روزی نشست بر پاره‌سنگی
با انگشتانی گره‌کرده در زیر چانه‌اش
و خیره نگاهی تا بی‌انتها

آرام‌آرام شرارِ وسوسه‌ای در رگ‌هایش دوید
و هُرمِ قدرتی سترگ، ساق‌های بی‌قرارش را در هم نوردید

ناگاه به پا خاست
و گام در راهی نهاد
بی‌انتها

ـ انسان را می‌گویم ـ
او ناچارِ رفتن بود و یافتن
شاید به این امید که روزی، بر فراز قلّه‌ی دریافتن، پاتابه وا کُند و یَله بر چارطاقِ نیلیِ چرخ دهد.

تقدیم به شما و همه ی آن هایی که
برای «یافتن»
راهی جز «دریافتن» نمی شناسند.

عنوان و نام پدیدآور: همایش ریاضی تجربی، مسعود غزالی‌بینا
مشخصات نشر: تهران: دریافت، ۱۳۹۹
مشخصات ظاهری: ۲۶۴ ص.؛ ۲۱×۲۸/۵ س م.
شابک: ۹ ـ ۰۸ ـ ۶۷۷۳ ـ ۶۲۲ ـ ۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
یادداشت: فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی: http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.

عنوان کتاب: **همایش ریاضی تجربی**
نویسنده: مسعود غزالی‌بینا
ویراستاران علمی: زهرا خطیبی، زهرا محمد بیگی
طراح جلد: ایمان خاکسار
حروف‌چین: افسانه بابایی، فرناز صفی
رسام تصاویر: شاهرخ آریا، زهرا امین‌صادقیه
صفحه‌آرا: مینا طاهرشمس
ناظر چاپ: سعید حیدری
نوبت چاپ: اول ـ ۱۳۹۹
شمارگان: ۱۰۰۰
بها: ۵۹۰۰۰ تومان
ناشر: نشر دریافت
تلفن: ۸۸۳۹۱۳۷۴ ـ ۰۲۱
نشانی اینترنتی: www.Daryaftpub.com
پست الکترونیک: daryaftpub@gmail.com
صندوق پستی: تهران ۸۸۴۴-۱۴۱۵۵

تقدیم به

پدر

و

مادر

دلسوز و فداکارم

مقدمه مؤلف

بسمه تعالی

سلام و عرض ادب و احترام خدمت یکایک دانش‌آموزان محترم که هم‌اکنون مشغول مطالعه این کتاب هستند. امیدوارم تا به امروز در مسیر درستی قرار گرفته باشید و بهترین‌ها در انتظارتان باشد. رقابت دوستان نظام قدیم به اتمام رسیده و اکنون نوبت شماست که در این ماراتن بجنگید تا به اهداف و آرزوهایتان برسید. درس ریاضی از تأثیرگذارترین دروس رشته تجربی است که با یک برنامه‌ریزی و مطالعه اصولی می‌توانید به سرعت شاهد افزایش درصد خود باشید؛ پس توصیه می‌کنم به این درس با دقت و توجه بیشتری بپردازید.

من تمام تجارب خود را در طی چند سال گذشته کنار هم گذاشتم تا یک کتاب کامل و در عین حال خلاصه را تقدیم شما عزیزان کنم و در این کتاب هیچ مطلبی خارج از کتاب درسی گفته نشده و تمام تلاشم بر این بوده که کتاب با رویکرد جدید مؤلفین کتاب درسی منطبق باشد؛ بنابراین از تمام تمرین‌ها، کاردرکلاس‌ها، فعالیت‌ها و ...که قابلیت طراحی تست داشته‌اند، استفاده کرده‌ام.

تست‌های کنکور سنوات گذشته در کتاب آورده شده تا شما با حلّ این تست‌ها و تست‌های تألیفیِ برگرفته از کتاب درسی به اوج آمادگی برسید.

در نهایت از خداوند می‌خواهم که هر آنچه به صلاحتان است، برایتان اتفاق بیفتد.

تشکر و قدردانی

از مدیر محترم انتشارات دریافت، آقای دکتر هامون سبطی استاد گرانقدر و عزیزم که طی این سال‌ها همواره پشتیبان من بودند و حمایتشان را از من دریغ نکردند، تشکر می‌کنم؛ بی‌شک علاقه من به تدریس و تألیف، نتیجه تدریس بی‌نظیر ایشان در گذشته بوده است.

از مدیر تألیف محترم نشر دریافت؛ آقای علی امین‌صادقیه و همین‌طور مدیر فنّی، جناب آقای حسین نوری بابت پیگیری و نظارت بر آماده‌سازی کتاب بسیار سپاسگزارم.

از استاد گرانقدر آقای مهندس سروش مویینی که منت بر من گذاشته و در جهت بهبود کتاب، نظرات سازنده‌ای ارائه دادند، تشکر می‌کنم. از اساتید محترم آقایان احسان لعل، آرین تفضلی‌زاده، امید شیری‌نژاد، و محمدسجاد نقیه بابت بازخوانی علمی برخی فصول نهایت تشکر را دارم. از استاد محمدحسین انوشه دبیر برجسته شیمی کنکور که همانند پدری مهربان همواره مشوّق من در حوزه آموزش بوده‌اند، تشکر می‌کنم. از استاد علی پناهی‌شایق، دبیر برجسته زیست کنکور بابت دلگرمی و تشویق ایشان سپاسگزارم.

از خانم‌ها زهرا محمدبیگی و زهرا خطیبی بابت ویرایش علمی کتاب تشکر می‌کنم.

از تیم تایپ، خانم‌ها فرناز صفی و افسانه بابایی؛ صفحه‌آرایی، خانم مینا طاهرشمس؛ رسم تصاویر و اَشکال، خانم زهرا امین صادقیه و آقای شاهرخ آریا و سرکار خانم طاهره السادات فاطمی که زحمات بسیاری در چاپ کتاب متحمّل شدند، بسیار سپاسگزارم.

در نهایت از تمامی دانش‌آموزان و دبیران محترم در سراسر کشور خواهشمندم نظرات خود را از یکی از راه‌های زیر با بنده در میان بگذارند.

masoud.ghazali1994@gmail.com
masoud.ghazali_riyazi
@riyazi_20

موفق و سربلند باشید

مسعود غزالی بینا

فهرست

فصل ۱۰

حد و پیوستگی

مطالب این فصل عمدتاً ساده و تست‌های آن قابل حل هستند. اهمیت این فصل بسیار زیاد است و با توجه به حجم آن توصیه می‌کنم این فصل را با دقت مطالعه کنید و امتیازش را از دست ندهید. در این فصل دربارهٔ بخش‌پذیری، همسایگی، فرآیندهای حدی و محاسبهٔ حد توابع، رفع ابهام $\frac{0}{0}$، حد بی‌نهایت، حد در بی‌نهایت، پیوستگی و ... صحبت می‌کنیم.

تعداد تست در کنکور ۹۸: ۴

تعداد تست در کنکور ۹۸ خارج: ۴

۱ـ۱۰ بخش‌پذیری

می‌خواهیم چندجمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقی‌ماندهٔ آن عدد ثابت R باشد:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \cline{2-2} \vdots & Q(x) \\ \hline R & \end{array}$$

آن‌گاه رابطهٔ تقسیم به صورت روبه‌رو است:

$$\overbrace{f(x)}^{\text{مقسوم}} = \underbrace{(x-a)}_{\text{مقسوم علیه}}\ \overbrace{Q(x)}^{\text{خارج قسمت}} + \underbrace{R}_{\text{باقی‌مانده}}$$

این رابطه به ازای تمام مقادیر x درست است. از این مطالب یک قضیه و یک نتیجه استخراج می‌شود.

قضیه: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه: اگر $f(a)=۰$ آن‌گاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

تست ۱: به ازای مقداری از a چندجمله‌ای $f(x)=x^۴+ax^۳-۸x$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. مجموع کوچک‌ترین ریشه و بزرگ‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-۳+\sqrt{۵}$ ۳) -۲ ۴) $-۱-\sqrt{۵}$

پاسخ: ۳

چون چندجمله‌ای $x^۴+ax^۳-۸x$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس:

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow f(-۲)=۰$$

حال مقدار a را می‌یابیم:

$$(-۲)^۴+a(-۲)^۳-۸(-۲)=۰ \Rightarrow ۱۶-۸a+۱۶=۰ \Rightarrow ۸a=۳۲ \Rightarrow a=۴$$

مجدداً $f(x)$ را می‌نویسیم و بر $x+۲$ تقسیم می‌کنیم تا ریشه‌های دیگر را بیابیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۴+۴x^۳-۸x & x+۲ \\ \cline{2-2} \underline{-x^۴-۲x^۳} & x^۳+۲x^۲-۴x \\ \quad ۲x^۳-۸x & \\ \quad \underline{-۲x^۳-۴x^۲} & \\ \quad -۴x^۲-۸x & \\ \quad \underline{۴x^۲+۸x} & \\ \qquad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۴+۴x^۳-۸x=(x+۲)(x^۳+۲x^۲-۴x)=(x+۲)(x)(x^۲+۲x-۴)$$

$$\xrightarrow[\text{گذاشته و ریشه‌یابی می‌کنیم}]{\text{عبارات به دست آمده را برابر صفر}} \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x=۰ \\ x^۲+۲x-۴=۰ \Rightarrow \Delta=۴-۴(۱)(-۴)=۲۰ \Rightarrow x_{۱,۲}=\dfrac{-۲\pm\sqrt{۲۰}}{۲} \Rightarrow x_{۱,۲}=-۱\pm\sqrt{۵} \end{cases}$$

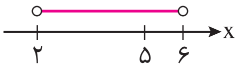
در نتیجه کوچک‌ترین ریشه، $-۱-\sqrt{۵}$ و بزرگ‌ترین ریشه، $-۱+\sqrt{۵}$ است که مجموعه این دو عدد برابر است با:

$$-۱-\sqrt{۵}-۱+\sqrt{۵}=-۲$$

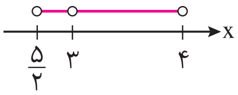
۲ـ۱۰ همسایگی

هر بازهٔ باز شامل عددحقیقی $x_۰$ را یک همسایگی $x_۰$ می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر $x_۰ \in (a,b)$ آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی $x_۰$ می‌باشد.

مثال: بازهٔ $(۲,۶)$ یک همسایگی برای عدد ۵ است.

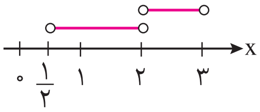


همسایگی محذوف: اگر بازهٔ (a,b) یک همسایگی عدد حقیقی $x_{\circ}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $(a,b)-\{x_{\circ}\}$ یا $(a,x_{\circ})\cup(x_{\circ},b)$ یک همسایگی محذوف $x_{\circ}$ نامیده می‌شود. مثال: مجموعهٔ $(\frac{۵}{۲},۴)-\{۳\}$ یک همسایگی محذوف ۳ است.



همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد آن‌گاه $(x_{\circ},x_{\circ}+r)$ یک همسایگی راست $x_{\circ}$ نامیده می‌شود. همچنین، $(x_{\circ}-r,x_{\circ})$ را یک همسایگی چپ $x_{\circ}$ می‌نامیم.

مثال: بازهٔ $(۲,۳)$ یک همسایگی راست ۲ و بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۲)$ یک همسایگی چپ ۲ است.



تست ۲: **اگر $(a-۲b,۵)\cup(c,۲a+b)$ یک همسایگی محذوف عدد ۳ باشد، آن‌گاه بازهٔ (b,a) یک همسایگی برای کدام یک از اعداد زیر است؟**

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۶}$ ۳) $-\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

پاسخ: **۲** با توجه به تساوی $(a-۲b,۵)\cup(c,۲a+b)=(c,۲a+b)\cup(a-۲b,۵)$ داریم:

$$\begin{cases}۲a+b=۳\\a-۲b=۳\end{cases}\Rightarrow ۲a+b=a-۲b\Rightarrow a=-۳b\xrightarrow{۲a+b=۳}۲(-۳b)+b=۳\Rightarrow -۵b=۳\Rightarrow b=-\frac{۳}{۵},a=-۳b=\frac{۹}{۵}$$

بازهٔ (b,a) برابر است با: $(-\frac{۳}{۵},\frac{۹}{۵})$ که با توجه به گزینه‌ها، یک همسایگی برای $\frac{۷}{۶}$ است.

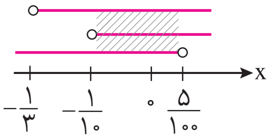
تست ۳: **اگر بازهٔ $(۲-۵x,۳-۲x)$ یک همسایگی برای ۲/۵ و ۲/۹ باشد، محدودهٔ x کدام است؟**

۱) $(-۰/۱,۰/۰۵)$ ۲) $(-\frac{۱}{۳},۰/۰۵)$ ۳) $(-\frac{۱}{۳},-۰/۱)$ ۴) $(-۰/۱,۰)$

پاسخ: **۱** بازهٔ $(۲-۵x,۳-۲x)$ قرار است یک همسایگی برای ۲/۵ و ۲/۹ باشد، پس شکل آن به صورت

است؛ در نتیجه با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases}۲-۵x<۲/۵\Rightarrow ۵x>-۰/۵\Rightarrow x>-۰/۱\\ ۳-۲x>۲/۹\Rightarrow ۲x<۰/۱\Rightarrow x<۰/۰۵\\ ۲-۵x<۳-۲x\Rightarrow ۳x>-۱\Rightarrow x>-\frac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow$$ اشتراک می‌گیریم:



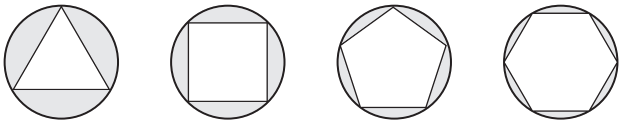
جواب نهایی: $(-۰/۱,۰/۰۵)$

۱۰-۳ فرایندهای حدی و محاسبهٔ حد توابع

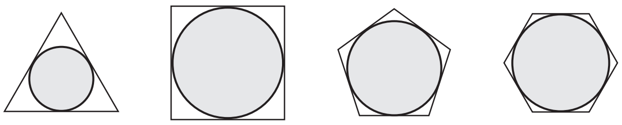
۱۰-۳-۱ چندضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی

به دو دسته از اشکال زیر دقت کنید:

(چندضلعی منتظم محاطی)



(چندضلعی منتظم محیطی)



در هر دو دسته، با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی‌ها به مساحت دایره $(\pi r^{۲})$ نزدیک می‌شود.

۲-۳-۱۰ مفهوم حد

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a,x_\circ)$ تعریف شده باشد. حد چپ f در $x_\circ$ برابر عدد L است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت چپ به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=L$$

به طریق مشابه فرض کنیم f در بازه‌ای مانند $(x_\circ,b)$ تعریف شده باشد، حد راست f در $x_\circ$ برابر عدد L است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد؛ به شرط آن‌که x از سمت راست به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=L$$

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a,b) شامل نقطهٔ $x_\circ$ (به جز احتمالاً در خود $x_\circ$) تعریف شده باشد. حد تابع f در $x_\circ$ برابر عدد L است؛ هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد؛ به شرط آن‌که x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)=L$$

نتیجه: $\lim_{x\to x_\circ} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=L$ و $\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=L$

به‌طور کلی اگر دربارهٔ تابعی مانند f داشته باشیم $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ، آن‌گاه دربارهٔ $f(a)$ یکی از حالت‌های زیر برقرار است:

الف) $f(a)$ موجود نیست.

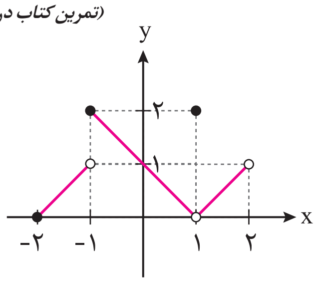
ب) $f(a)$ موجود است؛ ولی $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$

پ) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

نتیجه: حد تابع در یک نقطه ارتباطی به مقدار تابع در آن نقطه ندارد؛ یعنی وجود یا عدم وجود مقدار تابع در نقطهٔ a، تأثیری در وجود حد تابع در نقطهٔ a ندارد.

تست ۴: با توجه به نمودار تابع f، چه تعداد از موارد زیر صحیح است؟

(تمرین کتاب درسی)



الف) $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ ب) $f(1)=2$ پ) $f(2)=1$

ت) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$ ث) $\lim_{x\to -1} f(x)=2$ ج) $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

چ) $\lim_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: ۱

الف) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=0\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=0$ (غ)

ب) $f(1)=2$ (ص)

پ) $f(2)=$ وجودندارد (غ)

ت) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=$ وجودندارد (غ)

ث) $\lim_{x\to (-1)^+} f(x)=2\ ,\ \lim_{x\to (-1)^-} f(x)=1\Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x)=$ وجودندارد (غ)

ج) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1\ ,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=1\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1$ (ص)

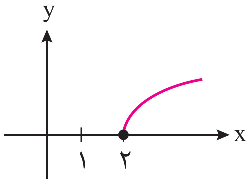
چ) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=$ وجودندارد $\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=$ وجودندارد (ص)

تست ۵: حد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-2}$ به ازای $x=2$ کدام است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۱

۳) وجود ندارد. ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

پاسخ: ۳ با توجه به شکل $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ وجود ندارد، پس تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ در نقطهٔ $x=2$ حد ندارد.



۱۰-۴ محاسبهٔ حد توابع

به محاسبهٔ انواع حدهای زیر دقت کنید: (تمام قوانینی که در این بخش دربارهٔ حد مطرح می‌شود، برای حد راست و چپ تابع نیز برقرار است.)

۱. **حد تابع ثابت:** به‌طور کلی اگر c و a دو عدد حقیقی باشند: $\lim\limits_{x\to a} c=c$

۲. **حد تابع همانی:** اگر $f(x)=x$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a \ (a\in\mathbb{R})$

۳. **حد مجموع:** اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+m$

۴. **حد تفاضل:** اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-m$

۵. **حد حاصل‌ضرب:** اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)=Lm$

اگر c یک عدد ثابت و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}(cf(x))=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=cL(a\in\mathbb{R})$

در حالت کلی اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $n\in\mathbb{N}$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n=L^n$

۶. **حد تقسیم:** اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ و $m\neq 0$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\left(\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\right)=\dfrac{L}{m}(m\neq 0)$

۷. **حد تابع چندجمله‌ای:** به‌طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

۸. **حد تابع گویا:** به‌طور کلی اگر $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a، کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم؛ به شرط آن‌که $\lim\limits_{x\to a} Q(x)\neq 0$.

۹. **حد ریشه:** اگر $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=L>0$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{ax+b}=\sqrt{\lim\limits_{x\to c} ax+b}=\sqrt{L}$

۱۰. **حد مثلثاتی:** به‌طور کلی داریم: $\lim\limits_{x\to \alpha}\cos x=\cos\alpha\ ,\ \lim\limits_{x\to \alpha}\sin x=\sin\alpha$

۱۱. **حد توابع چندضابطه‌ای:** تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} g(x) & x>a \\ h(x) & x<a\end{cases}$، در صورتی در $x=a$ حد دارد که حد چپ و راست تابع f در نقطهٔ مرزی (a) وجود داشته و با یک‌دیگر برابر باشند: $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)$

۱۲. **حد توابع جزءصحیح:** برای تعیین حد تابع $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ ابتدا حد عبارت داخل جزء صحیح $(f(x))$ را در a به دست آورید. اگر عدد غیرصحیح شد، جزء صحیح آن را حساب کنید اما اگر عدد صحیح شد، آن‌گاه حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x=a$ تعیین کنید.

۱۳. **حد توابع قدرمطلق:** برای محاسبهٔ حد تابع $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$، باید $f(x)$ را تعیین علامت کنیم تا ببینیم در مجاورت $x=a$ علامت $f(x)$ چگونه است.

> اگر تنها یکی از دو تابع f و g در نقطهٔ $x=a$ حد نداشـته باشـد، آن‌گاه $f+g$ و $f-g$ در $x=a$ حد ندارند؛ ولی در مورد $f.g$ نمی‌توان به‌طور قطعی نظر داد و می‌بایسـت تابع را تشـکیل دهیم. توجه کنید عکس این قضیه همواره برقرار نیسـت، یعنی ممکن است مجموع، تفاضل، ضرب و ... دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند ولی خود توابع در آن نقطه حد نداشته باشند.

تست ۶: اگر تابع f در نقطهٔ $x=1$ حد داشته و $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)-1}{f(x)+1}=5$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: ۲

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{f(x)+1}=5\Rightarrow\frac{2f(1)-1}{f(1)+1}=5\Rightarrow 2f(1)-1=5f(1)+5\Rightarrow 3f(1)=-6\Rightarrow f(1)=-2$$

تست ۷: در رابطه با تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) در $x=1$ حد دارد؛ اما در $x=3$ حد ندارد.

۲) در $x=1$ و $x=3$ حد دارد.

۳) در $x=1$ حد ندارد، اما در $x=3$ حد دارد.

۴) در $x=1$ و $x=3$ حد ندارد.

پاسخ: ۴ عبارت زیر رادیکال نامنفی است، پس تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2-4x+3\ge 0\xrightarrow{a+b+c=0}x_1=1,x_2=3$$

$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
	+		−		+	
	ج	ج		ج	ج	

$\to$ مجموعه جواب: $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

چون تابع در $x=1$ حد راست و در $x=3$ حد چپ ندارد، پس در هیچ یک از این نقاط حد وجود ندارد.

تست ۸: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & , x\ge -1\\ 2x+1 & , x<-1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-1$ حد دارد؟

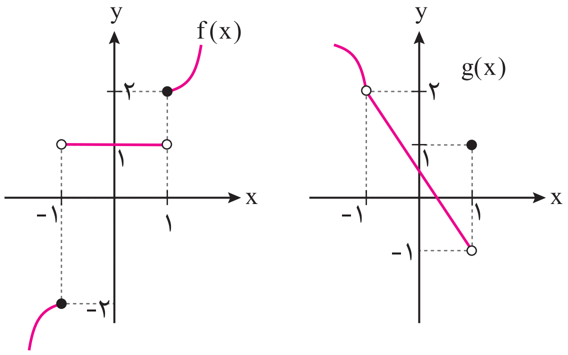
۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: ۳

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}(x+a)^2=(-1+a)^2\ ,\ \lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(2x+1)=-1$$

$\xrightarrow[\text{حد}]{\text{شرط وجود}}\underbrace{(-1+a)^2}_{\text{همواره نامنفی}}=-1$ (غ ق ق) $\Rightarrow$ در نقطهٔ $x=-1$ حد نداریم

تست ۹: نمودار دو تابع f و g در زیر رسم شده‌اند. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(4f(-x)+\dfrac{g(x)}{2}\right)$ کدام است؟



۱) ۳

۲) ۳/۵

۳) ۴

۴) ۴/۵

پاسخ: ۲

$$\lim_{x\to 1^-}4f(-x)=4\lim_{x\to 1^-}f(-x)=4\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=4(1)=4\ ,\ \lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-}g(x)=\frac{1}{2}(-1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow 4-\frac{1}{2}=3/5$$

تست ۱۰: اگر $f(x)=\begin{cases} x+۴ & , x\ge ۰ \\ ۲x+۳ & , x<۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x & , x\ge ۰ \\ x+۱ & , x<۰ \end{cases}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) f،g و $f+g$ در $x=۰$ حد دارند.

۲) f و g در $x=۰$ حد ندارند اما $f-g$ در $x=۰$ حد دارد.

۳) f و g در $x=۰$ حد ندارند، اما $f+g$ در $x=۰$ حد دارد.

۴) f، g و $f-g$ در $x=۰$ حد دارند.

پاسخ: ۳

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۰+۴=۴\,,\ \lim_{x\to ۰^-} f(x)=۲(۰)+۳=۳\Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)=\text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} g(x)=۰\,,\ \lim_{x\to ۰^-} g(x)=۰+۱=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۰} g(x)=\text{وجود ندارد}$$

$$(f+g)(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & ; x\ge ۰ \\ ۳x+۴ & ; x<۰ \end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+}(f+g)(x)=۲(۰)+۴=۴\,,\ \lim_{x\to ۰^-}(f+g)=۳(۰)+۴=۴$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}(f+g)(x)=۴$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases} ۴ & x\ge ۰ \\ x+۲ & x<۰ \end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+}(f-g)(x)=۴\,,\ \lim_{x\to ۰^-}(f-g)(x)=۰+۲=۲\Rightarrow \lim_{x\to ۰}(f-g)(x)=\text{وجود ندارد}$$

تست ۱۱: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+a)[x]$، اگر $\lim_{x\to ۲^+} f(x)-\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۳$، آن‌گاه عدد حقیقی a کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۱-   ۴) صفر

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=(۲+a)[۲^+]=(a+۲)(۲)=۲a+۴,\ \lim_{x\to ۲^-} f(x)=(۲+a)[۲^-]=(a+۲)(۱)=a+۲\Rightarrow ۲a+۴-a-۲=۳\Rightarrow a=۱$$

تست ۱۲: حاصل $\lim_{x\to ۲}[\frac{۹}{۱+x}]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) وجود ندارد.

پاسخ: ۴

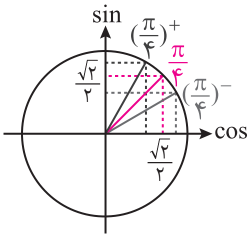
$$\text{حد راست}: x\to ۲^+ \Rightarrow x>۲\Rightarrow ۱+x>۳\Rightarrow \frac{۱}{۱+x}<\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{۹}{۱+x}<۳\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}[\frac{۹}{۱+x}]=[۳^-]=۲$$

$$\text{حد چپ}: x\to ۲^-\Rightarrow x<۲\Rightarrow ۱+x<۳\Rightarrow \frac{۱}{۱+x}>\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{۹}{۱+x}>۳\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}[\frac{۹}{۱+x}]=[۳^+]=۳\Rightarrow \lim_{x\to ۲}[\frac{۹}{۱+x}]=\text{وجود ندارد}$$

تست ۱۳: مجموع مربعات حد چپ و راست تابع $y=[\cos x-\sin x]$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر   ۲) ۱-   ۳) ۲   ۴) ۱

پاسخ: ۴ اگر $x\to (\frac{\pi}{۴})^-$ باشد، حاصل $\cos x$ بزرگ‌تر از $\sin x$ و اگر $x\to (\frac{\pi}{۴})^+$ باشد، حاصل $\sin x$ بزرگ‌تر از $\cos x$ خواهد بود، پس:



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حدچپ}: \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-}[\cos x-\sin x]\xrightarrow{\cos x>\sin x}[۰^+]=۰ \\ \text{حدراست}: \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+}[\cos x-\sin x]\xrightarrow{\sin x>\cos x}[۰^-]=-۱ \end{cases}\xrightarrow{\text{مجموع مربعات}}(۰)^۲+(-۱)^۲=۰+۱=۱$$

تست ۱۴: تابع $f(x)=[x]$ در چه نقاطی حد دارد؟ *(تمرین کتاب درسی)*

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

۳) به‌طورکلی حد ندارد.   ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: ۲ به‌طورکلی حد تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح وجود ندارد، ولی حد این تابع در تمام نقاط غیرصحیح وجود دارد.

۵ـ۱۰ رفع ابهام $\frac{0}{0}$

اگر در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم: $P(a)=Q(a)=0$، دیگر با قوانین گفته‌شده نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می‌کنیم:

چون $P(a)=Q(a)=0$؛ بنابراین $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند. ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

نتیجه: زمانی که در حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ با $\frac{0}{0}$ مواجه شدیم می‌بایست عامل صفرشونده $(x-a)$ را با کمک اتحادها، تجزیه، تقسیم، گویا کردن و در توابع مثلثاتی با کمک روابط گفته‌شده به دست آورده و آن را حذف کنیم.

در حالت $\frac{0}{0}$ از یک روش کارآمد دیگر به نام **قاعدهٔ هوپیتال** نیز می‌توان استفاده کرد؛ به این ترتیب که هرگاه با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه شدیم، می‌توانیم از رابطهٔ روبه‌رو استفاده کنیم: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ اگر باز هم حاصل حد $\frac{0}{0}$ شد می‌توانیم مجدداً هوپیتال گرفته و این عمل را آن‌قدر ادامه دهیم تا از حالت ابهام خارج شود (اگر فرمول‌های مشتق را به‌خاطر ندارید، به فصل بعد رجوع کرده و آن‌ها را مرور کنید.)

هوپیتال گرفتن از یک کسر، معادل مشتق گرفتن از آن کسر نیست: $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow{HOP}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,\ \frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

تست ۱۵: حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{2x^3-13x+10}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{22}$ ۲) $\frac{4}{11}$ ۳) $-\frac{5}{22}$ ۴) $-\frac{4}{11}$

پاسخ: (۴) **روش اول:**

$$4-x^2\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(2-x)(2+x)\ ,\quad \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{2x^3-13x+10}=\frac{0}{0}\xrightarrow[x-2]{\text{تقسیم بر}}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-13x+10 & x-2 \\ \hline -2x^3+4x^2 & 2x^2+4x-5 \\ \hline 4x^2-13x & \\ -4x^2+8x & \\ \hline -5x+10 & \\ 5x-10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{2x^3-13x+10}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(2x^2+4x-5)}=\lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(2x^2+4x-5)}=\frac{-(2+2)}{2(2)^2+4(2)-5}=\frac{-4}{11}$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{2x^3-13x+10}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{-2x}{6x^2-13}=\frac{-2(2)}{6(2)^2-13}=\frac{-4}{11}$$

تست ۱۶: اگر $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ باشد، حاصل حد تابع $\frac{3f(x)+x}{2f^2(x)}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{16}$ ۲) $\frac{7}{16}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{11}{16}$

پاسخ: (۲) **روش اول:**

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=2+2=4\Rightarrow\lim_{x\to 2}f(x)=4\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)+x}{2f^2(x)}=\frac{3(4)+2}{2(4)^2}=\frac{14}{32}=\frac{7}{16}$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{2x}{1}=2(2)=4\Rightarrow\lim_{x\to 2}f(x)=4\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)+x}{2f^2(x)}=\frac{7}{16}$$

تست ۱۷: حد چپ تابع $y=\frac{x-|x|}{[x+۱]-x}$ وقتی $x\to ۰$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲-

پاسخ: ۴

$$x\to ۰^- \Rightarrow -۱<x<۰ \Rightarrow ۰<x+۱<۱ \Rightarrow [x+۱]=۰\,,\ |x| \xrightarrow{-۱<x<۰} -x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-}\frac{x-|x|}{[x+۱]-x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x-(-x)}{۰-x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲x}{-x}=-۲$$

تست ۱۸: حد چپ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}$ در نقطهٔ $x=۳$ ، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: ۲

$$x\to ۳^- \Rightarrow ۲<x<۳ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-۲)\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}=\frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^-}\frac{\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|}{x-۳}\xrightarrow[\text{منفی‌است}]{\text{صورت به ازای } ۲<x<۳}\lim_{x\to ۳^-}\frac{-\cancel{(x-۳)}}{\cancel{(x-۳)}}=-۱$$

تست ۱۹: حاصل $\lim_{x\to -۱}\frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: ۱ **روش اول:**

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}\times\frac{۲x-\sqrt{۳-x}}{۲x-\sqrt{۳-x}}=\lim_{x\to -۱}\frac{۴x^۲+x-۳}{x^۲+x(۲x-\sqrt{۳-x})}$$

$$\xrightarrow[x+۱]{\text{صورت تقسیم بر}}\quad \begin{array}{l|l} ۴x^۲+x-۳ & x+۱ \\ \hline -۴x^۲-۴x & ۴x-۳ \\ -۳x-۳ & \\ ۳x+۳ & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{(۴x-۳)(x+۱)}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})}=\frac{۴(-۱)-۳}{-۱(-۲-۲)}=\frac{-۷}{۴}$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۱}\frac{۲+\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}}{۲x+۱}=\frac{۲-\frac{۱}{۴}}{-۲+۱}=-(۲-\frac{۱}{۴})=-\frac{۷}{۴}$$

تست ۲۰: حد عبارت $\frac{|x^۲-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}$ وقتی $x\to ۲^-$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: ۲ **روش اول:** برای رهایی از قدرمطلق تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲-x-۲=۰\xrightarrow{a+c=b}x_۱=-۱\,,\ x_۲=۲$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} & -\infty & & -۱ & & ۲ & & +\infty \\ \hline & & + & ۰ & - & ۰ & + & \\ & & & & ۲^- \leftarrow & \rightarrow ۲^+ & & \end{array}$$

$$\Rightarrow |x^۲-x-۲|\xrightarrow{x\to ۲^-}-(x^۲-x-۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}\frac{|x^۲-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x^۲-x-۲)}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}=$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۱)}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}\times\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۱۲}}{۲x+\sqrt{x^۲+۱۲}}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۱)(۲x+\sqrt{x^۲+۱۲})}{\underbrace{۴x^۲-x^۲-۱۲}_{۳x^۲-۱۲}}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-\cancel{(x-۲)}(۳)(۴+۴)}{۳\cancel{(x-۲)}(x+۲)}=\frac{(-۳)(۸)}{(۳)(۴)}=-۲$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x^۲-x-۲)}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x^۲+x+۲}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۲x+۱}{۲-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱۲}}}=\frac{-۲(۲)+۱}{۲-\frac{۴}{۸}}=\frac{-۳}{\frac{۳}{۲}}=-۲$$

تست ۲۱: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ **روش اول:**

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}\times\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\times\frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(4-5+x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(x-1)}(2+\sqrt{5-x})}{\cancel{(x-1)}(1+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{-(2+2)}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=-\frac{4}{2}=-2$$

تست ۲۲: اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}$ باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ حد مخرج به ازای $x\to 1$ برابر صفر است. چون حد تابع برابر $\frac{3}{2}$ است، پس حد صورت به‌ازای $x\to 1$ نیز برابر صفر بوده تا حالت $\frac{0}{0}$ تشکیل شود و با رفع حالت ابهام به $\frac{3}{2}$ برسیم.

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{ax+b}-2=0\Rightarrow\sqrt{a+b}-2=0\Rightarrow\sqrt{a+b}=2\Rightarrow a+b=4$$

روش اول:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{ax+\overbrace{b-4}^{-a}}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{a\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(4)}=\frac{a}{8}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=12$$

$$\Rightarrow a+b=4\xrightarrow{a=12}b=4-12=-8\Rightarrow a-b=12-(-8)=20$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x}=\frac{a}{2(2\times\sqrt{4})}=\frac{a}{8}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=12\Rightarrow a-b=20$$

تست ۲۳: حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$ کدام است؟ *(تجربی-۹۷)*

۱) -۱۱۲ ۲) -۹۶ ۳) -۸۴ ۴) -۷۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ **روش اول:**

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow[x-4]{\text{صورت تقسیم بر}}\begin{array}{r|l} 3x^2-10x-8 & x-4 \\ \cline{2-2} -3x^2+12x & 3x+2 \\ \cline{1-1} 2x-8 & \\ -2x+8 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}=\lim_{x\to 4}\frac{(3x+2)(x-4)}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}\times\frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(14)(2)}{3-\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(28)}{2-\sqrt{x}}\times\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(28)(4)}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(112)}{-\cancel{(x-4)}}=-112$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 4}\frac{6x-10}{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to 4}\frac{(6x-10)(2\sqrt{3-\sqrt{x}})}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{(14)(2)}{-\frac{1}{4}}=-28\times 4=-112$$

تست ۲۴: حد عبارت $\frac{x^{۲}+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}$ ، وقتی $x \to -۸$ ، کدام است؟ *(تجربی-۹۸)*

۱) -۲۴ ۲) -۱۸ ۳) -۱۲ ۴) -۶

پاسخ: ۳ **روش اول:**

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^{۲}+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(x+۸)}{۶\underbrace{(۲+\sqrt[۳]{x})}_{\text{لاغر}}}\times\frac{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}}{\underbrace{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}}_{\text{چاق}}}=\lim_{x\to -۸}\frac{\cancel{(x+۸)}(-۶)(۴+۴+۴)}{۶\cancel{(۸+x)}}=\frac{(-۶)(۱۲)}{۶}=-۱۲$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^{۲}+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}}=\frac{۲(-۸)+۱۰}{\frac{۶}{(۳)(۴)}}=\frac{-۶}{\frac{۶}{۱۲}}=\frac{-۶}{\frac{۱}{۲}}=-۱۲$$

تست ۲۵: حد عبارت $\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^{۲}-۱۸x+۱۶}$ ، وقتی $x \to ۲$ ، کدام است؟ *(تجربی خارج-۹۸)*

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

پاسخ: ۴ **روش اول:**

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^{۲}-۱۸x+۱۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow[x-۲]{\text{تقسیم مخرج بر}}\begin{array}{r|l} ۵x^{۲}-۱۸x+۱۶ & x-۲ \\ \underline{-۵x^{۲}+۱۰x} & ۵x-۸ \\ -۸x+۱۶ & \\ \underline{۸x-۱۶} & \\ ۰ & \end{array}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{\overbrace{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}^{\text{لاغر}}}{(۵x-۸)(x-۲)}\times\frac{\overbrace{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}}}^{\text{چاق}}}{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}}}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۸-(۳x+۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۴+۴)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳x+۶}{(x-۲)(۲)(۱۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۲)}(۲۴)}=-\frac{۳}{۲۴}=-\frac{۱}{۸}$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^{۲}-۱۸x+۱۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}}}}{۱۰x-۱۸}=\frac{-\frac{۱}{۴}}{۲}=-\frac{۱}{۸}$$

تست ۲۶: حاصل $\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\tan^{۲}x-۱}{۲\cos^{۲}x-۱}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\tan^{۲}x-۱}{۲\cos^{۲}x-۱}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}-۱}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin^{۲}x-\cos^{۲}x}{\cos^{۲}x}}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{-\overbrace{(\cos^{۲}x-\sin^{۲}x)}^{\cos ۲x}}{\cos^{۲}x(\cos ۲x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{-\cancel{\cos ۲x}}{\cos^{۲}x(\cancel{\cos ۲x})}=\frac{-۱}{\frac{۱}{۲}}=-۲$$

تست ۲۷: اگر حاصل $\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{\sin^{۲}\pi x}{[x]+\cos\pi x}=a$ باشد، حاصل لگاریتم عدد a بر مبنای ۸ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: ۲

$$x\to ۱^{+}\Rightarrow ۱<x<۲\Rightarrow [x]=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱^{+}}\frac{\sin^{۲}\pi x}{۱+\cos\pi x}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^{+}}\frac{۱-\cos^{۲}\pi x}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{(۱-\cos\pi x)\cancel{(۱+\cos\pi x)}}{\cancel{(۱+\cos\pi x)}}=۱-\cos\pi$$

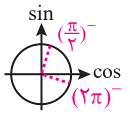
$$=۱-(-۱)=۲\Rightarrow a=۲\Rightarrow \log_{۸}a=\log_{۸}۲=\log_{۲^{۳}}۲=\frac{۱}{۳}\log_{۲}۲=\frac{۱}{۳}$$

تست ۲۸: حد عبارت $\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}]+\cos x[\sin ۲x]$ وقتی $x \to \pi$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

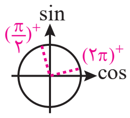
پاسخ: (۴) اگر $x \to \pi^-$ ، آن‌گاه $(\frac{x}{۲}) \to (\frac{\pi}{۲})^-$ و $۲x \to (۲\pi)^-$ ، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\pi^-}(\sin\frac{x}{۲}\underbrace{[\cos\frac{x}{۲}]}_{۰}+\cos x\underbrace{[\sin ۲x]}_{-۱})=\lim_{x\to\pi^-}(-\cos x)=-\cos\pi=-(-۱)=۱ \Leftarrow \begin{cases}[\cos\frac{x}{۲}]=[\cos(\frac{\pi}{۲})^-]=[۰^+]=۰\\ [\sin ۲x]=[\sin(۲\pi)^-]=[۰^-]=-۱\end{cases}$$



اگر $x \to \pi^+$ ، آن‌گاه $\frac{x}{۲} \to (\frac{\pi}{۲})^+$ و $۲x \to (۲\pi)^+$ ، بنابراین داریم:

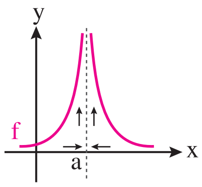
$$\lim_{x\to\pi^+}(\sin\frac{x}{۲}\underbrace{[\cos\frac{x}{۲}]}_{-۱}+\cos x\underbrace{[\sin ۲x]}_{۰})=\lim_{x\to\pi^+}(-\sin\frac{x}{۲})=-\sin\frac{\pi}{۲}=-۱ \Leftarrow \begin{cases}[\cos\frac{x}{۲}]=[\cos(\frac{\pi}{۲})^+]=[۰^-]=-۱\\ [\sin ۲x]=[\sin(۲\pi^+)]=[۰^+]=۰\end{cases}$$



چون حد چپ و راست برابر نشد، پس عبارت مذکور وقتی $x \to \pi$ حد ندارد.

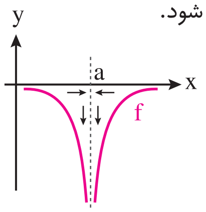
۶ـ۱۰ حد بی‌نهایت (حد نامتناهی)

تعریف ۱: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.



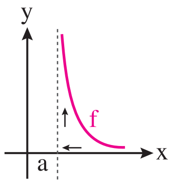
$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

تعریف ۲: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.



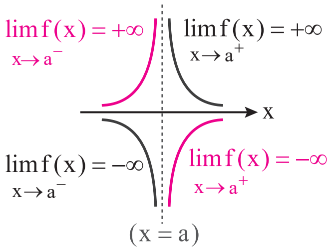
$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

تعریف ۳: فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.



$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

اگر بخواهیم حدهای یک‌طرفهٔ نامتناهی را در یک شکل رسم کنیم، به صورت زیر خواهند بود:



در مورد حدهای نامتناهی قضیهٔ زیر بدون اثبات ارائه می‌شود:

قضیه: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ در این صورت:

الف) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

ب) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

پ) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

ت) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

توجه کنید این قضیه برای حالتی که $x\to a^+$ و یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

۱. $\frac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty\ ,\ \frac{\text{عدد منفی}}{۰^+}=-\infty\ ,\ \frac{\text{عدد مثبت}}{۰^-}=-\infty\ ,\ \frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+}=+\infty$

۲. عبارت‌های $۱-\sin x$، $۱+\sin x$، $۱-\cos x$ و $۱+\cos x$ همواره نامنفی‌اند.

۳. صفر حدی (۰^+ یا ۰^-) یعنی یک عدد بسیار نزدیک به صفر اما خودِ صفر نیست؛ ولی صفر مطلق همان صفر واقعی است؛ در

نتیجه: $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰\ ,\ \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}=\text{مبهم}\ ,\ \frac{\text{هر عدد حقیقی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}\ ,\ \frac{\text{هر عدد حقیقی غیر صفر}}{\text{صفر حدی}}=\infty$

$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}\ ,\ \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}$

تست ۲۹: چه تعداد از حدهای زیر صحیح است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{-۱}{|x|}=-\infty$ پ) $\lim\limits_{x\to -۶}\frac{۹}{(x+۶)^۲}=+\infty$ ت) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-}\frac{-۳x}{x^۲-۴}=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x}=-\infty$ ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\tan x=+\infty$ چ) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}=+\infty$ ح) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}=+\infty$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: ۴

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$ (ص)

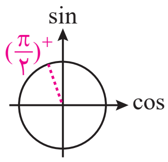
ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{-۱}{|x|}\xrightarrow[\text{مثبت هستند}]{\text{چه }۰^+\text{ چه }۰^-\text{ در قدر مطلق}}\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$ (ص)

پ) $\lim\limits_{x\to -۶}\frac{۹}{(x+۶)^۲}\xrightarrow[\text{مثبت است}]{\text{مخرج همواره}}\frac{۹}{۰^+}=+\infty$ (ص)

ت) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-}\frac{-۳x}{x^۲-۴}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تعیین علامت}}$

$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\xrightarrow[\text{است}]{\text{در }(-۲)^-\text{ عبارت }x^۲-۴\text{ مثبت}}\frac{(-۳)(-۲)}{۰^+}=\frac{۶}{۰^+}=+\infty$ (ص)

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x}$ 

$\xrightarrow{\text{مخرج }۰^-\text{ است}}\frac{۱}{۰^-}=-\infty$ (ص)

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\tan x=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$ (غ)

چ) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\frac{[۳^-]-۳}{۰^-}=\frac{۲-۳}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$ (ص)

ح) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}\xrightarrow[\text{مثبت هستند}]{\text{چه }\frac{۱}{۲}^+\text{ چه }\frac{۱}{۲}^-\text{ در قدر مطلق}}\frac{[\frac{۱}{۲}]-۳}{۰^+}=\frac{۰-۳}{۰^+}=\frac{-۳}{۰^+}=-\infty$ (غ)

تست ۳۰: اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۲x-۵}{x^۲+ax+b}=-\infty$ باشد، $b-a$ کدام است؟

۱) ۸-　　۲) ۸　　۳) صفر　　۴) ۱-

پاسخ: (۲) با میل کردن x به ۲، صورت کسر برابر ۱- می‌شود. چون حاصل حد، $-\infty$ شده پس مخرج کسر باید برابر صفر باشد؛ از طرفی مخرج کسر باید یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد تا حاصل حد همواره $-\infty$ شود، پس:

$$x^۲+ax+b=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۴,b=۴\Rightarrow b-a=۸$$

تست ۳۱: در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x+|x|}$، کدام بیان، درست است؟ *(تجربی-۹۸)*

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=+\infty$　　۲) $\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=+\infty$　　۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=-\infty$

پاسخ: (۴)

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+|x|}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲-۱}{x+|x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲-۱}{x-x}=\frac{-۱}{\text{صفرمطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

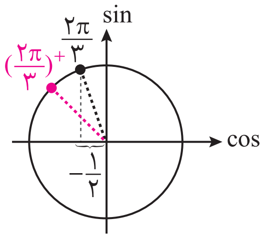
تست ۳۲: در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}$، کدام بیان، درست است؟ *(تجربی خارج-۹۸)*

۱) $\lim\limits_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+}f(x)=-\infty$　　۲) $\lim\limits_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+}f(x)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^-}f(x)=-\infty$　　۴) $\lim\limits_{x\to \frac{۴\pi}{۳}}f(x)=+\infty$

پاسخ: (۱)

گزینهٔ «۱»: وقتی $x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+$، صورت کسر برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و مخرج کسر به صفر میل می‌کند. حال باید دید که مخرج ۰^+ است یا ۰^- پس:



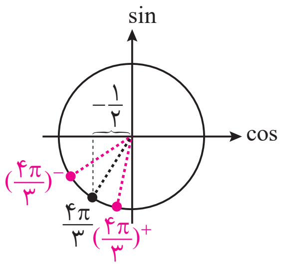
$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^-}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+(-۱)^-}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=-\infty$$

پس گزینهٔ «۱» صحیح و گزینهٔ «۲» نادرست است.

گزینهٔ «۳»:

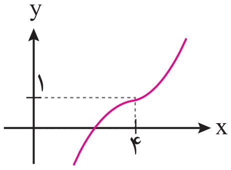
$$\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^-}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^+}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+(-۱)^+}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=+\infty$$

گزینهٔ «۴»: حد چپ و راست را به ازای $x\to\frac{۴\pi}{۳}$ محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{۴\pi}{۳}^+}\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\dfrac{-\sin\frac{\pi}{۳}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^+}=\dfrac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+(-۱)^+}=\dfrac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to\frac{۴\pi}{۳}^-}\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\dfrac{-\sin\frac{\pi}{۳}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^-}=\dfrac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+(-۱)^-}=\dfrac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to\frac{۴\pi}{۳}}f(x)=\text{وجودندارد}$$

تست ۳۳: اگر نمودار تابع f به صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x-7}{f(x)-1}$ کدام است؟



۱) $-\infty$

۲) صفر

۳) $+\infty$

۴) ۱

پاسخ: ۳

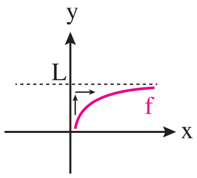
$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x-7}{f(x)-1} = \frac{4-7}{1^- -1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

۱۰ـ۷ حد در بی‌نهایت

این بخش را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

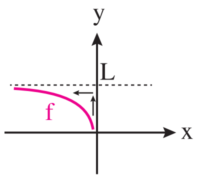
۱۰ـ۷ـ۱ حد در بی‌نهایت

اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آن که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

و اگر فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد؛ رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آن که x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیهٔ زیر مفیدند:

قضیهٔ ۱: فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت: الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}=0$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}=0$

قضیهٔ ۲: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=m$. در این صورت:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L\pm m$

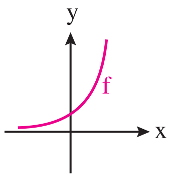
ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x).g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L.m$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = \frac{L}{m} (m\neq 0)$

این قضیه برای وقتی که $x\to-\infty$ نیز برقرار است.

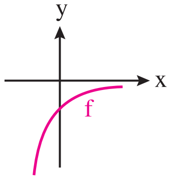
۱۰ـ۷ـ۲ حد نامتناهی در بی‌نهایت

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.



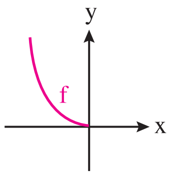
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

و اگر فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد؛ رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

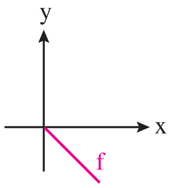


$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند:



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

از قضیهٔ زیر برای محاسبهٔ حد تابع یک‌جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم:

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر باشد:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (\text{a مثبت}) \\ -\infty & (\text{a منفی}) \end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (\text{n زوج و a مثبت}) \\ -\infty & (\text{n زوج و a منفی}) \\ -\infty & (\text{n فرد و a مثبت}) \\ +\infty & (\text{n فرد و a منفی}) \end{cases}$

قضیه: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x\to+\infty} ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^n$$

دقت کنید از قضیه می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ نیز استفاده کرد.

*۱. حد تابع $f(x) = \dfrac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + c}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + c'}$ وقتی $x \to \pm\infty$ (m و n اعداد طبیعی) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + c}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + c'} \simeq \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^m}{a'x^n} = \begin{cases} \pm\infty & m > n \\ \dfrac{a}{a'} & m = n \\ \text{صفر} & m < n \end{cases}$$

*۲. $a + \infty = +\infty, a - \infty = -\infty, a(+\infty) \xrightarrow{a>0} +\infty, a(-\infty) \xrightarrow{a>0} -\infty, a(+\infty) \xrightarrow{a<0} -\infty, a(-\infty) \xrightarrow{a<0} +\infty$

$+\infty + \infty = +\infty, -\infty - \infty = -\infty, +\infty - \infty = \text{مبهم}, -\infty + \infty = \text{مبهم}, (+\infty)(+\infty) = +\infty, (-\infty)(-\infty) = +\infty$

$(+\infty)(-\infty) = -\infty, (-\infty)(+\infty) = -\infty, (+\infty)^n = +\infty, (-\infty)^{2n} = +\infty, (-\infty)^{2n+1} = -\infty$ ، $\dfrac{\text{هرعدد حقیقی}}{\text{بی‌نهایت}} = \text{صفر}$

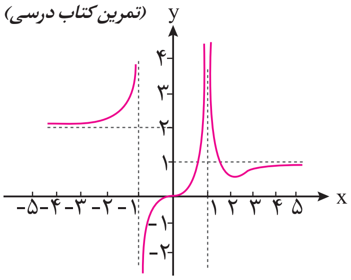
و $\dfrac{\text{بی‌نهایت}}{\text{هرعددحقیقی‌غیرازصفرمطلق}} = \text{بی نهایت}$

*۳. در برخی سـؤالات مانند $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x + \sqrt{9x^2 - x}$ ، با انتخاب جمله‌های پر توان داریم $3x + |3x| = 3x - 3x = 0$ که قابل قبول نیست و می‌بایست عبارت را گویا کرده و مجدداً حل نمایید:

$$\lim_{x\to-\infty} 3x + \sqrt{9x^2 - x} \times \frac{3x - \sqrt{9x^2 - x}}{3x - \sqrt{9x^2 - x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{9x^2 - 9x^2 + x}{3x - \sqrt{9x^2 - x}} \simeq \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3x - |3x|}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3x - (-3x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{6x} = \frac{1}{6}$$

تست ۳۴: **نمودار تابع f به شکل زیر است. چه تعداد از حدهای داده شده صحیح است؟** *(تمرین کتاب درسی)*



الف) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ ب) $\lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = -\infty$ پ) $\lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = +\infty$

ت) $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = +\infty$ ث) $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = +\infty$ ج) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = ۱$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: **۴**

الف) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = ۲$ (غ) ب) $\lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = +\infty$ (غ) پ) $\lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = -\infty$ (غ)

ت) $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = +\infty$ (ص) ث) $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = +\infty$ (ص) ج) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = ۱$ (ص)

تست ۳۵: **اگر $\lim_{x\to\infty} \frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲} = -۱$ ، آن‌گاه حد چپ این کسر در نقطهٔ $x=-۲$ کدام است؟**

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

پاسخ: **۳**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{|x^۲-۴|}^{\text{مثبت}}}{ax^۲-x+۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲} \xrightarrow[\text{توان صورت و مخرج یکسان است}]{\text{چون حاصل حد عدد غیرصفر شده، پس بزرگ‌ترین}} \lim_{x\to\infty} \frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲} \simeq \lim_{x\to\infty} \frac{x^۲}{ax^۲} = \frac{۱}{a} = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to (-۲)^-} \frac{\overbrace{|x^۲-۴|}^{\text{مثبت}}}{-x^۲-x+۲} = \lim_{x\to (-۲)^-} \frac{x^۲-۴}{-x^۲-x+۲} = \lim_{x\to (-۲)^-} \frac{(x-۲)\cancel{(x+۲)}}{-(x-۱)\cancel{(x+۲)}} = \frac{-۲-۲}{-(-۲-۱)} = \frac{-۴}{۳}$$

تست ۳۶: **نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}$ از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ کدام است؟** *(تجربی-۹۱)*

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

پاسخ: **۲** چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد پس $f(۲)=۱$:

$$f(۲) = ۱ \Rightarrow \frac{۲a+۱+\sqrt{۱۶+۹}}{۳(۲)-۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۲a+۱+۵}{۴} = ۱ \Rightarrow ۲a+۶ = ۴ \Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲} \simeq \lim_{x\to +\infty} \frac{-x+\sqrt{۴x^۲}}{۳x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x+|۲x|}{۳x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x+۲x}{۳x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{۳x} = \frac{۱}{۳}$$

تست ۳۷: **در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax^n+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}$ ، اگر $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -۱$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to ۳} f(x)$ کدام است؟** *(تجربی-۹۴)*

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: **۱** چون $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ برابر عددی غیرصفر شده، پس بزرگ‌ترین توان صورت با بزرگ‌ترین توان مخرج برابر بوده و مقدار آن برابر است با: $n=۱$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{ax+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}} \simeq \lim_{x\to -\infty} \frac{ax}{۳x-\sqrt{۴x^۲}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{ax}{۳x-|۲x|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{ax}{۳x+۲x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{ax}{۵x} = \frac{a}{۵} = -۱ \Rightarrow a = -۵$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳} f(x) = \lim_{x\to ۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}} = \frac{۰}{۰}$$

به دو روش ادامهٔ سؤال حل می‌شود:

روش اول:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}} \times \frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}} = \lim_{x\to ۳} \frac{-۵(x-۳)(۱۸)}{\underbrace{۹x^۲-۴x^۲-۱۵x}_{۵x^۲-۱۵x}} = \lim_{x\to ۳} \frac{-۵\cancel{(x-۳)}(۱۸)}{۵x\cancel{(x-۳)}} = \frac{-۵\times ۱۸}{۵\times ۳} = -۶$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۳} \frac{-۵}{۳-\frac{۸x+۱۵}{۲\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}} = \frac{-۵}{۳-\frac{۳۹}{۱۸}} = \frac{-۵}{۳-\frac{۱۳}{۶}} = \frac{-۵}{\frac{۵}{۶}} = -۶$$

تست ۳۸: **اگر** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=۳$ **باشد، آن‌گاه حد این کسر، وقتی** $x\to۳$ **کدام است؟** *(تجربی ـ ۹۲)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: ۳ چون حد عبارت وقتی $x\to+\infty$ برابر عدد غیرصفر شــده، پس بزرگ‌ترین تــوان صورت با بزرگ‌ترین توان مخرج برابر بوده و مقدار آن برابر است با: ۱

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}\simeq\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=-a=۳\Rightarrow a=-۳\Rightarrow\lim_{x\to۳}\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\frac{۰}{۰}$$

به دو روش ادامهٔ سؤال را حل می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x\to۳}\frac{-۳(x-۳)}{۱-x+\sqrt{x+۱}}\times\frac{۱-x-\sqrt{x+۱}}{۱-x-\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to۳}\frac{-۳(x-۳)(-۴)}{(۱-x)^۲-(x+۱)}=\lim_{x\to۳}\frac{۱۲(x-۳)}{x^۲-۳x}=\lim_{x\to۳}\frac{۱۲\cancel{(x-۳)}}{x\cancel{(x-۳)}}=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

روش دوم: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to۳}\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۳}\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}=\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{-۳}{-\frac{۳}{۴}}=۴$$

تست ۳۹: **اگر** $f(x)=۲x+\sqrt{۴x^۲+x}$ **باشد، حاصل** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ **، کدام است؟** *(تجربی ـ ۹۸)*

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

پاسخ: ۳ طبق نکتهٔ ۳ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}۲x+\sqrt{۴x^۲+x}\times\frac{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}}{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x^۲-(۴x^۲+x)}{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}}\simeq\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x-\sqrt{۴x^۲}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x-|۲x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x-(-۲x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۴x}=-\frac{۱}{۴}$$

تست ۴۰: **اگر** $f(x)=x-\sqrt{۴x^۲+x}$ **باشد، حاصل** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ **کدام است؟** *(تجربی خارج ـ ۹۸)*

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: ۴

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+x}}{x}\simeq\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|۲x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-(-۲x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{x}=۳$$

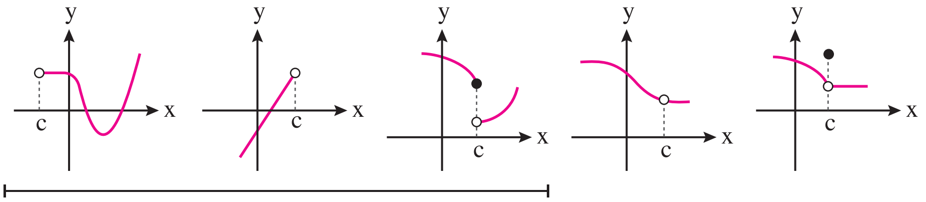
۱۰ـ۸ پیوستگی

دو نوع پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

۱۰ـ۸ـ۱ پیوستگی در نقطه

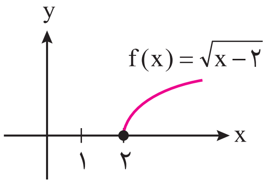
تابع f در نقطهٔ $x=c$ را پیوسته نامیم؛ هرگاه: $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)\,(c\in\mathbb{R})$

به عبارت دیگر برای آن که تابع f در c پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجود و با هم برابر باشند. در غیر این صورت تابع را در c ناپیوسته می‌نامیم. نمودارهای زیر همه در نقطهٔ c ناپیوسته هستند.



$\lim\limits_{x\to c}f(x)$ وجود ندارد — $f(c)$ وجود ندارد — $\lim\limits_{x\to c}f(x)\neq f(c)$

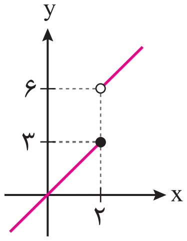
پیوستگی راست: تابع f را در $x=c$ از طرف راست پیوسته می‌نامیم؛ هرگاه $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)$. در این صورت می‌گوییم f در $x=c$ پیوستگی راست دارد. مثال:



$$\lim_{x\to ۲^+}\sqrt{x-۲}=\sqrt{۲-۲}=۰,\ \lim_{x\to ۲^-}\sqrt{x-۲}=\text{وجودندارد},f(۲)=\sqrt{۲-۲}=۰$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)\to$ این‌تابع در $x=۲$ از راست پیوسته است

پیوستگی چپ: تابع f را در $x=c$ از طرف چپ پیوسته می‌نامیم؛ هرگاه $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)$. در این صورت گوییم f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد. مثال:



$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۶,\ \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۳,\ f(۲)=۳$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)\to$ این‌تابع در $x=۲$ از چپ پیوسته‌است

نتیجه: تابع f در $x=c$ پیوسته است، هرگاه f در c، هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد:

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$$

فرض کنید تابع f در یک همسایگی $x=a$ پیوسته باشد، در این صورت:

الف) اگر $f(a)$ عددی غیرصحیح باشد، تابع $y=[f(x)]$ در $x=a$ پیوسته است.

ب) اگر $f(a)$ عددی صحیح باشد و در یک همسایگی a، تابع f، اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه تابع $y=[f(x)]$ در $x=a$ فقط از راست پیوسته است.

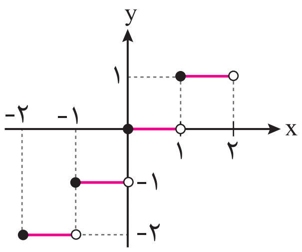
پ) اگر $f(a)$ عددی صحیح باشد و در یک همسایگی a، تابع f، اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه تابع $y=[f(x)]$ در $x=a$ فقط از چپ پیوسته است.

تست ۴۱: تابع $f(x)=[x]$ در نقاط .... پیوسته و در نقاط .... ناپیوسته است. *(تمرین کتاب درسی)*

۱) $\mathbb{R}$ ، $\varnothing$ ۲) $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}$ ۴) $\varnothing$ ، $\mathbb{R}$

پاسخ: ۳

با توجه به نمودار تابع، در نقاط صحیح $(\mathbb{Z})$ ناپیوسته و در سایر نقاط $(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$ پیوسته است.



تست ۴۲: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & ; \ |x|>۱\\ ۲x & ; \ |x|\le ۱\end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- چگونه است؟

۱) در ۱- ناپیوسته، در ۱ ناپیوسته

۲) در ۱- ناپیوسته، در ۱ پیوسته

۳) در ۱- پیوسته، در ۱ پیوسته

۴) در ۱- پیوسته، در ۱ ناپیوسته

پاسخ: ۴

$$f(x)=\begin{cases}x-۱ & ; \ x>۱ \text{ یا } x<-۱\\ ۲x & ; \ -۱\le x\le ۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x-۱)=۱-۱=۰,\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲x)=۲(۱)=۲, f(۱)=۲\to \text{در } x=۱ \text{ ناپیوسته‌است}\\ \lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^+}(۲x)=۲(-۱)=-۲,\ \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^-}(x-۱)=-۱-۱=-۲, f(-۱)=-۲\to \text{در } x=-۱ \text{ پیوسته است}\end{cases}$$

تست ۴۳: به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x\neq 0\\ a & ; x=0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟ *(تجربی-۹۵)*

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینهٔ ۱

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}\times\frac{\cos x+\sqrt{\cos x}}{\cos x+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos x}{(1-\cos^2 x)(2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x-1)}{(1-\cos x)(1+\cos x)(2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)(2)}=\frac{-1}{4}$$

تست ۴۴: اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax+3} & ; x<1\\ x^2+ax & ; x\geq 1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد، $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟ *(تجربی خارج-۹۷)*

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+ax)=1+a,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(\sqrt{ax+3})=\sqrt{a+3}\xrightarrow[\text{در } x=1]{\text{شرط وجود حد}}\underbrace{a+1}_{*}=\sqrt{a+3}\Rightarrow a+3=(a+1)^2$$

$$\Rightarrow a^2+2a+1=a+3\Rightarrow a^2+a-2=0\xrightarrow{a+b+c=0}a_1=1,a_2=-2\xrightarrow[\text{حاصل رادیکال (*) را منفی می‌کند}]{\text{a=-2 غیرقابل‌قبول است چون}}a=1$$

$$\Rightarrow f(-\frac{3}{4})=\sqrt{-\frac{3}{4}+3}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}=1/5$$

تست ۴۵: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax+2^{x-3} & ; x<3\\ a\log_2(1+x) & ; x\geq 3\end{cases}$، در نقطهٔ $x=3$ پیوسته است. $f(2)$ کدام است؟ *(تجربی-۹۷)*

۱) -۲ ۲) -۱/۵ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(a\log_2(1+x)\right)=a\log_2 4=a\log_2 2^2=2a,\ \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(ax+2^{x-3})=3a+2^0=3a+1$$

$$\xrightarrow[\text{در } x=3]{\text{شرط وجود حد}}3a+1=2a\Rightarrow a=-1\Rightarrow f(2)=-2+2^{2-3}=-2+2^{-1}=-2+\frac{1}{2}=-1/5$$

تست ۴۶: به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8+x^3}{|x+2|} & ; x\neq -2\\ a & ; x=-2\end{cases}$، در نقطهٔ $x=-2$، فقط از چپ پیوسته است؟ *(تجربی-۹۸)*

۱) -۱۲ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

شرط پیوستگی از چپ: $\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=f(-2)\Rightarrow \lim_{x\to(-2)^-}\frac{8+x^3}{|x+2|}=\frac{0}{0}\xrightarrow[x\to(-2)^- \text{منفی می‌شود}]{\text{داخل قدرمطلق به ازای}}$

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{\overbrace{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}^{\text{چاق و لاغر}}}{-\cancel{(x+2)}}=-12\Rightarrow a=-12$$

تست ۴۷: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2|x-2|} & ; x\neq 2\\ 2 & ; x=2\end{cases}$، از نظر پیوستگی در $x=2$، چگونه است؟ *(تجربی خارج-۹۸)*

۱) از چپ پیوسته ۲) پیوسته

۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته ۴) از راست پیوسته

پاسخ: گزینهٔ ۴

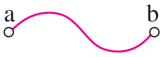
$f(2)=2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{2|x-2|}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{2|\underbrace{x-2}_{\text{مثبت}}|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{2\cancel{(x-2)}}=\frac{4}{2}=2=f(2)\Rightarrow$$ تابع در $x=2$ از راست پیوسته است.

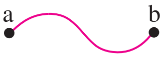
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{2|x-2|}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{2|\underbrace{x-2}_{\text{منفی}}|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{-2\cancel{(x-2)}}=\frac{4}{-2}=-2\neq f(2)\Rightarrow$$ تابع f در $x=2$ از چپ ناپیوسته است.

۱۰ـ۸ـ۲ پیوستگی در بازه

پیوستگی در بازهٔ (a,b): تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است؛ هرگاه در هر نقطهٔ این بازه پیوسته باشد.

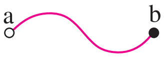


پیوستگی در بازهٔ $[a,b]$: تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است؛ هرگاه در بازهٔ (a,b) پیوسته و در نقطهٔ a پیوستهٔ راست و در نقطهٔ b پیوستهٔ چپ باشد.



پیوستگی در بازهٔ $[a,b)$: تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ پیوسته است؛ هرگاه در بازهٔ (a,b) پیوسته و در نقطهٔ a پیوستهٔ راست باشد.

پیوستگی در بازهٔ $(a,b]$: تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ پیوسته است؛ هرگاه در بازهٔ (a,b) پیوسته و در نقطهٔ b پیوستهٔ چپ باشد.



۱. به‌طور کلی اگر نمودار تابع f در هیچ نقطه‌ای از دامنهٔ تعریفش، بریدگی نداشته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامند.

۲. به‌طور کلی توابع چندجمله‌ای، رادیکالی، کسری و چندضابطه‌ای، در دامنهٔ خودشان پیوسته‌اند. دقت کنید در توابع چندضابطه‌ای در نقاط مرزی دامنه‌ها خطر ناپیوستگی وجود دارد.

۳. اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.

تست ۴۸: **اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax+b & ; \ x>۲ \\ x^۲+bx-۱ & ; \ x<۲ \end{cases}$ با شرط $f(۲)=۵$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟**

(تجربی خارج ـ ۹۱)

۱) ۱-　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: ۳ تابع f در همه جا پیوسته است و فقط می‌بایست نقطهٔ مرزی یعنی $x=۲$ را بررسی کنیم تا در آن نقطه نیز پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲) \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲a+b,\ \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۲^۲+۲b-۱=۳+۲b, f(۲)=۵$$

$$\Rightarrow ۳+۲b=۵ \Rightarrow ۲b=۲ \Rightarrow b=۱, ۲a+b=۵ \xrightarrow{b=۱} ۲a=۵-۱=۴ \Rightarrow a=۲$$

تست ۴۹: **به ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x[x] & ; \ |x|<۱ \\ ax+b & ; \ |x|\geq ۱ \end{cases}$، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. $a\times b$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$　　۳) $-\frac{۱}{۲}$　　۴) $-\frac{۱}{۴}$

پاسخ: ۴ تابع بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در نقاط مرزی $x=۱$ و $x=-۱$ نیز پیوسته است:

$$f(x)=\begin{cases} x[x] & ; \ -۱<x<۱ \\ ax+b & ; \ x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} x[x]=(-۱)[(-۱)^+]=(-۱)(-۱)=۱ \quad , \quad \lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} ax+b=a(-۱)+b=-a+b=f(-۱)$$

$$\Rightarrow -a+b=۱ \Rightarrow a=b-۱ \ (I)$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} ax+b=a+b=f(۱)\ , \ \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} x[x]=۱[۱^-]=۱(۰)=۰ \Rightarrow a+b=۰ \ (II)$$

$$\Rightarrow a+b=۰ \xrightarrow[a=b-۱]{\text{طبق (I) داریم}} b-۱+b=۰ \Rightarrow ۲b=۱ \Rightarrow b=\frac{۱}{۲} \ , \ a=b-۱=\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow a\times b=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}$$

تست ۵۰: **به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ** $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & ; \quad 1\le x\le 6\\ a+\cos^2\frac{\pi x}{36} & ; \quad x>6\end{cases}$ **، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟** *(تجربی-۹۴)*

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: ۲ حد چپ و راست و مقدار تابع باید در نقطهٔ مرزی $x=6$ برابر باشند، پس:

$$\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+} a+\cos^2\frac{\pi x}{36}=a+\cos^2\frac{6\pi}{36}=a+\cos^2\frac{\pi}{6}=a+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=a+\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$f(6)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

پیوست

در این چند صفحه، می‌توان نکات مهمّ پایه‌ای و مطالبی را که حس کردم ممکن است، شما عزیزان بلد نباشید، آورده‌ام. این نکات در روند حل تست‌ها بسیار به شما کمک می‌کند و توصیه می‌کنم آن‌ها را خوب فرابگیرید.

۱. برخی توان‌های عدد ۲ را حفظ باشید:

$۲^{۳}=۸ \ , \ ۲^{۴}=۱۶ \ , \ ۲^{۵}=۳۲ \ , \ ۲^{۶}=۶۴ \ , \ ۲^{۷}=۱۲۸ \ , \ ۲^{۸}=۲۵۶ \ , \ ۲^{۹}=۵۱۲ \ , \ ۲^{۱۰}=۱۰۲۴$

۲. برخی توان‌های عدد ۳ را حفظ باشید:

$۳^{۳}=۲۷ \ , \ ۳^{۴}=۸۱ \ , \ ۳^{۵}=۲۴۳ \ , \ ۳^{۶}=۷۲۹$

۳. برخی توان‌های عدد ۵ را حفظ باشید:

$۵^{۳}=۱۲۵ \ , \ ۵^{۴}=۶۲۵ \ , \ ۵^{۵}=۳۱۲۵$

۴. برخی توان‌های عدد ۶ را حفظ باشید:

$۶^{۳}=۲۱۶ \ , \ ۶^{۴}=۱۲۹۶$

۵. برخی توان‌های عدد ۷ را حفظ باشید:

$۷^{۳}=۳۴۳ \ , \ ۷^{۴}=۲۴۰۱$

۶. تفاوت جذر با مجذور: جذر یعنی رادیکال با فرجهٔ دو و مجذور یعنی توان دوم یک عدد. مثال:

$۴^{۲}=۱۶ \xleftarrow{\text{مجذور}} ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{۴}=۲$

۷. مجذور اعداد زیر را حفظ باشید:

$۱۰^{۲}=۱۰۰ \ , \ ۱۱^{۲}=۱۲۱ \ , \ ۱۲^{۲}=۱۴۴ \ , \ ۱۳^{۲}=۱۶۹ \ , \ ۱۴^{۲}=۱۹۶ \ , \ ۱۵^{۲}=۲۲۵ \ , \ ۱۶^{۲}=۲۵۶$

$۱۷^{۲}=۲۸۹ \ , \ ۱۸^{۲}=۳۲۴ \ , \ ۱۹^{۲}=۳۶۱ \ , \ ۲۰^{۲}=۴۰۰ \ , \ ۲۱^{۲}=۴۴۱ \ , \ ۲۲^{۲}=۴۸۴ \ , \ ۲۳^{۲}=۵۲۹ \ , \ ۲۴^{۲}=۵۷۶$

۸. برای ضرب اعداد دو رقمی یکسان با یکان ۵ کافی‌است عدد ۲۵ را در سمت راستِ عدد حاصل نوشته و سمتِ چپِ ۲۵ را از ضرب (۱+ صدگان) (صدگان) به دست آورید، پس:

$$\begin{array}{r} \overset{۲}{\cancel{۱}}۵ \\ \times\ ۱۵ \\ \hline ۲۲۵ \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{۳}{\cancel{۲}}۵ \\ \times\ ۲۵ \\ \hline ۶۲۵ \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{۴}{\cancel{۳}}۵ \\ \times\ ۳۵ \\ \hline ۱۲۲۵ \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{۵}{\cancel{۴}}۵ \\ \times\ ۴۵ \\ \hline ۲۰۲۵ \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{۶}{\cancel{۵}}۵ \\ \times\ ۵۵ \\ \hline ۳۰۲۵ \end{array} \quad , \quad \ldots$$

۹. حاصل کسرهای زیر را حفظ باشید:

$\frac{۱}{۴}=۰/۲۵ \ , \ \frac{۱}{۵}=۰/۲ \ , \ \frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵ \ , \ \frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵ \ , \ \frac{۳}{۴}=۰/۷۵ \ , \ \frac{۵}{۴}=۱/۲۵ \ , \ \frac{۷}{۴}=۱/۷۵ \ , \ \frac{۹}{۴}=۲/۲۵$

۱۰. حاصل جذرهای روبه‌رو را حفظ باشید:

$\sqrt{۲}\simeq۱/۴ \ , \ \sqrt{۳}\simeq۱/۷ \ , \ \sqrt{۵}\simeq۲/۲$

۱۱. بهتر است بدانید:

$\log ۲=۱-\log ۵ \ , \ \log ۵=۱-\log ۲$

۱۲. حاصل فاکتوریل‌های روبه‌رو را حفظ باشید:

$۲!=۲ \ , \ ۳!=۶ \ , \ ۴!=۲۴ \ , \ ۵!=۱۲۰ \ , \ ۶!=۷۲۰$

۱۳. حاصل ترکیب‌های روبه‌رو را حفظ باشید:

$\binom{۵}{۲}=\binom{۵}{۳}=۱۰ \ , \ \binom{۶}{۳}=۲۰ \ , \ \binom{۸}{۳}=\binom{۸}{۵}=۵۶$

۱۴. اعداد بخش‌پذیر بر ۲: اعدادی که زوج هستند؛ مثل:

۴ , ۶ , ۱۱۲ , ۱۲۵۸ , ...

۱۵. اعداد بخش‌پذیر بر ۳: اعدادی که مجموع ارقامشان بر ۳ بخش‌پذیر است؛ مثل:

۱۲ , ۱۲۶ , ۱۰۰۸ , ...

۱۶. اعداد بخش‌پذیر بر ۵: اعدادی که یکانشان صفر یا پنج باشد؛ مثلِ:

۱۰ , ۱۰۰۵ , ۳۲۳۵ , ...

۱۷. اعداد بخش‌پذیر بر ۶: اعدادی که زوج هستند و بر ۳ بخش‌پذیرند؛ مثل:

۱۲ , ۱۳۳۲ , ...

۱۸. اعداد اول: اعدادی هستند که فقط بر یک و خودشان بخش‌پذیر هستند؛ مثل:

۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۳ , ۲۳ , ...

ضمناً عدد ۱، اول نیست.

۱۹. طریقهٔ تبدیل عدد مخلوط به کسر متعارف:

$$a\frac{b}{c}=\frac{(a\times c)+b}{c}$$

۲۰. تفاضل a از b یعنی: $b-a$

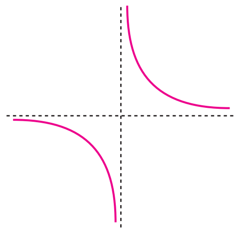
۲۱. اولویت اعمال ریاضی: اول پرانتز، دوم توان، سوم ضرب و تقسیم و چهارم جمع و تفریق

۲۲. $f^{2}(x)$ با $f(x^{2})$ متفاوت است. در اولی $f(x)$ را به توان ۲ می‌رسانیم اما در دومی x^{2} را به جای x ها در $f(x)$ قرار می‌دهیم.

۲۳. تفکیک کسرها: دقت کنید کسر $\frac{a}{b+c}$ را نمی‌توان تفکیک کرد، اما کسر $\frac{a+b}{c}$ را می‌توان تفکیک کرد:

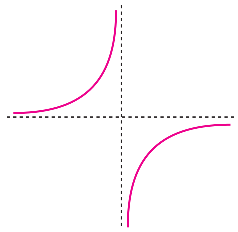
$$\frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\ ,\ \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

۲۴. در تابع هموگرافیک به صورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ دو حالت زیر صادق است:



$ad-bc<0$

(در محدودهٔ تعریف، نزولی است.)



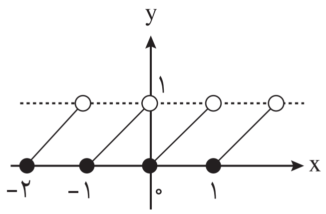
$ad-bc>0$

(در محدودهٔ تعریف، صعودی است.)

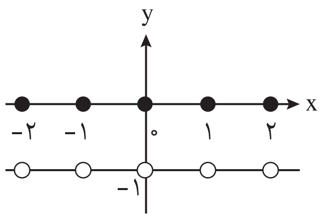
۲۵. دقت کنید که منفی در پشت پرانتز در همهٔ عوامل داخل پرانتز ضرب می‌شود، پس:

$$\frac{1}{x}-\frac{x-1}{3}=\frac{3-x(x-1)}{3x}=\frac{3-x^{2}+x}{3x}$$

۲۶. دو نمودار رایج در جزء صحیح:

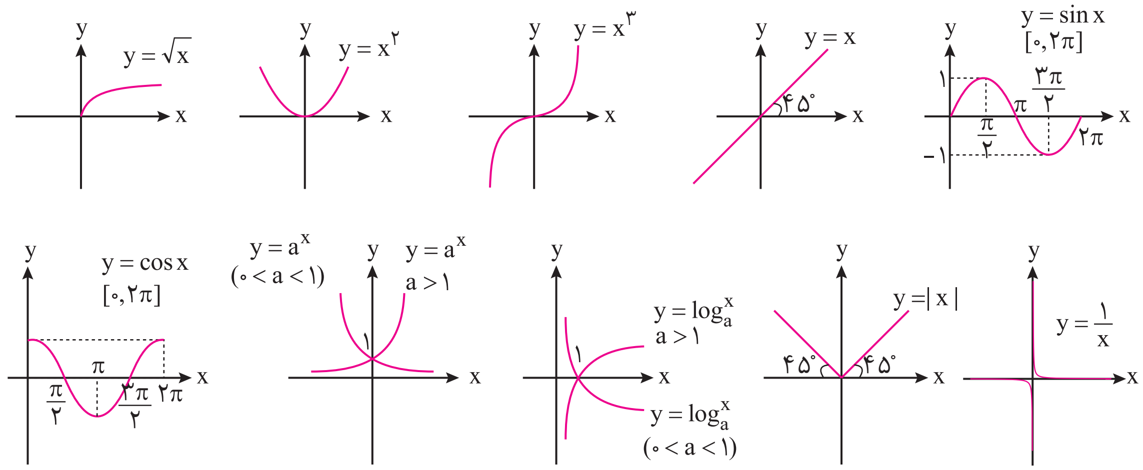


$y=x-[x]$



$y=[x]+[-x]$

۲۷. نمودارهای زیر را به خاطر مبحث انتقال به خاطر بسپارید:



۲۸. تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای: برای تقسیم، حتماً در ابتدا جملات مقسوم و مقسوم‌علیه را از بزرگ‌ترین توان به کوچک‌ترین توان بنویسید، یعنی به صورت نزولی مرتب کنید. سپس اولین جملهٔ مقسوم را بر اولین جملهٔ مقسوم‌علیه تقسیم نموده و جواب را در محل خارج‌قسمت بنویسید و سپس جواب را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و علامت آن را عوض کنید و زیر مقسوم بنویسید و با مقسوم جمع کنید و این عمل را آن قدر ادامه دهید تا درجهٔ باقی‌مانده از مقسوم‌علیه کم‌تر شود.

مقسوم

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 - x^3 + 5 & x^2 + x \quad \text{مقسوم‌علیه} \\ \cline{2-2} -4x^4 - 4x^3 & 4x^2 - 5x + 5 \quad \text{خارج از قسمت} \\ \cline{1-1} -5x^3 + 5 & \\ 5x^3 + 5x^2 & \\ \cline{1-1} 5x^2 + 5 & \\ -5x^2 - 5x & \\ \cline{1-1} -5x + 5 \quad \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad (4x^2 - 5x + 5)(x^2 + x) + (-5x + 5) = 4x^4 - x^3 + 5$$

۲۹. به سه‌تایی‌های فیثاغورسی زیر دقت کنید:

$$(3k, 4k, 5k) \quad , \quad (5k, 12k, 13k) \quad , \quad (7k, 24k, 25k) \quad , \quad (8k, 15k, 17k) \quad \rightarrow \quad k \in \mathbb{N}$$

۳۰. برای محاسبهٔ تعداد اعداد صحیح بین دو عدد صحیح a و b داریم:

$$\boxed{1}\ a \le x \le b \Rightarrow n(x) = b - a + 1 \qquad \boxed{2}\ a < x < b \Rightarrow n(x) = b - a - 1 \qquad \boxed{3}\ \begin{cases} a \le x < b \\ a < x \le b \end{cases} \Rightarrow n(x) = b - a$$

۳۱. برای پیدا کردن ب.م.م و ک.م.م A و B ابتدا A و B را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم؛ سپس داریم:

ب.م.م ⟸ حاصل‌ضرب عوامل مشترک با کم‌ترین توان.

ک.م.م ⟸ حاصل‌ضرب عوامل مشترک با بیش‌ترین توان در عوامل غیرمشترک.

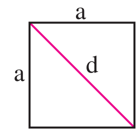
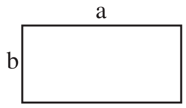
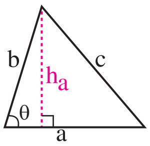
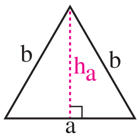
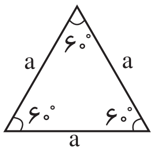
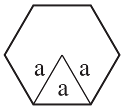
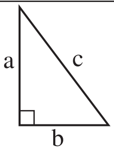
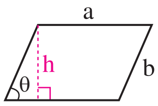
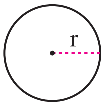
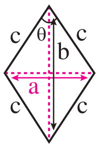
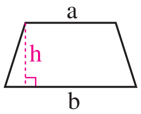
$$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) \quad , \quad x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4) \quad \Rightarrow \quad \text{ب.م.م} = (x+2) \quad , \quad \text{ک.م.م} = (x+2)(x+4)(x-4)$$

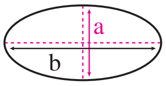
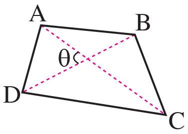
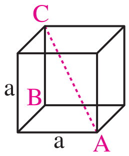
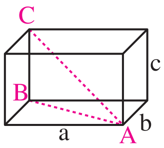
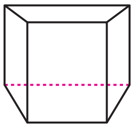
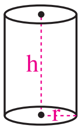
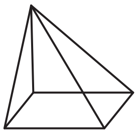
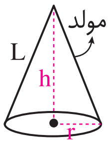
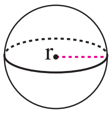
$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \quad , \quad 198 = 2 \times 3^2 \times 11 \quad \Rightarrow \quad \text{ب.م.م} = 2 \times 3 = 6 \quad \text{و} \quad \text{ک.م.م} = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 13860$$

توجه کنید اگر دو عدد، عامل اول مشترک نداشته باشند، ب.م.م برابر ۱ است. ضمناً برای هر دو عدد طبیعی a و b داریم:

$$\text{ک.م.م}\ b,a = \frac{ab}{\text{ب.م.م}\ b,a}$$

۳۲. اگر مساحت را با S و محیط را با P و حجم را با V نمایش دهیم، داریم:

۱	مربع		$P=۴a$ $S=a^{۲}$ (قطر) $d=a\sqrt{۲}$
۲	مستطیل		$P=۲(a+b)$ $S=ab$
۳	مثلث		$P=a+b+c$ $S=\frac{۱}{۲}a(h_a)$ $S=\frac{۱}{۲}ab(\sin\theta)$
۴	مثلث متساوی‌الساقین		$P=a+۲b$ $S=\frac{۱}{۲}a(h_a)$
۵	مثلث متساوی‌الاضلاع		$P=۳a$ $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ (ارتفاع)$h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$
۶	شش‌ضلعی منتظم		$P=۶a$ $S=۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴})a^{۲}$
۷	مثلث قائم‌الزاویه		$P=a+b+c$ $S=\frac{۱}{۲}(ab)$
۸	متوازی‌الاضلاع		$P=۲(a+b)$ $S=ah$ $S=ab\sin\theta$
۹	دایره		$P=۲\pi r$ $S=\pi r^{۲}$
۱۰	لوزی		$P=۴c$ $S=\frac{۱}{۲}(ab)$ $S=c^{۲}\sin\theta$
۱۱	ذوزنقه		P = جمع اضلاع $S=\frac{۱}{۲}\times(a+b)\times h$

۱۲	بیضی		$S = \pi ab$
۱۳	هر چهارضلعی دلخواه		$S = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin\theta$
۱۴	مکعب		(قطر وجه) $AB = a\sqrt{2}$ (قطر مکعب) $AC = a\sqrt{3}$ $S_{\text{جانبی}} = 4a^2$ $S_{\text{کل}} = 6a^2$ $V = a^3$
۱۵	مکعب مستطیل		(قطر وجه) $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ (قطر مکعب مستطیل) $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $S_{\text{کل}} = 2(ab + ac + bc)$ $V = abc$
۱۶	منشور		$V =$ مساحت قاعده × ارتفاع $S_{\text{جانبی}} =$ محیط قاعده × ارتفاع $S_{\text{کل}} =$ S جانبی + دوبرابر S قاعده
۱۷	استوانه		$V = \pi r^2 h$ $S_{\text{جانبی}} = 2\pi rh$ $S_{\text{کل}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
۱۸	هرم		$V = \frac{1}{3}(S_{\text{قاعده}}) \times h$
۱۹	مخروط		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $S_{\text{جانبی}} = \pi rL$
۲۰	کره		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $S_{\text{کل}} = 4\pi r^2$