۲\}$.

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$x^۲-۴$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		+		+	۰	−	
$(x^۲-۴)f(x)$		+	۰	−	۰	−	

۱۱ با توجه به تعریف تابع اکیداً صعودی از $f(a^۳)<f(a^۲)$ نتیجه می‌شود $a^۳<a^۲$، پس

$$a^۳-a^۲<۰\Rightarrow a^۲(a-۱)<۰\Rightarrow a<۱\,,\ a\ne۰$$

۱۲ با توجه به نزولی بودن تابع f روی $\mathbb{R}$ از نابرابری $f(\frac{۱}{m})<f(m)$ نتیجه می‌شود $\frac{۱}{m}>m$، بنابراین $\frac{۱-m^۲}{m}>۰$.

با توجه به جدول تعیین علامت زیر حدود m به‌صورت زیر است:

$$۰<m<۱ \text{ یا } m<-۱$$

m	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$\frac{۱-m^۲}{m}$		+	۰	−	ت ن	+	۰	−	

۱۳ با توجه به دامنهٔ تابع f باید $۲x-۱\ge۰$، پس $x\ge\frac{۱}{۲}$. از طرف دیگر، با توجه به صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود

$$f(۲x-۱)<f(۲)\Rightarrow ۲x-۱<۲\Rightarrow x<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادله بازهٔ $[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ است.

۱۴ ممکن است تابع f+g اکیداً یکنوا نباشد. مثلاً، اگر $f(x)=x$ و $g(x)=-x$ (با دامنهٔ $\mathbb{R}$)، آن‌گاه تابع‌های f و g اکیداً یکنوا هستند (f اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی است)، اما f+g تابع ثابت صفر است، که اکیداً یکنوا نیست.

۱۵ ممکن است تابع f+g یکنوا باشد. مثلاً، اگر $f(x)=x-۲|x|$ و $g(x)=۲|x|$، آن‌گاه $(f+g)(x)=x$، و تابع f+g یکنواست (اکیداً صعودی است).

۱۶ فرض کنید a و b در دامنهٔ تابع $f\times g$ باشند و $a<b$. در این صورت، چون تابع‌های f و g صعودی‌اند، پس

$$f(a)\le f(b),\quad g(a)\le g(b)$$

در نتیجه

$$-f(a)\ge -f(b)\Rightarrow -g(a)\ge -g(b)$$

اکنون توجه کنید که چون مقادیر تابع‌های f و g منفی‌اند، پس مقادیر دو طرف این نابرابری‌ها مثبت‌اند، درنتیجه،

$$(-f(a))(-g(a))\ge(-f(b))(-g(b))$$

$$f(a)g(a)\ge f(b)g(b),\quad (f\times g)(a)\ge(f\times g)(b)$$

یعنی تابع $f\times g$ نزولی است.

۱۷ الف) توابع $f(x)=۲x$ و $g(x)=\sqrt{x}$ صعودی‌اند و تابع زیر صعودی است.

$$h(x)=(\frac{f}{g})(x)=۲\sqrt{x},\quad D_h=(۰,+\infty)$$

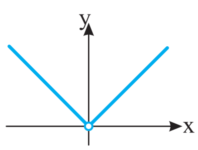
ب) توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x$ صعودی‌اند و تابع زیر نزولی است.

$$h(x)=(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{۱}{\sqrt{x}},\quad D_h=(۰,+\infty)$$

پ) توابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^۳$ صعودی‌اند و تابع زیر غیریکنواست.

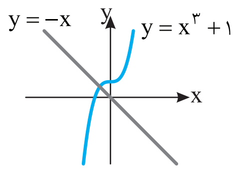
$$h(x)=(\frac{f}{g})(x)=\frac{۱}{x^۲},\quad D_h=\mathbb{R}-\{۰\}$$

۱۸ ممکن است تابع f یکنوا نباشد. مثلاً، تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ و ضابطهٔ $f(x)=|x|$ یکنوا نیست، ولی به‌ازای هر نقطه از دامنه‌اش، یک بازهٔ باز شامل این نقطه وجود دارد که f روی آن یکنواست.

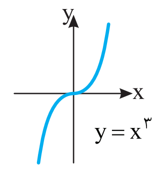


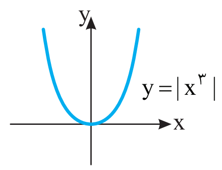
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=x^۳+۱$ به‌دست بیاید. همین‌طور خط $y=-x$ را رسم می‌کنیم. اکنون از روی شکل معلوم است که نمودار تابع $y=x^۳+۱$ خط $y=-x$ را یک‌بار قطع می‌کند.

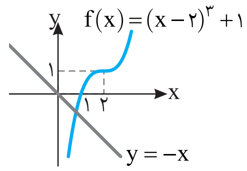


۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $|-x^۳|=|x^۳|$. بنابراین کافی است نمودار تابع $y=|x^۳|$ را رسم کنیم. برای این کار نمودار $y=x^۳$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ قسمتی را که زیر محور x است رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.





۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x-۲)^۳+۱$. پس برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را دو واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. مطابق شکل روبه‌رو نمودار تابع f یک‌بار خط $y=-x$ را قطع می‌کند.



۴- گزینهٔ ۲ تابع f غیر یکنوا، تابع g صعودی، تابع h اکیداً نزولی و تابع k غیریکنواست.

۵- گزینهٔ ۳ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$f(۱)\le f(۲)\Rightarrow m-۱\le ۲m\Rightarrow m\ge -۱$$

$$f(۲)\le f(۳)\Rightarrow ۲m\le m+۳\Rightarrow m\le ۳$$

بنابراین $-۱\le m\le ۳$ و در نتیجه m می‌تواند پنج مقدار صحیح ۳، ۲، ۱، ۰ و ۱− را داشته باشد.

۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که به ازای هر a نابرابری $-a^۲-۱<۰<a^۲+۱$ برقرار است. با توجه به صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود

$$f(-a^۲-۱)\le f(۰)\le f(a^۲+۱)\Rightarrow a\le ۲\le ۲a+۱\Rightarrow \frac{۱}{۲}\le a\le ۲$$

۷- گزینهٔ ۲ تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases}a+b=۴\\a-b=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\b=۰\end{cases}\Rightarrow ab=۰$$

۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\{۱,۲,۳\}$ و برد $\{۴,۵,۶\}$ باشد. در این صورت

$$۱<۲<۳\Rightarrow f(۱)<f(۲)<f(۳)$$

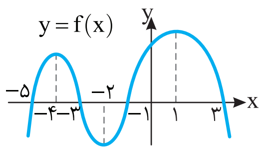
بنابراین $f(۱)$ و $f(۳)$ باید به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $\{۴,۵,۶\}$ باشند، یعنی $f(۱)=۴$ و $f(۳)=۶$. در نتیجه $f(۲)=۵$. به این ترتیب، تابع f به‌طور یکتا مشخص می‌شود، یعنی فقط یک تابع با ویژگی مورد نظر داریم.

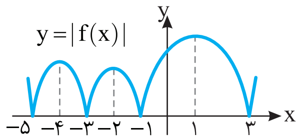
۹- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل رسم شده در صورت سؤال بازهٔ $[-۳,۲]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع f روی آن صعودی است.

توجه کنید که تابع روی بازهٔ $[-۲,۲]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[-۳,۲]$ صعودی است. چون صورت سؤال بزرگ‌ترین بازه‌ای را خواسته که تابع روی آن صعودی است، پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

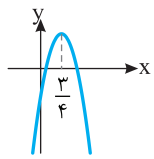
۱۰- گزینهٔ ۳ تابع $-f$ روی بازه‌هایی اکیداً صعودی است که تابع f روی آنها اکیداً نزولی است. تابع f روی بازهٔ $[-۳,۱]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع $-f$ روی این بازه اکیداً صعودی است.

۱۱- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار تابع $y=f(x-۱)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف کنیم، نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌دست می‌آید. از روی این نمودار معلوم است که تابع $y=|f(x)|$ روی بازهٔ $(-۲,-۱)$ اکیداً نزولی است.

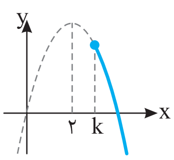




۱۲- گزینهٔ ۱ طول رأس سهمی به معادلهٔ $f(x)=-۴x^۲+۶x-۱$ برابر است با $-\frac{b}{۲a}=\frac{۳}{۴}$. از روی نمودار این سهمی معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(\frac{۳}{۴},+\infty)$ اکیداً نزولی است.



۱۳- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به شکل مقابل است. برای اینکه تابع نزولی باشد، باید دامنهٔ آن شامل دو طرف رأس سهمی یعنی نقطهٔ $x=۲$ نباشد. بنابراین $k\ge ۲$.

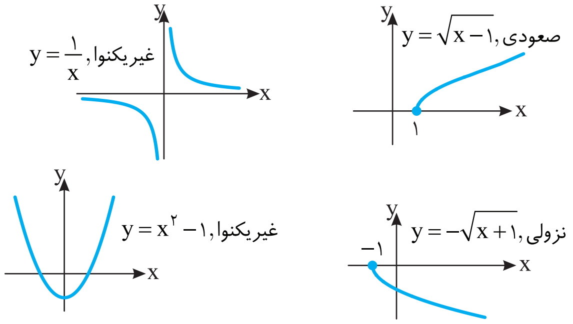


۱۴- گزینهٔ ۳ در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $a>۱$، آن‌گاه تابع صعودی است. بنابراین

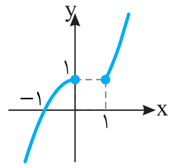
$$۲k-۳>۱\Rightarrow ۲k>۴\Rightarrow k>۲$$

۱۵- گزینه ۱ در تابع $y=\log_a x$ اگر $a>۱$، آن‌گاه تابع اکیداً صعودی است. پس $k+۱>۱$ و در نتیجه $k>۰$. توجه کنید که نمودار تابع $y=\log_{(k+۱)}(x+۲)$ از انتقال نمودار تابع $y=\log_{(k+۱)} x$ به اندازهٔ دو واحد به چپ به‌دست می‌آید و دو تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن مانند هم هستند.

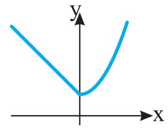
۱۶- گزینه ۴ با توجه به نمودار توابع، واضح است که تابع $y=-\sqrt{x+۱}$ نزولی است.



۱۷- گزینه ۱ با توجه به نمودار، تابع f صعودی است.



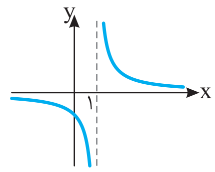
۱۸- گزینه ۱ با توجه به نمودار کاملاً مشخص است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی است.



۱۹- گزینه ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $x_۲<x_۱<۰$. در این صورت $[x_۲]\le[x_۱]<۰$. بنابراین $x_۱[x_۱]<x_۲[x_۲]\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$
پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ نزولی است.

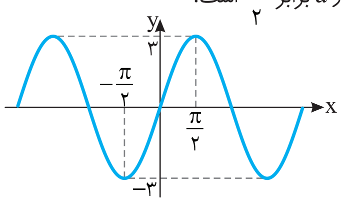
راه‌حل دوم توابع $y=x$ و $y=[x]$ روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ منفی و صعودی‌اند. پس تابع $y=x[x]$ روی این بازه نزولی است.

۲۰- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ به‌دست می‌آید که به شکل روبه‌رو است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ نزولی است. پس حداقل مقدار a برابر ۱ است.



۲۱- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم و عرض هر نقطهٔ آن را سه برابر کنیم، نمودار تابع $f(x)=۳\sin x$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ صعودی است.

پس حداکثر مقدار a برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.



۲۲- گزینه ۲ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$۲m-۱\ge m+۱\Rightarrow m\ge ۲$$

۲۳- گزینه ۳ با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی،

$$a^۲-۳<۲a\Rightarrow a^۲-۲a-۳<۰\Rightarrow (a+۱)(a-۳)<۰\Rightarrow -۱<a<۳$$

۲۴- گزینه ۲ برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $f(x)\ge ۰$ را حل کنیم. چون $f(۰)=۰$، پس باید نامعادلهٔ $f(x)\ge f(۰)$ را حل کنیم که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x\ge ۰$. پس $D_g=[۰,+\infty)$.

۲۵- گزینه ۴ تابع f اکیداً صعودی است، پس نتیجه‌گیری‌های زیر درست هستند:

$$x<۱\Rightarrow f(x)<f(۱)\Rightarrow f(x)<۰$$
$$۱<x\Rightarrow f(۱)<f(x)\Rightarrow ۰<f(x)$$

برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $-xf(x)\ge ۰$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به‌صورت $x\in[۰,۱]$ است.

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$-x$		$+$	۰	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$		$-$	۰	$+$	
$-xf(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

۲۶- گزینه ۱ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x-۲)-۲\ge ۰\Rightarrow f(x-۲)\ge ۲\Rightarrow f(x-۲)\ge f(۱)$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f نتیجه می‌شود

$$x-۲\le ۱\Rightarrow x\le ۳$$

بنابراین $D_g=(-\infty,۳]$.

۲۷- گزینه ۱ مجموع دو تابع صعودی، تابع صعودی است. بنابراین مجموع دو تابع $f+g$ و $f-g$، یعنی تابع $۲f$ صعودی است، پس تابع f نیز صعودی است.

۲۸- گزینه ۲ توابع $y=x$ و $y=f(x)$ صعودی‌اند، پس مجموع آنها صعودی است. یعنی تابع $y=x+f(x)$ صعودی است.

۲۹- گزینه ۱ تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است، پس تابع $y=-\sqrt{x}$ نزولی است. بنابراین مجموع توابع $y=f(x)$ و $y=-\sqrt{x}$ که هر دو نزولی‌اند، تابعی نزولی است.

۳۰- گزینه ۱ تابع h نزولی است، پس تابع $-h$ صعودی است. مجموع دو تابع صعودی، تابعی صعودی است. پس تابع $g+(-h)$ صعودی است. از طرف دیگر،

$$g(x)-h(x)=x^۳+f(x)-x^۳+f(x)=۲f(x)$$

بنابراین تابع $۲f$ صعودی است و در نتیجه تابع f صعودی است.

۳۱- گزینه ۴ اگر a و b عددهایی حقیقی باشد، آن‌گاه چون تابع f نزولی است،

$$a<b\Rightarrow f(b)\le f(a)\Rightarrow f^۳(b)\le f^۳(a)\Rightarrow -f^۳(a)\le -f^۳(b)$$

بنابراین تابع $y=-f^۳(x)$ صعودی است.

۳۲- گزینه ۲ تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است، پس تابع $y=\sqrt{x}+۱$ نیز صعودی و مثبت است. بنابراین تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}$ نزولی است.

۳۳- گزینهٔ ۳ تابع‌های $y=x$ و $y=x^{۳}$ اکیداً صعودی‌اند، پس مجموع آنها یعنی $y=x^{۳}+x$ اکیداً صعودی است. توابع سه گزینهٔ دیگر غیریکنوا هستند.

۳۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۲^{x}+۱}{۲^{x}}=\frac{۲^{x}}{۲^{x}}+\frac{۱}{۲^{x}}=۱+(\frac{۱}{۲})^{x}$$

تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ نزولی است، پس تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x}+۱$ نیز نزولی است.

۳۵- گزینهٔ ۱ شرط صعودی بودن تابع f آن است که همهٔ مقادیر تابع $y_{۲}=۲x+۱$ کوچک‌تر یا مساوی کمترین مقدار تابع $y_{۱}=x+a$ باشد:

$$\begin{cases} x\ge ۱\Rightarrow x+a\ge ۱+a\Rightarrow y_{۱}\ge ۱+a \\ x<۱\Rightarrow ۲x+۱<۳\Rightarrow y_{۲}<۳ \end{cases}$$

بنابراین

$$۳\le ۱+a\Rightarrow a\ge ۲$$

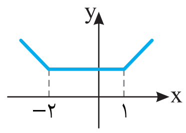
۳۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=kx+|x-۱|=\begin{cases} (k+۱)x-۱ & x\ge ۱ \\ (k-۱)x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

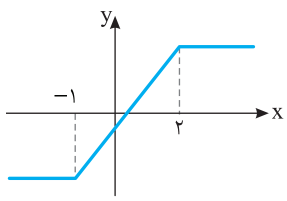
برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید هر دو خط موجود در ضابطهٔ تابع صعودی باشند، یعنی شیب نامنفی داشته باشند. پس

$$\begin{cases} k+۱\ge ۰ \\ k-۱\ge ۰ \end{cases}\Rightarrow k\ge ۱$$

۳۷- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً نزولی است.



۳۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به صورت مقابل است. از روی این نمودار معوم است که تابع f روی بازهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.



۳۹- گزینهٔ ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(-۱)=۲$$
$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(-۱)=۲$$
$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۳)=۲$$
$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(-۲)=۴$$

بنابراین $gof=\{(۱,۲),(۲,۲),(-۱,۲),(۳,۴)\}$.

۴۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(۱)=۴,\quad f(۲)=۳,\quad f(۳)=۲,\quad f(۴)=۱,\quad f(۵)=۵$$
$$f(g(۱))=۲,\ f(g(۲))=۵,\ f(g(۳))=۱,\ f(g(۴))=۴,\ f(g(۵))=۳$$

اکنون توجه کنید که چون f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$f(g(۱))=f(۳)\Rightarrow g(۱)=۳,\quad f(g(۲))=f(۵)\Rightarrow g(۲)=۵$$
$$f(g(۳))=f(۴)\Rightarrow g(۳)=۴,\quad f(g(۴))=f(۱)\Rightarrow g(۴)=۱$$
$$f(g(۵))=f(۲)\Rightarrow g(۵)=۲$$

بنابراین $g=\{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۱),(۵,۲)\}$.

۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۲)=۳$$
$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(-۳)=-۲$$

بنابراین $(fog)(-۲)-(gof)(-۱)=۳-(-۲)=۵$.

۴۲- گزینهٔ ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(fog)(-۳)=f(g(-۳))=f(۱)=\sqrt{۳}$$
$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۰)=۲$$
$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۱)=\sqrt{۳}$$
$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۳)\ \text{تعریف نشده}$$

بنابراین $fog=\{(-۳,\sqrt{۳}),(-۲,۲),(-۱,\sqrt{۳})\}$.

۴۳- گزینهٔ ۱ تنها جواب معادلهٔ $f(s)=۳$ برابر است با $s=۲$. بنابراین

$$(fog)(a+۱)=f(g(۱+a))=۳\Rightarrow g(۱+a)=۲$$

تنها جواب معادلهٔ $g(r)=۲$ نیز برابر است با $r=۰$. بنابراین

$$۱+a=۰\Rightarrow a=-۱$$

۴۴- گزینهٔ ۴ چون ۱ و ۳ ریشه‌های سهمی g هستند، پس $g(x)=a(x-۱)(x-۳)$. چون نقطهٔ $(۰,۶)$ روی این سهمی است، پس

$$g(۰)=۶\Rightarrow a(۰-۱)(۰-۳)=۶\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $g(x)=۲(x-۱)(x-۳)$. همچنین، f خطی است که از نقطه‌های $(-۶,۰)$ و $(۰,۶)$ می‌گذرد، پس $f(x)=x+۶$. به این ترتیب

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(-۲)=۴$$

۴۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $(fof)(۳)=f(f(۳))$. از طرف دیگر، $f(۳)=\frac{۶-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$، پس

$$(fof)(۳)=f(f(۳))=f(\frac{۳}{۲})=\frac{۶-\frac{۳}{۲}}{۲}=\frac{۹}{۴}$$

۴۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(gof)(۶)=g(f(۶))$. از طرف دیگر،

$$f(۳x)=x-۱۱\xrightarrow{x=۲}f(۶)=۲-۱۱=-۹$$

همین‌طور

$$g(x+۱)=۲x+۳\xrightarrow{x=-۱۰}g(-۹)=-۲۰+۳=-۱۷$$

پس $(gof)(۶)=g(f(۶))=g(-۹)=-۱۷$.

۴۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(fof)(۳)=f(f(۳))$. از طرف دیگر،

$$f(۳)=۳^{۲}+۴=۱۳,\quad f(f(۳))=f(۱۳)=\frac{۱۳-۱}{۲}=۶$$

بنابراین $(fof)(۳)=۶$.

۴۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۳+۳)=f(۶)=۶-۲=۴$$
$$(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=(۳-۲)+(۳+۳)=۷$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $۴+۷=۱۱$.

۴۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(۲)=۳$. در نتیجه

$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۳m+۲=۸$$

بنابراین $m=۲$.