انتشارات مشاوران آموزش
ناشر تخصصی دروس عمومی
ناشر تخصصی علوم انسانی

# ریاضی و آمار ۱۲

مجموعه کتاب‌های
## هدف‌دار

ویرایش جدید

درسنامهٔ جامع و کاربردی / **۶۲۶** پرسش‌های چهارگزینه‌ای و تشریحی/ ۱۶ سری امتحان نهایی درس به درس / پاسخ تشریحی با تحلیل گزینه‌ها

مصطفی علیزاده نائینی
اردشیر کرمیان

# پیشگفتار

## سخن ناشر

سال دوازدهم برای شما سال غریبی است. و چرا؟
نه فقط برای این که آخرین سال تحصیلی شما قبل از دانشگاه است و نه فقط برای این که تلاشی خواهید داشت عظیم، برای رسیدن به دانشگاه؛ بلکه به یک دلیل مهم‌تر.
به زودی متوجه خواهید شد که دیگر مثل زمانی که دانش‌آموز یازدهم بودید، حرف نمی‌زنید و حتی مثل سال قبل راه نمی‌روید. در شما جوانی در حال روییدَن است که قرار است به زودی سرنوشت خودش را به دست گیرد.
آخر می‌دانید آدم که دبیرستان را تمام می‌کند، لباس‌های ذهنش، برایش کوچک می‌شود.
حالا بیایید از جایی دیگر به همین موضوع نگاه کنیم.
شما و به خصوص شما که دانش‌آموز انسانی هستید، متفاوت‌تر بزرگ می‌شوید. ذهن‌تان تحلیلی‌تر می‌شود. دیگر هر حرفی را نمی‌پذیرید و راضی به استدلال‌های سطحی نمی‌شوید. عمیق می‌شوید. عین چاه عمیق! چاه عمیق دیده‌اید؟ چاه‌کن از لایه‌های سطحی زمین عبور می‌کند و می‌رسد در جایی، در آن عمق‌ها، به آب. شما درون‌تان چنین می‌شود: عمیق!
و یک موضوع دیگر: می‌دانید چه چیزی دلم می‌خواهد؟
دلم می‌خواهد بگویم به شما، به شما که انتشارات مشاوران آموزش را به‌عنوان ناشر تخصصی خودتان انتخاب کرده‌اید که می‌شود «لطف کنید و امسال را خیلی جدی بگیرید؟ تا بیشتر بزرگ شوید، تا بیشتر عمیق شوید؟ می‌شود خسته نشوید؟ می‌شود وقتی زحمت می‌کشید و به اندازهٔ زحمت‌تان، در مدرسه یا در آزمون، نتیجه نگرفتید ناامید نشوید و به خودتان بلند بگویید که هی فلانی! تو حق نداری! حق نداری که ناامید شوی و بعد دست از تلاش نکشید؟»
آخرین حرفم برای شما که دیگر برای‌تان حرف نخواهم زد، چرا که سال بعد در دانشگاه خواهید نشست و در جایگاه دانشجو:
در تمام سال‌هایی که برای رشتهٔ علوم انسانی کار کردم یک چیز همیشه باورم بود و آن این‌که زمین و زمان را باید به هم بریزم تا بتوانم قدمی در راه رشد و توسعه علوم انسانی بردارم و یواش به شما می‌گویم که احساس خوبی دارم. احساس رضایت. انگاری همهٔ تلاش‌های من و همکارانم بی‌نتیجه نبوده است، چرا که شما، خوانندهٔ جدی ما هستید و امیدوارم که «روش‌هایی که در کتاب‌هایمان یاد گرفته‌اید را بتوانید در دانشگاه نیز به کار گیرید.»
دانشجوی آینده، سلام!

**وحید تمنا**

# مقدمه مؤلف

کتاب پیشرو منبع کامل و جامعی از نظر محتوای آموزشی و ارائهٔ سؤالات امتحانی و کنکوری برای کتاب ریاضی و آمار (۳) است.  از اهداف اصلی کتاب اولاً افزایش توانایی دانش‌آموزان در پاسخگویی به سؤالات امتحانی و درنتیجه کسب نمره بالاتر است که حداقل ۳۰ درصد در آزمون سراسری مؤثر خواهد بود، ثانیاً بالا بردن مهارت تست‌زنی کنکور است.

برای هر درس درسنامه، دو آزمون و پرسش‌های چهارگزینه‌ای با پاسخ‌های کاملاً تشریحی و خودآموز در نظر گرفته شده است که دانش‌آموزان می‌توانند با مطالعهٔ درسنامه و پاسخ به سؤالات آزمون‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای عملاً فرآیند یادگیری خود را کامل کنند.

قابل ذکر است سؤالات آزمون‌های اول و دوم مربوط به هر درس کاملاً در سطح کتاب و سؤالات امتحانات نوبت اول و نوبت دوم طراحی شده است ولی برخی سؤالات آزمون دوم در هر درس شامل نکات خاصی است که ممکن است مدنظر طراحان سؤالات امتحانی قرار بگیرد. پرسش‌های چهارگزینه‌ای در سطح سؤالات کنکور است لذا آن‌ها را با دقت حل کنید تا برای کنکور سراسری آماده شوید.

اگر شما به سؤالات و تست‌های این کتاب مسلط شوید، مطمئن باشید نمرهٔ کامل در آن درس و مبحث را کسب می‌کنید و در امتحان موفق خواهید شد هم‌چنین از پس سؤالات کنکور مربوط به پایهٔ دوازدهم برخواهید آمد.

به امید موفقیت شما در امتحان نهایی و کنکور.

**گروه ریاضی انتشارات مشاوران آموزش**

# فهرست

# فهرست

# فصل اول

آمار و احتمال

## درس اول: شمارش

### اصل جمع

◄ اگر عملی را بتوان به $m$ طریق و عمل دیگری را بتوان به $n$ طریق انجام داد، به شرطی که این دو عمل را **نتوانیم با هم انجام دهیم**، در این صورت عمل اول «یا» عمل دوم را می‌توان به $m+n$ طریق انجام داد.

◄ این اصل را می‌توان به بیش از دو عمل نیز تعمیم داد.

### اصل ضرب

◄ برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن در **یک تصمیم‌گیری چندمرحله‌ای** تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله از تصمیم‌گیری در هم ضرب می‌شوند.

با دو مثال زیر موضوع فوق برایتان جا می‌افتد.

**مثال**

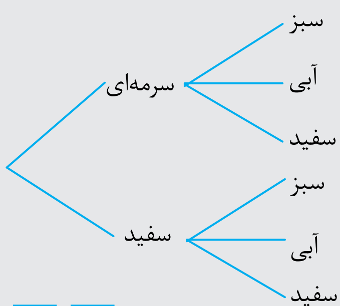
**امیرحسین دو شلوار به رنگ سرمه‌ای و سفید و سه بلوز به رنگ سبز، آبی و سفید دارد.**

الف) نمودار درختی مربوط به حالت‌های مختلف پوشیدن شلوار و بلوز برای امیرحسین را رسم کنید.

ب) با اصل شمارش به همان جواب برسید.

پاسخ:

الف) اگر آخرین ستون به دست آمده را بشماریم، تعداد حالات به دست می‌آید: شش حالت!




ب) $\square\ \square \rightarrow ۲\times۳=۶$

تعداد بلوز، تعداد شلوار

پس جواب‌ها با هم برابرند.

**مثال**

**با استفاده از اصل شمارش نشان دهید، چند جفت از حروف الفبای فارسی می‌توانیم داشته باشیم؟**

پاسخ: گام ۱: می‌دانیم ۳۲ حرف وجود دارد.

گام ۲: جفت یعنی دو حرفی

$\square\ \square \rightarrow ۳۲\times۳۲=۱۰۲۴$

حرف دوم، حرف اول

یعنی ۱۰۲۴ جفت حرف می‌توان داشت.

### فاکتوریل

◄ برای نوشتن حاصل‌ضرب **اعداد طبیعی متوالی**، می‌توانیم از نماد فاکتوریل (!) استفاده کنیم.

فاکتوریلِ یک عدد برابر است با «حاصل‌ضرب تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر و مساوی با آن عدد.»

◄ قاعدهٔ اصلی:

$$n!=n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times۱$$

مثال

$$۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱$$

◄ قواعد فرعی و بسیار پرکاربرد:

$$(n-۱)!=(n-۱)(n-۲)(n-۳)\ldots=\frac{n!}{n}$$

$$(n+۱)!=(n+۱)(n)(n-۱)(n-۲)\ldots=(n+۱)\times n!$$

◄ قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$۱!=۱$$

$$۰!=۱$$

**مثال**

**تحقیق کنید $۳!+۳!=۶!$ درست است یا نادرست.**

پاسخ:

$$۳!=۳\times۲\times۱=۶ \Rightarrow ۳!+۳!=۶+۶=۱۲$$

$$۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰$$

$$۳!+۳!=۱۲\neq۷۲۰=۶!$$

پس نادرست است.

**مثال**

**حاصل عبارت $\frac{۸!}{۴!}$ را به دست آورید.**

پاسخ:

$$۸! = ۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$$

$$۴! = ۴\times۳\times۲\times۱$$

$$\frac{۸!}{۴!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times\overbrace{۴\times۳\times۲\times۱}^{۴!}}{۴\times۳\times۲\times۱} = ۸\times۷\times۶\times۵ = ۱۶۸۰$$

## انتخاب‌های مستقل و وابسته

انتخاب مستقل: در بعضی از آزمون‌ها (مانند درست - نادرست یا چهارگزینه‌ای) انتخاب پاسخ برای هر سؤال، مستقل از انتخاب‌های انجام شده برای سایر سؤال‌ها است. یعنی پاسخ به هر سوال، مستقل از سؤال قبلی می‌باشد که در این حالت انتخاب را مستقل می‌گوییم.

انتخاب وابسته: در بعضی از آزمون‌ها (آزمون‌های جورکردنی) انتخاب پاسخ برای هر سؤال، وابسته به انتخاب‌های انجام شده برای سایر سؤال‌ها (معمولاً سوال‌های قبل) است. یعنی هر پاسخی که انتخاب شد، دیگر نمی‌توان آن را انتخاب کرد. در این حالت معمولاً برای سؤال بعدی تعداد انتخاب‌ها یکی کمتر است که انتخاب را وابسته به سؤال قبلی می‌کند.

**مثال**

**برای ۵ سؤال چهارگزینه‌ای چند پاسخ می‌توان در نظر گرفت؟**

$\square\square\square\square\square$

پاسخ: گام ۱: جای هر سؤال را مشخص می‌کنیم:

گام ۲: برای هر خانه حالت‌های مربوطه را می‌نویسیم و ضرب می‌کنیم. چون گفته است هر سؤال چهار گزینه دارد، پس هر کدام از مربع‌های فوق، می‌تواند گزینهٔ ۱ یا گزینهٔ ۲ یا گزینهٔ ۳ و یا گزینهٔ ۴ باشد، پس چهار حالت در هر کدام از مربع‌ها می‌توانند قرار بگیرند.

$$\text{تعداد حالت‌ها} = ۴\times۴\times۴\times۴\times۴ = ۴^۵ = (\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}} = ۱۰۲۴$$

یعنی ۱۰۲۴ حالت وجود خواهد داشت.

اگر سفید گذاشتن پاسخ سؤالات مجاز باشد خواهیم داشت:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = ۵\times۵\times۵\times۵\times۵ = ۵^۵ = (\text{تعداد گزینه‌ها} + ۱)^{\text{تعداد سؤالات}} = ۳۱۲۵$$

**مثال**

**کلمهٔ ۵ حرفی مرداب را در نظر بگیرید، و به دو سؤال زیر جواب دهید:**

الف) چند کلمهٔ ۳ حرفی با حروف کلمهٔ مرداب می‌توانیم بسازیم که حروف آن تکراری نباشند؟

ب) چند کلمهٔ ۳ حرفی با حروف کلمهٔ مرداب می‌توانیم بسازیم؟ (تکرار مهم نیست.)

پاسخ: الف) گام ۱: وقتی می‌گوید تکراری نباشد یعنی هر خانه به خانهٔ قبلی بستگی دارد. نوع انتخاب، انتخاب وابسته است.

گام ۲: از مرحلهٔ دوم به بعد، در هر مرحله، یک انتخاب حذف می‌شود.

یعنی در خانهٔ اول هر ۵ حرف کلمهٔ مرداب می‌توانند قرار بگیرند. در خانهٔ دوم ۴ حرف می‌توانند بروند (یک انتخاب کم می‌شود) یعنی مثلاً اگر «م» انتخاب شده است، دوباره نمی‌تواند انتخاب شود. در خانهٔ سوم ۳ حرف می‌توانند بروند (باز به دلیل انتخاب‌های قبلی دو حرف حذف می‌شود).

$\square\square\square \rightarrow ۵\times۴\times۳ = ۶۰$

گام ۳:

ب) سه حرفی خواسته است، پس سه تا جا در نظر می‌گیریم. چون تکرار مهم نیست، پس در هر جا می‌توان، کل ۵ حرف را قرار داد:

$\square\square\square \rightarrow ۵\times۵\times۵ = ۱۲۵$

## جایگشت

هریک از راه‌های ممکن قرار گرفتن n شیء متمایز کنار یکدیگر، یک جایگشت n تایی از آن n شیء نامیده می‌شود.

**نکته** بنا بر اصل ضرب تعداد کل جایگشت‌های n شیء متمایز برابر با $n!$ می‌شود.

**مثال**

**۷ نفر به چند طریق می‌توانند صف ببندند؟**

پاسخ: وقتی نفر اول ایستاد، برای ایستادن نفر دوم ۶ جا باقی می‌ماند. برای نفر سوم، ۵ جا، برای نفر چهارم، ۴ جا و الی آخر تا نفر هفتم. پس انتخاب‌ها وابسته به هم هستند و جای هرکدام مشخص است. چنین طرز قرار گرفتنی، جایگشت نامیده می‌شود.

$\square\square\square\square\square\square\square \rightarrow ۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۵۰۴۰$

## ترتیب (تبدیل)

وقتی می‌خواهیم از میان n شیء، r شیء را انتخاب کنیم و «**ترتیب انتخاب**» **حالت جدید ایجاد می‌کند**، این نوع انتخاب ترتیب نامیده می‌شود و برای محاسبهٔ آن از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم.

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

**تیزباش** در واقع می‌توان گفت ترتیب r شیء از n شیء، همان جایگشت‌های r تایی از n شیء است و یک جایگشت n تایی از n شیء، همان ترتیب n شیء از n شیء است.

$$p(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{۰!}=n!$$

### مثال

**از بین ۷ نفر به چند طریق می‌توان ۵ نفر را انتخاب کرد و در یک صف قرار داد؟**

پاسخ: برای درست کردن صف ۵ نفره، ۵ جا داریم. در این سوال برای جایگاه اول، ۷ انتخاب، برای جایگاه دوم، ۶ انتخاب و الی آخر تا جایگاه پنجم که ۳ انتخاب داریم. پس انتخاب‌ها وابسته به هم هستند. پس خواهیم داشت:

$$\square\square\square\square\square \rightarrow ۷\times۶\times۵\times۴\times۳=۲۵۲۰$$

روش دوم (با استفاده از ترتیب): می‌خواهیم از میان ۷ شیء، ۵ شیء را انتخاب کنیم و ترتیب انتخاب حالت جدید ایجاد می‌کند، پس خواهیم داشت:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\Rightarrow p(۷,۵)=\frac{۷!}{(۷-۵)!}=\frac{۷!}{۲!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۷\times۶\times۵\times۴\times۳=۲۵۲۰$$

### مثال

**به چند طریق می‌توان با حروف کلمهٔ flower کلمات سه حرفی ساخت؟ (تکرار جایز نیست.)**

پاسخ: راه اول: جابه‌جا شدن هر حرف فوق حالت جدیدی ایجاد می‌کند، پس ترتیب مهم است، پس با فرمول ترتیب حل می‌کنیم:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\Rightarrow p(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۶\times۵\times۴=۱۲۰$$

راه دوم: (استفاده از روش قبلی در جایگشت‌ها) سه حرفی خواسته است، پس سه جا در نظر می‌گیریم. تکراری نباید باشد، پس اگر در جای اول هر ۶ حرف کلمهٔ انگلیسی فوق، قرار بگیرد، در جایگاه دومی ۵ تا و در سومین جا ۴ حرف می‌توانند قرار بگیرند:

$$\square\square\square \rightarrow ۶\times۵\times۴=۱۲۰$$

## جایگشت با تکرار

در حالت کلی گاهی بعضی از حروف یا اعداد تکراری می‌باشند؛ در این صورت تعداد جایگشت‌های n شیء که در آن $a_۱$ شیء مثل هم و $a_۲$ شیء مثل هم باشند و به همین ترتیب $a_n$ شیء مثل هم باشند، برابر است با:

$$p=\frac{n!}{a_۱!a_۲!\dots a_n!}$$

### مثال

**با حروف کلمهٔ «دندانه» چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ (از تمام ۶ حرف استفاده شود.)**

پاسخ: اندیشهٔ کلیدی اول: حرف «د» دو بار تکرار شده است و حرف «ن» نیز دو بار.

اندیشهٔ کلیدی دوم: در فرمول جایگشت با تکرار جای‌گذاری می‌کنیم:

$$p=\frac{۶!}{۲!\times۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!\times۲!}=۱۸۰ \text{ حالت}$$

### مثال

**با حروف کلمهٔ: «دندانه» چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت؟**

پاسخ: اندیشهٔ کلیدی اول: حرف «د» دو بار تکرار شده است و حرف «ن» نیز دو بار.

اندیشهٔ کلیدی دوم: در فرمول جایگشت با تکرار جای‌گذاری می‌کنیم:

$$p=\frac{۵!}{۲!\times۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!\times۲!}=۳۰ \text{ حالت}$$

این پاسخ نادرست است: اول آنکه طبق آنچه در «روش پاسخگویی به سوال‌های جایگشت» گفته شد، در صورت کسر نباید ۵! باشد زیرا ۵ جایگاه داریم که در جایگاه اول هر ۶ حرف می‌توانند جای بگیرند و به همین ترتیب برای جایگاه‌های دوم ۵ حرف و الی آخر. پس ظاهراً جواب برابر است با:

$$p=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲}{۲!\times۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲}{۲\times۲}=۱۸۰ \text{ حالت}$$

که این استدلال برای جواب نیز نادرست است. چرا؟

علت نادرستی این استدلال آن است که آن **حرفی که استفاده نمی‌شود در مخرج کسر تاثیرگذار است**. مثلاً اگر از ۵ حرف انتخابی دو حرف «د»، حرف «ا»، حرف «ه» و فقط یک حرف «ن» انتخاب شوند، مخرج کسر برابر ۲! خواهد بود، ولی اگر دو حرف «د»، حرف «ا» و دو حرف «ن» انتخاب شوند، مخرج کسر برابر ۲!×۲! خواهد بود.

پس در سوالاتی که **حروف تکراری داریم ولی از تمام حروف استفاده نمی‌شود**، باید حالت‌های مختلف را در نظر گرفت و آنها را جداگانه حساب کرد و در نهایت جواب‌های به دست آمده را با یکدیگر جمع کرد.

حالت اول: حرف «د» فقط یک بار استفاده شود: (پس «ن» دو بار استفاده شده است.) $p=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲}{۲}=۶۰$

حالت دوم: حرف «د» دو بار و حرف «ن» فقط یک بار استفاده شود: $p=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲}{۲}=۶۰$

حالت سوم: حرف «د» دو بار و حرف «ن» نیز دو بار استفاده شود: (پس یکی از حروف «ا» یا «ه» استفاده نشده است.)

اگر حرف «ا» استفاده نشود: $p=\frac{۵!}{۲!\times۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲}{۴}=۳۰$

اگر حرف «ه» استفاده نشود: $p=\frac{۵!}{۲!\times۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲}{۴}=۳۰$

حالت دیگری نمی‌توان در نظر گرفت، پس کافی است این سه حالت را با هم جمع کنیم.

جواب سوال برابر خواهد بود با: $۶۰+۶۰+۳۰+۳۰=۱۸۰$ (در این مثال اتفاقاً عدد به دست آمده با دو استدلال درست و نادرست تفاوت نداشت، اما اگر شما تعداد کلمات ۴ یا ۳ حرفی را به دست آورید تفاوت مقادیر را مشاهده می‌کنید.)

## ترکیب

انتخاب r شیء از n شیء را که در آن **ترتیب قرارگرفتن مهم نباشد**، ترکیب می‌نامیم و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنیم.

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

### مثال

**مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e\}$ را در نظر بگیرید.**

الف) این مجموعه چند زیرمجموعهٔ دو عضوی دارد؟

ب) این مجموعه چند زیر مجموعهٔ سه عضوی دارد؟

پ) این مجموعه چند زیر مجموعهٔ سه عضوی شامل a دارد؟

پاسخ: الف) در یک مجموعه ترتیب اعضاء مهم نیست و جابه‌جایی آنها، مجموعهٔ جدیدی نمی‌سازد؛ پس تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی برابر ترکیب‌های ۲ تایی از ۵ عضو است. $\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!(۵-۲)!}=\frac{۵!}{۲!۳!}$

ب) مشابه قسمت «الف» تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی برابر است با: $\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۳!۲!}$

پ) چون زیر مجموعه‌های سه عضوی باید شامل a باشند، پس کافی است دو عضو دیگر آن را از بین ۴ عضو باقی مانده انتخاب کنیم.

$$\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!۲!}$$

### مثال

**مقدار n را طوری بیابید که رابطهٔ زیر برقرار باشد.** $p(n,۲)+۴=C(۵,۴)$

پاسخ:

$$\frac{n!}{(n-۲)!}+۴=\frac{۵!}{۴!(۵-۴)!}$$

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}+۴=\frac{۵\times۴!}{۴!(۱)!}\Rightarrow n(n-۱)+۴=۵\Rightarrow n^۲-n-۱=۰$$

حال معادلهٔ فوق را حل می‌کنیم. $\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۱)(-۱)=۱-(-۴)=۵$

$$n_۱,n_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\Rightarrow n_۱=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲},n_۲=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

چون هیچ یک از دو مقدار بالا عدد طبیعی نیست، پس رابطهٔ داده شده در صورت مثال برقرار نیست.

**نکته** اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد آن‌گاه تعداد زیر مجموعه‌های آن برابر $۲^n$ است.

**مثال**

**درستی تساوی زیر را ثابت کنید.**

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

پاسخ: اگر A یک مجموعهٔ دارای n عضو باشد.

تعداد زیر مجموعه‌های صفر عضوی (مجموعهٔ تهی) مجموعهٔ $A = \binom{n}{0}$

تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی مجموعهٔ $A = \binom{n}{1}$

تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی مجموعهٔ $A = 1 = \binom{n}{n}$

بنابراین طبق اصل جمع $2^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n} =$ تعداد زیرمجموعه‌های A

**نکته** تعدادی از تساوی‌های مهم در ترکیبیات عبارتند از:

۱) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

۲) $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

۳) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

۴) $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$

۵) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

**مثال**

**اگر $\binom{10}{2r+1}=\binom{10}{r}$ باشد، مقدار r را بیابید.**

پاسخ: برای برقرار بودن تساوی فوق دو حالت را می‌توان در نظر گرفت.

حالت اول: $r=2r+1\Rightarrow r=-1$

چون n باید عددی طبیعی باشد این جواب غیرقابل قبول است.

حالت دوم: می‌دانیم $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ بنابراین: $2r+1=10-r\Rightarrow 3r+1=10\Rightarrow r=3$

چون r یک عدد طبیعی است بنابراین این جواب قابل قبول است.

**مثال**

**یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی را در نظر بگیرید. این مجموعه چند زیرمجموعهٔ دارای بیش از دو عضو دارد؟**

پاسخ: باید تعداد زیرمجموعه‌های ۳ و ۴ و ... و ۱۰ عضوی را با هم جمع کنیم. $\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\cdots+\binom{10}{10}$

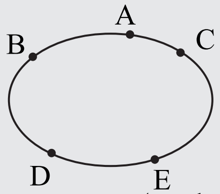
از طرفی می‌دانیم: $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\cdots+\binom{10}{10}=2^{10}$

$$\Rightarrow \binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\cdots+\binom{10}{10}=2^{10}-\binom{10}{0}-\binom{10}{1}-\binom{10}{2}=2^{10}-1-10-\frac{10\times9}{2}=2^{10}-56$$

**اینو میدونی** اگر سه نقطه مانند A و B و C روی یک خط راست قرار نگیرند با اتصال آنها به وسیلهٔ پاره خط، یک مثلث به دست می‌آید.

**مثال**

**پنج نقطهٔ A و B و C و D و E مطابق شکل روی محیط یک بیضی قرار دارند. چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن یکی از این پنج نقطه باشد؟**




پاسخ: هر سه نقطه‌ای که انتخاب می‌کنیم روی یک خط راست قرار نمی‌گیرند، بنابراین تشکیل یک مثلث می‌دهند. پس کافی است تعداد ترکیب‌های ۳ شیء از ۵ شیء را حساب کنیم.

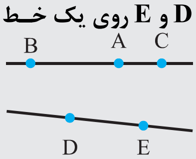
$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times۴}{۲!}=۱۰$$

**باش حواست**

اگر تعداد n نقطه روی محیط دایره‌ای قرار بگیرند نیز مشابه مثال قبل تعداد مثلث‌هایی که می‌توان توسط آن‌ها ساخت برابر $\binom{n}{۳}$ است.

**مثال**

**پنج نقطهٔ A و B و C و D و E مطابق شکل طوری قرار دارند که نقاط A و B و C روی یک خط و نقاط D و E روی یک خط دیگر می‌باشند. چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن یکی از این پنج نقطه باشد؟**




پاسخ: برای تشکیل مثلث نباید نقاط روی یک خط راست قرار بگیرند، بنابراین یا دو نقطه روی خط بالا و یک نقطه روی خط پایین باید انتخاب شود و یا یک نقطه روی خط بالا و دو نقطه روی خط پایین. (انتخاب ۲ از ۳ و انتخاب ۱ از ۲، یا انتخاب ۱ از ۳ و انتخاب ۲ از ۲)

$$\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۲}=\frac{۳!}{۱!۲!}\times\frac{۲!}{۱!۱!}+\frac{۳!}{۱!۲!}\times\frac{۲!}{۲!۰!}=۳\times۲+۳\times۱=۹$$

**مثال**

**انجمن دبستانی از ۶ نفر عضو زن و مرد می‌خواهد ۳ نفر را انتخاب کند. به چند طریق این انتخاب امکان‌پذیر است؟**

پاسخ: این که اول کدام یک و بعداً کدام یک انتخاب شوند مهم نیست، پس ترتیب مهم نیست:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}\xrightarrow{n=۶\,,\,r=۳}\frac{۶!}{(۶-۳)!۳!}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۳\times۲}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲}=۵\times۴=۲۰$$

**راه فرار** برای پیدا کردن تعداد ترکیب‌های ممکن، می‌توانید اول از اصل شمارش یا ترتیب شروع کنید و سپس بر تعداد راه‌هایی که در آن شیءها می‌توانند مرتب شوند تقسیم کنید.

**مثال**

**انجمن دبستانی از ۶ نفر عضو زن و مرد می‌خواهد ۳ نفر را انتخاب کند. به چند طریق این انتخاب امکان‌پذیر است به شرط آنکه یک نفر خاص حتماً انتخاب شود؟**

پاسخ: این که اول کدام یک و بعداً کدام یک انتخاب شوند مهم نیست، پس ترتیب مهم نیست، اما چون یک نفر انتخاب شده است پس باید دو نفر دیگر از میان ۵ نفر باقیمانده انتخاب شوند:

$$C(۵,۲)=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!۲!}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

**مثال**

**انجمن دبستانی از ۶ نفر عضو زن و مرد (۳ زن و ۳ مرد) می‌خواهد ۳ نفر را انتخاب کند. به چند طریق این انتخاب امکان‌پذیر است به شرط آنکه حداقل یک زن انتخاب شود؟**

پاسخ: روش اول: حداقل یک زن انتخاب شود به این معنی است که یا یک زن و دو مرد انتخاب شوند، یا دو زن و یک مرد انتخاب شوند و یا هر سه نفر انتخاب شده زن باشند. پس سه حالت را باید جداگانه حساب کنیم و با هم جمع کنیم.

حالت اول: یک زن و دو مرد انتخاب شوند. چون ترتیب انتخاب مهم نیست پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. انتخاب یک زن از میان سه زن و انتخاب دو مرد از میان سه مرد:

$$C(۳,۱)\times C(۳,۲)=\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۲}=\frac{۳!}{۱!۲!}\times\frac{۳!}{۲!۱!}=۳\times۳=۹$$

حالت دوم: دو زن و یک مرد انتخاب شوند. چون ترتیب انتخاب مهم نیست پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. انتخاب دو زن از میان سه زن و انتخاب یک مرد از میان سه مرد:

$$C(۳,۲)\times C(۳,۱)=\binom{۳}{۲}\times\binom{۳}{۱}=\frac{۳!}{۱!۲!}\times\frac{۳!}{۲!۱!}=۳\times۳=۹$$

حالت سوم: سه زن انتخاب شوند. چون ترتیب انتخاب مهم نیست پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. انتخاب سه زن از میان سه زن:

$$C(۳,۳)=\binom{۳}{۳}=\frac{۳!}{۳!۰!}\times\frac{۳!}{۳!\times۱}=۱$$

پس جواب برابر است با حاصل جمع این سه عدد: $۹+۹+۱=۱۹$

روش دوم (پیشامد مکمل): روش دیگری نیز برای حل این سوال وجود دارد. وقتی می‌خواهیم حداقل یک نفر از افراد انتخاب شده زن باشد همانند آن است که «**از کل تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب سه نفر (بدون هیچ محدودیتی) حالت‌هایی که هر سه نفر انتخاب شده مرد باشند را کم کنیم**» تا حالتی که حداقل یک زن عضو سه نفر انتخاب شده باشد به دست بیاید. (پیشامد مکمل)

انتخاب ۳ نفر از میان ۶ نفر بدون هیچ محدودیتی:

$$C(۶,۳)=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{(۶-۳)!۳!}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۳\times۲}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲}=۵\times۴=۲۰$$

حالت‌هایی که هر سه نفر انتخاب شده مرد باشند (انتخاب ۳ نفر از میان ۳ مرد):

$$C(۳,۳)=\binom{۳}{۳}=\frac{۳!}{۳!۰!}\times\frac{۳!}{۳!\times۱}=۱$$

پس جواب مطلوب برابر است با: $۲۰-۱=۱۹$

## اینشکلی جوری

**شمارش:** فرض کنیم عمل اول را به m طریق و عمل دوم را به n طریق بتوان انجام داد. در این صورت داریم:

اصل جمع: عمل اول یا عمل دوم

$m + n$

اصل ضرب: عمل اول و عمل دوم

$m \times n$

**راهنمای حل سؤال‌های اصل شمارش:**

قبل از هر چیز باید بدانیم چند شیء می‌خواهد انتخاب شود. آنگاه **به تعداد آن چند شیء، مربع می‌کشیم**.

سپس تعداد اشیاء که مجموعهٔ اصلی ماست (یعنی n) را در مربع‌ها شروع به قرار دادن می‌کنیم.

باید توجه کنیم که در صورت سؤال شروطی داده است یا خیر (مثلاً تکراری بودن یا نبودن، یک در میان بودن و یا ...) در آن صورت شرط را نیز رعایت می‌کنیم.

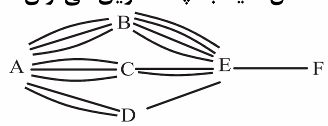
| | بدون تکرار | با تکرار |
|---|---|---|
| **جایگشت** | n شیء متمایز $\leftarrow n!$ | n شیء که در آن $a_۱$ شیء مثل هم، $a_۲$ شیء مثل هم، ... و $a_n$ شیء مثل هم باشند $\leftarrow \frac{n!}{a_۱!a_۲!\ldots a_n!}$ |
| **ترتیب (تبدیل)** | $p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ انتخاب r شیء از n شیء که در آن ترتیب مهم است. | |
| **ترکیب** | $C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$ انتخاب r شیء از n شیء که در آن ترتیب مهم نیست. | |

**روش پاسخگویی به سؤال‌های مبحث جایگشت:**

- وقتی تعداد جایگاه‌ها با تعداد افراد یا اشیاء که می‌خواهند در آن جایگاه‌ها قرار بگیرند متفاوت باشد، «**ابتدا جایگاه‌ها را مشخص کرده**» و سپس تعداد افرادی که می‌توانند در آن جایگاهِ به خصوص قرار بگیرند را حساب کنید.
- اشتباه بیشتر دانش‌آموزان در این گونه سوالات این است که ابتدا افراد را یکی یکی انتخاب می‌کنند و سپس جایگاه‌هایی که هر یک از افراد می‌توانند در آن جای بگیرند را حساب می‌کنند؛ که با این راه به جواب غلط می‌رسند. مثلاً در مثال آورده شده در متن، سوال گفته است که از بین ۷ نفر، ۵ نفر را می‌خواهیم انتخاب کنیم، برای نفر اول ۵ جایگاه داریم، برای نفر دوم ۴ جایگاه و الی آخر که جواب در این حالت برابر $۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵$ می‌شود، که نادرست است.
- اگر تعداد جایگاه‌ها با تعداد افراد یا اشیاء که می‌خواهند در آن جایگاه‌ها قرار بگیرند برابر باشد، فرقی نمی‌کند که شما ابتدا جایگاه‌ها را مشخص کنید و سپس تعداد افراد یا اشیائی که می‌توانند در آن جایگاه‌ها قرار بگیرند را حساب بکنید و یا ابتدا افراد را مشخص کنید و سپس مشخص کنید که هر فرد انتخاب شده در چند جایگاه می‌تواند قرار بگیرد، علت این موضوع آن است که تعداد افراد با تعداد جایگاه‌ها برابر است.

# آزمون‌های تشریحی درس ۱ از فصل اول

| آزمون یک – **سطح متوسط** (۲۰ نمره) | بارم |
| --- | --- |
| ۱. اگر تنها ۴ کتاب‌فروشی در تهران و ۳ کتاب‌فروشی در کرج کتاب ریاضی دوازدهم انسانی را داشته باشند، به چند طریق می‌توان این کتاب را تهیه کرد؟ | ۰/۵ |
| ۲. شخصی مسیر تهران به زنجان را به ۴ طریق و زنجان به همدان را به ۲ طریق می‌تواند طی کند. این شخص برای رفتن از تهران به همدان با این شرط که از زنجان عبور کند چند راه دارد؟ | ۰/۵ |
| ۳. به چند طریق می‌توان به ۲۰ سوال ریاضی کنکور سراسری پاسخ داد؟ | ۱ |
| ۴. الف) یک دانش‌آموز برای رفتن از منزل به مدرسه و برعکس باید از نقاط A و B موجود در نمودار زیر عبور کند. این دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند این رفت و برگشت را انجام دهد.<br><br>ب) اگر این دانش‌آموز در یک امتحان ۴ گزینه‌ای با ۱۰ سؤال شرکت کند به چند طریق می‌تواند به همهٔ سؤالات پاسخ دهد؟ (با این شرط که سوالی بدون پاسخ نباشد.) | ۱/۵ |
| ۵. تساوی روبه‌رو به ازای کدام مقدار برای n برقرار است؟ $\frac{(n+۲)!}{(n-۱)!}=۲۴$ | ۱ |
| ۶. مقدار n را از رابطهٔ زیر به دست آورید. $n!=\frac{۷۲۰}{n^۲+۳n+۲}$ | ۱/۵ |
| ۷. ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند با این رقام:<br>الف) چند عدد ۴ رقمی زوج و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟<br>ب) چند عدد ۳ رقمی و بدون تکرار ارقام وجود دارد که یک رقم آن عددِ ۵ باشد؟ | ۱/۵ |
| ۸. با ارقام مجموعهٔ $\{۰,۴,۵,۶,۸,۹\}$ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که بر عدد ۵ بخش‌پذیر باشند؟ | ۱/۵ |
| ۹. شخصی ۱۰ کتاب متمایز دارد که ۴ جلد آن مربوط به رشتهٔ ریاضی و ۶ جلد دیگر مربوط به رشتهٔ انسانی است. اگر این شخص بخواهد کتاب‌ها را در قفسهٔ کتابخانه و در یک ردیف طوری بچیند که اول و آخر ردیف کتاب‌های رشتهٔ انسانی قرار گیرند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ | ۱ |
| ۱۰. الف) به چند طریق می‌توان از بین ۶ کتاب ادبیات، دین و زندگی، ریاضی و آمار (۳)، زیست، شیمی، فیزیک، ۳ کتاب انتخاب کرد و در یک قفسهٔ کتابخانه قرار داد؟<br>ب) اگر علاوه بر ۶ کتاب مذکور در قسمت «الف» یک کتاب ریاضی و آمار (۳) به آنها اضافه کنیم به چند طریق می‌توان آنها را در یک ردیف قرار داد به طوری‌که کتاب‌های یکسان کنار هم قرار گیرند؟ | ۲ |
| ۱۱. با ارقام $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند عدد پنج رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت که:<br>الف) بر عدد ۳ بخش‌پذیر باشند؟ ب) زوج باشند؟ پ) بر ۴ بخش‌پذیر باشند؟ | ۱/۵ |
| ۱۲. یک دوره بازی‌های والیبال بین ۵ تیم والیبال و بازی فوتبال بین ۴ تیم فوتبال به صورت بازی‌های رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌های والیبال با هم و همهٔ تیم‌های فوتبال با هم بازی داشته باشند در پایان دوره چند بازی انجام خواهد شد؟ | ۲ |
| ۱۳. از میان یک گروه ۲۰ نفری متشکل از ۱۵ مرد و ۵ زن:<br>الف) می‌خواهیم یک گروه ۳ نفره تشکیل دهیم، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟<br>ب) به چند طریق می‌توان این ۲۰ نفر را در یک ردیف طوری قرار داد که زن‌ها کنار هم قرار گیرند؟ | ۱/۵ |
| ۱۴. روی هر ضلع یک مستطیل ۲ نقطه وجود دارد، چه تعداد مثلث با این ۸ نقطه می‌توان تشکیل داد؟ | ۱ |
| ۱۵. مقدار n را از رابطهٔ مقابل به دست آورید. $P(n,۴)=۱۲C(n,۲)$ | ۱ |
| ۱۶. الف) از جعبه‌ای شامل ۹ مهرهٔ متمایز به چند طریق می‌توان ۳ مهره از این جعبه خارج کرد؟<br>ب) از جعبه‌ای شامل ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد؟ | ۱ |

| سؤال | بارم |
|---|---|
| **آزمون دو – سطح امتحان نهایی (۲۰ نمره)** | |
| **۱۷.** الف) به چند طریق می‌توان از بین ۴ خودکار با رنگ‌های متمایز و ۵ مداد با رنگ‌های متمایز و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های متمایز یک نمونه را انتخاب کرد.<br>ب) در قسمت «الف» به چند طریق می‌توان ۲ نمونهٔ متفاوت (۲ جنس مختلف) را انتخاب کرد. | ۱ |
| **۱۸.** اگر شخصی مسیر تهران به مشهد را از ۴ راه و مشهد به سیستان را از ۳ راه بتواند برود و برگردد و تصمیم بگیرد از مسیر تکراری برنگردد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ | ۱ |
| **۱۹.** بین ۶ شهر A، B، C، D، E و F مطابق شکل راه‌هایی وجود دارد که همه دوطرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:<br>الف) از شهر D به شهر A مسافرت کرد به‌طوری‌که از شهر C و F عبور نکنیم؟<br>ب) از شهر A به شهر F و از طریق شهر C مسافرت رفت و برگشت انجام دهیم؟<br><br> | ۱ |
| **۲۰.** اگر یک تصمیم‌گیری شامل دو مرحله باشد و تعداد راه‌های ممکن انجام مرحلهٔ اول برابر $۷^{۳} - ۷$ و تعداد راه‌های ممکن انجام مرحلهٔ دوم برابر $۵^{۳} - ۵$ باشد، تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری برابرفاکتوریل چه عددی است؟ | ۱ |
| **۲۱.** اگر $\frac{۱}{۵۶} = \frac{(n^{۳} - n)(n-۲)!}{(n+۳)!}$ باشد، مقدار n را به‌دست آورید. | ۱ |
| **۲۲.** مجموعهٔ $A = \{۰,۱,۲,۴,۶,۸,۹\}$ مفروض است، با قرار دادن اعداد این مجموعه کنار هم:<br>الف) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۸۶۰۰۰ می‌توان نوشت؟<br>ب) مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟<br>پ) مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد که شامل رقم ۸ نباشد؟ | ۱/۵ |
| **۲۳.** با حروف کلمهٔ «province»:<br>الف) چند کلمهٔ ۵ حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟<br>ب) چند کلمهٔ ۳ حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که به حرف «e» ختم شوند؟<br>پ) چند کلمهٔ ۸ حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که با حرف «r» شروع و به حرف «O» ختم شوند؟ | ۱/۵ |
| **۲۴.** ۵ مرد و ۵ زن به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند با این شرط که هیچ دو مردی کنار هم نباشند؟ | ۱ |
| **۲۵.** با کمک پنج دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم علوم انسانی:<br>الف) به چند طریق می‌توان یک ردیف (صف) پنج نفره تشکیل داد؟<br>ب) به چند طریق می‌توان یک ردیف سه نفره تشکیل داد؟<br>پ) به چند طریق می‌توان یک گروه سه نفره تشکیل داد؟ | ۱/۵ |
| **۲۶.** روی محیط یک شش ضلعی، ۶ نقطهٔ متمایز وجود دارد به طوری که روی هر ضلع آن یک نقطه قرار گرفته است، مشخص کنید:<br>الف) تعداد پاره‌خط‌هایی که می‌توان با این ۶ نقطه ساخت.<br>ب) تعداد مثلث‌هایی که می‌توان با این ۶ نقطه ساخت.<br>پ) تعداد بردارهایی که می‌توان با این ۶ نقطه ساخت. | ۱/۵ |
| **۲۷.** دو خط موازی $L_۱$ و $L_۲$ را در نظر بگیرید، روی خط $L_۱$، ۳ نقطه و روی خط $L_۲$، ۵ نقطه قرار دارند، تعداد مثلث‌هایی که با این نقطه‌ها می‌توان ساخت را به‌دست آورید. | ۱ |
| **۲۸.** می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم یک گروه ۳ نفره تشکیل دهیم، مشخص کنید به چند طریق می‌توان این گروه را تشکیل داد هرگاه بخواهیم:<br>الف) گروه شامل حداقل ۲ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم باشد. ب) گروه شامل حداکثر ۲ دانش‌آموز از پایهٔ دوازدهم باشد. | ۲ |
| **۲۹.** مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد که شامل عضو a باشند؟ | ۱ |
| **۳۰.** اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر باشد، حاصل ترکیب $\binom{n}{۳}$ کدام است؟ | ۱ |
| **۳۱.** اگر $\frac{P(n,۴)}{C(n-۱,۴)} = ۲۶$ باشد مقدار n را به دست آورید. | ۱ |
| **۳۲.** می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز پایهٔ دهم، ۵ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم، یک گروه دو نفری تشکیل دهیم، این کار در هر یک از شرایط زیر به چند طریق امکان‌پذیر است؟<br>الف) اعضای گروه از دانش‌آموزان پایه‌های مختلف باشند.<br>ب) حداقل یک نفر از اعضای گروه از دانش‌آموزان پایهٔ دوزادهم باشد. | ۲ |

# پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس ۱ از فصل اول

## فاکتوریل

**۳۳.** مقدار عبارت $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟ (سراسری ۷۲)

۱) $n(n+1)$ ۲) $n(n-1)$ ۳) $\frac{(n+1)}{(n-1)}$ ۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

**۳۴.** عبارت $(7-5)\times(7^3-5)(5^3-90)$ برابر فاکتوریل «چه عددی» است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

**۳۵.** اگر $n! = 120\times 42$، آنگاه n کدام است؟ (سراسری ۶۳)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

**۳۶.** اگر $\frac{1}{6}=\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ باشد، n چقدر است؟ (آزاد ۸۰)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

## انتخاب r عدد از n عدد با تکرار ارقام

**۳۷.** با ارقام ۳,۲,۱,۰ چند عدد سه رقمی با تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (سراسری ۶۵)

۱) ۹ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

**۳۸.** مجموعهٔ اعداد چهار رقمی که با ارقام «۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵» با تکرار ارقام می‌توان نوشت چند عضو دارد؟ (آزاد ۷۸)

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۰۰ ۳) $6^4$ ۴) $5\times 6^3$

**۳۹.** چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیر صفر است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۶۲۵ ۴) ۱۰۲۴

**۴۰.** می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آنها یکی از حروف (ا،ب،ج،د) و در سمت چپ آنها عدد دو رقمی بدون صفر نوشته شود، چندکارت می‌توان ساخت؟ (سراسری ۷۷)

۱) ۳۲۴ ۲) ۳۶۰ ۳) ۲۴۳ ۴) ۱۸۰

**۴۱.** پلاک اتومبیل سواری «ب» در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{**\ \text{ب}\ ***}$ است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۱۱۶۶۴ ۲) ۱۴۵۸۰ ۳) ۱۵۴۸۰ ۴) ۱۸۲۲۵

**۴۲.** چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ و متشکل از رقم‌های فرد وجود دارند؟ (خارج از کشور ۹۱)

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

## انتخاب r عدد از n عدد بدون تکرار ارقام

**۴۳.** با ارقام ۳,۲,۱,۰ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (سراسری ۶۳)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۶۴

**۴۴.** با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۵، چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (آزاد ۷۶)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۹

**۴۵.** با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵، چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (سراسری ۷۰)

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

**۴۶.** چند عدد سه رقمی، با ارقام متمایز وجود دارد؟ (خارج از کشور ۸۸)

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۰۴ ۳) ۶۴۸ ۴) ۷۲۰

**۴۷.** با ارقام ۵ و ۴ و ۰ و ۱ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (سراسری ۶۹)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

**۴۸.** با ارقام «۰ و ۲ و ۴ و ۷ و ۹» چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (آزاد ۷۸)

۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

## جایگشت r شیء بدون تکرار

**۴۹.** سه نوع کتاب علمی و چهار نوع کتاب ادبی را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که کتاب‌ها یک در میان قرار گیرند؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۱۴۴　۲) ۱۲۰　۳) ۹۶　۴) ۷۲

**۵۰.** سه کتاب ریاضی و دو کتاب اقتصاد که با هم متفاوت‌اند را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتاب‌های هم موضوع همواره کنار هم باشند؟ (سراسری ۷۲)

۱) ۲۴　۲) ۱۲　۳) ۱۲۰　۴) ۶۰

**۵۱.** با جایگشت ارقام ۶، ۵، ۵، ۲، ۱ چند عدد پنج رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان ساخت؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۱۸　۲) ۲۰　۳) ۲۴　۴) ۳۰

**۵۲.** تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ DAMDARAN به شرط آن‌که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟ (سراسری ۸۴)

۱) ۱۲۰　۲) ۱۸۰　۳) ۲۴۰　۴) ۳۶۰

## جایگشت r شیء با تکرار

**۵۳.** تعداد راه‌های مختلف مرتب کردن حرف‌های واژهٔ «مسلمانان» برابر است با : (آزاد ۸۴)

۱) $9!$　۲) $8!$　۳) $7!$　۴) $6!$

**۵۴.** حروف واژهٔ «نازنین» با حروف کدام کلمه دارای تعداد ترتیب‌های مساوی است؟ (آزاد ۸۶)

۱) پابرجا　۲) مولودی　۳) سامانه　۴) شیرینی

**۵۵.** تعداد ترتیب‌های مختلف حروف کدام‌یک از واژه‌ها، متفاوت با واژه‌های دیگر است؟ (آزاد ۸۸)

۱) فرامرز　۲) کیخسرو　۳) شهریار　۴) مازیار

**۵۶.** تعداد اعداد هفت رقمی متشکل از جایگشت ارقام عدد ۲۳۲۵۶۵۵ کدام است؟ (سراسری ۸۵)

۱) ۲۱۰　۲) ۴۲۰　۳) ۵۶۰　۴) ۸۴۰

**۵۷.** حروف کلمهٔ EARNEST را به چند طریق می‌توان در کنار هم قرار داد به طوری که حرف N همواره در وسط قرار گیرد؟ (بدون توجه به مفهوم) (سراسری ۹۱)

۱) ۱۸۰　۲) ۲۱۶　۳) ۲۴۰　۴) ۳۶۰

**۵۸.** تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ DADRASS که در آن حرف R همواره در وسط قرار گیرد، کدام است؟ (خارج از کشور ۸۹)

۱) ۴۵　۲) ۷۵　۳) ۹۰　۴) ۱۲۵

**۵۹.** حروف کلمهٔ ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که Sها یک در میان باشند؟ (سراسری ۷۹)

۱) ۸　۲) ۹　۳) ۱۰　۴) ۱۲

## جایگشت‌های r شیء از n شیء

**۶۰.** حاصل عبارت $\frac{p(n,r)}{p(n+1,r+1)}$ کدام است؟ (سراسری ۷۰)

۱) $\frac{1}{n+1}$　۲) $\frac{r}{n}$　۳) $\frac{1}{(n+1)!}$　۴) $\frac{r+1}{n+1}$

**۶۱.** راه‌های مختلفی که می‌توان رئیس، معاون و دفتردار یک مؤسسهٔ آموزشی را از بین ۶ نفر کارمند انتخاب نمود، برابر فاکتوریل «چه عددی» است؟ (آزاد ۸۲)

۱) ۳　۲) ۴　۳) ۵　۴) ۹

**۶۲.** از ۱۲ نفر دانش‌آموز نمونه، با چند راه می‌توان سه نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه، انتخاب کرد؟ (خارج از کشور ۹۱)

۱) ۱۳۲۰　۲) ۶۶۰　۳) ۳۳۰　۴) ۲۲۰

**۶۳.** تعداد جایگشت‌های سه حرفی، از حروف کلمهٔ SERESHT کدام است؟ (سراسری ۸۷)

۱) ۶۰　۲) ۷۲　۳) ۸۴　۴) ۹۶

**۶۴.** تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی از حروف کلمهٔ SALAMAT که دو حرف آن A باشد، کدام است؟ (سراسری ۸۹)

۱) ۲۴　۲) ۳۶　۳) ۵۶　۴) ۷۲

**۶۵.** پنج حرف از ۸ حرف کلمه BUSINESS را با جایگشت‌های متمایز در کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد گروه‌هایی که هر سه S در آنها موجود باشد، کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) ۱۵۰　۲) ۱۶۰　۳) ۲۰۰　۴) ۲۴۰

**۶۶.** تعداد جایگشت‌های سه حرفی انتخاب شده از حروف کلمهٔ DELAVAR کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) ۱۱۵　۲) ۱۲۵　۳) ۱۳۰　۴) ۱۳۵

**۶۷.** تعداد جایگشت‌های سه حرفی، از حروف کلمهٔ MARDSALAR کدام است؟ (خارج از کشور ۸۷)

۱) ۱۴۵　۲) ۱۴۸　۳) ۱۵۰　۴) ۱۵۱

**۶۸.** با حروف کلمه RANGIN ، چند کلمهٔ رمز ۳ حرفی می‌توان ساخت؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۶۰　۲) ۷۲　۳) ۸۴　۴) ۱۲۰

۶۹. با حروف کلمه KAMYAB، چند رمز عبور ۴ حرفی می‌توان ساخت؟ (خارج از کشور ۹۴)

۱) ۱۴۲ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۲

۷۰. شش رقم ۵، ۵، ۵، ۳، ۳، ۱، را از مقوا بریده در کنار یکدیگر جابه‌جا می‌کنیم. تعداد اعداد شش رقمی متمایز، کدام است؟ (خارج از کشور ۹۵)

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۷۱. شش رقم ۸، ۴، ۸، ۷، ۳ و ۲، را از مقوا بریده و هر سه رقم انتخابی از آنها را در کنار هم جابه‌جا می‌کنیم. چند عدد سه رقمی متمایز حاصل می شود؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۶۰ ۲) ۶۳ ۳) ۷۲ ۴) ۷۵

۷۲. از یک قطعه مقوا، ارقام ۵ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ بریده شده است. با جایگشت هر سه رقم دلخواه از آنان چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟ (خارج از کشور ۹۰)

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

## ترکیب r شیء از n شیء

۷۳. جواب معادلهٔ $C(x,2) = 2x$ کدام است؟ (سراسری ۶۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۴. اگر ترکیب $C(a+b,a) = m$ باشد، آنگاه مقدار ترکیب $C(a+b,b)$ کدام است؟ (سراسری ۷۱)

۱) $m$ ۲) $bm$ ۳) $am$ ۴) $(a+b)m$

۷۵. اگر $C(n,4) = p(n-1, 3)$، عدد n کدام است؟ (سراسری ۸۴)

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۳۴ ۴) ۴۳

۷۶. تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز نسبت به ترکیب‌های ۳ از ۸ شیء مختلف، برابر فاکتوریل چه عددی است؟ (آزاد ۸۷)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۷. یک مجموعهٔ ۸ عضوی، چند زیر مجموعهٔ ۴ عضوی دارد؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۸۴ ۲) ۷۰ ۳) ۵۶ ۴) ۴۲

۷۸. یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی چند زیر مجموعهٔ ۲ عضوی دارد؟ (آزاد ۷۵)

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۴۵

۷۹. یک مجموعهٔ n عضوی ۶ زیر مجموعهٔ دو عضوی دارد، n کدام است؟ (آزاد ۷۶)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۵

۸۰. اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی با تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر باشد، حاصل ترکیب $\binom{n}{3}$ کدام است؟ (آزاد ۷۷)

۱) ۳۶ ۲) ۲۰ ۳) ۷۲ ۴) ۴۸

۸۱. یک مجموعهٔ n عضوی، ۵۵ زیر مجموعهٔ $n-2$ عضوی دارد، n کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۸۲. هر یک از حروف کلمهٔ DELAVARAN بر روی ۹ گوی نوشته شده است، به چند طریق می‌توان ۳ گوی از این ۹ گوی انتخاب کرد؟ (سراسری ۸۶)

۱) ۳۵ ۲) ۴۲ ۳) ۵۶ ۴) ۸۴

۸۳. به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟ (سراسری ۹۳)

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

۸۴. از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دستهٔ ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۲۴۱۰ ۲) ۲۴۲۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۵۴۰

۸۵. در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی در هواپیما است و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند، به چند طریق می‌توان از بین آنان ۴ نفر را سوار کرد؟ (سراسری ۸۳)

۱) ۵۶ ۲) ۶۳ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۲۶

۸۶. از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر طوری انتخاب کرد، که همواره یک فرد مورد نظر، بین آن سه نفر باشد؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۶۶ ۴) ۷۲

۸۷. دانش‌آموزی باید به ۱۸ سؤال از ۲۰ سؤال امتحان به دلخواه پاسخ بدهد. به چند طریق می‌تواند این ۱۸ سؤال را انتخاب کند؟ (سراسری ۶۸)

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹۰ ۴) ۳۸۰

۸۸. از بین ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۲ دانش‌آموز کلاس سوم تشکیل دهیم. این عمل، به چند طریق ممکن است؟ (سراسری ۶۷)

۱) ۲۵ ۲) ۱۵۰ ۳) ۳۳۰ ۴) ۴۲۰

۸۹. با حروف کلمهٔ FARHAD، چند رمز عبور ۶ حرفی می‌توان ساخت، به طوری که دو حرف A در کنار هم نباشند؟ (سراسری ۹۶)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۹۰. با حروف کلمهٔ DAMDARAN، چند رمز عبور ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که با D شروع و به D ختم شوند؟ (خارج از کشور ۹۶)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۴۰

**۱.** برای تهیهٔ کتاب لازم است تنها از یک مغازه خرید انجام شود. دانش‌آموزان این کتاب را یا در تهران تهیه می‌کنند که ۴ مغازه و حالت دارد یا در کرج که ۳ حالت وجود دارد.
بنابراین طبق اصل جمع ۷ راه وجود دارد که بتوان این کتاب را تهیه کرد. $4+3=7$

**۲.** برای رفتن از تهران به زنجان ۴ مسیر داریم و از زنجان به همدان ۲ مسیر، بنابر اصل ضرب خواهیم داشت:


راه $4\times2=8$

**۳.** از آن‌جایی که سؤالات کنکور ۴ گزینه‌ای هستند برای پاسخ به هر سؤال ۴ حالت وجود دارد، اما نکتهٔ مهم اینجا است که داوطلبان مجاز هستند به سؤال پاسخ ندهند، بنابراین در واقع برای هر سؤال، ما ۵ حالت داریم:
گزینهٔ «۱» یا گزینهٔ «۲» یا گزینهٔ «۳» یا گزینهٔ «۴» یا بدون پاسخ.
بنابراین سؤال اول ۵ طریق و سؤال دوم ۵ طریق و ...
چون ۲۰ سؤال داریم خواهیم داشت: راه $5\times5\times\cdots\times5=5^{20}$

**۴.** الف) برای رفتن از منزل به نقطهٔ A، ۳ مسیر و برای رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ B، ۲ مسیر و برای رفتن از نقطهٔ B به مدرسه یک مسیر وجود دارد بنابراین طبق اصل ضرب: $6=1\times2\times3=$ تعداد راه‌های رفتن از منزل به مدرسه
برای بازگشت از مدرسه به منزل مشابه حالت رفتن می‌توان گفت:
$6=3\times2\times1=$ تعداد راه‌های برگشت از مدرسه به منزل
برای هر مسیر رفت می‌توان موقع برگشت، هر یک از ۶ مسیر برگشت را انتخاب کرد، بنابراین تعداد مسیرهای مورد نظر برابر ۶×۶ یعنی ۳۶ است.
ب) دانش‌آموز برای پاسخ به هر سؤال می‌تواند ۴ گزینه را انتخاب کند بنابراین داریم:
تعداد راه‌های پاسخ‌گویی به ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای برابر است با:
$$=\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\Rightarrow 4^{10}$$

**۵.** برای به‌دست آوردن n کافی است فاکتوریل‌ها را ساده کنیم.
$$(n+2)!=(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)!$$
$$\Rightarrow \frac{(n+2)!}{(n-1)!}=\frac{(n+2)(n+1)\times n\times(n-1)!}{(n-1)!}$$
مقدار $(n-1)!$ از صورت و مخرج ساده می‌شود.
$$\Rightarrow \frac{(n+2)!}{(n-1)!}=(n+2)(n+1)n=24$$
عدد ۲۴ را باید به صورت حاصل‌ضرب سه عدد متوالی بنویسیم:
$2\times3\times4=24$ سه عدد متوالی
بنابراین:
$n+2=4$
$n+1=3$ $\boxed{n=2}$

**۶.** مخرج کسر را به کمک اتحاد یک جمله مشترک ساده می‌کنیم:
اتحاد جمله مشترک: $(x+a)(x+b)=(x^2+(a+b)x+ab)$
$$\Rightarrow n^2+3n+2=(n+2)(n+1)\Rightarrow \frac{n!}{1}=\frac{720}{(n+2)(n+1)}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}(n+2)\times(n+1)\times n!=720\times1$$
$$\Rightarrow (n+2)!=720=10\times9\times8=6\times5\times4\times3\times2\times1$$
$$\Rightarrow (n+2)!=6!\Rightarrow n+2=6\Rightarrow n=4$$

**۷.** الف) حل این قسمت مشابه قسمت سوم کار در کلاس صفحهٔ ۵ می‌باشد لذا به ۲ روش زیر می‌توان آن را حل نمود:
روش اول: تعداد کل اعداد چهار رقمی را محاسبه کرده و تعداد اعداد فرد را از آن‌ها کم می‌کنیم.
تعداد اعداد فرد $\rightarrow \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underset{\text{۱ یا ۳ یا ۵}}{\underline{3}}\rightarrow 4\times4\times3\times3=144$
تعداد کل ۴ رقمی‌ها $\rightarrow \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\rightarrow 5\times5\times4\times3=300$
$156=144-300=$ تعداد ۴ رقمی‌های فرد − تعداد کل ۴ رقمی‌ها
= تعداد ۴ رقمی‌های زوج

روش دوم: اعداد زوج و ۴ رقمی که با ارقام داده شده می‌توان ساخت یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ یا ۴ که جدا محاسبه کرده و بنابر اصل جمع آن‌ها را جمع می‌کنیم:
تعداد انتخاب‌هایی که رقم یکان به صفر ختم می‌شود $\rightarrow \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}$
$\rightarrow 5\times4\times3\times1=60$
تعداد انتخاب‌هایی که رقم یکان به ۲ یا ۴ ختم می‌شود $\rightarrow \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}$
$\rightarrow 4\times4\times3\times2=96$
لذا تعداد کل حالات مورد نظر برابر ۹۶+۶۰ یعنی ۱۵۶ است.
ب) روش اول: می‌توانیم تعداد کل اعداد ۳ رقمی را از تعداد اعداد ۳ رقمی که رقم ۵ ندارند کم کنیم، باقی‌مانده اعداد ۳ رقمی می‌باشند که یک رقم ۵ دارند.
تعدد کل اعداد ۳ رقمی $\rightarrow \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{4}\rightarrow 5\times5\times4=100$
تعداد اعداد ۳ رقمی که رقم ۵ ندارند $\rightarrow \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\rightarrow 4\times4\times3=48$
لذا تعداد کل حالات مورد نظر برابر است با: $52=48-100$
روش دوم: سه حالت ممکن را در نظر می‌گیریم و با هم جمع می‌کنیم.
حالت اول: ۵ رقم صدگان باشد: $\underline{1}\ \underline{5}\ \underline{4}\rightarrow 1\times5\times4=20$
حالت اول: ۵ رقم دهگان باشد: $\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\rightarrow 4\times1\times4=16$
حالت اول: ۵ رقم یکان باشد: $\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{1}\rightarrow 4\times4\times1=16$
تعداد کل حالت‌های مورد نظر برابر است با: $20+16+16=52$

**۸.** می‌دانیم اعدادی بر ۵ بخش‌پذیر هستند که مضرب ۵ باشند و لذا بنا به سؤال ۴ صفحهٔ ۶ اعدادی مضرب ۵ هستند که به ۵ یا صفر ختم شوند.
تعداد اعداد چهار رقمی که به صفر ختم می‌شوند:
$\rightarrow \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}\rightarrow 5\times4\times3\times1=60$
تعداد اعداد چهار رقمی که به ۵ ختم می‌شوند:
$\rightarrow \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}\rightarrow 4\times4\times3\times1=48$
$108=48+60=$ تعداد اعداد چهار رقمی مضرب ۵

**۹.** برای اولِ ردیف، ۶ حالت و برای آخرِ ردیف، ۵ حالت وجود دارد. سپس ۸ کتاب باقی‌مانده نیز می‌توانند به !۸ در ۸ مکان بین اولِ ردیف و آخرِ ردیف قرار گیرند. $1209600=5\times8!\times6=$ تعداد حالات مورد نظر
تعداد حالات مورد نظر $\rightarrow \underline{6}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{5}$

**۱۰.** الف) با توجه به این‌که کتاب‌ها متمایزند بنابراین با جابه‌جایی هر کدام از کتاب‌ها حالت جدیدی حاصل می‌شود. به عبارت دیگر در این جایگشت‌ها، ترتیبِ قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد. بنابراین داریم:
روش اول: تعداد حالت‌ها $=\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\longrightarrow 6\times5\times4=120$
روش دوم: تعداد حالت‌ها $=P(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{(6-3)!}$
$$=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!}=6\times5\times4=120$$
ب) با اضافه کردن یک کتاب ریاضی و آمار (۳) تعداد کتاب‌ها ۷ کتاب خواهد بود که ۲ تای آن یکسان هستند لذا این دو کتاب یکسان را چون می‌خواهند در کنار هم قرار بگیرند مانند یک کتاب در نظر می‌گیریم، در این صورت مسئله تبدیل به قرار گرفتن ۶ کتاب در یک ردیف می‌شود.
تعداد حالت‌ها $=\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}\longrightarrow 6\times5\times4\times3\times2\times1=6!$

**۱۱.** الف) اعدادی بر سه بخش‌پذیرند که مجموع ارقام آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشند. در این مسئله حاصل جمع ارقام $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ بر ۳ بخش‌پذیر است پس هر ترکیبی با این ۵ رقم که بسازیم بر ۳ بخش‌پذیر است. بنابراین داریم:

$۱۲۰ = ۵! = ۱\times۲\times۳\times۴\times۵ =$ تعداد اعداد ۵ رقمی که به ۳ بخش‌پذیرند

ب) با توجه به ارقام داده شده رقم یکان باید ۲ یا ۴ باشد، پس:

تعداد اعداد ۵ رقمی زوج: $\underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \ \underset{۲\ ۴}{\underline{۲}} \rightarrow ۴\times۳\times۲\times۱\times۲ = ۴۸$

پ) اعدادی بر ۴ بخش‌پذیرند که ۲ رقم سمت راست آنها بر ۴ بخش‌پذیر باشد بنابراین چهار حالت زیر را داریم:

حالت اول: دو رقم آخر ۱۲ باشد:

تعداد حالت اول $\underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underset{۱\ ۲}{\underline{۱}\ \underline{۱}} \longrightarrow ۳\times۲\times۱\times۱\times۱ = ۶$

حالت دوم: دو رقم آخر ۲۴ باشد:

تعداد حالت دوم $\underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underset{۲\ ۴}{\underline{۱}\ \underline{۱}} \longrightarrow ۳\times۲\times۱\times۱\times۱ = ۶$

حالت سوم: دو رقم آخر ۳۲ باشد:

تعداد حالت سوم $\underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underset{۳\ ۲}{\underline{۱}\ \underline{۱}} \longrightarrow ۳\times۲\times۱\times۱\times۱ = ۶$

حالت چهارم: دو رقم آخر ۵۲ باشد:

تعداد حالت چهارم $\underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underset{۵\ ۲}{\underline{۱}\ \underline{۱}} \longrightarrow ۳\times۲\times۱\times۱\times۱ = ۶$

$۲۴ = ۶+۶+۶+۶ =$ تعداد اعداد ۵ رقمی بخش‌پذیر بر ۴

**۱۲.** تعداد بازی‌های رفت برای والیبال: چون هر تیم باید با سایر تیم‌های دیگر بازی کند پس هر تیم ۴ بازی انجام می‌دهد، پس $۲۰ = ۴\times۵$ بازی باید انجام شود ولی چون هر بازی مربوط به دو تیم است پس در بازی‌های رفت در کل $۱۰ = ۲ \div ۲۰$ بازی والیبال انجام می‌شود. پس تعداد بازی‌های رفت و برگشت برای تیم والیبال برابر ۲۰ بازی است.

تعداد بازی‌های رفت برای فوتبال: چون هر تیم باید با سایر تیم‌های دیگر بازی کند پس هر تیم ۳ بازی انجام می‌دهد، پس $۱۲ = ۳\times۴$ بازی باید انجام شود ولی چون هر بازی مربوط به دو تیم است پس در بازی‌های رفت در کل $۶ = ۲ \div ۱۲$ بازی فوتبال انجام می‌شود. پس تعداد بازی‌های رفت و برگشت برای تیم فوتبال برابر ۱۲ بازی است.

در نتیجه: $۳۲ = ۱۲ + ۲۰ =$ تعداد کل بازی‌ها در پایان دوره

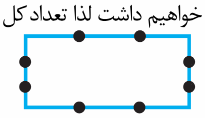
**۱۳.** الف) تعداد راه‌هایی که می‌توان یک گروه ۳ نفری از میان ۲۰ نفر تشکیل داد برابر است با:

$$\binom{۲۰}{۳} = \frac{۲۰\times۱۹\times۱۸}{۳\times۲\times۱} = ۱۱۴۰$$

ب) اگر بخواهیم زن‌ها کنار هم باشند زن‌ها را در یک گروه در نظر می‌گیریم که این گروه به !۵ می‌توانند جابه‌جا شوند. حال ۱۵ نفر مرد و این یک گروه زن به !۱۶ می‌توانند در کنار هم در یک ردیف قرار گیرند در نتیجه:

$۱۶! \times ۵! =$ کل حالات ممکن

**۱۴.** می‌دانیم اگر سه نقطه از هر کدام از این ۸ نقطه را انتخاب کنیم یک مثلث خواهیم داشت لذا تعداد کل مثلث‌هایی که می‌توان تشکیل داد برابر است با:



تعداد مثلث‌هایی که می‌توان تشکیل داد $= \binom{۸}{۳}$

چون هیچ سه نقطه‌ای روی یک ضلع نیستند پس از این هشت نقطه، هر سه نقطه‌ای را انتخاب کنیم باز هم مثلث تشکیل می‌شود.

**۱۵.** طبق تعریف‌ها داریم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{و} \quad C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$P(n,۴) = \frac{n!}{(n-۴)!} \quad \text{و} \quad C(n,۲) = \frac{n!}{(n-۲)!۲!}$$

$$\frac{n!}{(n-۴)!} = ۱۲\times\frac{n!}{(n-۲)!۲!} \Rightarrow n!\times(n-۲)!\times۲! = n!\times۱۲\times(n-۴)!$$

$$\Rightarrow (n-۲)(n-۳)(n-۴)!\times۲ = (n-۴)!\times۱۲ \Rightarrow (n-۲)(n-۳)$$

$$= \frac{۱۲}{۲} = ۶ = ۳\times۲ \Rightarrow n-۲ = ۳\ ,\ n-۳ = ۲ \Rightarrow n = ۵$$

**۱۶.** الف) چون ترتیب خارج کردن مهم نیست لذا از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$\binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{۳!\times۶!} = \frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۳!\times۶!} = ۸۴$$

ب) روش اول: مشابه حالت قبل ترتیب خارج کردن مهم نیست، لذا از ترکیب استفاده می‌کنیم. ۳ مهره انتخابی می‌تواند هر ۳ قرمز یا هر سه مهره آبی یا ۲ مهره قرمز و یک مهره آبی یا ۱ مهره قرمز و ۲ مهره آبی باشد، بنابراین داریم:

تعداد حالات انتخاب ۳ مهرهٔ قرمز از بین ۴ مهرهٔ قرمز $= \binom{۴}{۳}$

تعداد حالات انتخاب ۳ مهرهٔ آبی از ۵ مهرهٔ آبی $= \binom{۵}{۳}$

تعداد حالات انتخاب ۲ مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ آبی $= \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}$

تعداد حالات انتخاب یک مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی $= \binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}$

لذا تعداد حالات مورد نظر بنا به اصل جمع برابر است با:

$$\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱} = ۴+\frac{۵!}{۳!\times۲!}+\frac{۴!}{۲!\times۲!}\times۵$$

$$+\frac{۵!}{۲!\times۳!}\times۴ = ۴+۱۰+۳۰+۴۰ = ۸۴$$

روش دوم: چون ترتیب و نوع انتخاب مهم نیست پس همان ترکیب است یعنی سؤال «الف».

**۱۷.** الف) قسمت «الف» همان مثال موجود در صفحهٔ ۲ کتاب درسی است که با ادبیات متفاوتی بیان شده است. لذا طبق اصل جمع حل آن به صورت زیر است:

$۱۲ = ۳ + ۵ + ۴ =$ تعداد انتخاب‌ها

ب) طبق اصل ضرب انتخاب ۲ نمونهٔ متفاوت از خودکار و مداد به $۴\times۵$ طریق و انتخاب ۲ نمونهٔ متفاوت از مداد و روان‌نویس به $۳\times۵$ طریق و انتخاب ۲ نمونهٔ متفاوت از خودکار و روان‌نویس به $۴\times۳$ طریق امکان‌پذیر است. بنابراین تعداد انتخاب‌های ۲ نمونهٔ متفاوت بنا به اصل جمع به صورت زیر خواهد شد:

تعداد انتخاب‌های ۲ نمونهٔ متفاوت $= (۴\times۵)+(۵\times۳)+(۴\times۳)$

$= ۲۰+۱۵+۱۲ = ۴۷$

**۱۸.** در مسیر رفت ۴ راه برای رسیدن به مشهد و ۳ راه برای رسیدن به سیستان دارد و طبق اصل ضرب ۱۲ راه برای رسیدن به سیستان دارد. راه $۱۲ = ۳\times۴$

حال اگر بخواهد برگردد و از مسیرهای قبلی نرود، در هر مسیر بین دو شهر یکی از راه‌ها (آن راهی که زمان آمدن از آن گذشته) را باید حذف کرد پس برای برگشتن $۶ = ۳\times۲$ راه وجود دارد.

حال برای پاسخ به سؤال باید هر دو کار را انجام دهد، بنابراین طبق اصل ضرب لازم است که راه‌های رفت و برگشت را در هم ضرب کنیم. $۷۲ = ۶\times۱۲$

**۱۹.** الف) برای مسافرت کردن از شهر D به شهر A می‌توان یکی از ۲ مسیر $A \rightarrow D$ یا $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D$ را انتخاب کرد. لذا بنا به اصل جمع داریم:

تعداد راه‌های مسافرت از شهر D به شهر A =

تعداد راه‌های مسافرت مستقیم از D به A +

تعداد راه‌های مسافرت از D به A از طریق شهر E و B =

$۲+(۱\times۴\times۳) = ۱۴$

ب) برای مسافرت رفت و برگشت تعداد حالت‌های رفت و برگشت برابرند و با اصل ضرب به صورت زیر به دست می‌آیند.

تعداد راه‌های مسافرت رفت $= ۳\times۲\times۱ = ۶$

تعداد راه‌های مسافرت برگشت $= ۱\times۲\times۳ = ۶$

برای هر مسیر رفت می‌توان موقع برگشت، هر یک از ۶ مسیر برگشت را انتخاب کرد، بنابراین تعداد مسیرهای مورد نظر برابر $۶\times۶$ یعنی ۳۶ است.

**۲۰.** چون تصمیم‌گیری شامل دو مرحله است پس طبق اصل ضرب تعداد راه‌های ممکن مراحل تصمیم‌گیری را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(۷^۳-۷)\times(۵^۳-۵) = ۷(۷^۲-۱)\times۵(۵^۲-۱) = ۷\times۴۸\times۵\times۲۴$$

$$= ۷\times۶\times۸\times۵\times۲\times۳\times۴$$

$$= ۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷\times۸ = ۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷\times۸ = ۸!$$

**۲۱.** برای به‌دست آوردن n لازم است کسر دارای فاکتوریل را ساده کنیم:

$$(n+۳)! = (n+۳)\times(n+۲)\times(n+۱)\times n\times(n-۱)\times(n-۲)!$$

$$\frac{(n^۳-n)(n-۲)!}{(n+۳)!}$$

$$= \frac{\cancel{(n-۲)!}\times(n^۳-n)}{(n+۳)\times(n+۲)\times(n+۱)\times n\times(n-۱)\times\cancel{(n-۲)!}}$$

$$= \frac{(n^۳-n)}{(n+۳)\times(n+۲)\times(n+۱)\times n\times(n-۱)}$$

$$= \frac{n(n^۲-۱)}{(n+۳)\times(n+۲)\times(n+۱)\times n\times(n-۱)}$$

طبق اتحاد مزدوج $n^۲-۱=(n-۱)(n+۱)$

پس:

$$\frac{(n^۳-n)(n-۲)!}{(n+۳)!} = \frac{n\times(n+۱)\times(n-۱)}{(n+۳)\times(n+۲)\times(n+۱)\times n\times(n-۱)} = \frac{۱}{(n+۳)(n+۲)}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{(n+۳)(n+۲)} = \frac{۱}{۵۶} \Rightarrow ۵۶=(n+۳)(n+۲)$$

$(n+۲)$ و $(n+۳)$ دو عدد متوالی هستند و دو عدد متوالی که حاصل‌ضرب آنها ۵۶ شود، ۷ و ۸ است.

$$\begin{matrix} n+۳=۸ \\ n+۲=۷ \end{matrix} \Rightarrow \boxed{n=۵}$$

**۲۲.** الف) اعداد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۸۶۰۰۰ که با ارقام داده شده می‌توان ساخت یا رقم دهگان هزار (اولین رقم از سمت چپ) آنها ۸ است یا ۹، که آنها را جدا محاسبه کرده و بنابر اصل جمع با هم جمع می‌کنیم. علت محاسبهٔ جداگانهٔ ما این است که اگر ۸ رقم دهگان هزار باشد عدد بعدی باید از ۶ بزرگ‌تر یا مساوی با ۶ باشد یعنی $\underline{۸}\_\_\_\_ > ۸۶۰۰۰$ .

تعداد انتخاب‌هایی که رقم دهگان هزار ۸ باشد:

$$\underset{۸}{\underline{۱}}\ \underset{۶\text{ یا }۹}{\underline{۲}}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳} \to ۱\times۲\times۵\times۴\times۳=۱۲۰$$

تعداد انتخاب‌هایی که رقم دهگان هزار ۹ باشد:

$$\underset{۹}{\underline{۱}}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳} \to ۱\times۶\times۵\times۴\times۳=۳۶۰$$

لذا تعداد کل حالات مورد نظر برابر است با: $۱۲۰+۳۶۰=۴۸۰$

ب) می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعهٔ ۷ عضوی برابر $\binom{۷}{۳}$ است، حال چون می‌خواهیم زیرمجموعه ۳ عضوی شامل رقم ۸ باشد لذا دو رقم بعد را باید از ارقام مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,۴,۶,۹\}$ انتخاب کرد که تعداد این انتخاب‌ها برابر $\binom{۶}{۲}$ است:

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۲!\times(۶-۲)!}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

پ) چون می‌خواهیم زیرمجموعه ۳ عضوی شامل رقم ۸ نباشد لذا باید از ارقام مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,۴,۶,۹\}$ که شامل رقم ۸ نیست ۳ رقم انتخاب کرد، که تعداد این انتخاب‌ها برابر $\binom{۶}{۳}$ است:

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\times(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!\times۳!}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲}=۲۰$$

**۲۳.** الف) روش اول:

تعداد کلمات ۵ حرفی $\to \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴} \to ۸\times۷\times۶\times۵\times۴=۶۷۲۰$

روش دوم: انتخاب ۵ حرف از میان ۸ حرف که ترتیب انتخاب اهمیت دارد.

تعداد کلمات ۵ حرفی $= P(۸,۵) = \frac{۸!}{(۸-۵)!}$

$$= \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!} = ۶۷۲۰$$

ب) چون حرف سوم کلمه داده شده است لذا تعداد مورد نظر برابر است با:

تعداد کلمات ۳ حرفی $\to \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underset{e}{\underline{۱}} \to ۷\times۶\times۱=۴۲$

پ) چون حرف اول و آخر کلمه داده شده است لذا تعداد مورد نظر برابر است با:

تعداد کلمات ۸ حرفی $\to \underset{r}{\underline{۱}}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underset{o}{\underline{۱}} \to ۱\times۶!\times۱=۷۲۰$

**۲۴.** قرار است ۵ مرد و ۵ زن در یک صف بایستند با این شرط که هیچ دو مردی کنار هم نباشند. چون تعداد مردها و زن‌ها با هم برابرند، پس حتماً لزومی ندارد که مردها و زن‌ها یک در میان باشند، مثلاً حالت زیر قابل قبول است:

«ز» نشان دهندهٔ زن‌ها و «م» نشان دهندهٔ مردها می‌باشد.

م، ز، م، ز، ز، م، ز، م، ز، م

پس زن‌ها را ثابت فرض می‌کنیم و مردها را بین آنها می‌چینیم.

_ ز _ ز _ ز _ ز _ ز _

پس ۶ جایگاه داریم که می‌خواهیم ۵ مرد را در آن جایگاه‌ها قرار دهیم. پس ابتدا انتخاب ۵ جایگاه از ۶ جایگاه را داریم یعنی $\binom{۶}{۵}$. همچنین چون آدم‌ها با هم فرق دارند !۵ جایگشت ایستادن مردها می‌شود.

می‌دانیم که زن‌ها هم متفاوت هستند بنابراین جایگشت ایستادن زن‌ها هم همانند مردها !۵ خواهد شد. طبق اصل ضرب این اعداد درهم ضرب می‌شوند یعنی داریم:

$$\binom{۶}{۵}\times۵!\times۵!=۶\times۵!\times۵!=۶!\times۵!$$

**۲۵.** الف) تعداد طریق‌های قرار گرفتن ۵ دانش‌آموز در یک ردیف برابر جایگشت آن‌هاست.

تعداد طریق‌های ممکن $\to \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱} \to ۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵!$

ب) تعداد طریقی که می‌توان ۳ نفر از این ۵ نفر را در یک ردیف قرار داد:

روش اول: برابر جایگشت این ۵ نفر در سه مکان است.

$$\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳} \longrightarrow ۵\times۴\times۳=۶۰$$

روش دوم: چون ترتیب قرار گرفتن دانش‌آموزان حالت جدیدی حاصل می‌کند بنابراین ترتیب قرار گرفتن مهم است و مسئله را می‌توان به صورت زیر حل کرد:

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳}{۱}=۶۰$$

پ) در این حالت هدف تشکیل گروه‌های سه‌نفری است بنابراین ترتیب قرار گرفتن مهم نیست، در نتیجه داریم:

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!(۵-۳)!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲!}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

**۲۶.** الف) برای رسم پاره خط نیاز به انتخاب ۲ نقطه داریم بنابراین:

تعداد پاره‌خط‌ها با وجود ۶ نقطه $=\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۲!(۶-۲)!}=\frac{۶!}{۲!۴!}=۱۵$

ب) اگر سه نقطه از هر کدام از این ۶ نقطه را انتخاب کنیم یک مثلث خواهیم داشت لذا تعداد کل مثلث‌هایی که می‌توان ساخت به صورت زیر است:

تعداد مثلث‌ها با وجود ۶ نقطه $=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!۳!}=۲۰$

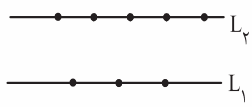
پ) روش اول: می‌دانیم بردار پاره‌خطی جهت‌دار است بنابراین در این حالت تعداد بردارها، ۲ برابر تعداد پاره‌خط‌ها است یعنی:

تعداد بردارها با وجود ۶ نقطه $=۲\times\binom{۶}{۲}=۲\times۱۵=۳۰$

روش دوم: چون در بردار جهت مهم است بنابراین ترتیب انتخاب نقاط مهم است.

تعداد بردارها با وجود ۶ نقطه $=P(۶,۲)=\frac{۶!}{(۶-۲)!}=۳۰$

**۲۷.** می‌دانیم با هر سه نقطهٔ غیر واقع بر یک خط می‌توان یک مثلث ساخت، لذا باید ۲ نقطه از خط $L_1$ و یک نقطه از خط $L_2$ انتخاب کرد یا یک نقطه از خط $L_1$ و ۲ نقطه از خط $L_2$ انتخاب کرد، که تعداد این انتخاب‌ها بنا به اصل ضرب و اصل جمع به صورت مقابل خواهد شد:




تعداد مثلث‌هایی که می‌توان ساخت:

$$\binom{3}{2}\binom{5}{1}+\binom{3}{1}\binom{5}{2}=(3\times5)+(3\times10)=45$$

**۲۸.** الف) هدف انتخاب ۳ دانش‌آموز از بین ۱۱ دانش‌آموز است به‌طوری‌که حداقل ۲ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم باشند، پس تعداد حالات برابر است با:

۱) ۲ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۱ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم: $\binom{6}{2}\binom{5}{1}$

۲) ۳ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و صفر دانش‌آموز پایهٔ یازدهم: $\binom{6}{3}\binom{5}{0}$

لذا بنابه اصل جمع کل حالات مورد نظر برابر است با: $\binom{6}{2}\binom{5}{1}+\binom{6}{3}\binom{5}{0}$

$$=\frac{6!}{2!(6-2)!}\times\frac{5!}{1!(5-1)!}+\frac{6!}{3!(6-3)!}\times\frac{5!}{0!(5-0)!}$$

$$=15\times5+20\times1=75+20=95$$

ب) انتخاب ۳ دانش‌آموز از بین ۱۱ دانش‌آموز به طوری‌که حداکثر ۲ دانش‌آموز از پایهٔ دوازدهم باشند، پس تعداد حالات برابر است با:

۱) صفر دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۳ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم: $\binom{6}{0}\binom{5}{3}$

۲) یک دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم: $\binom{6}{1}\binom{5}{2}$

۳) دو دانش‌آموز پایه دوازدهم و یک دانش‌آموز پایهٔ یازدهم: $\binom{6}{2}\binom{5}{1}$

لذا بنا به اصل جمع تعداد کل حالات مورد نظر برابر است با:

$$\binom{6}{0}\binom{5}{3}+\binom{6}{1}\binom{5}{2}+\binom{6}{2}\binom{5}{1}$$

$$=\frac{6!}{0!(6-0)!}\times\frac{5!}{3!(5-3)!}+\frac{6!}{1!(6-1)!}\times\frac{5!}{2!(5-2)!}+\frac{6!}{2!(6-2)!}\times\frac{5!}{1!(5-1)!}$$

$$=1\times10+6\times10+15\times5=10+60+75=145$$

**۲۹.** برای این‌که زیرمجموعه‌های سه عضوی شامل a را داشته باشیم می‌توانیم a را از مجموعه جدا کنیم و دو عضو را از بین $\{b,c,d,e,f\}$ انتخاب کنیم و سپس a را به مجموعه اضافه کنیم. پس به عبارتی انتخاب ۲ از ۵ داریم.

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!\times3!}=\frac{5\times4\times3!}{2\times1\times3!}=10$$

پس ۱۰ زیر مجموعه می‌توانیم از این مجموعه داشته باشیم که سه عضوی و شامل عضو a باشند.

**۳۰.** برای به دست آوردن مقدار $\binom{n}{3}$ باید مقدار n را بدانیم.

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: $\binom{n}{2}$

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: $\binom{n}{4}$

از فرض مسئله داریم: $\binom{n}{2}=\binom{n}{4}\Rightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n!}{4!(n-4)!}$

$$\Rightarrow4!(n-4)!=2!(n-2)!$$

$$\Rightarrow4\times3\times2!\times(n-4)!=2!\times(n-2)(n-3)(n-4)!$$

$$\Rightarrow12=(n-2)(n-3)$$

دو عدد متوالی که در هم ضرب شوند و عدد ۱۲ شود ۳ و ۴ است، پس:

$$\begin{matrix}n-2=4\\n-3=3\end{matrix}\Rightarrow n=6$$

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!(6-3)!}=\frac{6!}{3!(3)!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times3\times2\times1}=20$$

**۳۱.** طبق تعاریف می‌دانیم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\qquad C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$P(n,4)=\frac{n!}{(n-4)!}\qquad C(n-1,4)=\frac{(n-1)!}{(n-1-4)!4!}$$

مقدار صورت و مخرج را جداگانه به دست می‌آوریم و با هم ساده می‌کنیم.

$$\Rightarrow\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)}=\frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-5)!4!}}=26\Rightarrow\frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-5)!4!}}$$

$$=\frac{n!(n-5)!4!}{(n-4)!(n-1)!}=\frac{n(n-1)!(n-5)!4!}{(n-4)(n-5)!(n-1)!}=\frac{4\times3\times2\times n}{n-4}=26$$

$$\Rightarrow24n=26\times(n-4)\Rightarrow12n=13(n-4)=13n-52\Rightarrow52=n$$

**۳۲.** الف) برای تشکیل یک گروه دو نفری از پایه‌های مختلف باید یک نفر از پایهٔ دهم و یک نفر از پایهٔ یازدهم یا یک نفر از پایهٔ دهم و یک نفر از پایهٔ دوازدهم یا یک نفر از پایهٔ یازدهم و یک نفر از پایهٔ دوازدهم انتخاب شوند. بنابراین تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\text{تعداد حالات ممکن}=\binom{3}{1}\binom{5}{1}+\binom{3}{1}\binom{4}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{1}$$

$$=\frac{3!}{1!(3-1)!}\times\frac{5!}{1!(5-4)!}+\frac{3!}{1!(3-1)!}\times\frac{4!}{1!(4-1)!}$$

$$+\frac{5!}{1!(5-1)!}\times\frac{4!}{1!(4-1)!}$$

$$=3\times5+3\times4+5\times4=15+12+20=47$$

ب) انتخاب حداقل یک نفر از اعضای گروه از پایهٔ دوازدهم یعنی «یک نفر از پایهٔ دوازدهم و یک نفر از پایهٔ دهم» یا «یک نفر از پایهٔ دوازدهم و یک نفر از پایهٔ یازدهم» یا «هر دو نفر از پایهٔ دوازدهم» باشد. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد کل راه‌های ممکن}=\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}+\binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{5}{0}$$

$$=4\times3+4\times5+6=12+20+6=38$$

**۳۳.** گزینهٔ ۱ یادآوری: حاصل‌ضرب n عدد متوالی از ۱ تا n را به صورت n! نوشته و داریم: $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)\,(n)\,\overbrace{(n-1)(n-2)\times\cdots\times2\times1}^{(n-1)!}}{(n-1)!}$$

$$=\frac{(n+1)\,(n)\,(n-1)!}{(n-1)!}=(n+1)n$$

**۳۴.** گزینهٔ ۲ بدترین کار این است که اعداد را به توان برسانید. باید کاری کنید که حالت تفریق در داخل پرانتزها به حالت ضرب تبدیل شود. فاکتورگیری کار مناسبی است:

$$90(5^3-5)\times(7^3-7)=10\times9\times5(5^2-1)\times7(7^2-1)$$

$$=10\times9\times5(\overset{8\times3}{24})\times7(\overset{8\times6}{48})=10\times9\times5\times8\times3\times7\times\underbrace{8}_{4\times2}\times6$$

$$=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2=10!$$

**۳۵.** گزینهٔ ۲ باید سمت راست معادله را طوری باز کنیم که به حالت فاکتوریل برسیم.

$$n!=120\times42\Rightarrow n!=\underbrace{1\times2\times3\times4\times5}_{120}\times\underbrace{6\times7}_{42}=7!\Rightarrow n=7$$

**۳۶. گزینهٔ ۳** باید صورت و مخرج را باز کنیم تا بتوانیم با ساده کردن، n را به دست آوریم.

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{(n-1)!}{(n+1)(n)(n-1)!}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow n(n+1)=6\Rightarrow n^2+n-6=0$$

$$\Rightarrow (n-2)(n+3)=0\Rightarrow n=2,n=-3$$

n نمی‌تواند منفی باشد پس پاسخ عدد ۲ است.

**۳۷. گزینهٔ ۴** می‌خواهیم اعداد، «سه رقمی» باشند. سه خانه در یک ردیف در نظر می‌گیریم:

□□□
۳ ۴ ۴

در اولین خانه از سمت چپ عدد صفر نمی‌تواند قرار بگیرد چون عدد دو رقمی می‌شود پس یکی از اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ می‌توانند قرار بگیرند. یعنی سه حالت ممکن است. با توجه به این‌که تکرار ارقام مجاز است، در هر کدام از خانه‌های بعدی، هر یک از ارقام ۰ تا ۳ می‌توانند قرار بگیرند یعنی هر خانه با ۴ حالت ممکن است پر شود پس طبق اصل ضرب، تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با: $3\times4\times4=48$

**۳۸. گزینهٔ ۴** چهار خانهٔ متوالی در نظر می‌گیریم:

□□□□
۵ ۶ ۶ ۶

اولین خانهٔ سمت چپ با همهٔ اعداد به غیر از صفر می‌تواند پر شود (یعنی ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵) پس ۵ حالت دارد. در تمام خانه‌های بعدی به علت مجاز بودن تکرار، می‌توان یکی از شش رقم را قرار داد پس هر کدام از آنها ۶ حالت دارند پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با: $5\times6^3$

**۳۹. گزینهٔ ۴** تعداد ارقام زوج غیر صفر، ۴ تاست و چون در صورت سؤال به تکراری بودن و نبودن اشاره‌ای نشده است یادتان باشد که در این صورت با تکرار در نظر بگیرید. بنابراین در هر خانه ۴ انتخاب داریم، پس:

□□□□□ $\rightarrow 4\times4\times4\times4\times4=4^5$

$$=(2^2)^5=2^{10}=1024$$

**۴۰. گزینهٔ ۱** در سمت راست، می‌توان یکی از چهار حرف را قرار داد پس چهار حالت دارد.

□□□
۹ ۹ ۴

در سمت چپ می‌خواهیم عدد دو رقمی داشته باشیم که صفر نداشته باشد. از صفر تا ۹، ۱۰ عدد داریم. چون نباید صفر باشد پس ۹ عدد داریم و چون نگفته است بدون تکرار باشد، با تکرار در نظر می‌گیریم و می‌شود در هر کدام، یکی از ۹ عدد را قرار داد: $4\times9\times9=324$.

**۴۱. گزینهٔ ۲** جاهای خالی را با مربع‌ها نشان می‌دهیم:

□□□□□ پنج جای خالی داریم که قرار است اعداد در آن قرار بگیرند. چون گفته است که با رقم فرد شروع شود و به زوج ختم شود، پس ابتدا در مربع سمت چپ تعداد ۵ عدد را می‌توانیم بگذاریم؛ چون پنج عدد فرد داریم و چون گفته است که به زوج ختم می‌شود، در مربع آخر تعداد ۴ عدد را می‌توانیم بگذاریم؛ چون چهار عدد زوج داریم(سؤال گفته غیر صفر) و چون می‌توان ارقام تکراری گذاشت پس در مربع دوم و سوم و چهارم می‌توانیم تعداد ۹ عدد را بگذاریم پس:

□□□□□ $\rightarrow 5\times9\times9\times9\times4=14580$

**۴۲. گزینهٔ ۴** چون در صورت سؤال گفته است که ارقام متشکل از اعداد «فرد» باید باشد، پس از اعداد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ استفاده می‌کنیم:

| ۵ حالت | ۵ حالت | ۱ حالت |
|---|---|---|
| ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ | ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ | ۵ |

برای جایگاه یکان فقط می‌توانیم عدد ۵ را قرار دهیم. برای بقیهٔ خانه‌ها شرط خاصی وجود ندارد. بنابراین: $5\times5\times1=25$

**۴۳. گزینهٔ ۱** می‌خواهیم اعداد، «سه رقمی» باشند. سه خانهٔ متوالی را در نظر می‌گیریم:

□□□
۳ ۳ ۲

در اولین خانهٔ سمت چپ، همهٔ ارقام به جز صفر می‌توانند قرار بگیرند (۱ یا ۲ یا ۳) پس سه حالت موجود است.
چون در صورت سؤال گفته است که «بدون تکرار» باشند پس در خانهٔ بعدی، فقط عددی که در خانهٔ اول قرار گرفته است نمی‌تواند قرار بگیرد و چون در این خانه (خانهٔ دوم) عدد صفر هم می‌تواند قرار بگیرد، پس سه حالت دارد. در خانهٔ سوم، یکی از دو عدد باقی‌مانده می‌تواند قرار بگیرد پس دو حالت دارد. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با: $3\times3\times2=18$.

**۴۴. گزینهٔ ۱** می‌خواهیم، اعداد «سه رقمی» باشند پس سه خانهٔ متوالی در نظر می‌گیریم:

□□ ۲
۳ ۲ ۱

چون شرط زوج بودن خواسته شده است پس در ابتدا باید اولین خانهٔ سمت راست تعیین حالت شود. در این خانه فقط عدد ۲ است که می‌تواند عدد سه رقمی را زوج کند، پس فقط یک حالت وجود دارد. اکنون طبق معمول باید اولین خانهٔ سمت چپ تعیین حالت شود. در این خانه از تمام اعداد به غیر از ۲ که در خانهٔ سمت راست استفاده شده است می‌توان استفاده کرد (۱ یا ۳ یا ۵) چرا از عدد ۲ نمی‌توان استفاده کرد؟ چون صورت سؤال گفته است که «بدون تکرار» باشد. پس سه حالت دارد. در خانهٔ وسط هم فقط یکی از دو عدد باقی‌مانده می‌توانند جایگزین شوند یعنی دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم: $3\times2\times1=6$.

نکتهٔ مهم مهم: توجه کنید که، همیشه تعیین حالت را از سمت چپ شروع می‌کنیم. مگر این‌که مانند این مسأله در مورد ارقام دیگر شرط گذاشته شده باشد که پس از دخیل کردن شرط، تعیین حالت را از سمت چپ ادامه می‌دهیم.

**۴۵. گزینهٔ ۲** می‌خواهیم اعداد، «سه رقمی» باشند پس سه خانهٔ متوالی را در نظر می‌گیریم:

□□□
۳ ۵ ۴

عدد بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد به این معنی است که باید سراغ رقم سمت چپ برویم: در خانهٔ سمت چپ می‌توان یکی از اعداد ۳ یا ۴ یا ۵ را قرار داد (چون عدد باید بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد) پس سه حالت دارد. چون «بدون تکرار» باید باشد در خانهٔ بعدی یکی از پنج رقم باقی‌مانده قرار می‌گیرد. پس پنج حالت دارد و نیز در خانهٔ بعدی یکی از چهار رقم باقی‌مانده قرار می‌گیرد. پس چهار حالت دارد بنابراین، $60=4\times5\times3=$ تعداد کل حالت‌ها.

**۴۶. گزینهٔ ۳** باید از ارقام ۰ تا ۹ استفاده کنیم. سمت چپ از ۱۰ عدد که داریم به جز صفر بقیه را می‌توانیم قرار دهیم (چون عدد صفر اگر سمت چپ قرار گیرد، عملاً عدد سه رقمی به دو رقمی تبدیل می‌شود). در وسط، تمام اعداد را می‌توانیم قرار دهیم ولی چون شرط مسئله این است که «متمایز» باشند پس بدون تکرار باید باشد، پس ۹ عدد از ۱۰ عدد را می‌توانیم قرار بدهیم. در سمت راست نیز، از ۱۰ عدد چون ۲ عدد را قبلاً جای گذاری کرده‌ایم پس ۸ عدد می‌توان جای‌گذاری کرد.

$$\underset{\text{همهٔ اعداد به جز صفر}}{9}\times\underset{\text{همه به جز رقم صدگان}}{9}\times\underset{\text{همه به جز رقم دهگان و صدگان}}{8}$$

$$\Rightarrow 9\times9\times8=648$$

**۴۷. گزینهٔ ۳** چهار خانه متوالی در نظر می‌گیریم: □□□□

۳ ۳ ۲ ۱

در اولین خانه از سمت چپ، همهٔ ارقام به غیر از صفر را می‌توان قرار داد (یعنی ۱ یا ۴ یا ۵) پس این خانه به ۳ طریق پر می‌شود و ۳ حالت دارد. خانهٔ بعدی با یکی از سه عدد باقی‌مانده می‌تواند پر شود پس ۳ حالت دارد. خانهٔ بعد از آن با یکی از دو عدد باقی‌مانده پر می‌شود پس ۲ حالت دارد و بالاخره آخرین خانه یعنی خانهٔ سمت راست با یک عدد باقی‌مانده پر می‌شود و ۱ حالت دارد پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با $3\times3\times2\times1=18$.

**۴۸. گزینهٔ ۴** چون می‌خواهیم یک عدد سه رقمی بسازیم، سه خانه در نظر می‌گیریم:

$\square\ \square\ \square$

$۱\quad ۴\quad ۳$

چون عدد مورد نظر از ۴۰۰ کوچک‌تر است و صفر هم نمی‌تواند اولین رقم سمت چپ یک عدد باشد، پس در خانهٔ مربوط به صدگان این عدد، فقط رقم ۲ می‌تواند قرار گیرد و برای این خانه یک انتخاب خواهیم داشت. در خانهٔ دوم هر کدام از اعداد «۰ و ۴ و ۷ و ۹» می‌توانند قرار بگیرند پس ۴ انتخاب خواهیم داشت و بالاخره در خانهٔ سوم ۳ انتخاب داریم. پس تعداد کل، عبارت است از: $۱\times۴\times۳=۱۲$.

**۴۹. گزینهٔ ۱** اگر کتاب‌های علمی را با حرف «ع» و کتاب‌های ادبی را با حرف «الف» نشان دهیم، ترتیب قرار دادن این کتاب‌ها در یک ردیف به صورت مقابل خواهد بود: (الف، ع، الف، ع، الف، ع، الف) حال چون این کتاب‌ها با هم متفاوتند، در بین خود نیز جابه‌جایی خواهند داشت. از سمت چپ شروع به چیدن کتب و محاسبهٔ تعداد حالات می‌کنیم. در اولین خانه از چپ باید یک کتاب ادبی قرار بگیرد که به ۴ حالت امکان‌پذیر است. در خانهٔ بعدی باید کتاب علمی قرار دهیم که به ۳ حالت امکان‌پذیر است. در خانهٔ سوم باید یک کتاب ادبی به غیر از کتابی که در خانهٔ اول قرار داده‌ایم، قرار بگیرد پس ۳=۱-۴ حالت ممکن خواهد بود و به همین ترتیب، در خانهٔ چهارم، ۲ حالت برای کتاب علمی وجود دارد و ... پس تعداد کل حالت‌ها برای تمام کتب عبارت است از: $۴\times۳\times۳\times۲\times۲\times۱\times۱=۱۴۴$.

**۵۰. گزینهٔ ۱** سه کتاب ریاضی را یک بسته و دو کتاب اقتصاد را نیز یک بسته فرض می‌کنیم. این دو بسته به !۲ صورت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. اما سه کتاب ریاضی خود به !۳ صورت و کتاب‌های اقتصاد به !۲ صورت در داخل بسته‌ها جابه‌جا می‌شوند پس در مجموع کل صورت‌ها عبارت‌اند از: $۲!\times۳!\times۲!=۲\times۶\times۲=۲۴$

**۵۱. گزینهٔ ۳** ابتدا باید از شرط مسئله یعنی «بخش پذیر بودن بر عدد ۵» شروع کنیم. چون سمت راست عدد پنج رقمی فقط باید ۵ باشد پس یک حالت بیش‌تر نیست.. پس چهار جای خالی باقی می‌ماند، در نتیجه اعداد را با چهار رقم فرض می‌کنیم و سؤال را حل می‌کنیم: $۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

**۵۲. گزینهٔ ۱** شرط مسئله را باید لحاظ کنیم. قرار است حروف یکسان کنار هم قرار گیرند. پس **حروف یکسان را یکی به حساب می‌آوریم.** چون عملاً جایگشت‌های آنها تأثیر ندارد. یعنی ۳ تا A را یکی و ۲ تا D را هم یکی به حساب می‌آوریم. بدین ترتیب ۵ حرف (D و A و M و R و N) با !۵ جایگشت داریم. $۵!=۱۲۰$

**۵۳. گزینهٔ ۳** وقتی حرف «تکراری» داریم باید کسری بنویسیم که به تعداد تکرار آن حرف در مخرج !n قرار دهیم. کلمهٔ «مسلمانان» دارای ۸ حرف است پس !۸ جایگشت داریم، فقط باید توجه گردد که در این ۸ حرف، حرف «م»، «ن» و «الف» هر کدام دوبار تکرار شده اند. پس به ازای هر کدام !۲ در مخرج خواهیم داشت. $\dfrac{۸!}{۲!۲!۲!}=\dfrac{۸\times۷!}{۸}=۷!$

**۵۴. گزینهٔ ۴** حرف‌های تکراری «نازنین» را به دست می‌آوریم. حرف «ن» سه بار تکرار شده است که در مخرج می‌آوریم و کل حروف با تکرار و بی‌تکرار «۶» حرف است. تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ نازنین برابر است با: $\dfrac{۶!}{۳!}$

در گزینهٔ «۴» تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ شیرینی هم برابر است با: $\dfrac{۶!}{۳!}$

سایر گزینه‌ها عبارتند از: $۱)\ \dfrac{۶!}{۲!}\quad ۲)\ \dfrac{۶!}{۲!}\quad ۳)\ \dfrac{۶!}{۲!}$

**۵۵. گزینهٔ ۲** «کیخسرو» حرف تکراری ندارد پس تعداد حرف‌ها را می‌شماریم و همان‌قدر حالت برای آن در نظر می‌گیریم: !۶=کیخسرو.

بقیهٔ کلمات را نیز بر اساس همان قاعده به دست می‌آوریم فقط حواستان به حروف تکراری باشد:

$\dfrac{۶!}{۲!}=$ فرامرز (۲ بار تکرار حرف «ر»)

$\dfrac{۶!}{۲!}=$ شهریار (۲ بار تکرار حرف «ر»)

$\dfrac{۶!}{۲!}=$ مازیار (۲ بار تکرار حرف «الف»)

**۵۶. گزینهٔ ۲** در این جا عامل تکراری داریم پس باید در مخرج، آن را لحاظ کنیم. عدد ۵ سه بار و عدد ۲ دو بار تکرار شده‌اند:

$$\frac{۷!}{۳!۲!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲!}=۴۲۰$$

**۵۷. گزینهٔ ۴** وقتی صورت سؤال می‌گوید حرف N را در وسط قرار می‌دهیم پس عملاً این حرف در ایجاد حالت جدید نقش ایفا نمی‌کند و می‌توان گفت فقط ۶ حرف باقی می‌ماند EAREST که جایگشت آنها را حساب می‌کنیم: $\dfrac{۶!}{۲!}=\dfrac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۳۶۰$

(توجه کنید که حرف E دوبار تکرار شده است)

**۵۸. گزینهٔ ۳** اگر حرف R را در وسط قرار دهیم برای ۶ جایگاه دیگر ۶ حرف داریم:

__ __ __ R __ __ __

DADASS که حروف D , A , S هر کدام ۲ بار تکرار شده است باید جایگشت این ۶ حرف را حساب کنیم که حروف تکراری نیز دارد:

$$\frac{۶!}{۲!۲!۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲\times۲\times۲}=۶\times۵\times۳=۹۰$$

**۵۹. گزینهٔ ۴** دو حالت در نظر می‌گیریم: حالتی که کلمات با S شروع شده باشند یعنی S $\square$ S $\square$ S $\square$ و حالتی که کلمات با S شروع نشده باشد یعنی $\square$ S $\square$ S $\square$ S که هر کدام از این حالات ۶ = ۱×۲×۳ حالت دارند. پس کل حالات برابر ۱۲ = ۶+۶ است.

**۶۰. گزینهٔ ۱** می‌دانیم: $p(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

$$\frac{p(n,r)}{p(n+1,r+1)}=\frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{\dfrac{(n+1)!}{[(n+1)-(r+1)]!}}$$

$$=\frac{n!(n-r)!}{(n+1)!(n-r)!}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

**۶۱. گزینهٔ ۳** در این مسأله می‌خواهیم از بین ۶ نفر ۳ نفر انتخاب کنیم. پس یا ترکیب است یا ترتیب. اما چون برای هر یک از این سه نفر پُست خاصی مدنظر است، پس ترتیب مهم خواهد بود.

$$p(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۱۲۰$$

در اینجا باید به سرعت تشخیص دهید که ۱۲۰، برابر فاکتوریل کدام گزینه است. در مورد اعداد ۳ و ۴ به سرعت می‌توان فاکتوریل آنها را محاسبه کرده و تشخیص داد که غلط است و !۶ عدد بسیار بزرگی خواهد بود. پس پنج فاکتوریل جواب سؤال است.

**۶۲. گزینهٔ ۱** چون ۳ نفر جهت مشارکت در سه مورد «متمایز» در امور مدرسه باید انتخاب شوند پس ترتیب انتخاب آنها اهمیت دارد:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\Rightarrow p(۱۲,۳)$$

$$=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۹!}=۱۳۲۰$$

**۶۳. گزینهٔ ۳** با دو روش می‌توان سؤال را حل کرد، هر دو روش را یاد بگیرید.

روش اول: می‌گوییم باید حالات سه‌تایی را به دست آوریم. ابتدا تعداد حروف تکراری را حذف می‌کنیم. آن‌چه باقی می‌ماند

$\{S,E,R,H,T\}$ است. که در اولین جا، هر ۵ حرف را می‌توان قرار داد. در دومین جا، از ۵ حرف، ۴ حرف را می‌توان قرار داد (چون یکی را قبلاً استفاده کردیم) و در سومین جا از ۵ حرف، ۳ حرف را می‌توان قرار داد(چون دو تا را قبلاً استفاده کرده‌ایم). پس می‌شود: $۵\times۴\times۳=۶۰$

حال اگر حرف S را در نظر بگیریم که بخواهیم دو بار بنویسیم چه می‌شود؟

$\square\square\square$

دو حرف S به سه طریق مختلف می‌توانند در دو جایگاه از این سه جایگاه قرار بگیرند (جایگاه اول و دوم، جایگاه اول و سوم، جایگاه دوم و سوم) و بقیهٔ چهار حرف دیگر در جایگاه باقی‌مانده در چهار حالت می‌توانند قرار بگیرند، پس: $۳\times۴=۱۲$

حال اگر حرف E را در نظر بگیریم که بخواهیم دوبار بنویسیم چه می‌شود؟

عین حرف S خواهد بود یعنی: $۳\times۴=۱۲$

پس در مجموع چنین خواهد بود: $۱۲+۱۲+۶۰=۸۴$

روش دوم: چون سه از n مورد نظر است پس یا ترکیب است یا ترتیب. حروف کلمه عبارتند از $\{S,E,R,H,T\}$ که حروف S و E دوباره تکرار شده‌اند. بنابراین باید حالات کلمهٔ ۳ حرفی را در سه حالت ۱) بدون حرف تکراری، ۲) کلمات دارای دو حرف S و ۳) کلمات دارای ۲ حرف E را به دست آوریم.

۱) $P(۵,۳)=\dfrac{۵!}{(۵-۳)!}=\dfrac{۵!}{۲!}=\dfrac{۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۶۰$

۲) تعداد جایگشت‌های S و S و حروف سوم $\{E,R,H,T\}$

$۴\times\dfrac{۳!}{۲!}=۱۲$

(عدد چهار در این رابطه تعداد حالات انتخاب حرف سوم است)

۳) تعداد جایگشت‌های E و E و حروف سوم $\{S,R,H,T\}$

$۴\times\dfrac{۳!}{۲!}=۱۲\Rightarrow ۶۰+۱۲+۱۲=۸۴$

**۶۴. گزینهٔ ۴** روش اول: می‌خواهیم ۴ حرف از ۷ حرف را انتخاب کنیم. پس با ترکیب سروکار داریم. در ضمن ۲ حرف A نیز باید وجود داشته باشد بنابراین برای کلمهٔ ۴ حرفی ۲ حرف دیگر لازم داریم که آنها را از بین بقیهٔ حروف، به جز A یعنی T و M و L و S انتخاب می‌کنیم. پس در واقع چهار حرف داریم که ۲ حرف A است و دو حرف دیگر را از بین آن چهار حرف انتخاب می‌کنیم.

$$C(۴,۲)=\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{(۴-۲)!۲!}=\frac{۴\times۳\times۲!}{۲!\times۲!}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

حالا ۴ حرف داریم که دوتای آنها (دو تا A) تکراری هستند. جایگشت ۴ حرف دارای ۲ حرف تکراری به صورت زیر محاسبه می‌شود: $\dfrac{۴!}{۲!}=\dfrac{۴\times۳\times۲}{۲}=۱۲$

بنابراین کل جایگشت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با: $۶\times۱۲=۷۲$

روش دوم: ابتدا دو جایگاه از چهار جایگاه را برای دو حرف A انتخاب می‌کنیم، پس با ترکیب سر و کار داریم، پس داریم: $C(۴,۲)=\binom{۴}{۲}=۶$

حال از چهار جایگاه دو جایگاه باقی می‌ماند که باید دو حرف از چهار حرف غیر A در آن قرار بگیرند که ترتیب قرار گرفتن آنها مهم است زیرا حالت‌های مختلف ایجاد می‌کنند، پس داریم: $\binom{۴}{۲}\square\square\rightarrow ۶\times۴\times۳=۷۲$

**۶۵. گزینهٔ ۳** در انتهای صورت سؤال گفته شده است که سه حرف از پنج حرف، حرف S است. پس دو حرف باقی می‌ماند. غیر از S، پنج حرف داریم پس حالت‌های انتخاب دو حرف از پنج حرف را به دست می‌آوریم: $\binom{۵}{۲}=۱۰$

حال باید ببینیم که سه حرف S و دو حرف دیگر چه رابطهٔ جایگشتی دارند: اگر هر ۵ حرف متمایز بودند می‌شد !۵ ولی چون سه حرف از پنج حرف، تکراری است پس باید طبق قاعده، تقسیم بر آن شود یعنی: $\dfrac{۵!}{۳!}=۲۰$

نتیجهٔ نهایی این‌که بین ۱۰ حالت به دست آمده و ۲۰ حالت بعدی به دست آمده طبق اصل ضرب باید نوشت: $۱۰\times۲۰=۲۰۰$

**۶۶. گزینهٔ ۴** در بین حروف کلمهٔ DELAVAR دو حرف تکراری A داریم بنابراین مسئله را در سه حالت مختلف زیر حل می‌کنیم:

حالت اول (حرف A در بین حروف انتخابی نباشد): ابتدا سه حرف از بین تمام حروف (۵ حرف داریم) را انتخاب کرده و جایگشت‌های سه تایی آنها را حساب می‌کنیم: $\square\square\square\rightarrow ۵\times۴\times۳=۶۰$

حالت دوم: در این مرحله یکی از حروف A و دو حرف دیگر از حروف غیر A را انتخاب و باز جایگشت آنها را محاسبه می‌کنیم:

انتخاب ۲ حرف از ۵ حرف غیر A $=\binom{۵}{۲}=\dfrac{۵!}{۲!۳!}=۱۰$

جایگشت حرف A با ۲ حرف انتخابی $=۳!=۶$

$\Rightarrow$ حاصلضربشان $=۱۰\times۶=۶۰$

حالت سوم: در این مرحله دو حرف A و یک حرف از حروف غیر A را انتخاب می‌کنیم و باز هم جایگشت آنها را حساب می‌کنیم (این‌بار حرف تکراری هم دارد).

جایگشت ۲ حرف A با ۱ حرف انتخابی، $=\dfrac{۳!}{۲!}=۳$

انتخاب ۱ حرف از ۵ حرف $=\binom{۵}{۱}=۵$

که ضرب این دو می‌شود: (جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری A) $۵\times۳=۱۵$

$\Rightarrow$ مجموع سه حالت $=۶۰+۶۰+۱۵=۱۳۵$

**۶۷. گزینهٔ ۴** همانند سؤال قبل باید حالت‌های مختلف را بررسی کنیم و در آخر تعداد حالات را با هم جمع کنیم.

حالت اول: اگر ۳ حرف متمایز باشند: $M,A,R,D,S,L\Rightarrow ۶\times۵\times۴=۱۲۰$

حالت دوم: اگر هر ۳ حرف A باشند: ۱ حالت

حالت سوم: اگر ۲ حرف A باشند: $A,A,\begin{matrix}M\\R\\D\\S\\L\end{matrix}\Rightarrow(۱\times۱\times۵)\times۳=۱۵$

(ضرب در عدد ۳ به خاطر جابه‌جایی A با حروف دیگر است.)

حالت چهارم: اگر دو حرف R باشند: $R,R,\begin{matrix}M\\A\\D\\S\\L\end{matrix}\Rightarrow(۱\times۱\times۵)\times۳=۱۵$

(ضرب در عدد ۳ به خاطر جابه‌جایی R با حروف دیگر است.)

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با: $۱۲۰+۱+۱۵+۱۵=۱۵۱$

**۶۸. گزینهٔ ۲** در بین حروف کلمهٔ RANGIN دو حرف تکراری N داریم بنابراین مسئله را در سه حالت مختلف زیر حل می‌کنیم:

حالت اول (حرف N در بین حروف انتخابی نباشد): ابتدا سه حرف از بین تمام حروف (۴ حرف داریم) را انتخاب کرده و جایگشت‌های سه تایی آنها را حساب می‌کنیم: $\square\square\square\rightarrow ۴\times۳\times۲=۲۴$

حالت دوم: در این حالت یکی از حروف N و دو حرف دیگر از حروف غیر N را انتخاب و باز جایگشت آنها را محاسبه می‌کنیم:

انتخاب ۲ حرف از ۴ حرف غیر N $=\binom{۴}{۲}=\dfrac{۴!}{۲!۲!}=۶$

جایگشت حرف N با ۲ حرف انتخابی $=۳!=۶$

$\Rightarrow$ حاصلضربشان $=۶\times۶=۳۶$

حالت سوم: در این مرحله دو حرف N و یک حرف از حروف غیر N را انتخاب می‌کنیم و باز هم جایگشت آنها را حساب می‌کنیم (این‌بار حرف تکراری هم دارد).

جایگشت ۲ حرف N با ۱ حرف انتخابی $=\dfrac{۳!}{۲!}=۳$

انتخاب ۱ حرف از ۵ حرف $=\binom{۴}{۱}=۴$

که ضرب این دو می‌شود: (جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراریN) $۴\times۳=۱۲$

$\Rightarrow$ مجموع سه حالت $=۲۴+۳۶+۱۲=۷۲$

**۶۹. گزینهٔ ۴** در بین حروف کلمهٔ KAMYAB دو حرف تکراری A داریم بنابراین مسئله را در سه حالت مختلف زیر حل می‌کنیم:

حالت اول (حرف A در بین حروف انتخابی نباشد): ابتدا چهار حرف از بین تمام حروف (۴ حرف داریم) را انتخاب کرده و جایگشت‌های چهار تایی آنها را حساب می‌کنیم: $\square\square\square\square \rightarrow 4! = 24$

حالت دوم: در این حالت یکی از حروف A و دو حرف دیگر از حروف غیر A را انتخاب و باز جایگشت آنها را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{انتخاب ۳ حرف از ۴ حرف غیر A} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{1!\times 3!} = 4$$

$$\text{جایگشت حرف A با ۳ حرف انتخابی} = 4! = 24$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضربشان} = 4\times 24 = 96$$

حالت سوم: در این مرحله دو حرف A و دو حرف از حروف غیر A را انتخاب می‌کنیم و باز هم جایگشت آنها را حساب می‌کنیم (این‌بار حرف تکراری هم دارد).

$$\text{جایگشت ۲ حرف A با ۲ حرف انتخابی} = \frac{4!}{2!} = 12$$

$$\text{انتخاب ۲ حرف از ۴ حرف} = \binom{4}{2} = 6$$

که ضرب این دو می‌شود: (جایگشت ۴ حرف با ۲ حرف تکراری A) $6\times 12 = 72$

$$\Rightarrow \text{مجموع سه حالت} = 24+96+72 = 192$$

**۷۰. گزینهٔ ۱** این سؤال ساده است و مربوط به مبحث جایگشت‌های با تکرار است. علت اینکه این سؤال را در این قسمت آورده‌ایم این است که شما این سؤال را با دو سؤال بعد مقایسه کنید و تفاوت آنها را بهتر درک کنید.
باید جایگشت این ۶ رقم را حساب کنیم که حروف تکراری نیز دارد:

$$\frac{6!}{3!\times 2!} = \frac{6\times 5\times 4\times 3!}{3!\times 2!} = \frac{6\times 5\times 4}{2} = 60$$

**۷۱. گزینهٔ ۳** چون عدد ۸ دو بار تکرار شده است، پس باید حالت‌های مختلف جایگشت‌های ۳ رقمی از بین ۶ رقم را جداگانه بررسی کرد:

یکی از ارقام ۸ و دو رقم دیگر غیر ۸ (حالت اول)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{انتخاب دو عدد از بین اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۷} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\times 2!} = 6 \\ \text{جایگشت دو رقم انتخابی همراه با یک عدد ۸: } 3! = 6 \end{cases}$$

طبق اصل ضرب $\Rightarrow 6\times 6 = \underline{\underline{36}}$

دو رقم ۸ و یک رقم غیر ۸ (حالت دوم)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{انتخاب یک عدد از بین اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۷} = \binom{4}{1} = 4 \\ \text{جایگشت یک رقم انتخابی همراه با دو عدد ۸: } \frac{3!}{2!} = 3 \end{cases}$$

طبق اصل ضرب $\Rightarrow 4\times 3 = \underline{\underline{12}}$

هر سه رقم غیر ۸ باشند (حالت سوم)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{انتخاب سه عدد از بین اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۷} = \binom{4}{3} = 4 \\ \text{جایگشت سه عدد از بین اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۷: } 3! = 6 \end{cases}$$

طبق اصل ضرب $\Rightarrow 4\times 6 = \underline{\underline{24}}$

$$\Rightarrow \text{مجموع سه حالت} = 36+12+24 = 72$$

**۷۲. گزینهٔ ۴** چون عدد ۲ سه بار تکرار شده است، پس باید حالت‌های مختلف جایگشت‌های ۳ رقمی از بین ۶ رقم را جداگانه بررسی کرد:

هر سه رقم ۲ باشد $\Leftarrow$ تعداد جایگشت‌ها $= \underline{\underline{1}}$ (حالت اول)

یکی از ارقام ۲ و دو رقم دیگر غیر ۲ (حالت دوم)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{انتخاب دو عدد از بین اعداد ۱ و ۳ و ۵} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\times 1!} = 3 \\ \text{جایگشت دو رقم انتخابی همراه با یک عدد ۲: } 3! = 6 \end{cases}$$

طبق اصل ضرب $\Rightarrow 3\times 6 = \underline{\underline{18}}$

دو رقم ۲ و یک رقم غیر ۲ (حالت سوم)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{انتخاب یک عدد از بین اعداد ۱ و ۳ و ۵} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{2!\times 1!} = 3 \\ \text{جایگشت یک رقم انتخابی همراه با دو عدد ۲: } \frac{3!}{2!} = 3 \end{cases}$$

طبق اصل ضرب $\Rightarrow 3\times 3 = \underline{\underline{9}}$

هر سه رقم غیر ۲ باشند یعنی جایگشت‌های ۱ و ۳ و ۵ $= 3! = \underline{\underline{6}}$ (حالت چهارم)

$$\Rightarrow \text{مجموع چهار حالت} = 1+18+9+6 = 34$$

**۷۳. گزینهٔ ۴** $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ که خوانده می‌شود ترکیب r شیء از n شیء و در آن $0 < r \leq n$ است. باید سمت چپ معادله را باز کنیم تا بتوانیم با سمت راست ساده کنیم و x را به دست آوریم.

$$C(x,2) = 2x \Rightarrow \frac{x!}{2!(x-2)!} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)!}{2!(x-2)!} = 2x \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} = 2x \Rightarrow x^2 - x = 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{یا}\ x = 5$$

چون $x \geq 2$ باید باشد، پس صفر پاسخ نادرست است.

**۷۴. گزینهٔ ۱**

$$C(a+b,a) = \frac{(a+b)!}{a!(a+b-a)!} = \frac{(a+b)!}{a!b!} = m$$

$$C(a+b,b) = \frac{(a+b)!}{b!(a+b-b)!} = \frac{(a+b)!}{b!a!} = \frac{(a+b)!}{a!b!} = m$$

پس نتیجه می‌شود که: $C(a+b,a) = C(a+b,b) = m$

**۷۵. گزینهٔ ۲** دو طرف تساوی داده شده را باز می‌کنیم و سپس ساده می‌کنیم.

$$C(n,4) = p(n-1,3) \Rightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)!}{4!(n-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \Rightarrow \frac{n}{4!} = 1 \Rightarrow n = 4! = 24$$

**۷۶. گزینهٔ ۳** تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز یعنی: $8!$ و ترکیب ۳ از ۸ شیء یعنی: $C(8,3) = \frac{8!}{3!5!}$. چون نسبت گفته است پس باید کسری بنویسیم که اولی در صورت و دومی در مخرج باشد:

$$\frac{8!}{\frac{8!}{3!5!}} = \frac{3!5!8!}{8!} = 3!5! = 3\times 2\times 5\times 4\times 3\times 2$$

حال باید طوری این اعداد ضرب شده را بنویسیم که بشود با فاکتوریل نشان داد. دو عدد اول یعنی ۳ و ۲ را در هم ضرب کنیم داریم:

$$\underbrace{3\times 2}_{6}\times 5\times 4\times 3\times 2 = 6\times 5\times 4\times 3\times 2 = 6!$$

**۷۷. گزینهٔ ۲** ابتدا باید بدانیم که چون یک تعداد حالت محدود را از بین تعدادی بیش‌تر انتخاب می‌کنیم یا با «ترکیب» سروکار داریم یا با «ترتیب». چون در یک مجموعه ترتیب عضوها اگر جابه‌جا شود تأثیری ندارد، پس ترتیب نیست. تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی عبارت است از: $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$\Rightarrow C(8,4) = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1} = 70$$

**۷۸. گزینهٔ ۴** چون در یک مجموعه ترتیب عضوها اگر جابه‌جا شود تأثیری ندارد، پس ترکیب است. $C(10,2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{90}{2} = 45$

**۷۹. گزینهٔ ۱** باید ترکیب ۲ عضوی از n عضوی را مساوی با عدد ۶ قرار دهیم:

$$C(n,2) = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = 6 \Rightarrow n^2-n-12 = 0 \Rightarrow n = 4 \ \text{یا}\ n = -3$$

$n = -3$ قابل قبول نیست.