پیشگفتار

به نام خدا

«مایل نیســتم نوشــته‌هایم دیگران را از زحمت فکر کردن معاف کنند، بلکه می‌خواهم در صورت امکان افراد را تحریک کنند که خود به تفکر بپردازند.»
لودویگ ویتگنشتاین

با این‌که پیش از این در درس‌های ریاضی هندســه خوانده‌اید، اما اولین بار اســت که درسی مستقل به نام هندسه دارید. هندســه خواندن، حتی در مقایسه با موضوعات دیگر ریاضی، حال و هوای خاصی دارد. این کتاب، آموزش هندسه‌ی پایه‌ی دهم با تکیه بر حل مسئله است.

هر فصل کتاب، مطابق کتاب درســی، به چند درس تقســیم شده است. در هر درس تعریف‌ها و نکات اصلی را با آوردن چند مثال به روشــنی بیان کرده‌ایم. همین‌طور، همه‌ی قضیه‌ها را به طور کامل ثابت کرده‌ایم. همه جا به چارچوب کتاب درســی پایبند بوده‌ایم. با این همه، در چند مورد قضیه‌هایی را آورده‌ایم که به نظرمان به درک بهتر مطالب اصلی کمک می‌کنند. علاوه بر این‌ها، با آوردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، نحوه‌ی استفاده از قضیه‌ها را کامل آموزش داده‌ایم. در انتهای هر درس، تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای مناسب آن درس را آورده‌ایم، که راه‌حل همه‌ی آن‌ها در انتهای فصل آمده است.

پیش از هر چیز، این نکته‌ی مهم را به خاطر داشته باشید که سرعت خواندن در هندسه، کم‌تر از درس‌های دیگر است. همیشه باید درباره‌ی آنچه که می‌خوانید تفکر و پرسش کنید، نه این‌که صرفاً قضیه‌ها را حفظ کنید و راه‌حل مسئله‌ها را به خاطر بسپارید. به این ترتیب، هنگام مطالعه، حتماً به استدلال‌ها دقت کنید و مطمئن شوید می‌فهمید که چرا این کارها را در روند اثبات یا راه‌حل انجام داده‌ایم. همین‌طور، همواره کاغذ و قلم در کنار خود داشــته باشــید و سعی کنید آن‌چه را می‌خوانید برای خودتان توضیح دهید. همچنین، بهتر است زمانی که به مسئله، تست یا تمرین می‌رسید، سعی کنید خودتان آن را حل کنید. اگر مسئله‌ای را حل کردید یا از حل کردن آن ناامید شدید، حتماً راه‌حل ما را هم ببینید، زیرا ممکن است روش آن برای شما آموزنده باشد.

وظیفه‌ی خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها عاطفه ربیعی و مریم موحدی‌مهر برای مطالعه و ویرایش کتاب و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم.

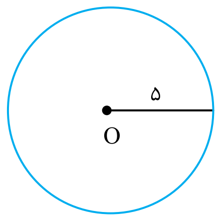
مؤلفان

فهرست

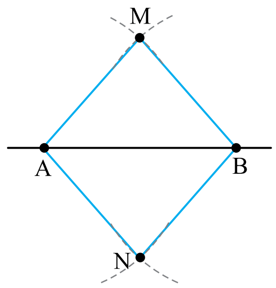
درس اول: ترسیم‌های هندسی

با این‌که در هندسه برای اثبات قضیه‌ها و حل کردن مسأله‌ها ترسیم شکل‌ها خیلی مهم است، اما خیلی مواقع ترسیم حدودی و غیر دقیق شکل‌ها هم برای برآوردن منظورمان کافی است. با این حال، مواردی پیش می‌آید که ترسیم دقیق مهم است، مثلاً، هنگام ترسیم نقشه‌ی راه‌ها، نقشه‌ی ساختمان، یا حتی نقشه‌ی ابزار ساده یا پیچیده. در این درس، با ترسیم‌های مهم به کمک خط‌کش و پرگار آشنا می‌شویم.

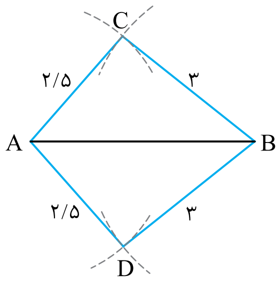
فرض کنید O نقطه‌ای در صفحه باشد. اگر به مرکز O دایره‌ای به شعاع ۵ رسم کنیم، فاصله‌ی همه‌ی نقطه‌های روی این دایره تا نقطه‌ی O برابر با ۵ است. در ضمن، هیچ نقطه‌ی دیگری در صفحه نیست که فاصله‌اش تا نقطه‌ی O برابر با ۵ باشد.



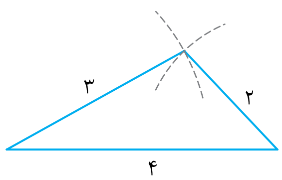
فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه باشند. اگر دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنیم و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان بزنیم، این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این نقطه‌ها را M و N بنامید. در این صورت فاصله‌ی M و N از A و B یکسان است.



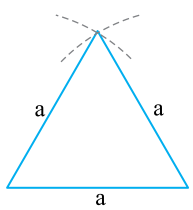
فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر باشند. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۲/۵ سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی A کمانی می‌زنیم. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی B کمانی می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این دو نقطه را C و D بنامید. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی C تا نقطه‌ی A برابر با ۲/۵ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با ۳ سانتی‌متر است. همین‌طور، فاصله‌ی نقطه‌ی D تا نقطه‌ی A برابر با ۲/۵ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با ۳ سانتی‌متر است.



مثال: می‌خواهیم مثلثی به طول ضلع‌های ۲، ۳ و ۴ رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی به طول ۴ رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس از یک سر آن کمانی به شعاع ۲ و از سر دیگر آن کمانی به شعاع ۳ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث است.

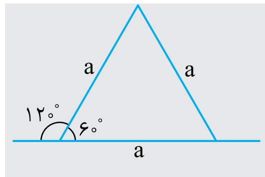


مثال: می‌خواهیم مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی دلخواه رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس به مرکز هر یک از دو سر این پاره‌خط کمانی به شعاع طول پاره‌خط رسم شده می‌زنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر است.



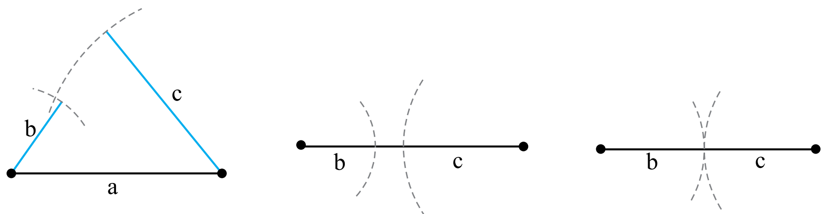
مثال: می‌خواهیم زاویه‌ای 60° رسم کنیم. ابتدا به روش مثال قبل مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم. در این صورت هر یک از زاویه‌های مثلث مورد نظر 60° است.

مسئله ۱ زاویه‌ای 120° رسم کنید.



راه‌حل: یک خط راست رسم کنید. سپس به روش مثال قبل زاویه‌ای 60° رسم کنید که رأس آن روی این خط باشد. به این ترتیب دو زاویه به‌دست می‌آوریم که یکی از آن‌ها 60° و دیگری 120° است.

مثال: پاره‌خطی به طول a در نظر بگیرید. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً b باز کنید و به مرکز یکی از دو سر پاره‌خطی که رسم کرده‌اید، کمانی بزنید. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً c باز کنید و به مرکز سر دیگر پاره‌خط، کمانی بزنید. در این‌صورت، برای این‌که کمان‌ها یکدیگر را در نقطه‌ای خارج پاره‌خط اولیه قطع کنند باید $b+c>a$.



$b+c>a$ $\qquad$ $b+c<a$ $\qquad$ $b+c=a$

توجه کنید که اگر ابتدا پاره‌خطی به طول b در نظر بگیریم و بعد کمان‌هایی به شعاع a و c بزنیم، برای این‌که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول b قطع کنند، باید $a+c>b$.
همین‌طور، اگر ابتدا پاره‌خطی به طول c در نظر بگیریم و سپس کمان‌هایی به شعاع a و b بزنیم، برای این‌که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول c قطع کنند، باید $a+b>c$.

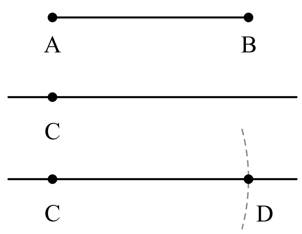
نتیجه فرض کنید a ، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. برای این‌که مثلثی به طول ضلع‌های a ، b و c وجود داشته باشد، باید

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b$$

ترسیم‌های ساده

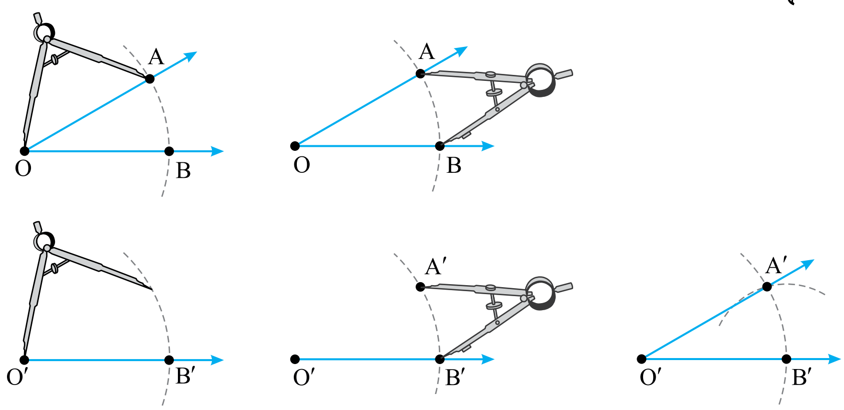
۱) ترسیم پاره‌خطی همنهشت با پاره‌خطی مفروض

فرض کنید پاره‌خط AB داده شده است. می‌خواهیم پاره‌خطی همنهشت با این پاره‌خط رسم کنیم. با خط‌کش خطی راست رسم می‌کنیم و یک نقطه مانند C روی آن مشخص می‌کنیم. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم و به مرکز C کمانی رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این کمان با خط کشیده شده را D می‌نامیم. پاره‌خط CD پاره‌خط مورد نظر است.



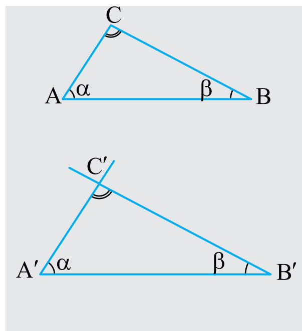
۲) ترسیم زاویه‌ای همنهشت با زاویه‌ای مفروض

فرض کنید زاویه‌ای به رأس O داده شده است. می‌خواهیم زاویه‌ای همنهشت با این زاویه رسم کنیم. با خط‌کش خطی راست رسم می‌کنیم و یک نقطه مانند O' روی آن مشخص می‌کنیم. به مرکز نقطه‌ی O کمانی دلخواه می‌زنیم تا ضلع‌های زاویه‌ی داده شده را در نقطه‌های A و B قطع کند. دهانه‌ی پرگار را تغییر نمی‌دهیم و به مرکز نقطه‌ی O' کمانی می‌زنیم تا خط کشیده شده را در نقطه‌ی B' قطع کند. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم، سپس بدون این‌که دهانه را تغییر بدهیم، به مرکز نقطه‌ی B' کمانی می‌زنیم تا کمان اول را در نقطه‌ی A' قطع کند. اکنون اگر نقطه‌ی O' را به نقطه‌ی A' وصل کنیم، زاویه‌ی $A'O'B'$ با زاویه‌ی AOB برابر می‌شود، چراکه دو مثلث OAB و $O'A'B'$ همنهشت هستند.



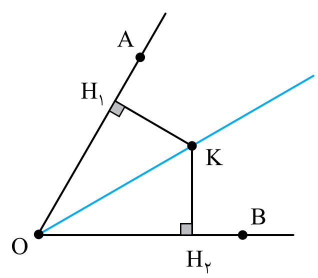
مسئله ۲ **مثلثی رسم کنید که زاویه‌هایش با زاویه‌های مثلثی مفروض برابر باشند، اما این دو مثلث همنهشت نباشند.**

راه‌حل: فرض کنید مثلث مفروض ABC باشد. ابتدا پاره‌خطی مانند $A'B'$ رسم می‌کنیم که از بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC بزرگ‌تر باشد (این کار باعث می‌شود که اگر مثلثی مانند $A'B'C'$ رسم کنیم، مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ همنهشت نباشند). اکنون زاویه‌ای به رأس A' و همنهشت با زاویه‌ی A و زاویه‌ای به رأس B' و همنهشت با زاویه‌ی B رسم می‌کنیم. محل برخورد ضلع‌های غیر مشترک زاویه‌های رسم شده را C' بنامید (چون دست کم یکی از زاویه‌های A یا B حاده است، پس ضلع‌های غیر مشترک زاویه‌های رسم شده، متقاطع‌اند). اکنون توجه کنید که مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ دو زاویه‌ی همنهشت دارند و چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است، پس زاویه‌های سوم آن‌ها یعنی (C و C') نیز همنهشت‌اند.



خاصیت اصلی نیمساز و ترسیم نیمساز

زاویه‌ی AOB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی نیمساز آن باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر OA و OB رسم کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O یک ضلع مشترک دارند (KO) و دو زاویه‌ی حاده‌ی برابر هم دارند، زیرا OK نیمساز است، پس $H_1\hat{O}K=H_2\hat{O}K$. بنابراین مثلث‌های KH_1O و KH_2O به حالت وتر و یک زاویه حاده همنهشت‌اند و در نتیجه $KH_1=KH_2$. یعنی فاصله‌ی K تا ضلع‌های زاویه‌ی AOB برابر است.

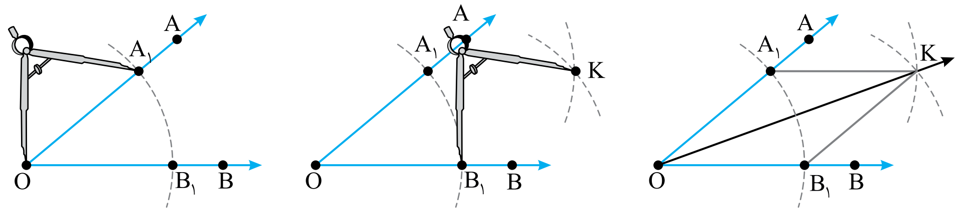


اکنون فرض کنید K نقطه‌ای درون زاویه‌ی AOB باشد و فاصله‌ی K از دو ضلع این زاویه برابر باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر ضلع‌های OA و OB رسم کنید. در این صورت $KH_1=KH_2$. نقطه‌ی O را به نقطه‌ی K وصل کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O وتر مشترک و دو ضلع برابر دارند. در نتیجه این دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند. به این ترتیب $H_1\hat{O}K=H_2\hat{O}K$، یعنی K روی نیمساز زاویه‌ی AOB قرار دارد.

نتیجه هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد.

روش ترسیم نیمساز

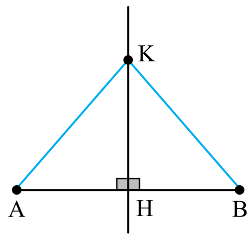
فرض کنید زاویه‌ی AOB (به رأس O) مفروض است. می‌خواهیم نیمساز این زاویه را رسم کنیم. ابتدا به مرکز O و شعاعی دلخواه کمانی می‌زنیم تا ضلع‌های OA و OB را به ترتیب در نقطه‌های A_1 و B_1 قطع کند. در این صورت $OA_1=OB_1$. اکنون به مرکز A_1 و شعاعی بیش‌تر از نصف A_1B_1 کمانی بزنید و به همین شعاع و مرکز B_1 کمانی دیگر بزنید. محل برخورد این دو کمان را K بنامید. توجه کنید که $A_1K=B_1K$. به این ترتیب دو مثلث OA_1K و OB_1K همنهشت‌اند (ض‌ض‌ض). در نتیجه $A_1\hat{O}K=B_1\hat{O}K$، یعنی OK نیمساز زاویه‌ی AOB است.



مثال: می‌خواهیم زاویه‌ای 30° رسم کنیم. ابتدا زاویه‌ای 60° رسم می‌کنیم. اکنون اگر نیمساز این زاویه را رسم کنیم، دو زاویه‌ی 30° به‌دست می‌آوریم.

خاصیت اصلی عمودمنصف و ترسیم عمودمنصف

پاره‌خط AB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی عمودمنصف آن باشد. از K به A و B وصل کنید (شکل را ببینید). در این صورت مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AHK و BHK یک ضلع مشترک دارند (KH)، یک زاویه‌ی (قائمه‌ی) برابر دارند $(A\hat{H}K=B\hat{H}K)$ و دو ضلع برابر نیز دارند $(AH=BH)$. بنابراین مثلث‌های AHK و BHK همنهشت‌اند (ض‌زض) و در نتیجه $KA=KB$. یعنی فاصله‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر است.

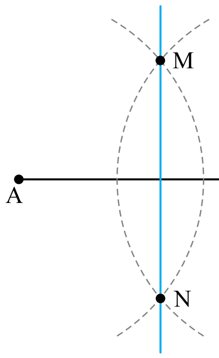


اکنون فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر باشد. فرض کنید H وسط پاره‌خط AB باشد و از K به A ، B و H وصل کنید. در این صورت مثلث‌های AHK و BHK همنهشت‌اند (ض‌ض‌ض). بنابراین زاویه‌های AHK و BHK برابرند و چون این دو زاویه مکمل‌اند، پس $A\hat{H}K=B\hat{H}K=90^\circ$، یعنی K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

نتیجه هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد. روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

روش ترسیم عمودمنصف

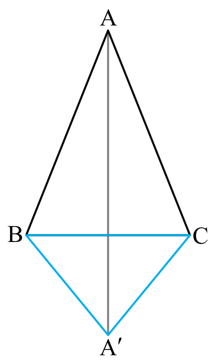
اگر دو نقطه از خطی راست معلوم باشد، این خط به طور کامل مشخص می‌شود. بنابراین، اگر دو نقطه‌ی متمایز در صفحه پیدا کنیم که فاصله‌ی هر یک از آن‌ها تا دو سر پاره‌خط مفروض AB برابر باشد، چون این دو نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند، می‌توانیم این عمودمنصف را رسم کنیم.

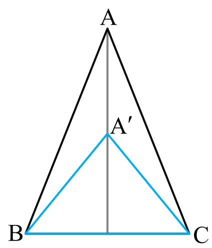


فرض کنید پاره‌خط AB داده شده است. دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان شعاع و به مرکز B کمانی بزنید. فرض کنید این دو کمان یکدیگر را در نقطه‌های M و N قطع کنند. در این‌صورت فاصله‌های M و N از نقطه‌های A و B برابر است، پس این دو نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند. بنابراین، خطی که از M و N می‌گذرد، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

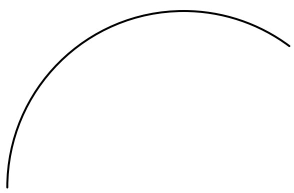
مسئله ۳ **دو مثلث متساوی‌الساقین قاعده‌ای مشترک دارند. ثابت کنید خطی که از دو رأس این مثلث‌ها می‌گذرد، بر قاعده‌ی مشترک آن‌ها عمود است.**

راه‌حل: فرض کنیم دو مثلث ABC و $A'BC$ متساوی‌الساقین باشند و BC قاعده‌ی مشترک هر دوی آن‌ها باشد. چون $AB=AC$ پس A روی عمودمنصف BC قرار دارد و چون $A'B=A'C$ در نتیجه A' روی عمودمنصف BC قرار دارد. بنابراین AA' عمودمنصف ضلع BC است. پس خط AA' بر BC عمود است.

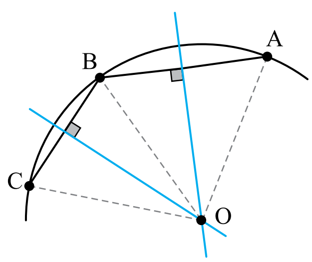




مسئله ۴ **در شکل روبه‌رو قسمتی از یک دایره را می‌بینید. چگونه می‌توان این دایره را کامل کرد؟**



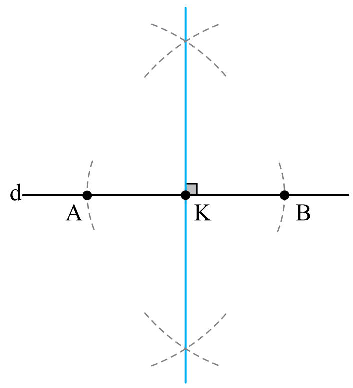
راه‌حل: سه نقطه‌ی A ، B و C را روی قسمت داده شده در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند.
نقطه‌ی O از سه نقطه‌ی A ، B و C به یک فاصله است، پس مرکز دایره‌ی مورد نظر است.
اکنون اگر به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم، این دایره، دایره‌ی مورد نظر است.



رسم خط عمود بر یک خط

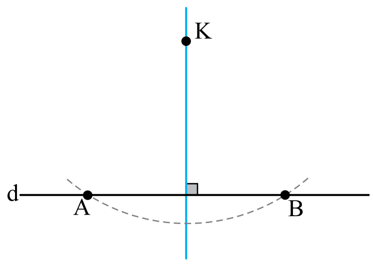
خط d مفروض است. می‌خواهیم از نقطه‌ی K در صفحه، خطی عمود بر خط d رسم کنیم. دو حالت وجود دارد.

الف) نقطه‌ی K روی خط d است



به مرکز نقطه‌ی K و شعاعی دلخواه کمانی بزنید تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند (شکل را ببینید). در این صورت K وسط پاره‌خط AB است. اکنون اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، حتماً از K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

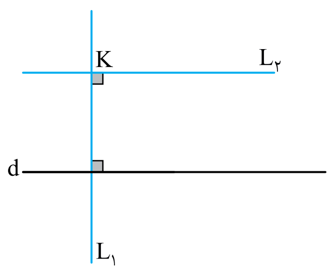
ب) نقطه‌ی K خارج خط d است



به مرکز نقطه‌ی K کمانی بزنید که خط d را در نقطه‌هایی مانند A و B قطع کند. در این صورت فاصله‌ی K از A و B برابر است، پس K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. بنابراین اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، از نقطه‌ی K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

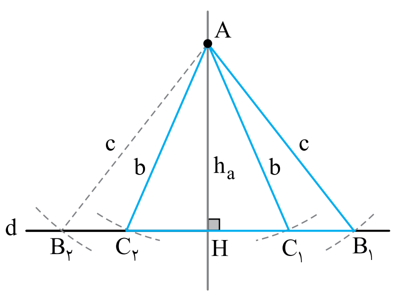
توجه: دقت کنید که در روش‌های بالا مهم نیست نقطه‌ی K روی خط باشد یا خیر، روش یکی است.

رسم خطی موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن



فرض کنید خط d داده شده و K نقطه‌ای خارج آن است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از K بگذرد و با d موازی باشد. ابتدا $L_۱$ را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط $L_۲$ را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر $L_۱$ عمود باشد. در این صورت خط‌های d و $L_۲$ بر خط $L_۱$ عمودند، پس موازی‌اند.

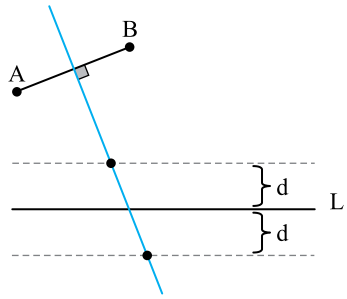
مسئله ۵ **از مثلثی طول دو ضلع (b و c) و طول ارتفاع نظیر ضلع سوم (h_a) معلوم است. این مثلث را رسم کنید.**



راه‌حل: خطی دلخواه مانند d بکشید و از نقطه‌ی دلخواه H روی آن، خطی عمود بر آن رسم کنید. به مرکز H و شعاع h_a کمانی بزنید تا این خط عمود را در نقطه‌ی A قطع کند (دو نقطه مانند A داریم، یکی را انتخاب کنید). اکنون به مرکز A و به شعاع b کمانی بزنید تا خط d را در نقطه‌های $C_۱$ و $C_۲$ قطع کند (شکل را ببینید). همین‌طور به مرکز A و به شعاع c کمانی بزنید تا خط d را در نقطه‌های $B_۱$ و $B_۲$ قطع کند (شکل را ببینید). مثلث‌های غیرهمنهشت $AB_۱C_۱$ و $AB_۱C_۲$ ویژگی‌های مورد نظر را دارند.

توجه: در مسئله‌های ترسیم، اگر تعداد شکل‌های قابل رسم را بخواهیم، منظور شکل‌های غیرهمنهشت است.

مسئله ۶ **d عددی مثبت است. A و B دو نقطه در صفحه‌اند و L خطی راست است. همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A و B برابر هم و فاصله‌ی آن‌ها از L برابر با d باشد.**



راه‌حل: نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف AB هستند و نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از L برابر d است، دو خط راست موازی با L و به فاصله‌ی d از L هستند. پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد عمودمنصف AB و این دو خط موازی با L هستند.

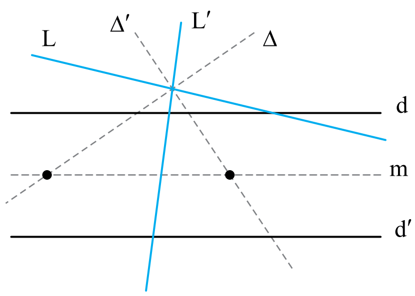
بحث در تعداد جواب:

حالت (۱): اگر عمودمنصف AB با دو خط متقاطع باشد، دو جواب داریم.

حالت (۲): اگر عمودمنصف AB موازی با این دو خط باشد، جواب نداریم.

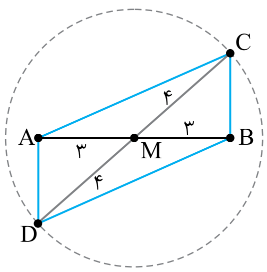
حالت (۳): اگر عمودمنصف AB بر یکی از این دو خط منطبق شود، تعداد نامتناهی جواب داریم.

مسئله ۷ **همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط موازی مفروض برابر باشد، در ضمن از دو خط متقاطع مفروض به یک فاصله باشد.**



راه‌حل: دو خط موازی را d و d' و دو خط متقاطع را L و L' می‌نامیم. نقطه‌هایی که از دو خط d و d' به یک فاصله هستند، روی خط راستی موازی این دو خط هستند که به فاصله‌ی نصف فاصله‌ی دو خط d و d'، در میان آن‌ها قرار دارد (خط m در شکل روبه‌رو). از طرف دیگر نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط متقاطع L و L' برابر است، روی نیمسازهای دو زاویه‌ای هستند که با این خط‌ها تشکیل می‌شوند (دو خط Δ و Δ' در شکل روبه‌رو). پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد خط‌های Δ و Δ' با خط m هستند.

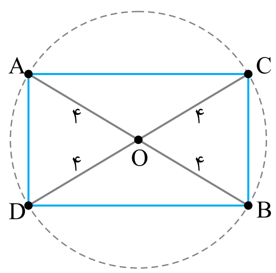
مسئله ۸ **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. در تعداد جواب‌ها بحث کنید.**



راه‌حل: می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. اکنون مطابق شکل پاره‌خط AB را به طول ۶ رسم می‌کنیم. وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. به مرکز M و شعاع $\frac{۸}{۲}=۴$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. اکنون، یکی از قطرهای دلخواه از این دایره را رسم می‌کنیم (مانند قطر CD در شکل، فقط دقت کنید که قطر مورد نظر از A و B عبور نکند). چهارضلعی $ACBD$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

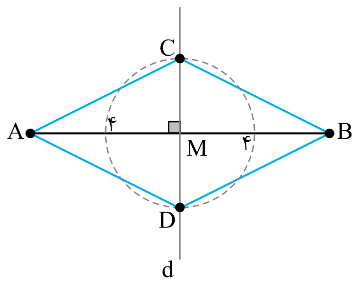
واضح است که نامتناهی متوازی‌الاضلاع با این ویژگی‌ها می‌توان رسم کرد.

مسئله ۹ **مستطیلی به طول قطر ۸ رسم کنید.**



راه‌حل: می‌دانیم چهارضلعی‌ای که قطرهای آن با هم برابر و منصف یکدیگرند، مستطیل است. پس برای رسم مستطیل مورد نظر، نقطه‌ی دلخواه O را در صفحه در نظر می‌گیریم. به مرکز O و شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم. دو قطر دلخواه AB و CD را مطابق شکل در این دایره در نظر می‌گیریم. در چهارضلعی $ACBD$ ، قطرها با یکدیگر برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند، پس این چهارضلعی مستطیل مورد نظر است.

مسئله ۱۰ یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۸ باشد.



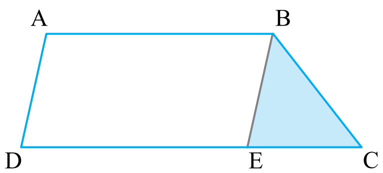
راه‌حل: می‌دانیم که برای لوزی بودن چهارضلعی کافی است قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. پس به صورت زیر لوزی را رسم می‌کنیم.

ابتدا پاره‌خط AB را به طول ۸ رسم می‌کنیم (شکل را ببینید).

سپس عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم (خط d در شکل).

اکنون به مرکز M، وسط AB، دایره‌ای به شعاع $\frac{۴}{۲}=۲$ رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های C و D قطع کند. ACBD لوزی مورد نظر است.

مسئله ۱۱ ذوزنقه‌ی ABCD را با معلوم بودن طول چهار ضلع رسم کنید.



راه‌حل: مسئله را حل شده در نظر می‌گیریم (شکل روبه‌رو را ببینید).

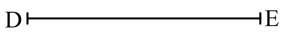
از نقطه‌ی B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم. چون ABED متوازی‌الاضلاع است، پس $AD=BE$ و $DE=AB$. مثلث BEC با معلوم بودن طول سه ضلع قابل رسم است:

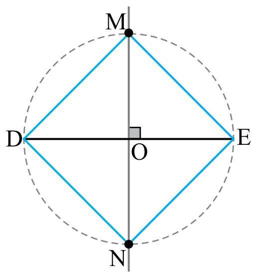
$$CE=DC-AB, \quad BE=AD$$

پس از رسم این مثلث، از B خطی موازی CE رسم می‌کنیم و روی آن نقطه‌ی A را چنان در نظر می‌گیریم که AB برابر طول قاعده‌ی کوچک‌تر شود.

از A موازی BE خطی رسم می‌کنیم تا امتداد CE را در D قطع کند. چهار ضلعی ABCD همان ذوزنقه‌ی مورد نظر است.

مسئله ۱۲ مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد؟

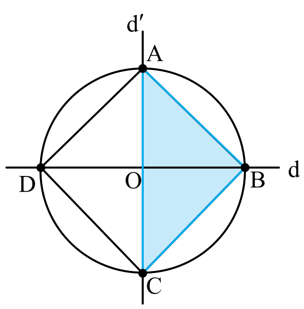




راه‌حل: می‌دانیم در مربع قطرها عمودمنصف یکدیگر هستند و دارای طول برابرند. پس ابتدا عمودمنصف پاره‌خط معلوم DE را رسم می‌کنیم.

سپس به مرکز نقطه‌ی O، وسط پاره‌خط DE و شعاع OE دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف DE را M و N می‌نامیم. چهارضلعی MEND مربع موردنظر است.

مسئله ۱۳ مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به اندازه‌ی وتر $۴\sqrt{۲}$ رسم کنید.



راه‌حل: می‌دانیم در مربع، دو قطر مساوی و عمودمنصف یکدیگرند. پس دو خط عمود بر هم d و d′ را رسم می‌کنیم.

به مرکز O و شعاع $۲\sqrt{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو خط d و d′ را در نقطه‌های A، B، C و D قطع کند. در این‌صورت ABCD مربع به قطر $۴\sqrt{۲}$ است. به این‌ترتیب مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC مثلث مورد نظر است.

تمرین

۱- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ ضلع BC برابر ۸ و اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC مساوی ۵ است. این مثلث را رسم کنید.

۲- پاره‌خط AB را به طول ۸ سانتی‌متر رسم کنید.
الف) عمودمنصف آن را رسم کنید.
ب) چند نقطه روی عمودمنصف وجود دارند که از دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی
۱) ۸ سانتی‌متر هستند؟
۲) ۴ سانتی‌متر هستند؟
۳) ۳ سانتی‌متر هستند؟

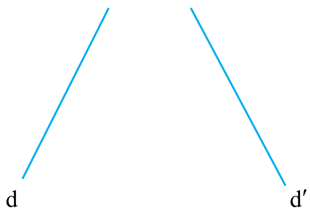
۳- دو خط متقاطع d و d' و دایره‌ی C مفروض‌اند. روی دایره‌ی C چند نقطه وجود دارد که از خط‌های d و d' به یک فاصله هستند؟

۴- زاویه‌ای به رأس O و نقطه‌ی A درون آن مفروض است. از A خطی رسم کنید که با ضلع‌های زاویه‌ی O زاویه‌هایی برابر تشکیل دهد.

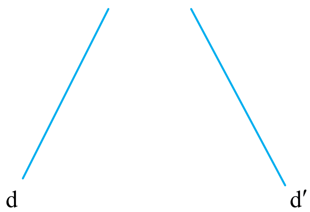
۵- دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقع هستند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۶- خط d در صفحه‌ی P مفروض است. خط d' واقع در همان صفحه را طوری موازی خط d رسم کنید که فاصله‌ی آن‌ها از هم ۳ سانتی‌متر باشد.

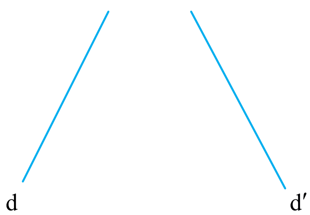
۷- مطابق شکل، دو خط d و d' مفروض‌اند. همه‌ی نقطه‌هایی را به‌دست آورید که از d به فاصله‌ی ۳ و از d' به فاصله‌ی ۴ هستند.



۸- دو خط d و d' مطابق شکل معلوم‌اند. نقطه‌ای را به‌دست آورید که از هر دو خط به فاصله‌ی ۲ باشد.



۹- در شکل روبه‌رو d و d' قسمتی از دو ضلع یک زاویه هستند که رأس آن معلوم نیست. نیمساز این زاویه را رسم کنید.



۱۰- مثلث ABC را با معلومات $\hat{A}=30^\circ$ و ارتفاع‌های $BH=3$ و $CH'=4$ رسم کنید.

۱۱- به کمک خط‌کش و پرگار، زاویه‌ای 15° رسم کنید.

۱۲- مثلثی قائم‌الزاویه را با داشتن دو ضلع قائمه‌اش رسم کنید.

۱۳- مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را با معلوم بودن طول وتر $BC=10$ و طول یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی $AB=5$ رسم کنید.

۱۴- مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که محیط و ارتفاع وارد بر قاعده‌ی آن معلوم است.

۱۵- مثلث ABC را با معلومات $a=4$، $\hat{C}=30^\circ$ و میانه‌ی وارد از رأس A برابر با ۳ رسم کنید.

۱۶- طول قطر و یکی از ضلع‌های مستطیلی به ترتیب ۱۰ و ۶ هستند. این مستطیل را رسم کنید.

۱۷- زاویه‌ی xOy و نقطه‌ی A بیرون آن مفروض است. از A خطی رسم کنید که دو ضلع زاویه را در نقطه‌هایی مانند B و C قطع کند و $AB=BC$.

۱۸- نقطه‌ی A درون زاویه‌ای قرار دارد. از A پاره‌خطی محدود به ضلع‌های زاویه رسم کنید که وسطش نقطه‌ی A باشد.

۱۹- از متوازی‌الاضلاعی طول دو قطر و یک ارتفاع معلوم است. این متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

۲۰- سه نقطه‌ی M، N و P که روی یک خط نیستند، مفروض‌اند. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که این سه نقطه، وسط‌های سه ضلع آن باشند.

۲۱- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۸ و ۵ و طول یک قطر آن ۴ باشد.

۲۲- طول ضلع یک لوزی ۴ و طول یکی از قطرهای آن ۶ است. این لوزی را رسم کنید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- فرض کنید پاره‌خط AB و خط d بر هم عمود نیستند. روی خط d چند نقطه وجود دارد که از نقطه‌های A و B به یک فاصله‌اند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) نامتناهی

۲- نقطه‌ی A و خط d در یک صفحه مفروض‌اند. در این صفحه چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله‌ی معلوم k و از d به فاصله‌ی معلوم k' هستند؟

۱) ۴ نقطه ۲) ۲ نقطه ۳) حداکثر ۴ نقطه ۴) حداکثر ۲ نقطه

۳- دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه مفروض‌اند. تعداد نقطه‌هایی از این صفحه که از خط d به فاصله‌ی L بوده و از دو نقطه‌ی A و B نیز به یک فاصله باشند، کدام‌یک نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) نامتناهی

۴- چند نقطه روی دایره‌ی مفروض C وجود دارند که از دو خط متقاطع D و D' به یک فاصله هستند؟

۱) حداکثر ۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) حداکثر ۴

۵- مرکز دایره‌هایی که بر دو خط متقاطع مماس هستند، چه شکلی درست می‌کنند؟

۱) دایره ۲) دو خط عمود بر هم ۳) دو خط موازی ۴) مستطیل

۶- چند نقطه روی دایره‌ی مفروض C وجود دارد که از نقطه‌های مفروض A و B به یک فاصله هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حداکثر ۲

۷- مرکز دایره‌هایی که از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرند، چه شکلی درست می‌کنند؟

۱) دایره‌ای به قطر AB ۲) عمودمنصف AB ۳) دو خط موازی AB ۴) هر خط گذرنده از وسط AB

۸- سه نقطه‌ی A، B و C روی دایره‌ای قرار دارند. کدام گزینه مرکز دایره را مشخص می‌کند؟

۱) نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های AB و BC
۲) نقطه‌ی برخورد نیمسازهای زاویه‌های CAB و ACB
۳) نقطه‌ی برخورد عمودمنصف AB و نیمساز زاویه‌ی ACB
۴) رأس D در متوازی‌الاضلاع $ABCD$

پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. به ۳ تست بعدی پاسخ دهید:

۹- چند نقطه در صفحه وجود دارند که از A به فاصله‌ی ۷ و از B به فاصله‌ی ۲ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) نامتناهی ۴) صفر

۱۰- چند نقطه در صفحه وجود دارند که از A به فاصله‌ی ۳ و از B به فاصله‌ی ۷ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) نامتناهی ۴) صفر

۱۱- چند نقطه در صفحه وجود دارند که از A به فاصله‌ی ۵ و از B به فاصله‌ی ۶ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

۱۲- فاصله‌ی دو خط موازی d و d' از یک‌دیگر ۵ است. مجموعه‌ی نقطه‌هایی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از این دو خط برابر ۵ است، کدام است؟

۱) دو خط موازی ۲) تهی ۳) ناحیه‌ی بین دو خط ۴) یک خط

۱۳- در تست قبل مجموعه‌ی نقطه‌هایی که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط برابر ۷ است، کدام است؟

۱) تهی ۲) دو خط موازی ۳) یک خط ۴) ناحیه‌ی بیرون دو خط

۱۴- با شرط‌های تست ۱۲، مجموعه‌ی نقطه‌هایی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط d و d' برابر ۳ است، کدام است؟

۱) تهی ۲) یک خط موازی d و d' ۳) دو خط ۴) محدوده‌ی خارج این دو خط

۱۵- **در تست ۱۲، مجموعه‌ی نقطه‌هایی که تفاضل فاصله‌ی آن‌ها از این دو خط برابر ۵ است، کدام است؟**

۱) تهی ۲) یک خط ۳) دو خط ۴) فضای خارج دو خط

۱۶- **در تست ۱۲، مجموعه‌ی نقطه‌هایی که تفاضل فاصله‌ی آن‌ها از d و d' برابر ۳ است، کدام است؟**

۱) تهی ۲) دو خط موازی ۳) محدوده‌ی بین دو خط ۴) یک خط

۱۷- **چندتا از زاویه‌های ۶۰°، ۴۵°، ۳۰°، ۱۵° و ۷۵° به کمک خط‌کش و پرگار قابل رسم‌اند؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸- **با معلوم بودن زاویه‌ی ۴۰° و داشتن خط‌کش و پرگار، کدام‌یک از زاویه‌های زیر قابل رسم نیست؟**

۱) ۷۲° ۲) $۱۷/۵^\circ$ ۳) $۲۲/۵^\circ$ ۴) ۶۵°

۱۹- **با معلومات $AB=۸$، $\hat{B}=۴۵^\circ$ و $AC=۸$، چند مثلث مانند ABC مشخص می‌شود؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۲۰- **با معلومات $h_a=۱$، $c=۲$ و $b=۳$ (دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم) چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) نامتناهی ۴) صفر

۲۱- **تنها یک مثلث ABC با داده‌های دو ضلع $b=۷$ و $c=۴$ و ارتفاع وارد بر ضلع سوم h_a قابل رسم است. اندازه‌ی h_a برابر کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۲- **چند مثلث غیر همنهشت مانند ABC داریم که $\hat{A}=۳۰^\circ$، $h_b=۳$ و $h_c=۵$؟**

۱) نامتناهی ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

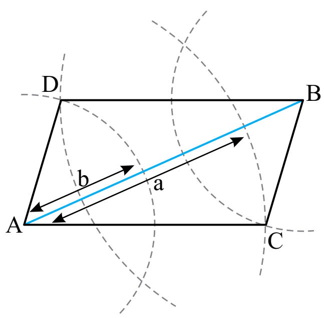
۲۳- **مثلث ABC مفروض است. اگر $AB=۳$، $AC=۴$ و $BC=۵$، چند دایره وجود دارد که مرکز آن‌ها روی ارتفاع نظیر ضلع BC است و از دو نقطه‌ی B و C می‌گذرند؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

۲۴- **نقطه‌های A و B در صفحه ثابت هستند و نقطه‌ی C طوری در صفحه تغییر می‌کند که $A\hat{B}C=۲B\hat{A}C$. محل برخورد نیمساز زاویه‌ی ABC با پاره‌خط AC وقتی نقطه‌ی C تغییر می‌کند چه شکلی درست می‌کند؟**

۱) یک نقطه ۲) یک دایره ۳) خطی موازی با AB ۴) خطی عمود بر AB

۲۵- **پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. دهانه‌ی پرگار را یک بار به اندازه‌ی a و بار دیگر به اندازه‌ی b باز می‌کنیم و از نقطه‌ی A دو کمان می‌زنیم. سپس با همان اندازه‌ها، کمان‌هایی از نقطه‌ی B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه‌ی برخورد را C و D می‌نامیم. با کدام شرط $ACBD$ می‌تواند متوازی‌الاضلاع باشد؟**



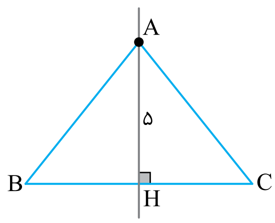
۱) $a=۵$ و $b=۱۸$
۲) $a+b=۹$
۳) $a=۶$ و $b=۷$
۴) همواره متوازی‌الاضلاع است.

۲۶- **لوزی با طول ضلع ۵ و طول قطر $۴m+۲$ قابل رسم است. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟**

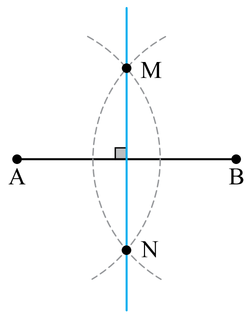
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل تمرین‌ها

۱ ضلع BC را به طول ۸ واحد ترسیم می‌کنیم. سپس عمودمنصف BC را رسم می‌کنیم. به مرکز H، وسط BC و شعاع ۵ کمانی رسم می‌کنیم. محل برخورد این کمان با عمودمنصف BC را A می‌نامیم. مثلث ABC مثلث موردنظر است.



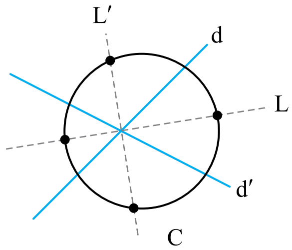
۲ **الف)** پاره‌خط AB به طول ۸ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف AB باز می‌کنیم و به مرکز A و B کمان‌هایی می‌زنیم تا یک‌دیگر را در نقطه‌های M و N قطع کنند. خط MN جواب است.



ب) توجه کنید که اگر دهانه‌ی پرگار کم‌تر از $\frac{AB}{۲}$ باز شود، دو کمانی که در بند (الف) گفتیم، یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند. پس دو نقطه به فاصله‌ی ۸ سانتی‌متر از A و B داریم و هیچ نقطه‌ای به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از A و B نداریم.
اما اگر شعاع کمان‌ها ۴ باشد، دو کمان بر هم مماس می‌شوند و در وسط پاره‌خط AB به هم می‌رسند. یعنی فقط یک نقطه داریم که از A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر است.

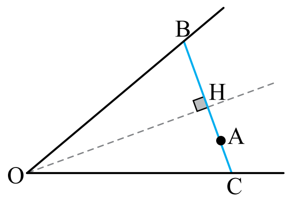
۳ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. اگر L و L' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط متقاطع d و d' باشند، هر نقطه روی این نیمسازها از دو خط d و d' به یک فاصله است. معلوم است که نقطه‌های برخورد دو خط L و L' با دایره‌ی C، ویژگی مورد نظر را دارند.

چون هر خط دایره را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند، پس این مسأله حداکثر چهار جواب ممکن است داشته باشد.

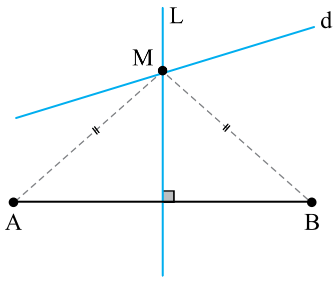


۴ نیمساز زاویه‌ی O را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی A خطی عمود بر این نیمساز رسم می‌کنیم تا ضلع‌های زاویه‌ی O را در B و C قطع کند (شکل را ببینید). این خط جواب است.
دلیل: در مثلث OBC، OH هم نیمساز و هم ارتفاع است. پس این مثلث متساوی‌الساقین است و در نتیجه

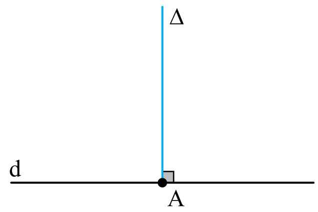
$$O\hat{B}C = O\hat{C}B$$



۵ می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است. اگر L عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، نقطه‌ی برخورد خط d با این عمودمنصف ویژگی مورد نظر را دارد.
در صورتی‌که خط d با L موازی باشد، مسأله جواب ندارد.
اگر خط d بر L منطبق باشد، مسأله نامتناهی جواب دارد.
اگر d و L متقاطع باشند (مانند شکل)، مسأله یک جواب دارد.

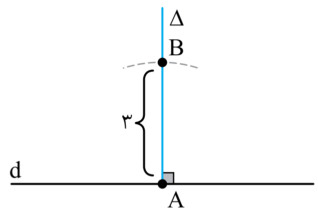


۶ از نقطه‌ی دلخواه A روی خط d خط Δ را عمود بر d رسم می‌کنیم (شکل (۱) را ببینید).



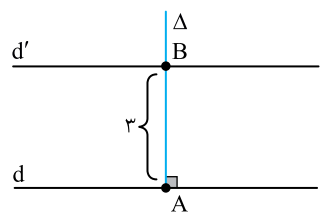
شکل (۱)

به مرکز A و شعاع ۳ کمانی می‌زنیم و محل برخورد آن را با Δ، B می‌نامیم (شکل (۲) را ببینید).



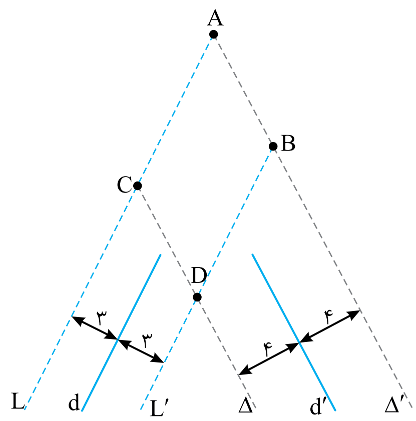
شکل (۲)

از نقطه‌ی B خطی موازی d رسم می‌کنیم (شکل (۳) را ببینید). این خط، خط مورد نظر است.

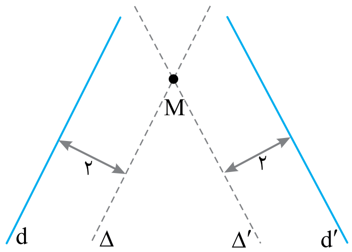


شکل(۳)

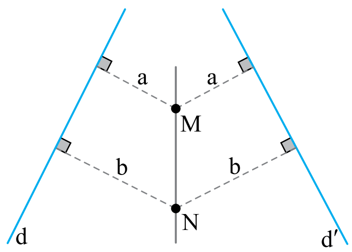
۷ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن L و L' دو خط موازی d و به فاصله‌ی ۳ از آن هستند و همچنین Δ و Δ' خط‌هایی موازی d' و به فاصله‌ی ۴ از آن هستند. محل برخورد این خط‌ها، نقطه‌های مطلوب هستند (نقطه‌های A، B، C و D در شکل).



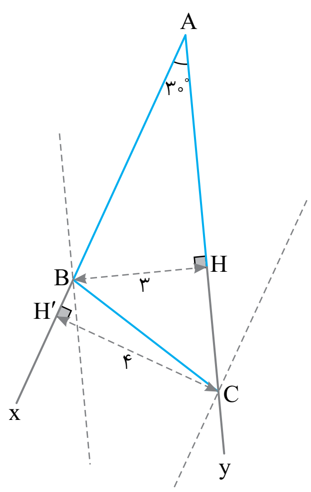
۸ مطابق شکل خط Δ را موازی d و به فاصله‌ی ۲ از آن و همچنین خط Δ' را موازی d' و به فاصله‌ی ۲ از آن در نظر می‌گیریم. محل برخورد این دو خط نقطه‌ی مورد نظر است (نقطه‌ی M در شکل).



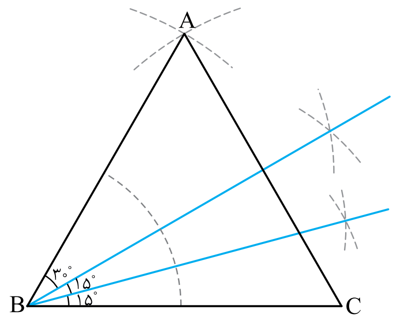
۹ مانند مسأله‌ی قبل نقطه‌های M و N را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که M به فاصله‌ی a از d و d' و N به فاصله‌ی b از d و d' قرار دارند. خطی که از M و N می‌گذرد، جواب مسأله است.



۱۰ ابتدا زاویه‌ی A را مساوی 30° رسم می‌کنیم. سپس خطی موازی با یک ضلع این زاویه مثلاً Ay و به فاصله‌ی ۳ از آن رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر را در B قطع کند. همچنین خطی موازی ضلع Ax و به فاصله‌ی ۴ از آن رسم می‌کنیم تا ضلع Ay را در C قطع کند. مثلث ABC، مثلث مورد نظر است.

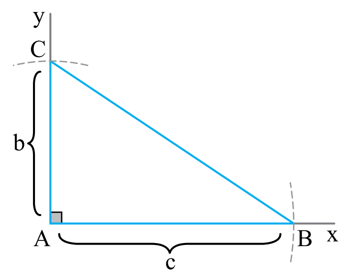


۱۱ پاره‌خط دلخواه BC را رسم کنید. به مرکز B و C و شعاع BC دو کمان بزنید تا یک‌دیگر را در نقطه‌ی A قطع کنند. در این صورت مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و $\hat{B}=60^\circ$. با رسم نیمساز زاویه‌ی B، دو زاویه‌ی ۳۰ درجه و با رسم نیمساز یکی از این زاویه‌های ۳۰ درجه، دو زاویه‌ی ۱۵ درجه ایجاد می‌شود.



۱۲ فرض می‌کنیم $AB=c$، $AC=b$ و $\hat{A}=90^\circ$. زاویه‌ی قائمه‌ی xAy را رسم می‌کنیم (روش رسم دو خط عمود بر هم را در متن درس دیده‌ایم). به مرکز A و شعاع C کمانی می‌زنیم تا Ax را در B قطع کند. سپس به مرکز A کمانی به شعاع b می‌زنیم تا Ay را در C قطع کند.

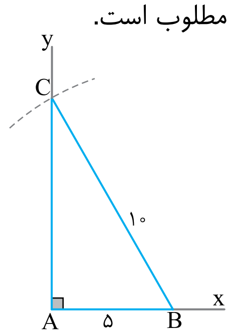
مثلث ABC ، مثلث مطلوب است.



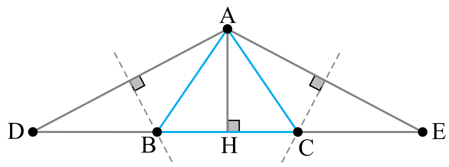
۱۳ زاویه‌ی قائمه‌ی xAy را مطابق شکل رسم می‌کنیم. نقطه‌ی B را روی Ax طوری انتخاب می‌کنیم که $AB=5$.

اکنون به مرکز B و شعاع ۱۰ کمانی می‌زنیم تا Ay را در C قطع کند.

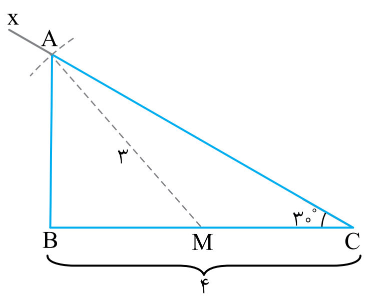
مثلث ABC مثلث مطلوب است.



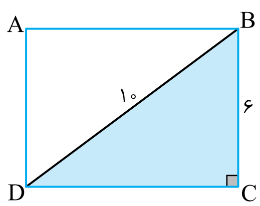
۱۴ فرض کنید مثلث رسم شده است. BC را از طرف B به اندازه‌ی ساق AB امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی D برسیم و همین کار را از طرف C انجام می‌دهیم تا E به‌دست آید. در این صورت DE برابر محیط مثلث است. مثلث ABC به سادگی قابل رسم است (مسأله‌ی قبل را ببینید). عمودمنصف‌های AD و AE ضلع DE را در B و C قطع می‌کنند. مثلث ABC مثلث مطلوب است.



۱۵ ابتدا پاره‌خط BC را به اندازه‌ی ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس از رأس C نیم‌خط Cx را رسم می‌کنیم به طوری که با BC زاویه‌ی 30° بسازد (شکل را ببینید). سپس به مرکز M (وسط BC) و شعاع ۳ کمانی می‌زنیم تا نیم‌خط Cx را در A قطع کند. مثلث ABC مثلث مطلوب است.

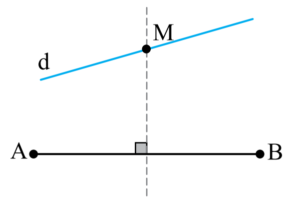


۱۶ مسأله را حل شده فرض می‌کنیم (از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم). فرض کنید ضلع BC و قطر DB معلوم باشند. مثلث قائم‌الزاویه‌ی DBC را با معلومات وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه می‌توان رسم کرد (مسأله‌ی قبل را ببینید). پس از رسم این مثلث، از B خطی موازی DC و از D خطی موازی BC رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو خط، نقطه‌ی A ، رأس چهارم مستطیل است.



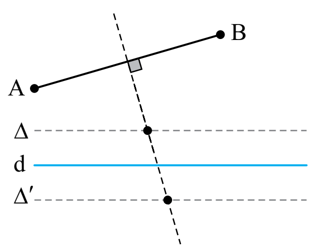
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینه‌ی ۲ نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف AB قرار دارند.
بنابراین نقطه‌های مورد نظر محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط d هستند.
چون خط d بر AB عمود نیست، پس عمودمنصف را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند.

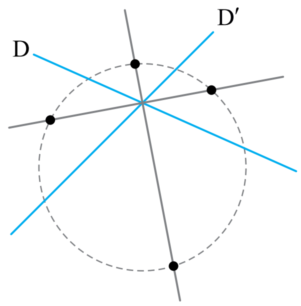


۲- گزینه‌ی ۳ نقطه‌هایی که از A به فاصله‌ی معلوم k هستند، دایره‌ی به مرکز A و شعاع k هستند. از طرف دیگر، نقطه‌هایی که از خط d به فاصله‌ی k' هستند، دو خط موازی با d هستند. نقطه‌های برخورد این دو خط موازی با دایره‌ی به مرکز A، نقطه‌های مورد نظر هستند. تعداد این نقطه‌ها حداکثر ۴ تا است.

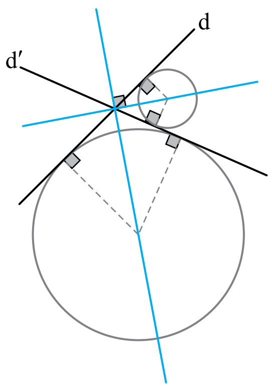
۳- گزینه‌ی ۱ نقطه‌هایی که از خط d به فاصله‌ی L هستند، دو خط موازی d هستند. از طرف دیگر نقطه‌هایی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف AB قرار دارند. پس نقطه‌های مورد نظر، نقطه‌های برخورد عمودمنصف AB با دو خط موازی d هستند (شکل را ببینید).
بنابراین تعداد نقطه‌های مورد نظر یا صفر است (زمانی که عمودمنصف با Δ و Δ' موازی باشد) یا نامتناهی است (زمانی که عمودمنصف AB بر Δ یا Δ' منطبق شود) یا ۲ است (زمانی که عمودمنصف با Δ و Δ' موازی نباشد).



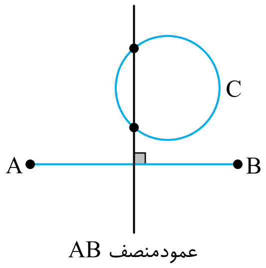
۴- گزینه‌ی ۴ نقطه‌هایی که از دو خط متقاطع D و D' به یک فاصله هستند، روی نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط قرار دارند.
هر یک از این نیمسازها دایره را حداکثر در دو نقطه می‌تواند قطع کند، پس حداکثر ۴ نقطه با خاصیت مورد نظر پیدا می‌شود.



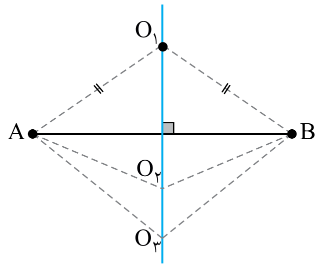
۵- گزینه‌ی ۲ مرکز دایره‌های مورد نظر، از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند. پس مرکز این دایره‌ها، روی نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط قرار دارند. این نیمسازها، دو خط عمود بر هم هستند.



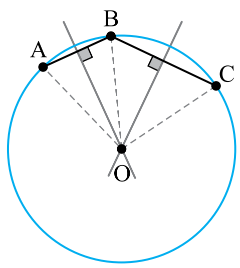
۶- گزینه‌ی ۴ نقطه‌هایی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB را تشکیل می‌دهند. پس جواب مسئله محل برخورد این عمودمنصف با دایره‌ی C است. خط و دایره حداکثر در دو نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کنند.



۷- گزینه‌ی ۲ مرکز دایره‌ای که از A و B می‌گذرد، از این دو نقطه به یک فاصله است. پس مرکزهای این دایره‌ها روی عمود منصف AB قرار دارند.



۸- گزینه‌ی ۱ اگر نقطه‌های A، B و C روی دایره‌ی به مرکز O قرار داشته باشند، چون OB با OA برابر است، پس O روی عمودمنصف AB است و چون OC با OB برابر است، پس مرکز O روی عمودمنصف BC است. بنابراین مرکز دایره، نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های AB و BC است.



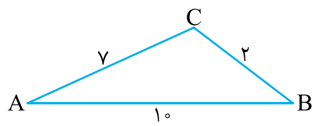
۹- گزینه‌ی ۴ در واقع باید مثلثی با طول ضلع‌های ۱۰، ۷ و ۲ وجود داشته باشد (شکل را ببینید).

بنابراین باید نابرابری

$$AB < AC + BC$$

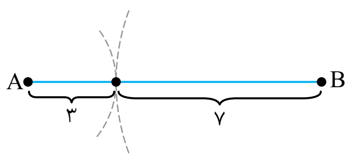
درست باشد، اما ۱۰>۷+۲.

بنابراین هیچ نقطه‌ای با این ویژگی نداریم.

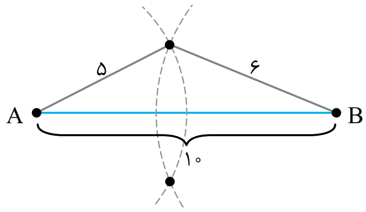


۱۰- گزینه‌ی ۱ نقطه‌هایی که از A به فاصله‌ی ۳ باشند، روی دایره‌ی به مرکز A و شعاع ۳ هستند. نقطه‌هایی که از B به فاصله‌ی ۷ هستند، روی دایره‌ی به مرکز B و شعاع ۷ قرار دارند.

بنابراین نقطه‌ی مورد نظر، محل برخورد این دو دایره است. مطابق شکل چون AB=۱۰، پس این دو دایره مماس بر هم هستند و مسئله یک جواب دارد.

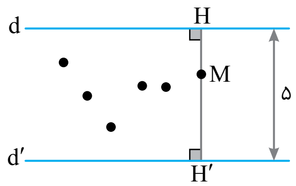


۱۱- گزینه‌ی ۲ نقطه‌هایی که از A به فاصله‌ی ۵ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ قرار دارند. همچنین نقطه‌هایی که از B به فاصله‌ی ۶ هستند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۶ قرار دارند. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، چون AB=۱۰، پس این دو دایره در دو نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کنند.



۱۲- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل، هر نقطه‌ای که بین این دو خط است، مجموع فاصله‌هایش از این دو خط برابر ۵ است.

$$MH + MH' = ۵$$

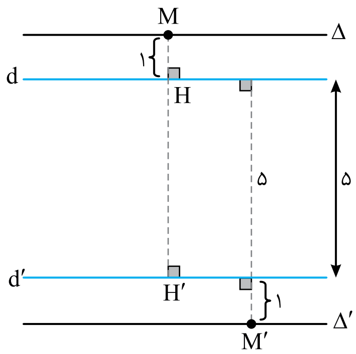


۱۳- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی M را به فاصله‌ی ۱ از d بیرون ناحیه‌ی بین d و d′ در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید):

$$MH + MH' = ۱ + ۶ = ۷$$

به همین ترتیب، نقطه‌ی M′ را به فاصله‌ی ۱ از d′ و بیرون ناحیه‌ی بین d و d′ در نظر بگیرید (مجدداً شکل را ببینید). این نقطه نیز ویژگی مورد نظر را دارد.

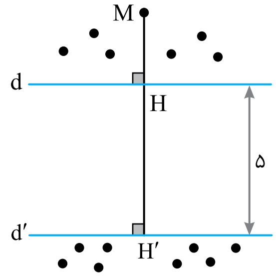
پس مجموعه‌ی نقطه‌هایی که این ویژگی را دارند دو خط موازی d و d′ و گذرنده از M و M′ هستند (خط‌های Δ و Δ′ را در شکل ببینید).



۱۴- گزینه‌ی ۱ چون مجموع فاصله‌های هر نقطه بین دو خط موازی، از آن دو خط، برابر فاصله‌ی آن دو خط (۵) است و نقطه‌های خارج ناحیه‌ی بین دو خط قطعاً مجموعی بزرگ‌تر از ۵ دارند، پس مجموعه‌ی مورد نظر تهی است.

۱۵- گزینه‌ی ۴ نقطه‌ی دلخواه M خارج ناحیه‌ی بین دو خط d و d' را در نظر بگیرید:

$$MH'-MH=(MH+HH')-MH=HH'=۵$$



بنابراین مجموعه‌ی نقطه‌هایی که این ویژگی را دارند، ناحیه‌ی خارج دو خط موازی d و d' است.

۱۶- گزینه‌ی ۲ در تست قبل دیدیم که تفاضل فاصله‌های هر نقطه خارج دو خط برابر ۵ است. پس اگر نقطه‌ای با شرایط مسئله وجود داشته باشد، باید بین این دو خط باشد. فرض کنید M یکی از نقطه‌های مورد نظر باشد به‌طوری‌که

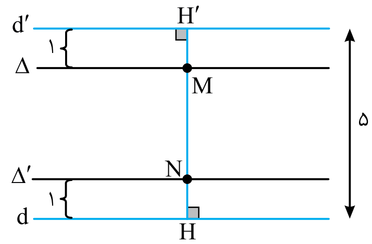
$$MH-MH'=۳$$

از طرف دیگر،

$$MH+MH'=۵$$

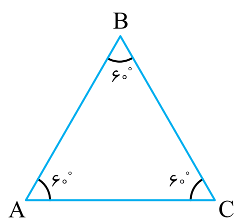
بنابراین $MH=۴$ و $MH'=۱$. در نتیجه نقطه‌های روی خط گذرنده از M و موازی d و d' ویژگی مورد نظر را دارند.

به همین صورت اگر نقطه‌ای مانند N به فاصله‌ی ۱ از d باشد، ویژگی مورد نظر را دارد. بنابراین خط گذرنده از N و موازی d و d' جواب است. بنابراین جواب، دو خط Δ و Δ' موازی d و d' است.

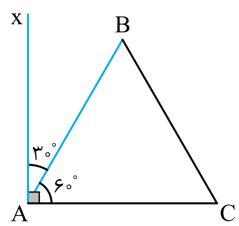


۱۷- گزینه‌ی ۴

۱) زاویه‌ی ۶۰°: کافی است مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنیم. در این حالت $B\hat{A}C$ برابر ۶۰° است.

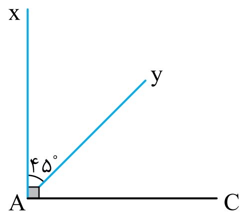


۲) زاویه‌ی ۳۰°: از نقطه‌ی A، عمود Ax را بر AC رسم می‌کنیم (شکل را ببینید). در این صورت $x\hat{A}B=۳۰^\circ$



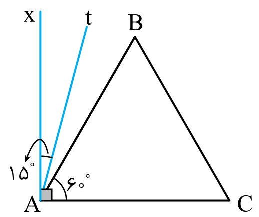
۳) زاویه‌ی ۴۵°: اگر نیمساز زاویه‌ی xAC را رسم کنیم (Ay در شکل)،

$$x\hat{A}y=۴۵^\circ$$



۴) زاویه‌ی ۱۵°: نیمساز زاویه‌ی xAB را رسم می‌کنیم (At در شکل). در این صورت

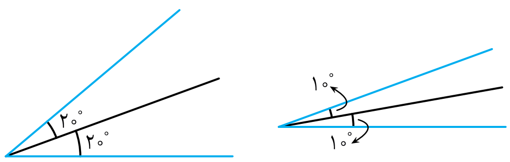
$$x\hat{A}t=۱۵^\circ$$



۵) زاویه‌ی ۷۵°: به شکل قسمت (۴) نگاه کنید:

$$t\hat{A}C=t\hat{A}B+B\hat{A}C$$
$$=۱۵^\circ+۶۰^\circ=۷۵^\circ$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ اگر نیمساز زاویه‌ی ۴۰° را رسم کنیم، زاویه‌ی ۲۰° به‌دست می‌آید. اکنون اگر نیمساز زاویه‌ی ۲۰° را رسم کنیم، زاویه‌ی ۱۰° به‌دست می‌آید.



با رسم نیمساز زاویه‌ی ۱۰°، زاویه‌ی ۵° و به همین صورت زاویه‌ی $۲/۵^\circ$ به‌دست می‌آید.

پس تا این‌جا زاویه‌های $۲/۵^\circ$، ۵°، ۱۰° و ۲۰° را می‌توان رسم کرد.

زاویه‌ی ۶۰° را در متن درس یاد گرفتیم، پس زاویه‌ی $۶۵^\circ=۵^\circ+۶۰^\circ$ را می‌توان رسم کرد. زاویه‌ی ۲۰° و $۲/۵^\circ$ را می‌توان رسم کرد، پس زاویه‌ی $۲۰^\circ+۲/۵^\circ=۲۲/۵^\circ$ را می‌توان رسم کرد.

زاویه‌ی ۳۰° را با رسم نیمساز زاویه‌ی ۶۰° می‌توان رسم کرد پس می‌توان زاویه‌ی ۱۵° را نیز رسم کرد، در نتیجه زاویه‌ی $۱۵^\circ+۲/۵^\circ=۱۷/۵^\circ$ را نیز می‌توان رسم کرد.

پس فقط گزینه‌ی (۱) را نمی‌توان رسم کرد.