هندسه ۱ و ۲

دهم و یازدهم

- پرسش‌های چهارگزینه‌ای تالیفی با تکیه بر مفاهیم کتاب‌های درسی
- پرسش‌های منتخب کنکورهای سال‌های اخیر
- پاسخ‌های تشریحی و کامل پرسش‌ها

حمیدرضا ملکی
محمود محمدی

به نام خدا

مقدمه

کتاب هندسه پایه که در پیش رو دارید، یک کتاب بسیار کامل و دقیق در چارچوب کتاب‌های هندسه ۱ سال دهم و هندسه ۲ سال یازدهم است. همان‌طور که می‌دانید کتاب‌های درسی هندسه در چند سال اخیر دستخوش تغییرات فراوانی شده‌اند. هدف اصلی این کتاب این است که همهٔ مطالب کتاب‌های درسی و به‌خصوص قسمت‌های جدید آن را به طور کامل پوشش دهد. تست‌های متنوع و جذابی در این کتاب مطرح و یا ترجمه شده است. دانش‌آموزان عزیز با پاسخ دادن به این تست‌های زیبا و کارآمد بر هندسه پایه تسلط پیدا می‌کنند و برای شرکت در آزمون‌های سراسری به آمادگی لازم دست می‌یابند.

نقطهٔ قوت این کتاب دقت بسیار بالا در آن است. گزاره‌ها و جملاتی که در این کتاب به کار برده شده است، دقیق هستند. به جرأت می‌توان گفت در اندک کتابی چنین دقتی وجود دارد.

این کتاب شامل هفت فصل است که چهار فصل اول آن مربوط به هندسه ۱ و سه فصل بعد مربوط به هندسه ۲ است. هر فصل شامل چند درس است. در ابتدای هر درس مطالبی تحت عنوان درسنامه بیان شده است که با مطالعهٔ آن، تعاریف، مفاهیم، قضیه‌ها و نکات مربوط به آن درس یادآوری می‌شود. بنابراین مطالعهٔ درسنامه‌ها خالی از لطف نیست. در پایان هر درس تعدادی تست با عنوان پرسش‌های چهارگزینه‌ای مطرح شده است که با پاسخ دادن به آن‌ها، به تسلط نسبی در آن درس خواهید رسید. در انتهای هر فصل نیز تست‌های فراوانی وجود دارد که طبقه‌بندی نشده‌اند. با پاسخ دادن به همهٔ این پرسش‌ها، بر کل فصل تسلط کافی پیدا می‌کنید.

این کتاب به دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم توصیه می‌شود. مطالعهٔ این کتاب برای دانش‌آموزان پایه‌های دهم و یازدهم به منظور تقویت هندسه و برای دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم به منظور آمادگی در آزمون سراسری، بسیار مفید است.

از جناب آقای یحیی دهقانی مدیریت محترم انتشارات مبتکران که امکان چاپ این کتاب را فراهم نمودند، تشکر ویژه می‌نماییم.

در پایان کمال تشکر را از استاد محمود نصیری عزیز داریم. همچنین از آقای مبین مدیر گروه حروف‌چینی و گرافیک و خانم ملیحه محمدی آندرس (تایپیست و صفحه‌آرا) و خانم نرگس سربندی (طراح شکل و عنوان‌ها) و خانم سمانه ایمان‌فرد (طراح جلد) که با صبر خود ما را در پدیدآوری این اثر یاری کردند تشکر می‌کنیم.

درود بر آفرینندگان فردایی بهتر

تابستان ۹۷

فهرست

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس اول: یادآوری

- قضیه های مهم
  - زاویهٔ متقابل به رأس
  - خطوط موازی و مورب
  - فیثاغورس
- هم نهشتی
- مثلث متساوی الساقین

درس دوم: ترسیم های هندسی

- نامساوی مثلث (قضیهٔ حمار)
- چهار ترسیم مقدماتی
  - ویژگی نیمساز
  - ویژگی عمودمنصف
- ترسیم و هم نهشتی

درس سوم: استدلال

- استدلال و تعاریف اولیه
- همرسی در مثلث
  - عمود منصف‌ها
  - خط‌های شامل سه ارتفاع
  - نیمسازهای داخلی
- نابرابری در مثلث

درس اوّل

یادآوری

در این فصل قصد داریم قضیه‌ها و مطالبی که در کتاب‌های سال‌های گذشته بیان شده‌اند را یادآوری کنیم. تسلط به این درس برای مطالعهٔ ادامهٔ کتاب لازم است.

قضیه‌های مهم

اولین قضیه‌ای که مطرح می‌کنیم قضیهٔ زاویه‌های متقابل به رأس است:

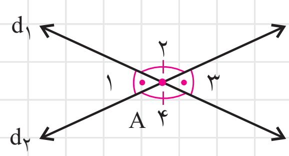
قضیه ۱

قضیهٔ زاویه‌های متقابل به رأس

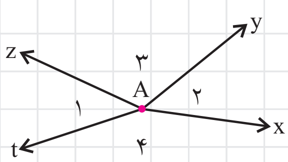
فرض کنیم دو خط d_1 و d_2 در نقطهٔ A متقاطع هستند. در این صورت زاویه‌های متقابل به رأس هم‌اندازه‌اند. یعنی در شکل مقابل:

$$\angle A_1 = \angle A_3$$

$$\angle A_2 = \angle A_4$$



در مورد این قضیه لازم است به نکته‌ای اشاره کنیم. در شکل مقابل فرض کنیم $\angle A_1 = \angle A_2$ است. در این صورت لزومی ندارد که $\angle A_3 = \angle A_4$ باشد. این نتیجه تنها وقتی درست است که نیم‌خط‌های Ax و Az و نیم‌خط‌های Ay و At در یک امتداد باشند. **(چرا؟)**



قضیهٔ بعدی کاربردهای بسیاری دارد.

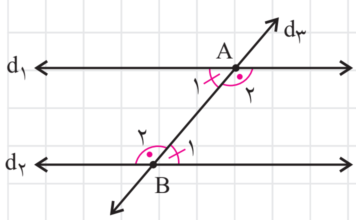
قضیه ۲

قضیهٔ خطوط موازی و مورب

فرض کنید دو خط d_1 و d_2 موازی باشند. مطابق شکل اگر خط d_3 این دو خط را در A و B قطع کند، آن‌گاه:

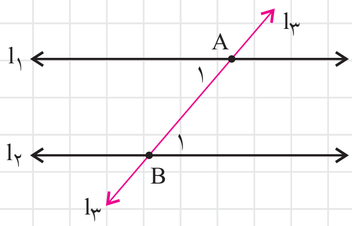
$$\angle A_1 = \angle B_1$$

$$\angle A_2 = \angle B_2$$



در واقع این قضیه بیان می‌کند که همهٔ زاویه‌های حاده و همهٔ زاویه‌های منفرجه هم‌اندازه‌اند. در صورتی که d_3 بر دو خط عمود باشد، همهٔ زاویه‌ها قائمه‌اند.

توجه داشته باشیم که عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب نیز درست است. یعنی این قضیه دو شرطی است. بدین صورت که:

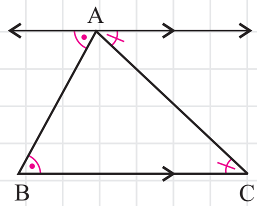


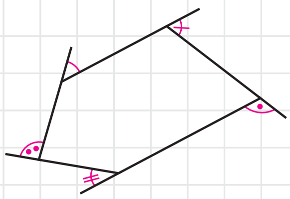
قضیه ۳

عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب

دو خط $l_۱$ و $l_۲$ مفروضند. مطابق شکل خط $l_۳$ این دو خط را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. حال اگر $\angle A_۱ = \angle B_۱$ باشد، آن‌گاه $l_۱$ موازی $l_۲$ است.

از کاربردهای قضیهٔ خطوط موازی و مورب می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

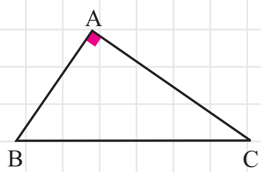




نکته

1. **مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.**
2. **مجموع اندازهٔ سه زاویهٔ خارجی هر مثلث که هر کدام نظیر یک رأس باشند، ۳۶۰° است.**
3. **اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش است.**
4. **مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب $(n-۲)\times۱۸۰^\circ$ است.**
5. **مجموع اندازهٔ n زاویهٔ خارجی هر n ضلعی محدب که هر کدام نظیر یک رأس باشند، ۳۶۰° است.**

قضیهٔ بعدی که به آن اشاره می‌کنیم، قضیهٔ فیثاغورس است.



قضیه ۴

قضیهٔ فیثاغورس

اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، آن‌گاه: $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$

این قضیه نیز دو شرطی است. یعنی:

قضیه ۵

عکس قضیهٔ فیثاغورس

اگر در مثلث ABC داشته باشیم $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$، آن‌گاه:

$$\angle BAC = ۹۰^\circ$$

هم‌نهشتی مثلث‌ها

منظور از هم‌نهشتی دو شکل، قابلیت انطباق آن دو شکل است. برای هم‌نهشتی مثلث‌ها سه حالت کلی وجود دارد که عبارتند از:

1. **ض ز ض:** دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلث دیگر نظیر به نظیر هم‌اندازه باشند.
2. **ض ض ض:** سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری نظیر به نظیر هم‌اندازه باشند.
3. **ز ض ز:** دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی دیگر نظیر به نظیر هم‌اندازه باشند.

حالت‌های دیگری برای هم‌نهشتی مثلث‌ها وجود دارند که از این سه حالت کلی نتیجه می‌شوند. مانند:

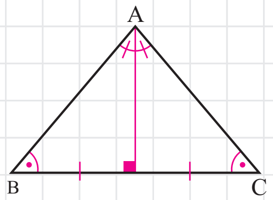
ز ز ض

وتر و یک ضلع

وتر و یک زاویهٔ حاده

ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین

مثلث متساوی‌الساقین $ABC\,(AB = AC)$ را در نظر بگیریم. در این صورت:



۱ زاویه‌های مجاور به دو ساق هم‌اندازه‌اند.

۲ ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر رأس A برهم منطبق هستند.

۳ ارتفاع‌های وارد بر دو ساق هم‌اندازه‌اند. (این ویژگی برای میانه و نیمساز نیز برقرار است.)

نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که این سه ویژگی برگشت‌پذیرند. یعنی:

۱ اگر در مثلثی دو زاویه هم‌اندازه باشند، آن‌گاه آن مثلث متساوی‌الساقین است.

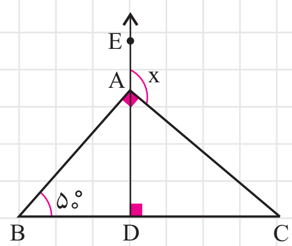
۲ اگر در مثلثی ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر یک رأس بر هم منطبق باشند، آن‌گاه آن مثلث متساوی‌الساقین است.

۳ اگر در مثلثی ارتفاع‌های وارد بر دو ضلع هم‌اندازه باشند، آن‌گاه آن مثلث متساوی‌الساقین است. (این ویژگی برای میانه و نیمساز نیز برقرار است.)

در مورد ۲ اگر دو تا از این سه پاره‌خط بر هم منطبق باشند، برای متساوی‌الساقین بودن کافی است.

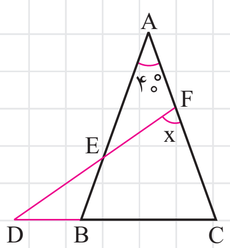
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. می‌دانیم $DE \perp BC$ و $\angle ABC = ۵۰^\circ$ است. $\angle EAC = x$ چند درجه است؟



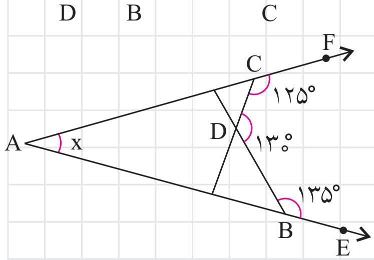
۱) ۱۳۰　　۲) ۱۳۲
۳) ۱۳۵　　۴) ۱۳۸

۲. در شکل مقابل $AB = AC$ و $BD = BE$ است. اگر $\angle BAC = ۴۰^\circ$ باشد، $\angle DFC = x$ چند درجه است؟



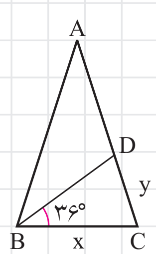
۱) ۶۰　　۲) ۶۵
۳) ۷۰　　۴) ۷۵

۳. در شکل مقابل داریم $\angle EBD = ۱۳۵^\circ$ ، $\angle BDC = ۱۳۰^\circ$ و $\angle FCD = ۱۲۵^\circ$. $\angle EAF = x$ چند درجه است؟



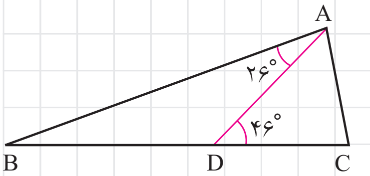
۱) ۳۰　　۲) ۳۵
۳) ۴۰　　۴) ۴۵

۴. مطابق شکل دو مثلث ABC و BDC متساوی‌الساقین هستند. $(AB = AC$ و $BD = BC)$ اگر $\angle DBC = ۳۶^\circ$ باشد، اندازهٔ ضلع AB برحسب x و y کدام است؟



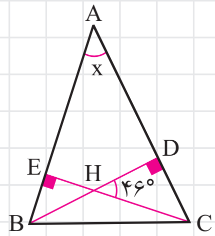
۱) $۲x - y$　　۲) $y + ۲x$
۳) $x + y$　　۴) $۲x + ۲y$

۵. طبق شکل مثلث **ABC** متساوی‌الساقین است. $\angle CAD = x$ چند درجه است؟



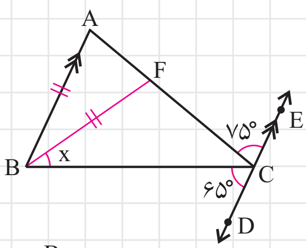
۱) ۳۶ ۲) ۵۶
۳) ۶۶ ۴) ۵۴

۶. در شکل مقابل می‌دانیم $\angle DHC = ۴۶^\circ$. $\angle BAC = x$ چند درجه است؟



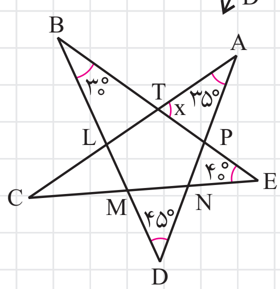
۱) ۴۴ ۲) ۴۶
۳) ۴۸ ۴) ۵۰

۷. از رأس **C** در مثلث **ABC** خطی موازی با ضلع **AB** رسم می‌کنیم. در شکل اگر $AB = BF$ ، $\angle ACE = ۷۵^\circ$ ، $\angle BCD = ۶۵^\circ$ باشد، $\angle CBF = x$ چند درجه است؟



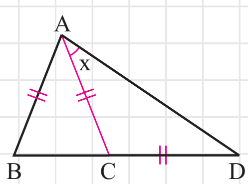
۱) ۳۰
۲) ۳۵
۳) ۴۰
۴) ۴۵

۸. در شکل مقابل $\angle ATP = x$ چند درجه است؟



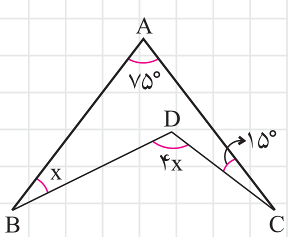
۱) ۵۰
۲) ۷۰
۳) ۷۵
۴) ۸۰

۹. در شکل مقابل $AB = AC = BC$ و $\angle BAD = ۶۳^\circ$ است. $\angle CDA = x$ چند درجه است؟



۱) ۳۹
۲) ۴۰
۳) ۴۱
۴) ۴۲

۱۰. در شکل مقابل $\angle BAC = ۷۵^\circ$، $\angle ACD = ۱۵^\circ$، $\angle ABD = x$ و $\angle BDC = ۴x$ است. مقدار **x** چقدر است؟

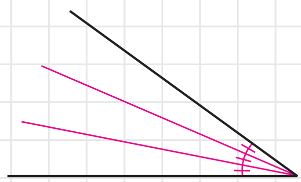


۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

درس دوم

ترسیم های هندسی

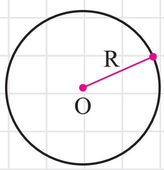
ترسیم‌های هندسی موضوعی است که از دیرباز مطرح بوده است. مسأله‌های ترسیمی معروفی وجود دارند که چالش بسیاری از دانشمندان بودند و فکر کردن به آن‌ها باعث پیشرفت‌های فراوانی در ریاضیات شده است. یکی از این مسأله‌ها، تثلیث زاویه است. یعنی با استفاده از خط‌کش غیرمدرج و پرگار، زاویهٔ داده شده‌ای را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم.



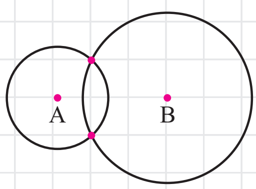
همان‌طور که گفته شد ابزار ترسیم، خط‌کش غیرمدرج و پرگار است. خط‌کش غیرمدرج برای رسم خط گذرنده از دو نقطهٔ متمایز و پرگار برای رسم دایره است.

تعریف

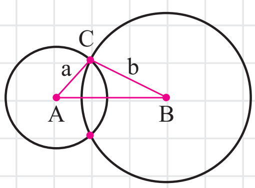
دایره: مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های صفحه که از یک نقطهٔ ثابت همان صفحه، فاصله‌ای مشخص دارند، دایره نامیده می‌شود. به نقطهٔ ثابت مرکز و به فاصلهٔ ثابت شعاع گفته می‌شود.



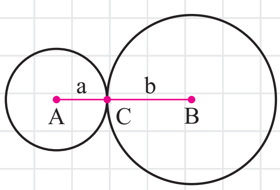
حال فرض کنید به دنبال نقطه‌هایی هستیم که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر باشند. در این صورت دایره به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر و دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد دو دایره، نقطه‌ای است که به دنبال آن بودیم.



در ترسیم این دو دایره چند سؤال مطرح می‌شوند. چند نقطه با شرایط بالا وجود دارد؟ آیا تعداد نقطه‌ها به فاصلهٔ بین A تا B مرتبط است؟ برای پاسخ به این سؤال‌ها باید ببینیم که دو دایره در چه حالتی برخورد دارند. بررسی کامل این موضوع در فصل ۵ انجام می‌شود. اما ما در اینجا به توضیح مختصری از آن می‌پردازیم.



فرض کنیم دایره‌ای به مرکز A و شعاع a و دایره‌ای به مرکز B و شعاع b داریم. در شکل (۱)، دو دایره در دو نقطه برخورد دارند و مثلثی پدید آمده است و $AB < a+b$ است. اما در شکل (۲)، دو دایره یک نقطهٔ برخورد دارند ولی مثلثی تشکیل نشده است. در این حالت $AB = a+b$ است. این موضوع به صورت زیر در نامساوی مثلث بیان می‌شود:



قضیه ۶

نامساوی مثلث (قضیهٔ حمار)

شرط لازم و کافی برای ترسیم مثلثی که اندازهٔ ضلع‌های آن سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c باشند، این است که:

$$a+b>c \quad \text{و} \quad b+c>a \quad ، \quad c+a>b$$

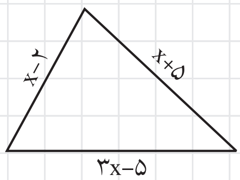
سه شرط که در نامساوی مثلث آمده‌اند را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$|a-b|<c<a+b$

مثـــال

اندازهٔ ضلع‌های مثلثی $x+5$، $x-2$ و $3x-5$ است. می‌دانیم این عددها طبیعی هستند. چند مقدار مختلف برای x وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶



حل:

اندازه‌های داده شده باید در نامساوی مثلث صدق کنند. پس:

$$3x-5<(x-2)+(x+5)\Rightarrow 3x-5<2x+3\Rightarrow x<8$$

$$x-2<(x+5)+(3x-5)\Rightarrow x-2<4x\Rightarrow x>\frac{-2}{3}$$

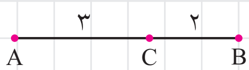
$$x+5<(3x-5)+(x-2)\Rightarrow x+5<4x-7\Rightarrow x>4$$

درنتیجه $4<x<8$ است. چون x عدد طبیعی است، پس یکی از عددهای ۵، ۶ یا ۷ می‌تواند باشد. بنابراین گزینهٔ ۱ صحیح است.

البته توجه کنیم که اگر از خلاصهٔ نامساوی مثلث استفاده می‌کردیم، کمی کوتاه‌تر می‌شد. بدین صورت که:

$$|(x-2)-(x+5)|<3x-5<(x-2)+(x+5)\Rightarrow 7<3x-5<2x+3\Rightarrow 4<x<8$$

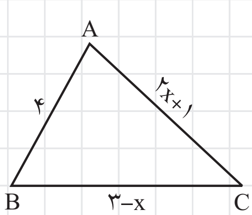
فرض کنیم $AB=5cm$ باشد. سؤال می‌پرسیم آیا نقطهٔ C وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر و از B به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشد؟ مطابق شکل مقابل پاسخ مثبت است. این در صورتی است که این سه نقطه تشکیل مثلث نمی‌دهند. در این حالت $AB=AC+CB$ است. پس در نامساوی مثلث حالت تساوی رخ داده است. درواقع وقتی در نامساوی مثلث حالت تساوی پدید آید به معنای این است که سه نقطه روی یک خط هستند و تشکیل مثلث نمی‌دهند. برای درک بهتر به مثال زیر دقت کنیم:



مثـــال

دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از یک‌دیگر قرار دارند. نقطهٔ C به گونه‌ای است که از A به فاصلهٔ $2x+1$ و از B به فاصلهٔ $3-x$ است. کدام گزینه در مورد x درست است؟

۱) $0\le x\le 3$ ۲) $0<x<2$ ۳) $0<x<3$ ۴) $0\le x\le 2$



حل:

وجود نقطهٔ C به معنای تشکیل مثلث نیست. پس در نامساوی مثلث حالت تساوی را باید در نظر بگیریم. پس:

$$CA+AB\ge BC \quad، \quad BC+CA\ge AB \quad و \quad AB+BC\ge AC$$

درنتیجه:

$$\left.\begin{array}{l}(2x+1)+4\ge 3-x\Rightarrow 2x+5\ge 3-x\Rightarrow x\ge\frac{-2}{3}\\ (3-x)+(2x+1)\ge 4\Rightarrow x+4\ge 4\Rightarrow x\ge 0\\ 4+(3-x)\ge 2x+1\Rightarrow 7-x\ge 2x+1\Rightarrow x\le 2\end{array}\right\}\Rightarrow 0\le x\le 2$$

بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

چهار ترسیم مقدماتی

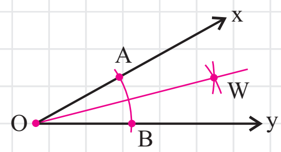
در کتاب درسی چهار ترسیم مقدماتی بیان شده‌اند که عبارتند از:

۱ رسم نیمساز یک زاویه

۲ رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

۳ رسم خط عمود بر یک خط

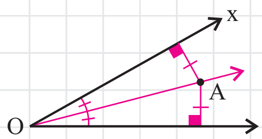
۴ رسم خط موازی با یک خط



عمودمنصف و نیمساز ویژگی مهمی دارند که در دو نکتهٔ زیر بیان می‌کنیم:

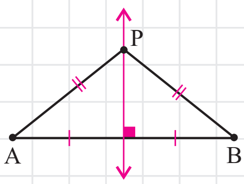
نکته

هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



نکته

هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.



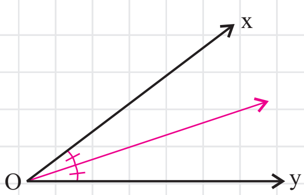
مثال

دو نیم‌خط Ox و Oy مفروضند. در مورد مجموعهٔ همهٔ نقاطی که از این دو نیم‌خط به یک فاصله هستند، چه می‌توان گفت؟

۱) روی یک خط هستند.　　۲) روی یک نیم‌خط هستند.

۳) روی دو خط عمود بر هم هستند.　　۴) هیچ‌کدام

حل:



همان‌طور که در نکتهٔ بالا اشاره شد، هر نقطه‌ای که از دو ضلع زاویهٔ xOy به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد. پس مجموعهٔ همهٔ نقاطی که از Ox و Oy به یک فاصله‌اند، روی نیم‌خطی قرار دارند که نیمساز زاویهٔ xOy است.

بنابراین گزینهٔ ۲ صحیح است.

مثال

پاره‌خط AB مفروض است. دو نقطهٔ متمایز C و D به گونه‌ای هستند که فاصلهٔ آن‌ها از دو سر پاره‌خط AB یکسان است. کدام گزینه نادرست است؟

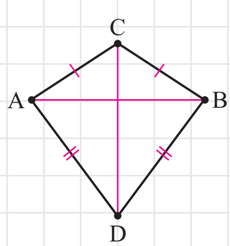
۱) خط شامل CD بر AB عمود است.

۲) خط شامل CD از وسط AB می‌گذرد.

۳) خط شامل CD نیمساز $\angle ACB$ است.

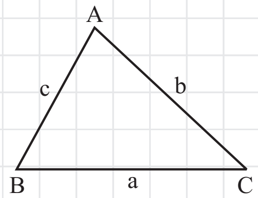
۴) هیچ‌کدام از موارد بالا درست نیست.

حل:



با توجه به فرض C و D روی عمودمنصف پاره‌خط AB هستند. چون از دو نقطهٔ متمایز فقط و فقط یک خط می‌گذرد، پس خط شامل CD عمودمنصف پاره‌خط AB است. حال با توجه به همنهشتی دو مثلث ACD و BCD (به حالت ض ض ض)، خط شامل CD نیمساز $\angle ACB$ است. پس هر سه گزینهٔ ۱، ۲ و ۳ درست هستند.

ترسیم و هم‌نهشتی



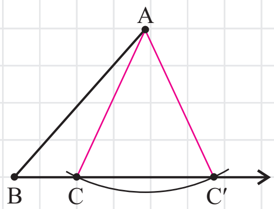
فرض کنیم سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c طوری باشند که در نامساوی مثلث صدق می‌کنند. در این صورت بیان می‌شود که فقط و فقط یک مثلث می‌توان رسم کرد که اندازهٔ ضلع‌هایش این سه عدد باشند. این بدان معناست که همهٔ مثلث‌هایی که اندازهٔ ضلع‌هایشان این سه عدد هستند، هم‌نهشتند. این همان حالت (ض ض ض) از حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث است.

مثـال

کدام یک از گزینه‌های زیر، همواره حالت هم‌نهشتی دو مثلث نیست؟

۱) (ض ز ض) ۲) (ز ز ض) ۳) (ز ض ز) ۴) (ض ض ز)

حل:



گزینه‌های ۱ و ۳ حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث هستند. در گزینهٔ ۲ اگر اندازهٔ دو زاویه از مثلثی با اندازهٔ دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، زاویهٔ سوم آن‌ها نیز هم‌اندازه‌اند. زیرا مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است. اما گزینهٔ ۴ حالت هم‌نهشتی نیست. برای درک این موضوع کافی است به شکل مقابل توجه کنیم. دو مثلث ABC و ABC' در شرط (ض ض ز) صدق می‌کنند، اما هم‌نهشت نیستند.

$AB = AB$ ، $AC = AC'$ ، $\angle B = \angle B$

بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

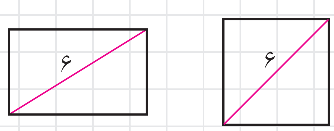
مثـال

در چند تا از موارد زیر با اطلاعات داده شده فقط یک چهارضلعی می‌توان رسم کرد؟

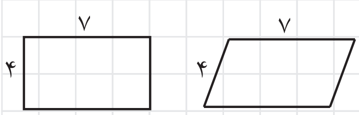
- **مستطیلی که اندازهٔ قطر آن ۶ باشد.**
- **متوازی‌الاضلاعی که اندازهٔ دو ضلع آن ۴ و ۷ باشد.**
- **لوزی‌ای که اندازهٔ یک قطر آن ۳ و اندازهٔ ضلعش ۴ باشد.**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

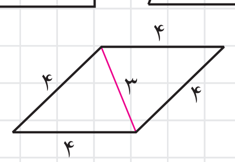
حل:



برای ترسیم یک مستطیل، اندازهٔ قطر کافی نیست. در شکل مقابل دو مستطیل مشاهده می‌کنید که قطر آن‌ها هم‌اندازه‌اند ولی هم‌نهشت نیستند.



در متوازی‌الاضلاع نیز با داشتن اندازهٔ دو ضلع، فقط یک چهارضلعی نمی‌توان رسم کرد. با تغییر زاویهٔ رأس، متوازی‌الاضلاع‌های مختلفی رسم می‌شوند. دو متوازی‌الاضلاعی که در مقابل مشاهده می‌کنید هم‌نهشت نیستند، اما ضلع‌های آن‌ها هم‌اندازه‌اند.



اما در مورد سوم لوزی یکتایی رسم می‌شود. زیرا با کشیدن قطر با اندازهٔ ۳ هر دو مثلث ایجاد شده یکتا رسم می‌شوند. زیرا اندازهٔ هر سه ضلع آن‌ها معلوم است.

بنابراین گزینهٔ ۲ صحیح است.

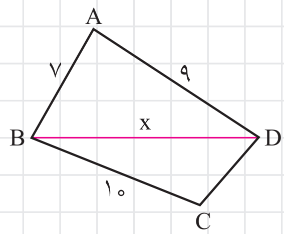
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۱. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $۲x-۳$ از هم قرار دارند. نقطهٔ C به‌گونه‌ای است که از A به فاصلهٔ $x-۱$ و از B به فاصلهٔ $x+۶$ است. کدام گزینه در مورد x درست است؟

۱) $x \geq ۵$ ۲) $x > ۵$

۳) $۸ > x > ۵$ ۴) با این فاصله‌ها هیچ نقطهٔ Cای وجود ندارد.

۱۲. با توجه به شکل مقابل بزرگ‌ترین مقدار صحیحی که x می‌تواند اختیار کند، چقدر است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۳

۳) ۱۴

۴) ۱۵

۱۳. برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB کدام یک از گزینه‌های زیر به کار می‌رود؟

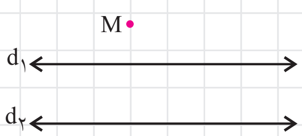
۱) به مراکز A و B و به شعاع‌های متمایز کمان‌هایی می‌زنیم.

۲) به مراکز A و B به شعاع‌های مساوی کمان‌هایی می‌زنیم.

۳) به مراکز A و B و به شعاع‌هایی مساوی یا کم‌تر از AB کمان‌هایی می‌زنیم.

۴) به مراکز A و B و به شعاع‌هایی مساوی و بیش‌تر از $\frac{۱}{۲}AB$ کمان‌هایی می‌زنیم.

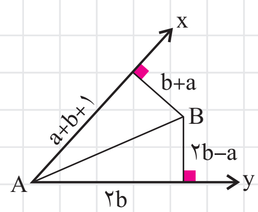
۱۴. در شکل مقابل دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی و به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم هستند. از نقطهٔ M چند خط می‌توان گذراند که دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را قطع کند و اندازهٔ قسمت محصور بین دو خط، جواب معادلهٔ $۲x^۲-۵x+۲=۰$ باشد؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) هیچ ۴) بستگی به جای نقطهٔ M دارد.

۱۵. در شکل مقابل نقطهٔ B روی نیمساز $\angle xAy$ قرار دارد. با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌های داده شده در شکل، اندازهٔ AB کدام است؟



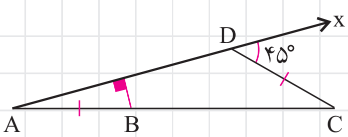
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶. تعداد مستطیل‌های غیرهم‌نهشتی که اندازهٔ دو قطر آن ۶ باشند، ...... و تعداد لوزی هایی که اندازهٔ دو قطر آن ۳ و ۴ باشند، ...... است.

۱) بی‌شمار، یک ۲) یک، بی‌شمار

۳) بی‌شمار، بی‌شمار ۴) بی‌شمار، بی‌شمار

۱۷. مطابق شکل، عمودمنصف پاره‌خط AD، ضلع AC در نقطهٔ B قطع کرده است. اگر $AB=CD$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۸. چند متوازی‌الاضلاع وجود دارد که اندازهٔ دو ضلع آن و اندازهٔ یک قطرش سه عدد متمایز باشند و این سه عدد از مجموعهٔ $\{۴,۵,۶\}$ انتخاب شده باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۹. حداکثر چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله و از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۲ باشد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه مفروضند. سه دایره نیز در این صفحه طوری واقعند که هر کدام از آن‌ها از این دو نقطه می‌گذرند. کدام گزینه درست است؟

۱) دو تا از این دایره‌ها بر هم منطبق هستند.

۲) مرکزهای این سه دایره نمی‌توانند در یک طرف خط گذرنده از A و B باشند.

۳) مرکزهای این سه دایره روی یک خط قرار دارند.

۴) مرکزهای این سه دایره تشکیل یک مثلث منفرجه می‌دهند.

درس سوم

استدلال

در ابتدای این بخش دو نوع کلی استدلال را تعریف می‌کنیم و سپس به بیان چند تعریف دیگر می‌پردازیم.

تعریف

استدلال استقرایی: نتیجه‌گیری برای موضوعی بر پایهٔ مشاهدات و بررسی آن موضوع در چند حالت محدود را استدلال استقرایی می‌نامند.

استدلال استنتاجی: نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم را استدلال استنتاجی می‌نامیم.

لازم است که به دقت به این دو تعریف بنگریم و به تفاوت آن‌ها پی ببریم. به عنوان مثال فرض کنید روزی برای ماهیگیری به برکه‌ای رفته‌اید و در پایان روز ده ماهی صید کرده‌اید که همهٔ آن‌ها سفیدرنگ هستند. پس نتیجه می‌گیرید که همهٔ ماهی‌های برکه سفید رنگ هستند. این نتیجه‌گیری برپایهٔ استدلال استقرایی است که نتیجهٔ آن ممکن است نادرست باشد. اما نتیجهٔ استدلال استنتاجی درست است. چون به صورت منطقی بر پایهٔ حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. همهٔ مواردی که در این کتاب می‌بینیم برپایهٔ استدلال استنتاجی هستند.

استدلال استقرایی

۱ بر مبنای مشاهدات محدود است.
۲ از جزء به کل رسیدن است.
۳ ممکن است نتیجه‌اش نادرست باشد.

تعریف

قضیه: برخی نتیجه‌های مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند قضیه نامیده می‌شوند. به عنوان مثال می‌توان از قضیهٔ فیثاغورس نام برد.

تعریف

عکس قضیه: اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن‌چه حاصل می‌شود عکس قضیه گفته می‌شود.

عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

تعریف

قضیه دو شرطی: به قضیه‌ای که هم خودش و هم عکس آن درست باشد، قضیهٔ دوشرطی گفته می‌شود. برای بیان قضیه‌های دوشرطی، از عبارت اگر و تنها اگر ($\Leftrightarrow$) استفاده می‌شود.

به قضیه‌های دوشرطی زیر توجه کنیم:

۱ یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؛ اگر و تنها اگر قطرهایش یکدیگر را نصف کنند.

۲ یک مثلث متساوی‌الساقین است؛ اگر و تنها اگر دو زاویهٔ هم‌اندازه داشته باشد.

۳ مثلث ABC در رأس A قائمه است؛ اگر و تنها اگر $BC^2 = AB^2 + AC^2$ باشد.

تعریف

گزاره: یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد. اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد.

گزارهٔ ساده و گزارهٔ مرکب: اگر گزاره تنها یک خبر را اعلام کند، آن را گزارهٔ ساده می‌نامند و اگر بیش از یک خبر را اعلام کند، آن را گزارهٔ مرکب می‌نامند.

به موارد زیر توجه کنیم:

✓ ۱ در مرکز زمین دایناسورها زندگی می‌کنند.

✓✓ ۲ مثلث سه ضلع دارد و سه از چهار بزرگ‌تر است.

☒ ۳ چه روز خوبی!

☒ ۴ آیا تو کنکور هندسه را صددرصد می‌زنی؟

☒ ۵ فصل بهار از فصل پاییز زیباتر است.

☒ ۶ هندسه درس سختی است.

دو مورد ۱ و ۲ گزاره هستند. مابقی موارد گزاره نیستند.

جمله‌های خبری مثل ۴ و جمله‌های حسی مثل ۵ و ۶ گزاره نیستند.

تعریف

نقیض گزاره: اگر p یک گزاره باشد، آن‌گاه «چنین نیست که p» را نقیض p گویند. اگر ارزش گزاره p درست باشد، ارزش نقیض آن نادرست است و چنان‌چه ارزش p نادرست باشد، نقیض آن درست است.

برهان خلف: نوعی استدلال است که در آن فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.

مثال نقض: به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

برهان خلف یک استدلال غیرمستقیم است.

مثال

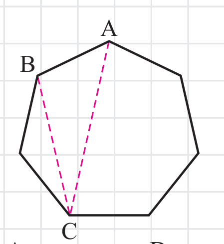
چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

- **هر سه رأس هفت ضلعی منتظم تشکیل مثلث متساوی‌الساقین می‌دهند.**
- **هر دو مثلثی که مساحت‌های برابر دارند، هم‌نهشت هستند.**
- **گزارهٔ «هر چهارضلعی‌ای که قطرهایش یک‌دیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.» دو شرطی است.**
- **نقیض گزارهٔ «مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» درست است.**

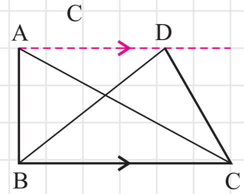
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل:

مثلث ABC در شکل مقابل مثال نقض گزارهٔ اول است.



دو مثلث ABC و BCD در شکل مقابل مساحت برابر دارند ولی هم‌نهشت نیستند. پس این یک مثال نقض برای گزارهٔ دوم است.



گزارهٔ سوم درست است. یعنی هر چهارضلعی که قطرهایش یک‌دیگر را نصف کنند متوازی‌الاضلاع است و در متوازی‌الاضلاع قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند.

در مورد گزارهٔ چهارم دقت کنیم که گزارهٔ «مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» درست است. پس نقیض آن درست نیست. بنابراین گزینهٔ ۱ صحیح است.

خط‌های همرس در مثلث

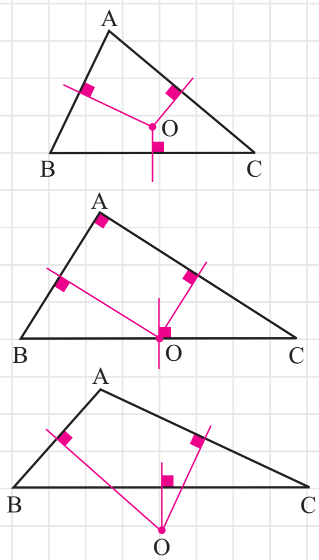
منظور از همرسی خط‌ها این است که حداقل ۳ خط در یک نقطه متقاطع باشند. در این قسمت می‌خواهیم همرسی برخی خط‌های مهم مثلث را بیان کنیم.

عمودمنصف‌ها

قضیه ۷

سه عمودمنصف ضلع‌های هر مثلث همرس‌اند.

لازم است به این مطلب اشاره کنیم که این قضیه در مثلث‌های حاده، قائمه و منفرجه ظاهر متفاوتی دارد. به شکل‌های مقابل توجه کنیم:



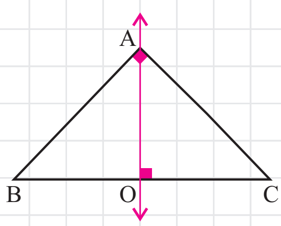
در مثلث حاده‌الزاویه، محل همرسی عمودمنصف در داخل مثلث است. در مثلث قائم‌الزاویه محل همرسی روی وتر و در مثلث منفرجه محل همرسی بیرون مثلث است.

مثــال

■ **در مثلثی عمودمنصف‌ها روی مثلث همرس‌اند و یکی از عمودمنصف‌ها از یک رأس مثلث می‌گذرد. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث چند درجه است؟**

۱) ۳۰ ۲) ۴۵
۳) ۶۰ ۴) قابل تعیین نیست.

حل:



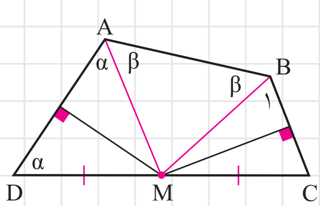
چون عمودمنصف‌ها روی مثلث همرس‌اند، پس مثلث قائم‌الزاویه است. در این مثلث تنها عمودمنصفی که می‌تواند از رأس مثلث بگذرد، عمودمنصف وتر است. چون A روی عمودمنصف است، پس این مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و کوچک‌ترین زاویهٔ آن 45° است. بنابراین گزینهٔ ۲ صحیح است.

مثــال

■ **در چهارضلعی ABCD عمودمنصف‌های دو ضلع AD و BC یک‌دیگر را در وسط ضلع CD قطع کرده‌اند. اگر $\angle C = 50^\circ$ باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟**

۱) ۱۳۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۱۰ ۴) قابل تعیین نیست.

حل:



فرض کنیم نقطهٔ M وسط ضلع CD باشد. چون M روی عمودمنصف ضلع BC است، پس $MB = MC$ است و چون M روی عمودمنصف ضلع AD است، پس $MA = MD$ است. درنتیجه:

$$MA = MB = MC = MD$$

بنابراین $\angle B_1 = \angle C = 50^\circ$ است و هم‌چنین زاویه‌های هم‌اندازه مطابق شکل به وجود