مقدمه‌ی مؤلفان

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای ریاضیات سال دهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آن‌ها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آن‌ها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همه‌ی تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در انتهای هر فصل آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

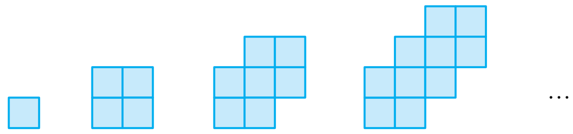
وظیفه‌ی خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، واحد حروف‌چینی خانم زهرا میرزایی و واحد ویراستاری خانم‌ها مریم موحدی مهر و عاطفه ربیعی به سرپرستی خانم سکینه مختار که زحمات زیادی برای آماده‌سازی و تولید کتاب کشیده‌اند تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای محمدصادق جوهری برای ارسال اشکالات کتاب در چاپ اول متشکریم.

فهرست

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

به شکل‌های زیر دقت کنید:



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

این شکل‌ها بر اساس یک الگو ساخته شده‌اند. در این‌جا منظورمان از این‌که این شکل‌ها الگو دارند، این است که هر شکل از شکل قبلی‌اش به دست آمده، به طوری‌که با آن، اشتراک‌ها و اختلاف‌هایی دارد. در مورد این شکل‌ها می‌توان سوال‌های مختلفی مطرح کرد. مثلاً شکل بیستم از چند مربع تشکیل شده است؟ محیط شکل بیستم چند است؟ مساحت شکل بیستم چند است؟ و سؤال‌هایی از این قبیل. برای یافتن پاسخ این سؤال‌ها، باید با مقایسه‌ی شکل‌ها مشخص کنیم که چه ویژگی‌هایی ثابت می‌مانند و چه ویژگی‌هایی تغییر می‌کنند. این کار را **الگویابی** می‌نامند.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم تعداد مربع‌های کوچک در شکل بیستم را پیدا کنیم. الگوی این شکل‌ها این‌طور است: شکل اول ۱ مربع دارد. به شکل اول ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل دوم درست شده است، به شکل دوم ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل سوم به دست آمده است و همین طور این کار را ادامه داده‌ایم. هر بار ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل بعدی درست شود. تعداد مربع‌های کوچک در شکل اول را $a_۱$، تعداد مربع‌های کوچک در شکل دوم را $a_۲$، ... و به‌طورکلی تعداد مربع‌های کوچک در شکل n اُم را a_n می‌گیریم. به جدول زیر توجه‌کنید:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع‌های کوچک	۱	۱+۳	۱+۲×۳	۱+۳×۳	...	$۱+(n-۱)۳$

از روی این جدول معلوم می‌شود که

$$a_n=۱+(n-۱)۳=۳n-۲$$

بنابراین، تعداد مربع‌های کوچک در شکل بیستم برابر است با $a_{۲۰}=۳\times۲۰-۲=۵۸$.

دستور $a_n=۳n-۲$ برای تعداد مربع‌های کوچک در این مثال را جمله‌ی عمومی الگو می‌نامند. به کمک جمله‌ی عمومی، می‌توانیم خیلی از سؤال‌ها در مورد الگو را پاسخ دهیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم بدانیم شکل چندم از این الگو با ۶۷ مربع کوچک ساخته شده است. اگر شماره‌ی این شکل n باشد، آن‌گاه $a_n=۶۷$. بنابراین

$$a_n=۳n-۲=۶۷$$

در نتیجه $n=۲۳$، یعنی شکل ۲۳ اُم با ۶۷ مربع کوچک درست شده است.

یک سؤال دیگر: آیا شکلی در الگوی بالا وجود دارد که با ۹۵ مربع کوچک ساخته شده باشد؟

در این‌صورت $a_n=۳n-۲=۹۵$، یعنی $n=\frac{۹۷}{۳}$. بنابراین، چون n طبیعی نمی‌شود، پس شکلی با ۹۵ مربع کوچک نداریم.

بازی با اعداد

به تســاوی‌های زیر توجه کنید

$۰\times۹+۱=۱$

$۱\times۹+۲=۱۱$

$۱۲\times۹+۳=۱۱۱$

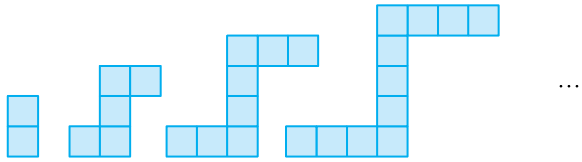
$۱۲۳\times۹+۴=۱۱۱۱$

$۱۲۳۴\times۹+۵=۱۱۱۱۱$

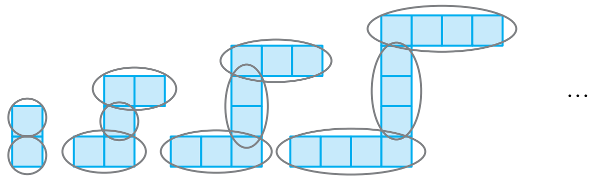
آیا می‌توانید تساوی زیر را کامل کنید؟

$۱۲۳۴۵۶۷۸۹\times۹+\cdots=\cdots$

مسأله ۱ **در الگوی زیر، شکل n اُم از چند مربع کوچک درست شده است؟ شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است؟**



راه‌حل: در این‌جا، از شکل اول چیز زیادی متوجه نمی‌شویم. به شکل دوم نگاه کنید. در هر دو قسمت افقی آن، دو مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی، یک مربع کوچک وجود دارد. شکل سوم در هر دو قسمت افقی‌اش سه مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی، دو مربع کوچک دارد. در شکل چهارم، در هر دو قسمت افقی، چهار مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی، سه مربع کوچک وجود دارد.



بنابراین، شکل n اُم از دو گروه n تایی و یک گروه $(n-۱)$ تایی مربع کوچک درست شده است. به این ترتیب، اگر جمله‌ی عمومی تعداد مربع‌ها را a_n بگیریم، معلوم می‌شود که

$$a_n = ۲n + (n-۱) = ۳n - ۱$$

توجه‌کنید که تعداد مربع‌های کوچک شکل اول هم از این تساوی به‌دست می‌آید.

برای این‌که بفهمیم شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است، باید معادله‌ی $a_n = ۳n - ۱ = ۹۵$ را حل کنیم، که از آن به‌دست می‌آید $n = ۳۲$، یعنی شکل ۳۲ اُم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است.

بازی با اعداد

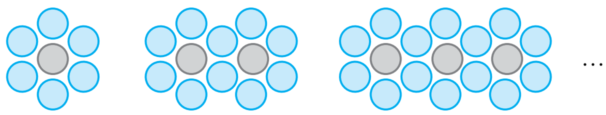
فرض کنید
$a = ۱۲۳۴۵۶۷۹$
به تساوی‌های زیر توجه کنید

$۱ \times ۹a = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱$
$۲ \times ۹a = ۲۲۲۲۲۲۲۲۲$
$۳ \times ۹a = ۳۳۳۳۳۳۳۳۳$
$۴ \times ۹a = ۴۴۴۴۴۴۴۴۴$

آیا می‌توانید تساوی زیر را کامل کنید؟

$۹ \times ۹a = \cdots$

مسأله ۲ **در الگوی زیر، در شکلی که ۲۰ دایره‌ی خاکستری دارد، چند دایره‌ی رنگی وجود دارد؟**



راه‌حل: توجه‌کنید که در شکل اول ۶ دایره‌ی رنگی وجود دارد. در شکل دوم ۴ دایره‌ی رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، در شکل سوم ۲×۴ دایره‌ی رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، ... در شکل n اُم $۴(n-۱)$ دایره‌ی رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد دایره‌های رنگی در شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n = ۶ + ۴(n-۱) = ۴n + ۲$$

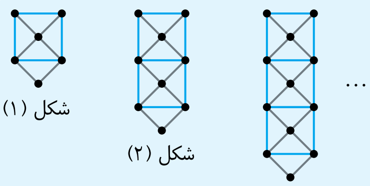
(توجه کنید که شکل n اُم، n دایره‌ی خاکستری دارد.)

بنابراین $a_{۲۰} = ۴ \times ۲۰ + ۲ = ۸۲$.

تست ۱: **تعداد نقاط شکل n اُم در الگوی مقابل چندتا است؟**

۱) $n + ۵$ ۲) $۲n + ۴$

۳) $۳n + ۳$ ۴) $۴n + ۲$



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

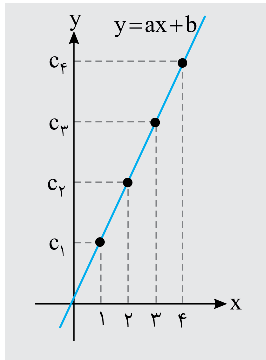
پاسخ: شکل اول دارای ۶ نقطه است و در شکل‌های بعدی، در هر مرحله ۳ نقطه به شکل اضافه می‌شود. پس در مرحله‌ی n اُم $۳ \times (n-۱)$ نقطه به شکل اضافه شده است. یعنی تعداد نقاط شکل n اُم برابر است با

$$۳(n-۱) + ۶ = ۳n + ۳$$

الگوی خطی

در همه‌ی الگوهایی که تا این‌جا دیدیم، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، مقداری ثابت بوده و جمله‌ی عمومی به شکل $c_n=an+b$ بود. این الگوها را **الگوهای خطی** می‌نامند، زیرا نقطه‌های $(۱,c_۱)$، $(۲,c_۲)$، … ، (n,c_n) روی خط $y=ax+b$ قرار دارند.

تعریف **اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به شکل $c_n=an+b$ باشد، که در این‌جا a و b عددهایی حقیقی و ثابت‌اند، این الگوها را الگوهای خطی می‌نامند.**



اگر دو جمله‌ی متوالی الگویی با جمله‌ی عمومی $c_n=an+b$ را از هم کم کنیم، اختلاف آن‌ها برابر با a می‌شود:

$$c_{n+۱}-c_n=a(n+۱)+b-(an+b)=a$$

a در حقیقت شیب خط متناظر این الگو، یعنی $y=ax+b$ است.

اگر دو نقطه از خطی را بدانیم، می‌توانیم معادله‌ی آن را بنویسیم. اگر دو جمله از الگویی خطی را هم بدانیم، می‌توانیم جمله‌ی عمومی آن را پیدا کنیم.

مسأله ۳ **در الگویی خطی، جمله‌های سوم و دوازدهم به ترتیب ۱۱ و ۴۷ هستند. جمله‌ی عمومی این الگو را پیدا کنید.**

راه‌حل: فرض کنید جمله‌ی عمومی این الگو به شکل $c_n=an+b$ باشد. در این صورت

$$\begin{cases}c_۳=۱۱\\ c_{۱۲}=۴۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳a+b=۱۱\\ ۱۲a+b=۴۷\end{cases}$$

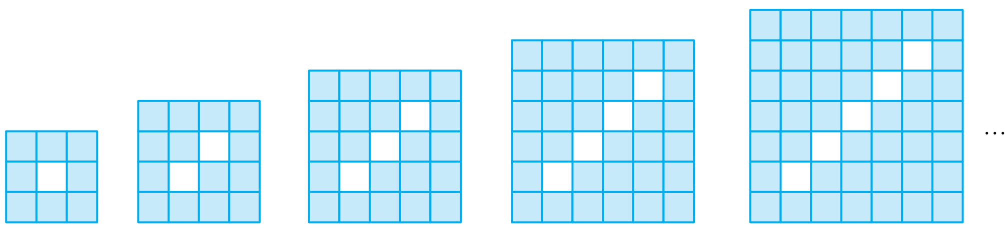
اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم، به‌دست می‌آید $a=۴$ و $b=-۱$.

بنابراین جمله‌ی عمومی الگو به صورت $a_n=۴n-۱$ است.

الگوهای غیر خطی

لزومی ندارد که جمله‌ی عمومی هر الگویی خطی باشد. چند نمونه الگوی غیرخطی را در مسائل زیر مشاهده می‌کنید.

مسأله ۴ **تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل nاُم الگوی زیر چند تا است؟**

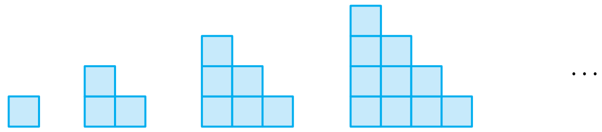


راه‌حل: تعداد کل مربع‌های کوچک شکل nاُم $(n+۲)^۲$ تا است، که از این تعداد n تا سفیدند. بنابراین اگر تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل nاُم را a_n بگیریم،

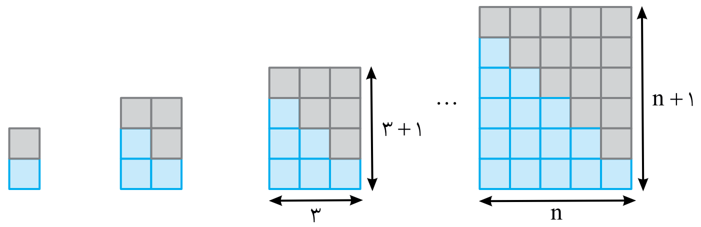
$$a_n=(n+۲)^۲-n=n^۲+۳n+۴$$

به کمک الگوها می‌توان برخی مجموع‌ها را حساب کرد.

مثال: می‌خواهیم مقدار مجموع $۱+۲+۳+\cdots+n$ را حساب کنیم. الگوی زیر را در نظر بگیرید که در آن تعداد مربع‌های کوچک در شکل nاُم $۱+۲+\cdots+n$ است:



اکنون توجه‌کنید که اگر دو شکل یک‌جور از این‌ها را مانند زیر روی هم قرار دهیم، مستطیلی به‌دست می‌آید که مساحتش دو برابر تعداد مربع‌های کوچک آن شکل است.



مستطیل متناظر شکل nاُم، مستطیلی به طول $n+۱$ و عرض n است، پس مساحتش $n(n+۱)$ است و در نتیجه

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

مجموع جمله‌های الگوی خطی

مجموع n جمله‌ی اول یک الگوی خطی را که جمله‌ی عمومی آن $c_n=an+b$ است، می‌توان محاسبه کرد.

اگر این مجموع را S بنامیم، S به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}S&=(a+b)+(۲a+b)+(۳a+b)+\cdots+(na+b)\\&=a(۱+۲+۳+\cdots+n)+\underbrace{(b+b+b+\cdots+b)}_{\text{تا } n}\\&=\frac{an(n+۱)}{۲}+nb\\&=\frac{n}{۲}(۲b+(n+۱)a)\\&=\frac{n}{۲}(a+b+an+b)\\&=\frac{n}{۲}(c_۱+c_n)\end{aligned}$$

مسأله ۵ **مجموع‌های زیر را حساب کنید:**

الف) $۲+۴+۶+\cdots+۲n$

ب) $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)$

راه‌حل: **الف)** توجه‌کنید که

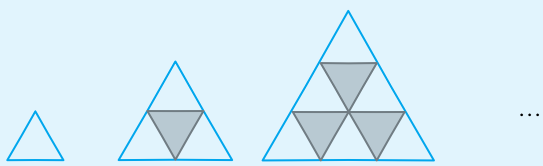
$$۲+۴+۶+...+۲n=۲(۱+۲+...+n)=۲(\frac{n(n+۱)}{۲})=n(n+۱)$$

ب) توجه کنید که برای جمع کردن عددهای فرد ۱، ۳، ۵، ... و $۲n-۱$ می‌توانیم همه‌ی عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ... و ۲n را با هم جمع کرده، سپس عددهای زوج ۲، ۴، ۶، ...و ۲n را از این مجموع کم کنیم.

بنابراین، با توجه به قسمت (الف)،

$$\begin{aligned}۱+۳+...+۲n-۱&=(۱+۲+۳+...+۲n)-(۲+۴+۶+...+۲n)=\frac{۲n(۲n+۱)}{۲}-n(n+۱)\\&=۲n^۲+n-n^۲-n=n^۲\end{aligned}$$

تست ۲: **تعداد مثلث‌های رنگ نشده در الگوی زیر، در شکل بیستم چند تا است؟**



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۱) ۱۹۰

۲) ۲۰۰

۳) ۲۱۰

۴) ۲۲۰

پاسخ: تعداد مثلث‌های رنگ نشده در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

بنابراین در شکل بیستم $\frac{۲۰\times۲۱}{۲}=۲۱۰$ مثلث رنگ نشده داریم.

دنباله

در نمایش مجموعه‌های عددی، عددهایی را پشت سر هم می‌نویسیم و ترتیب نوشتن عددها مهم نیست. مثلاً، مجموعه‌های $\{۱,۲,۳\}$ و $\{۱,۳,۲\}$ برابرند. ردیف‌هایی از عددها که در آن‌ها ترتیب مهم است، نام خاصی دارند.

تعریف **دنباله، ردیفی از عددها است که ترتیب دارند. این عددها را جمله‌های دنباله می‌نامند.**

مثال: عددهای طبیعی را می‌توانیم به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم: $۱,۲,۳,۴,...$

به این ردیف از عددها، دنباله‌ی عددهای طبیعی می‌گویند. در اینجا ترتیب مهم است: اولین عدد ۱ است، دومین عدد ۲ است، سومین عدد ۳ است و همین‌طور در مورد بقیه عددها. بنابراین، دنباله‌ی زیر، دنباله‌ی عددهای طبیعی نیست:

$۲,۱,۳,۴,۵,...$

اگر جمله‌ی اول دنباله را با $a_۱$، جمله‌ی دوم آن را با $a_۲$ و ... و جمله‌ی n اُم آن‌را با a_n نشان دهیم، a_n را **جمله‌ی عمومی** دنباله می‌نامند.

اگر $a_n = an^۲ + bn + c$ (که در اینجا a، b و c عددهایی حقیقی و ثابت‌اند و $a \neq ۰$) دنباله را **دنباله‌ی درجه‌ی ۲** می‌نامند.

مثال: ممکن نیست جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به شکل $a_n = \frac{n+۱}{n-۲}$ باشد، زیرا نمی‌توان جمله‌ی دوم آن را که به ازای $n=۲$ به‌دست می‌آید، حساب کرد.

مسأله ۶ **جمله‌ی عمومی مناسبی برای دنباله‌ی زیر پیدا کنید:**

$۲,۶,۱۲,۲۰,۳۰,\cdots$

راه‌حل: جمله‌ی عمومی این دنباله را a_n بنامید. توجه‌کنید که

$$a_۱ = ۲$$
$$a_۲ = ۲+۴$$
$$a_۳ = ۲+۴+۶$$
$$a_۴ = ۲+۴+۶+۸$$
$$a_۵ = ۲+۴+۶+۸+۱۰$$

بنابراین جمله‌ی عمومی زیر مناسب است:

$$a_n = ۲+۴+۶+...+۲n = ۲(۱+۲+...+n) = ۲(\frac{n(n+۱)}{۲}) = n^۲ + n$$

مسأله ۷ **جمله‌ی چندم دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{۳n-۱}{۵n+۷}$ برابر با $\frac{۷}{۱۲}$ است؟**

راه‌حل: اگر معادله‌ی $\frac{۳n-۱}{۵n+۷} = \frac{۷}{۱۲}$ را حل کنیم، به‌دست می‌آید $n=۶۱$، بنابراین جمله‌ی ۶۱ اُم این دنباله برابر با $\frac{۷}{۱۲}$ است.

تست۳: **اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مربع کامل باشد. عدد اول دسته‌ی یازدهم کدام است؟**

$$\underbrace{\{2,4\}}_{\text{دسته‌ی اول}},\underbrace{\{6,8,10,12,14,16\}}_{\text{دسته‌ی دوم}},\underbrace{\{18,20,22,24,26,28,30,32,34,36\}}_{\text{دسته‌ی سوم}},\dots$$

۱) ۱۰۱ **۲)** ۱۷۰ **۳)** ۲۲۶ **۴)** ۴۰۱

پاسخ: عدد آخر دسته‌ی اول 2^2، عدد آخر دسته‌ی دوم 4^2، عدد آخر دسته‌ی سوم 6^2 و ... عدد آخر دسته‌ی n اُم برابر $(2n)^2$ است. پس عدد آخر دسته‌ی دهم 20^2 است. بنابراین عدد اول دسته‌ی یازدهم ۴۰۱ است.

مثال: در دنباله‌ای $a_1=2$ و هر جمله به‌جز جمله‌ی اول، از دو برابر جمله‌ی قبل از آن، یک واحد بیش‌تر است. یعنی به ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$a_{n+1}=2a_n+1$$

توجه‌کنید که به این ترتیب

$$a_2=2a_1+1=2\times2+1=5$$
$$a_3=2a_2+1=2\times5+1=11$$

و به همین ترتیب می‌توانیم مقدار هر جمله را از روی مقدار جمله‌ی قبل از آن پیدا کنیم.

تست۴: **در دنباله‌ای با جمله‌ی اول ۱، مکعب هر جمله، ۹۹ برابر مکعب جمله‌ی قبل از آن است. جمله‌ی ۱۰۰ اُم این دنباله کدام است؟**

۱) 33^{33} **۲)** 33^{99} **۳)** 99^{33} **۴)** 99^{99}

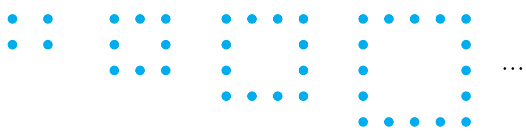
پاسخ: فرض کنید جمله‌ی عمومی دنباله، a_n باشد. در این‌صورت $a_n^3=99a_{n-1}^3$، پس $\frac{a_n^3}{a_{n-1}^3}=99$. اگر در این تساوی n را از ۲ تا ۱۰۰ جای‌گذاری کنیم و تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، معلوم می‌شود که (توجه‌کنید که $a_1=1$)

$$99^{99}=\frac{a_2^3}{a_1^3}\times\frac{a_3^3}{a_2^3}\times\dots\times\frac{a_{100}^3}{a_{99}^3}=a_{100}^3$$

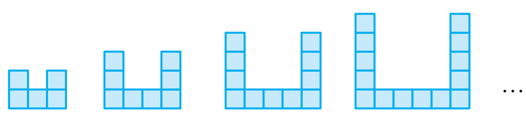
بنابراین $a_{100}=99^{33}$.

تمرین

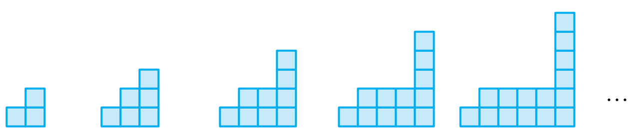
۴۳- در الگوی زیر، شکل n اُم از چند نقطه‌ی رنگی درست شده است؟



۴۴- در شکل n اُم الگوی زیر چند مربع وجود دارد؟



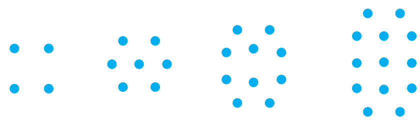
۴۵- تعداد مربع‌های کوچک در شکل n اُم الگوی زیر چند تا است؟



۴۶- شکل n اُم الگوی زیر از چند نقطه‌ی رنگی درست شده است؟

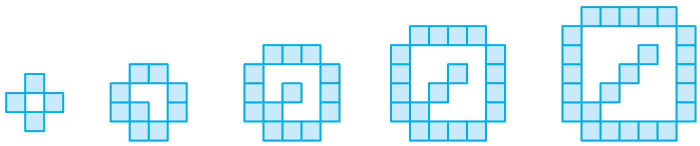
...

۴۷- تعداد نقطه‌ها در شکل n اُم الگوی زیر چند تا است؟



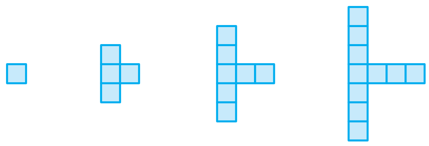
...

۴۸- شکل n اُم الگوی زیر از چند مربع کوچک درست شده است؟



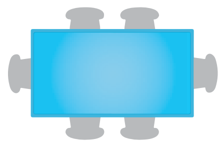
...

۴۹- برای ساختن شکل ۵۰ اُم در الگوی زیر چند مربع کوچک لازم داریم؟

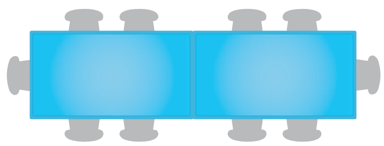


...

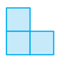
۵۰- دور یک نوع میز شش نفر می‌توانند بنشینند.

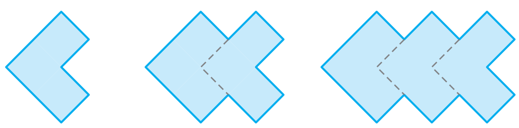


می‌توانید دو تا از این میزها را به هم بچسبانید تا چهار نفر دیگر هم بتوانند بنشینند.



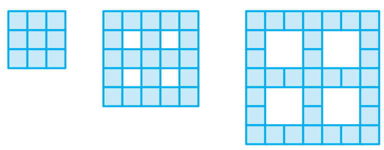
برای این‌که ۳۴ نفر بتوانند بنشینند، دست‌کم چند میز را باید به هم بچسبانید؟

۵۱- شکل‌های زیر از چسباندن تعدادی کاشی به شکل  ساخته شده‌اند، که در آن طول ضلع هر مربع کوچک ۱ سانتی‌متر است. محیط شکل n اُم چقدر است؟



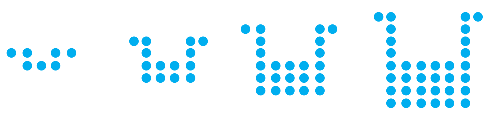
...

۵۲- تعداد مربع‌های رنگی در شکل n اُم الگوی زیر چند تا است؟



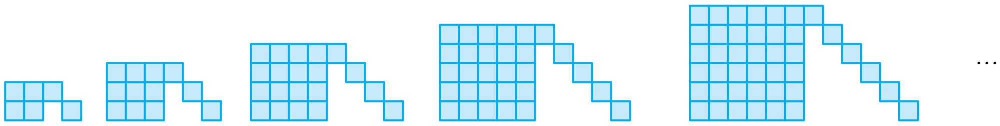
...

۵۳- در شکل n اُم الگوی زیر چند نقطه وجود دارد؟

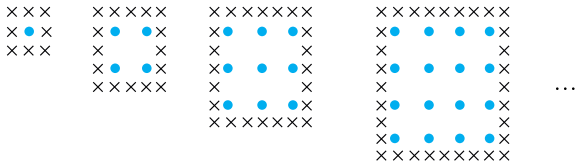


...

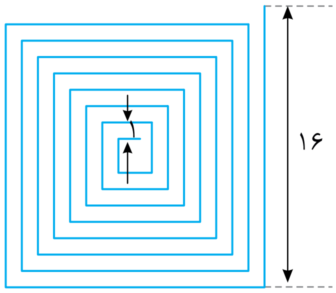
۵۴- تعداد مربع‌های کوچک در شکل n اُم الگوی زیر چند تا است؟



۵۵- آیا در الگوی زیر شکلی وجود دارد که در آن تعداد نقطه‌ها با تعداد ضربدرها برابر باشد؟

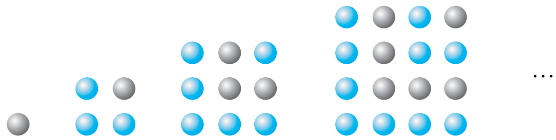


۵۶- در شکل زیر طول ریسمان رنگی چقدر است؟ (فاصله‌ی دو تکه‌ی مجاور ۱ سانتی‌متر است.)

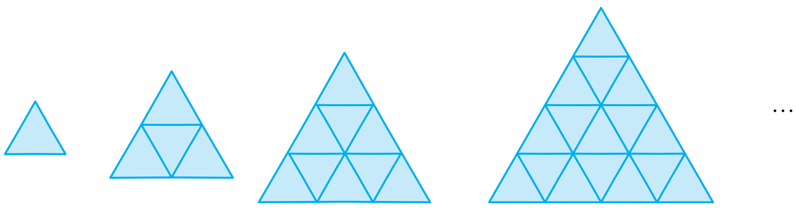


۵۷- به کمک الگوی زیر ثابت کنید

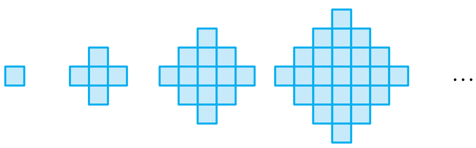
$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$



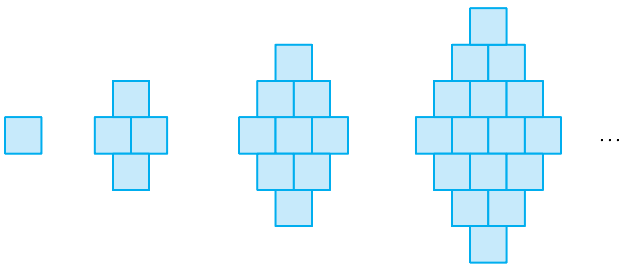
۵۸- در شکل n اُم الگوی زیر چند مثلث کوچک وجود دارد؟



۵۹- شکل n اُم الگوی زیر از چند مربع کوچک درست شده است؟



۶۰- آیا می‌توان با ۱۲۳ مربع کوچک یکی از شکل‌های الگوی زیر را ساخت؟



۶۱- کدام یک از عبارت‌های زیر ممکن است جمله‌ی عمومی یک دنباله باشد؟

الف) $3n-16$ ب) $\frac{2n+1}{2n-1}$ پ) $\frac{1}{n^2-3}$

ت) $\frac{1}{n^2-4}$ ث) $\sqrt{n-2}$

۶۲- در هر مورد جمله‌ی عمومی مناسبی برای دنباله‌ای که چند جمله‌ی اول آن داده شده است، پیدا کنید.

الف) $1, 3, 5, \dots$

ب) $-1, 3, -5, \dots$

پ) $0, 3, 8, 15, \dots$

ت) $2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots$

۶۳- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = 20n - n^2$ چند جمله مثبت‌اند؟

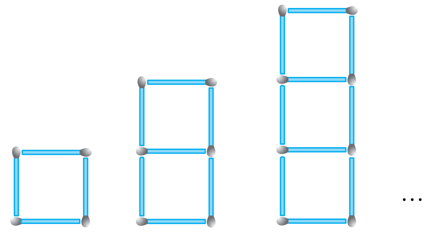
۶۴- جمله‌ی چندم دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{4n+4}$ برابر با $-\frac{1}{6}$ است؟

۶۵- درباره‌ی دنباله‌ی a_n می‌دانیم $a_1 = 2$ و $a_{n+1} = 1 + 2a_n$. کوچک‌ترین مقدار n که a_n اول نیست، چه عددی است؟

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۱- در الگوی مقابل که به کمک چوب کبریت ساخته شده است، تعداد چوب کبریت‌ها در شکل بیستم کدام است؟

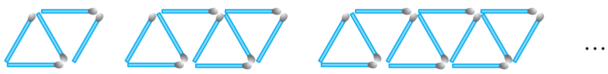
۱) ۵۹
۲) ۶۰
۳) ۶۱
۴) ۶۲



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) ...

۳۲- تعداد چوب کبریت‌های در شکل پانزدهم الگوی مقابل چندتا است؟

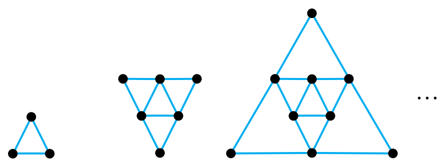
۱) ۵۹
۲) ۶۰
۳) ۶۱
۴) ۶۲



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) ...

۳۳- در شکل n اُم از الگوی مقابل چند نقطه دیده می‌شود؟

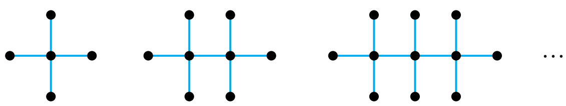
۱) $\frac{n(n+۱)}{۲}$
۲) $۳n$
۳) $n+۲$
۴) $n^{۲}+۲$



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) ...

۳۴- تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چندتا است؟

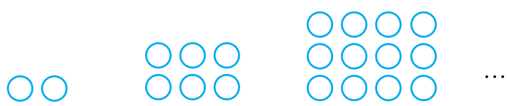
۱) ۶۰
۲) ۶۱
۳) ۶۲
۴) ۶۴



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) ...

۳۵- در شکل بیستم الگوی مقابل چند دایره وجود دارد؟

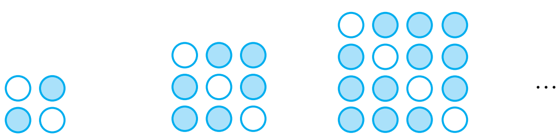
۱) ۴۰۰
۲) ۴۱۰
۳) ۴۲۰
۴) ۴۴۰



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) ...

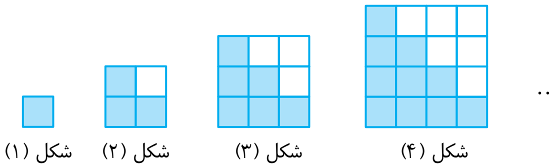
۳۶- تعداد دایره‌های رنگی در شکل مرحله‌ی n اُم، مطابق الگوی مقابل کدام است؟

۱) $n^{۲}+۱$
۲) $۲n^{۲}$
۳) $۳n^{۲}-۱$
۴) $n^{۲}+n$



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) ...

۳۷- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ شده و رنگ نشده در شکل سی‌ام چندتاست؟



۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۳۵

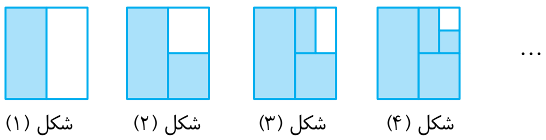
۳۸- مقدار عبارت $A=۱۰۰^۲-۹۹^۲+۹۸^۲-۹۷^۲+...+۲^۲-۱^۲$ کدام است؟

۱) ۴۵۰۰ ۲) ۴۵۵۰ ۳) ۵۰۰۰ ۴) ۵۰۵۰

۳۹- مقدار عبارت $A=۱\frac{۱}{۲۰}+۲\frac{۲}{۲۰}+۳\frac{۳}{۲۰}+...+۱۹\frac{۱۹}{۲۰}$ کدام است؟

۱) ۱۹۰/۵ ۲) ۱۹۹/۵ ۳) ۱۹۰/۹۵ ۴) ۱۹۰/۹

۴۰- در الگوی مقابل، مساحت مربع بزرگ یک واحد مربع است. کل مساحت رنگ شده در شکل n اُم چقدر از کل مساحت رنگ شده در شکل قبلی آن بیش‌تر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲^n}$
۳) $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ ۴) $\frac{۱}{۲^{n-۲}}$

۴۱- یک دنباله دارای الگوی خطی است. اگر جمله‌ی اول آن ۳ و جمله‌ی پنجم آن -۵ باشد، کدام جمله‌ی آن برابر -۳۹ است؟

۱) $t_{۲۲}$ ۲) $t_{۲۱}$ ۳) $t_{۱۱}$ ۴) $t_{۱۲}$

۴۲- کدام‌یک می‌تواند جمله‌ی عمومی دنباله‌ی زیر باشد؟

$۲,۳,۱۰,۱۵,...$

۱) $n+۱$ ۲) $n^۲-(-۱)^n$ ۳) $۳n^۲-۸n+۷$ ۴) $۲n^۲-۵n+۵$

۴۳- در دنباله‌ی $a_n=\frac{۳n+۱}{n+۱۰}$ چند جمله‌ی کوچک‌تر از ۲/۹۹ وجود دارد؟

۱) ۲۹۰۰ ۲) ۲۹۹۰ ۳) ۲۹۸۱ ۴) ۲۸۸۹

۴۴- در یک دنباله، هر جمله (به‌جز جمله‌ی اول) مربع جمله‌ی قبلی است. اگر $a_۱=۲$، جمله‌ی چهارم دنباله کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۵ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

۴۵- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مضرب ۵ باشد. عدد اول دسته‌ی پنجاهم کدام است؟

$$\underbrace{\{۱,۳,۵\}}_{\text{دسته‌ی اول}},\underbrace{\{۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\}}_{\text{دسته‌ی دوم}},\underbrace{\{۱۷,۱۹,۲۱,۲۳,۲۵\}}_{\text{دسته‌ی سوم}},...$$

۱) ۴۸۷ ۲) ۴۹۷ ۳) ۴۷۷ ۴) ۴۶۷

۴۶- کدام یک می‌تواند جمله‌ی عمومی دنباله‌ی زیر باشد؟

$۳,-۹,۲۷,-۸۱,...$

۱) $(-۱)^{n-۱}۳^{n+۱}$ ۲) $(-۱)۳^n$ ۳) $(-۱)(-۳)^n$ ۴) $(-۱)^n۳^n$

۴۷- اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ی d_n به صورت $d_n=an^۲+۲bn$ و جملات دوم و سوم این دنباله به ترتیب برابر با ۴ و ۱۵ باشند، جمله‌ی پنجم دنباله کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

۴۸- در دنباله‌ی $a_n=۱۴۰n-۵n^۲$، چند جمله‌ی مثبت وجود دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) صفر ۴) بی‌نهایت جمله

۴۹- اگر $a_n=\frac{n-۲}{۴n-۵}$ و $b_n=\frac{۳n-۶}{۱۲n}$، جمله‌ی مشترک دو دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) صفر

۵۰- در یک دنباله، $a_۱=۱$ و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، رابطه‌ی $a_{n+۱}=a_n+۲$ برقرار است. مجموع n جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) $(۲n+۱)^۲$ ۲) $(۲n-۱)^۲$ ۳) $n^۲$ ۴) $۲n^۲$

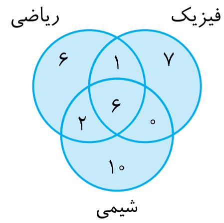
پ)

تعداد کسانی که فقط به ریاضی علاقه دارند $=n(A)-x-y-۶$
$=۱۵-۱-۲-۶=۶$

تعداد کسانی که فقط به شیمی علاقه دارند $=n(C)-y-z-۶$
$=۱۸-۲-۰-۶=۱۰$

بنابراین تعداد کسانی که فقط به یک درس علاقه دارند، برابر است با $۷+۶+۱۰=۲۳$

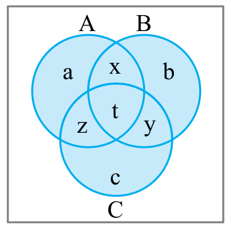
ت) تعداد دانش‌آموزانی کــه حداقل به دو درس علاقه دارند برابر است با $x+y+z+۶=۹$.



۴۲ چون هر عضو U عضو دست‌کم یکی از این مجموعه‌ها است، پس

$$n(A\cup B\cup C)=n(U)=۵۰$$

وضعیت مجموعه‌ها را در نمودار زیر نشان داده‌ایم.



هدف‌مــان پیدا کــردن بیش‌تریــن مقدار $a+b+c$ اســت. توجه‌کنید که

$$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+x+y+z+t=۵۰$$

$$\left.\begin{array}{l} n(A\cap B)=x+t=۱۱ \\ n(B\cap C)=y+t=۱۰ \\ n(A\cap C)=z+t=۹ \end{array}\right\}\Rightarrow x+y+z+t=۳۰-۲t$$

در نتیجه $a+b+c=۲۰+۲t$. به این ترتیب، بیش‌ترین مقدار $a+b+c$ وقتــی پیش می‌آید که t بیش‌تریــن مقدار ممکن باشد. از تساوی‌های $x+t=۱۱,\quad y+t=۱۰,\quad z+t=۹$ نتیجه می‌گیریم که بیش‌ترین مقدار ممکن t برابر با ۹ است (به ازای $x=۲$ ، $y=۱$ و $z=۰$). در نتیجــه، بیش‌تریــن مقــدار $a+b+c$ برابر با ۳۸ است.

۴۳ توجه‌کنید که در شکل n اُم روی هر ضلع $n+۱$ نقطه وجــود دارد. شــکل n اُم چهار ضلع دارد، پــس تعداد کل این نقطه‌ها می‌شود $۴(n+۱)$. اما در این نحوه‌ی شمارش، نقطه‌های مشترک بین ضلع‌ها را دو بار شمرده‌ایم.

بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های شکل n اُم را با a_n نشان دهیم،

$$a_n=۴(n+۱)-۴=۴n$$

راه‌هــای دیگری هم برای حل این مســأله وجود دارد. مثلاً در شــکل n اُم، به‌جز چهار گوشــه، $n-۱$ نقطــه وجود دارد. پس تعداد کل این نقطه‌ها می‌شــود $۴(n-۱)$، که اگر چهار نقطه‌ی رأس‌ها را هم حساب کنیم، نتیجه می‌شود

$$a_n=۴(n-۱)+۴=۴n$$

۴۴ توجه‌کنید که در هر شــکل، تعــداد مربع‌های ردیف پایین، از شــماره‌ی شــکل دو تا بیش‌تر اســت و در ستون‌های بالای هر ردیف به اندازه‌ی شــماره‌ی شکل، مربع وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های شکل n اُم a_n باشد،

$$a_n=n+۲+۲n=۳n+۲$$

۴۵ توجه‌کنید که در شــکل n اُم مســتطیلی $۲\times n$ وجود دارد، که ســتونی از $n-۱$ مربع به بالای آن چســبیده است و یــک مربع هم در کنــار آن قــرار دارد. بنابرایــن، اگر تعداد مربع‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=۲n+n-۱+۱=۳n$$

۴۶ توجه‌کنید که شــکل اول از ۱۰ نقطه‌ی رنگی تشــکیل شــده است و در شکل‌های بعدی، هر شــکل با اضافه شدن ۴ نقطه به شــکل قبلی به‌دست آمده اســت. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های رنگی در شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=۱۰+۴(n-۱)=۴n+۶$$

۴۷ توجه‌کنید که در بالا و پایین هر شــکل دو نقطه داریم. نقطه‌های وســط (از شــکل دوم به بعد) از چند ردیف سه تایی تشــکیل شده‌اند: شــکل اول ردیفی ندارد، شکل دوم ۱ ردیف دارد، شــکل ســوم ۲ ردیف دارد، ... و شکل n اُم $n-۱$ ردیف دارد. بنابراین اگر تعداد نقطه‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=۲+۲+۳(n-۱)=۳n+۱$$

۴۸ توجه‌کنید که شکل n اُم در هر ضلعش n مربع کوچک دارد و در درونــش $n-۱$ مربــع کوچک. بنابرایــن، اگر تعداد مربع‌های کوچک شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=۴n+n-۱=۵n-۱$$

۴۹ به الگوی شــکل‌ها دقت‌کنید. شــکل اول از یک مربع کوچک ساخته شده است. در شکل دوم، از سه طرف یک مربع به شــکل اول اضافه کرده‌ایم. در شــکل سوم، از سه طرف دو مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. در شکل چهارم، از سه طرف سه مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. به این ترتیب، اگر تعداد مربع‌ها در شکل n اُم را a_n بنامیم،

$$a_n=۱+۳(n-۱)=۳n-۲$$

در نتیجه $a_{۵۰}=۳\times ۵۰-۲=۱۴۸$، یعنی برای ساختن شکل ۵۰ اُم ۱۴۸ مربع کوچک لازم داریم.

۵۰ ابتدا جمله‌ی عمومی تعداد صندلی‌ها را وقتی که n میز را بـه هم چسـبانده‌ایم، پیدا می‌کنیم. دور میـز اول ۶ صندلی وجود دارد. وقتی دو میز را می‌چسـبانیم، به تعداد صندلی‌های اولیه ۴ تا اضافه می‌شود؛ وقتی سه میز را می چسبانیم، به تعداد صندلی‌هـای اولیـه ۲×۴ تا اضافه می‌شـود؛ ...؛ وقتی n میز را می‌چسـبانیم، به تعـداد صندلی‌های اولیـه $۴(n-۱)$ تا اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد صندلی‌های دور n میز a_n باشد،

$$a_n=۶+۴(n-۱)=۴n+۲$$

اگر $۴n+۲=۳۴$، آن‌گاه $n=۸$، یعنی باید ۸ میز را به هم بچسبانیم.

۵۱ محیط شکل اول ۸ سانتی‌متر است. با اضافه کردن هر کاشی ۴ سانتی‌متر به محیط شکل قبلی اضافه می‌شود. بنابراین، محیط شکل n اُم برابر است با

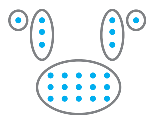
$$۸+۴(n-۱)=۴n+۴$$

۵۲ تعداد مربع‌های رنگی هر شکل برابر است با مساحت کل شـکل منهای مساحت چهار مربع سفید که حذف شده‌اند. طول ضلع مربع بزرگ $۲n+۱$ اسـت و طـول ضلع هر یک از مربع‌های سفید $n-۱$ است. بنابراین اگر تعداد مربع‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=(۲n+۱)^۲-۴(n-۱)^۲=۴n^۲+۴n+۱-۴(n^۲-۲n+۱)$$
$$=۱۲n-۳$$

۵۳ در کف شـکل n اُم مستطیلی $n(n+۲)$ قرار دارد. دو ستون n تایی هم به کف این مستطیل چسبیده‌اند و در کنار هر سـتون هم یک نقطه وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=n(n+۲)+۲n+۲=n^۲+۴n+۲$$



۵۴ توجه‌کنید که شکل n اُم از مربعی به طول ضلع $n+۱$ و پلکانی از $n+۱$ مربع کوچک درست شده است. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های کوچک شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=(n+۱)^۲+n+۱=n^۲+۳n+۲$$

۵۵ توجه‌کنید که در شکل n اُم تعداد نقطه‌ها $n^۲$ است و تعداد ضربدرها $۸n$ اسـت. اگر $n^۲=۸n$، آن‌گاه $n=۸$. پس در شکل هشتم، تعداد نقطه‌ها با تعداد ضربدرها برابر است.

۵۶ ایـن ریسـمان از تکه‌هایی بـه طول ۱ سـانتی‌متر، ۲ سـانتی‌متر و ... ۱۶ سانتی‌متر تشکیل شده است، که هر تکه دو بار آمده است. بنابراین طول کل ریسمان برابر است با

$$۲(۱+۲+...+۱۶)=۲(\frac{۱۶\times۱۷}{۲})=۲۷۲ \text{ سانتی‌متر}$$

۵۷ توجه‌کنید کـه از یک طرف تعـداد کل توپ‌ها برابر اسـت با $n\times n=n^۲$. از طـرف دیگر اگر تعـداد توپ‌ها را از طریق ردیف‌های L شکل حساب کنیم، می‌شود

$$۱+۳+۵+...+(۲n-۱)$$

بنابراین $۱+۳+...+(۲n-۱)=n^۲$

۵۸ در کف شـکل n اُم، $۲n-۱$ مثلث کوچک وجود دارد. هـر ردیف بالایی، دو مثلث از ردیـف پایینی‌اش کم‌تر دارد، تا این‌که در آخرین ردیف، یک مثلث کوچک وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد مثلث‌های کوچک در شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=(۲n-۱)+(۲n-۳)+...+۵+۳+۱=n^۲$$

۵۹ **راه‌حل اول:** در شکل n اُم، ردیف وسط از $۲n-۱$ مربع کوچک درست شده است. هر ردیف بالایی، دو مربع از ردیف پایینـی‌اش کم‌تر دارد؛ تا این‌کـه در آخرین ردیف، یک مثلث وجـود دارد. در مـورد ردیف‌های پایین ردیف وسـط، همین وضعیت وجود دارد. بنابراین اگر یک‌بار تعداد مربع‌های ردیف وسـط را اضافه و کم کنیم، تعداد مربع‌ها در شـکل n اُم برابر می‌شود با

$$a_n=۲((۲n-۱)+(۲n-۳)+...+۵+۳+۱)-(۲n-۱)$$
$$=۲n^۲-۲n+۱$$

راه‌حـل دوم: بـه همان راه‌حـل اول معلوم می‌شـود که تعداد مربع‌ها در ردیف وسط و ردیف‌های بالای آن برابر است با

$$(۲n-۱)+(۲n-۳)+...+۵+۳+۱=n^۲$$

و تعداد مربع‌ها در ردیف‌های زیر ردیف وسط برابر است با

$$(۲n-۳)+(۲n-۵)+...+۵+۳+۱=(n-۱)^۲$$

پس تعداد کل مربع‌ها برابر است با $n^۲+(n-۱)^۲$.

۶۰ تعداد مربع‌های کوچک در این شکل‌ها به ترتیب ۱، ۴، ۹ و ۱۶ اسـت، که همگی به شـکل $n^۲$ هستند. بنابراین به‌نظر می‌رسد که تعداد مربع‌های کوچک در هر یک از این شکل‌ها، عددی به شکل $n^۲$ است و چون ۱۲۳ به این شکل نیست، پس نمی‌توان با این تعداد مربع، یکی از شکل‌ها را ساخت.

اکنون جمله‌ی عمومی این الگو را به‌دست می‌آوریم. توجه‌کنید که در شـکل n اُم، ردیف وسـط از n مربع درست شده است؛ در هـر طرف آن، یک ردیف $(n-۱)$تایـی داریم؛ یک ردیف $(n-۲)$تایی داریم؛ ...؛ یک ردیف ۲ تایی داریم و یک ردیف از یک مربع داریم. بنابراین، اگر تعداد مربع‌ها در شکل n اُم را با a_n نشان دهیم،

$$a_n=n+۲((n-۱)+(n-۲)+...+۲+۱)$$
$$=n+۲(\frac{(n-۱)n}{۲})=n+n^۲-n=n^۲$$

۶۱

الف) ممکن است **ب)** ممکن است

پ) ممکن است

ت) ممکن نیست (a_2 بی‌معنی است).

ث) ممکن نیست (a_1 بی‌معنی است).

۶۲

الف) $a_n=2n-1$ **ب)** $a_n=(-1)^n(2n-1)$

پ) $a_n=n^2-1$ **ت)** $a_n=n+(-1)^{n+1}$

۶۳ توجه کنید که $a_n=n(20-n)$ و چون n عددی مثبت است، برای اینکه a_n عددی مثبت باشد، باید $20-n$ نیز مثبت باشد. بنابراین $20-n>0$، یعنی $n<20$. پس n می‌تواند عددهای ۱، ۲، ... و ۱۹ باشد، که تعداد آن‌ها ۱۹تا است.

۶۴ ابتدا توجه کنید که اگر $a_n=(-1)^n\frac{n-1}{4n+4}=-\frac{1}{6}$، آن‌گاه n عددی فرد است، زیرا اگر n زوج باشد، $(-1)^n\frac{n-1}{4n+4}$ عددی مثبت می‌شود. اگر n عددی فرد باشد، $(-1)^n=-1$، پس $\frac{n-1}{4n+4}=\frac{1}{6}$. اگر این معادله را حل کنیم، به‌دست می‌آید $n=5$. پس جمله‌ی پنجم دنباله، برابر با $-\frac{1}{6}$ است.

۶۵ چند جمله‌ی اول این دنباله را حساب می‌کنیم:

$$a_1=2\ ,\ a_2=5\ ,\ a_3=11\ ,\ a_4=23\ ,\ a_5=47\ ,\ a_6=95$$

در نتیجه کوچک‌ترین n موردنظر ۶ است.

۶۶ باید تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی برابر باشد، بنابراین باید

$$7a+20-(2a-1)=(a+42)-(7a+20)$$

$$5a+21=-6a+22$$

$$11a=1$$

پس $a=\frac{1}{11}$.

۶۷ اگر قدرنسبت این دنباله d باشد، جمله‌ی عمومی آن به شکل $a_n=a_1+(n-1)d$ است. بنابراین

$$a_8=a_1+7d$$

$$25=4+7d\Rightarrow d=3$$

در نتیجه

$$a_{101}=a_1+(101-1)d=4+100\times3=304$$

۶۸ فرض کنید قدرنسبت این دنباله‌ی حسابی d باشد. توجه کنید که

$$a_{12}=a_1+11d=16$$

از طرف دیگر،

$$a_{10}=a_1+9d$$

$$a_{14}=a_1+13d$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$a_{10}+a_{14}=(a_1+9d)+(a_1+13d)=2a_1+22d$$
$$=2(a_1+11d)=2(16)=32$$

۶۹ قدرنسبت این دنباله را با d نشان می‌دهیم. در این‌صورت

$$a_2+a_9=(a_1+d)+(a_1+8d)=2a_1+9d=-4\quad(1)$$

$$a_3+a_4=(a_1+2d)+(a_1+3d)=2a_1+5d=4\quad(2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید $d=-2$، و اگر این مقدار را در تساوی (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید $a_1=7$.

۷۰ قدرنسبت این دنباله برابر است با $10-3=7$. اکنون توجه کنید که

آخرین جمله $=444$

دومین جمله از آخر $=444-7$

سومین جمله از آخر $=444-7-7=444-2\times7$

چهارمین جمله از آخر $=444-3\times7$

$\vdots$

دوازدهمین جمله از آخر $=444-11\times7=367$

۷۱ فرض کنید قدرنسبت این دنباله d باشد. در این‌صورت

$$d=\frac{a_{30}-a_{16}}{30-16}=\frac{20-13}{14}=\frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$a_{16}=13\Rightarrow a_1+15\times\frac{1}{2}=13\Rightarrow a_1=\frac{11}{2}$$

اگر $\frac{27}{2}$ جمله‌ی kاُم این دنباله باشد، آن‌گاه

$$a_k=a_1+(k-1)d=\frac{11}{2}+\frac{k-1}{2}=\frac{k+10}{2}=\frac{27}{2}$$

نتیجه می‌شود $k=17$. یعنی جمله‌ی هفدهم این دنباله $\frac{27}{2}$ است.

۷۲ در این‌جا $a_1=-3$ و $d=-4$، بنابراین جمله‌ی عمومی این دنباله $a_n=-3+(n-1)(-4)$ است. اگر -83 جمله‌ی nاُم این دنباله باشد:

$$-83=-3-4(n-1)\Rightarrow n=21$$

بنابراین -83 جمله‌ی ۲۱اُم دنباله‌ی موردنظر است.

۳۱- گزینه‌ی ۳ شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیش‌تر از قبلی دارد. پس شکل n اُم دارای $۴+۳(n-۱)$ چوب کبریت است. یعنی $۳n+۱$ چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

۳۲- گزینه‌ی ۳ شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت دیگر به شکل مرحله‌ی قبل اضافه می‌شود. پس در شکل n اُم $۵+۴(n-۱)$ چوب کبریت وجود دارد. یعنی $۴n+۱$ چوب کبریت در شکل n اُم وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

۳۳- گزینه‌ی ۲ در شکل اول ۳ نقطه وجود دارد و هر شکل ۳ نقطه بیش‌تر از شکل قبلی دارد. پس در شکل n اُم، $۳+۳(n-۱)$ نقطه یعنی $۳n$ نقطه وجود دارد.

۳۴- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول**: تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	$۱+۳+۱$	$۲+۴+۲$	$۳+۵+۳$	...	$n+(n+۲)+n$

بنابراین در شکل n اُم ، $۳n+۲$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه‌حل دوم: اگر ۴ نقطه به چهار گوشه‌ی شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل n اُم برابر $۳(n+۲)$ خواهد بود. پس در شکل n اُم، $۳(n+۲)-۴$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۳۵- گزینه‌ی ۳ در شکل n اُم، تعداد سطرها n تا و تعداد ستون‌ها $(n+۱)$ تا است. پس $n(n+۱)$ دایره در شکل n اُم موجود است. یعنی در شکل بیستم ۲۱×۲۰ دایره وجود دارد.

۳۶- گزینه‌ی ۴ در شکل n اُم، $(n+۱)^۲$ دایره وجود دارد که $n+۱$ تای آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی $(n+۱)^۲-(n+۱)$ می‌باشد که برابر است با $n^۲+n$.

۳۷- گزینه‌ی ۳ تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل n اُم برابر است با

$$۱+۲+۳+...+n$$

تعداد مربع‌های رنگ نشده در شکل n اُم برابر است با

$$۰+۱+۲+...+(n-۱)$$

بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل n اُم، n تا بیش‌تر از تعداد مربع‌های رنگ نشده است. پس در شکل سی‌اُم، ۳۰ تا مربع رنگ شده بیش‌تر وجود دارد.

۳۸- گزینه‌ی ۴ به کمک اتحاد مزدوج عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=(۱۰۰-۹۹)(۱۰۰+۹۹)+(۹۸-۹۷)(۹۸+۹۷)+...+(۲-۱)(۲+۱)\Rightarrow A=۱۰۰+۹۹+۹۸+۹۷+...+۲+۱$$

بنابراین

$$A=\frac{۱۰۰(۱۰۰+۱)}{۲}=۵۰۵۰$$

۳۹- گزینه‌ی ۲ عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=۱+۲+۳+...+۱۹+(\frac{۱}{۲۰}+\frac{۲}{۲۰}+...+\frac{۱۹}{۲۰})\Rightarrow A=۱+۲+۳+...+۱۹+\frac{۱+۲+۳+...+۱۹}{۲۰}$$

چون $۱+۲+...+۱۹=\frac{۱۹\times(۱+۱۹)}{۲}=۱۹۰$، پس

$$A=۱۹۰+\frac{۱۹۰}{۲۰}=۱۹۹/۵$$

۴۰- گزینه‌ی ۲ مقدار کل مساحت رنگ شده در مرحله‌ی n اُم برابر است با

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+...+\frac{۱}{۲^{n-۱}}+\frac{۱}{۲^n}$$

و مقدار کل مساحت رنگ شده در مرحله‌ی $(n-۱)$اُم برابر است با

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+...+\frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

بنابراین در مرحله‌ی n اُم، مقدار کل مساحت رنگ شده $\frac{۱}{۲^n}$ از مقدار کل مساحت رنگ شده در مرحله‌ی $(n-۱)$اُم، بیش‌تر است.

۴۱- گزینه‌ی ۱ جمله‌ی عمومی دنباله $t_n=an+b$ است.

بنابراین

$$t_۱=a+b=۳\quad,\quad t_۵=۵a+b=-۵$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a+b=۳\\ ۵a+b=-۵\end{cases}$ به‌دست می‌آید $a=-۲$ و $b=۵$.

بنابراین $t_n=-۲n+۵$. برای به‌دست آوردن شماره‌ی جمله‌ای که برابر -۳۹ است، باید معادله‌ی $t_n=-۳۹$ را حل کنیم:

$$-۲n+۵=-۳۹\Rightarrow ۲n=۴۴\Rightarrow n=۲۲$$

پس $t_{۲۲}$ برابر -۳۹ است.

۴۲- گزینه‌ی ۲ چند جمله‌ی اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینه‌ی (۱):

$$2, 3, 4, 5, \ldots$$

گزینه‌ی (۲):

$$2, 3, 10, 15, \ldots$$

گزینه‌ی (۳):

$$2, 3, 10, 23, \ldots$$

گزینه‌ی (۴):

$$2, 3, 8, 17, \ldots$$

بنابراین فقط $n^2-(-1)^n$ می‌تواند جمله‌ی عمومی دنباله باشد.

۴۳- گزینه‌ی ۴ از شرط $a_n<2/99$ مقادیری از n را می‌یابیم که a_n به ازای آن‌ها کوچک‌تر از ۲/۹۹ باشد:

$$a_n<2/99\Rightarrow \frac{3n+1}{n+10}<2/99\Rightarrow \frac{3n+1}{n+10}<\frac{299}{100}\Rightarrow 300n+100<299n+2990\Rightarrow n<2890\Rightarrow n\le 2889$$

بنابراین ۲۸۸۹ جمله‌ی دنباله، کوچک‌تر از ۲/۹۹ هستند.

۴۴- گزینه‌ی ۴ در این دنباله $a_{n+1}=a_n^2$ است، بنابراین

$$a_2=a_1^2=2^2=4$$
$$a_3=a_2^2=4^2=16$$
$$a_4=a_3^2=16^2=256$$

۴۵- گزینه‌ی ۱ عدد آخر دسته‌ی اول ۵، عدد آخر دسته‌ی دوم 3×5، عدد آخر دسته‌ی سوم 5×5، ... و عدد آخر دسته‌ی nاُم برابر $5\times(2n-1)$ است. پس عدد آخر دسته‌ی چهل و نهم $5\times(2\times49-1)=485$ است. پس عدد اول دسته‌ی پنجاهم، برابر ۴۸۷ خواهد بود.

۴۶- گزینه‌ی ۳ همان‌طور که مشاهده می‌کنیم جمله‌های دنباله توان‌هایی از ۳ هستند. یعنی

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$$

که جمله‌ی عمومی آن می‌تواند به صورت 3^n باشد. اما در دنباله‌ی داده شده، جمله‌ها یکی در میان مثبت و منفی هستند و اولین جمله، مثبت است. بنابراین به یک ضریب $(-1)^{n-1}$ برای 3^n نیاز داریم تا جملات دنباله به شکل دنباله‌ی داده شده درآیند. یعنی

$$(-1)^{n-1}(3)^n=(-1)(-1)^n(3)^n=(-1)(-3)^n$$

۴۷- گزینه‌ی ۲ ابتدا باید با استفاده از جمله‌های داده شده‌ی دنباله، ضرایب a و b را که مجهول هستند بیابیم:

$$d_2=4\Rightarrow 4a+4b=4\Rightarrow a+b=1$$
$$d_3=7\Rightarrow 9a+6b=15$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=1\\ 9a+6b=15\end{cases}$ به‌دست می‌آید

$a=3$ و $b=-2$

بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی d_n به صورت زیر است:

$$d_n=3n^2-4n$$

پس جمله‌ی پنجم دنباله برابر است با

$$d_5=3(5)^2-4(5)=55$$

۴۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا با حل نامعادله‌ی $a_n>0$، مقادیری از n را که به ازای آن‌ها، جمله‌های دنباله مثبت هستند، پیدا می‌کنیم.

$$a_n>0\Rightarrow 140n-5n^2>0\Rightarrow n(140-5n)>0$$

حال از آن‌جایی که $n>0$، برای برقراری نامعادله فوق، بایستی $140-5n>0$. یعنی $n<28$. پس به ازای $n\le27$، جمله‌های دنباله مثبت هستند. در نتیجه بیست و هفت جمله‌ی اول دنباله مثبت هستند.

۴۹- گزینه‌ی ۴ کافی است جمله‌ی عمومی دو دنباله را با هم برابر قرار دهیم:

$$a_n=b_n\Rightarrow \frac{n-2}{4n-5}=\frac{3n-6}{12n}$$
$$\Rightarrow 12n(n-2)=(4n-5)(3n-6)$$
$$\Rightarrow 12n^2-24n=12n^2-24n-15n+30$$
$$\Rightarrow 15n=30\Rightarrow n=2$$

بنابراین جمله‌ی دوم این دو دنباله با هم برابرند. حال با قرار دادن $n=2$ در هر یک از دنباله‌های a_n یا b_n مقدار جمله‌ی مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$n=2\Rightarrow a_2=0=b_2$$

۵۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به جمله‌های دنباله، به‌دست می‌آید

$$a_1=1\ ,\ a_2=1+2=3\ ,\ a_3=3+2=5$$
$$,\ a_4=5+2=7\ ,\ \ldots\ ,\ a_n=2n-1$$

بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$S=1+3+5+7+\ldots+(2n-1)$$
$$=(2-1)+(4-1)+(6-1)+\ldots+(2n-1)$$
$$=(2\times1-1)+(2\times2-1)+\ldots+(2n-1)$$
$$=2(1+2+3+\ldots+n)-(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{\text{n تا}})$$
$$=2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-n=n^2+n-n=n^2$$