

جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع ریاضیات تجربی

+ موج آزمون ویراست دوم

کافم اجلالی، ارشک حمیدی



انتشرالگو

فصل اول

پاسخ سؤال‌های
دست‌گرمی

پاسخ سؤال‌های دست گرمی

۱- گزینه ۲ از تساوی دو زوج مرتب نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+2b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=2$$

۲- گزینه ۳ از هریک از عددهای ۱ و ۲ دو پیکان خارج شده است، پس $a+b=2$ و $a-b=6$ که نتیجه می‌شود $a=4$ و $b=-2$. بنابراین $ab=-8$.

۳- گزینه ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(3, 4)$ و $(3, m^2)$ نتیجه می‌شود $m^2=4$. پس $m=\pm 2$. با توجه به زوج‌های مرتب $(4, m+n)$ و $(4, 2n+1)$ نتیجه می‌شود $m+n=2n+1$. پس $n=m-1$. اگر $m=2$ ، آن‌گاه $n=1$ و $f=\{(3, 4), (3, 2), (4, 3)\}$ که به خاطر دو زوج مرتب $(3, 2)$ و $(3, 4)$ که عضو رابطه هستند، این رابطه، تابع نیست. اگر $m=-2$ ، آن‌گاه $n=-3$ و $f=\{(3, 4), (-9, -2), (4, -5)\}$. بنابراین رابطه f ، تابع است، پس $mn=6$.

۴- گزینه ۱ برای اینکه برد تابع f تک‌عضوی باشد باید اعداد $3m$ و $2m+n$ یکسان باشند:

$$3m=6 \Rightarrow m=2, \quad 2m+n=6 \xrightarrow{m=2} 4+n=6 \Rightarrow n=2$$

بنابراین $mn=4$.

۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x)=4x+4 \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{x}{2})=4(\frac{x}{2})+4=2x+4 \\ f(\frac{x}{4})=4(\frac{x}{4})+4=x+4 \end{cases}$$

$$f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})=2x+4-(x+4)=x \quad \text{بنابراین}$$

۶- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $\frac{2}{x-1}=t$ ، آن‌گاه $t \neq 0$ و $\frac{x-1}{2}=\frac{1}{t}$.

$$\text{پس } x=\frac{2+t}{t}+1=\frac{2+t}{t}$$

$$f(\frac{2+t}{t})=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(t)=\frac{\frac{2+t}{t}+1}{\frac{2+t}{t}-1}=\frac{2+2t}{2}=\frac{2+t}{1}=t+1$$

بنابراین اگر $x \neq 0$ ، آن‌گاه $f(x)=x+1$.

۷- گزینه ۴ چون $f(2)-f(4)=\frac{2}{5}$ ، پس ابتدا مقادیر $f(2)$ و $f(4)$ را حساب می‌کنیم:

$$2 < 4 \Rightarrow f(2)=k \times 2 + 4 = 2k + 4, \quad 4 \geq 4 \Rightarrow f(4)=\frac{2}{5} \times 4 = \frac{8}{5}$$

بنابراین

$$f(2)-f(4)=\frac{2}{5} \Rightarrow 2k+4-\frac{8}{5}=\frac{2}{5} \Rightarrow 2k=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}-4=-2$$

پس $2k=-2$ ، یعنی $k=-1$.

۸- گزینه ۳ برای اینکه تابع ثابت باشد، باید فقط یک عضو در برد آن

وجود داشته باشد. با توجه به آنکه $f(1)=2$ ، پس $\begin{cases} a-b=2 \\ 3a-7b=2 \end{cases}$. بنابراین $a=3$ و $b=1$. در نتیجه $a+b=4$.

۹- گزینه ۲ راه‌حل اول توجه کنید که چون تابع f همانی است، پس $f(x-4)=x-4$ بنابراین

$$(2a-7)x+b+1=x-4 \Rightarrow \begin{cases} 2a-7=1 \Rightarrow a=4 \\ b+1=-4 \Rightarrow b=-5 \end{cases}$$

در نتیجه $f(a+b)=f(-1)=-1$.

راه‌حل دوم اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=\frac{1}{2}$ ، به دست می‌آید

$$f(-\frac{1}{2})=(2a-7)x+b+1 \Rightarrow -\frac{1}{2}=a-\frac{7}{2}+b+1 \Rightarrow a+b=-1$$

۱۰- گزینه ۳ ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=ax^2-3ax+x^2-bx+b=(a+1)x^2-(3a+b)x+b$$

برای اینکه تابع f خطی باشد، باید ضابطه آن یک چندجمله‌ای درجه اول باشد. پس $a+1=0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow f(x)=(3-b)x+b$

در نتیجه $f(1)=3-b+b=3$.

۱۱- گزینه ۲ مقادیر $x=0$ و $x=2$ ، $x=3$ را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم:

$$f(3)=9a+3b+c, \quad f(2)=4a+2b+c, \quad f(0)=c$$

بنابراین

$$f(3)-2f(2)+2f(0)=9a+3b+c-8a-4b-2c+2c=a-b+c=f(-1)$$

۱۲- گزینه ۴ تساوی را به شکل $2x+f(x)=4x \times f(x)-12$

$$f(x)=\frac{2x+12}{4x-1} \quad \text{می‌نویسیم. در نتیجه } (4x-1) \times f(x)=2x+12$$

۱۳- گزینه ۲ طول رأس سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ ، $x=-\frac{b}{2a}$

است. بنابراین طبق معادله داده شده $x=-\frac{2}{2a}$ طول رأس سهمی است. پس $\frac{-2}{2a}=1$ و در نتیجه $a=-1$. مختصات رأس سهمی در معادله آن صدق می‌کند، پس

$$-1=a+2+b \xrightarrow{a=-1} -1=-1+2+b \Rightarrow b=-2$$

بنابراین $ab=2$.

۱۴- گزینه ۱ چون سهمی در نقاطی به طول ۱ و ۵ محور طول‌ها را

قطع کرده است، این نقاط عرض یکسان دارند. پس معادله محور تقارن به صورت $x=\frac{5-1}{2}=2$ است که نقاط $(-1, 0)$ و $(5, 0)$ نسبت به آن قرینه یکدیگرند.

۱۵- گزینه ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که $c=5$. همچنین با توجه به

معادله داده شده، طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{b}{2}$ است، پس $-\frac{b}{2}=-2$. بنابراین $b=4$. در نتیجه $b-c=-1$.

۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که محور تقارن سهمی مورد نظر خط

$x=-\frac{b}{2a}$ است. چون علامت a و b فرق می‌کند، پس $-\frac{b}{2a} > 0$ و در نتیجه

محور تقارن از ناحیه‌های اول و چهارم می‌گذرد (گزینه‌های (۱) و (۳)). همچنین، اگر سهمی از مبدأ مختصات بگذرد، آن‌گاه $c=0$ ، که درست نیست. بنابراین سهمی مورد نظر می‌تواند به صورت گزینه (۳) باشد.

۲۲- گزینه ۳ راه حل اول از $-4 \leq x \leq 4$ نتیجه می گیریم $-8 \leq -2x \leq 8$ ، پس $-5 = 3 - 8 \leq 3 - 2x \leq 3 + 8 = 11$ بنابراین برد تابع f بازه $[-5, 11]$ است.

راه حل دوم چون $f(x) = -2x + 3$ یک تابع خطی است که ضریب x در آن منفی است برد آن با توجه به دامنه برابر $[f(4), f(-4)]$ است که برابر $[-5, 11]$ می شود.

۲۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x) = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$ از طرف دیگر، اگر $x \in [-4, 5]$ آن گاه $-4 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x+1 \leq 6 \Rightarrow 0 \leq (x+1)^2 \leq 36 \Rightarrow -3 \leq (x+1)^2 - 3 \leq 33$ بنابراین بزرگترین عضو برد f برابر ۳۳ است.

۲۴- گزینه ۴ در مورد گزینه (۴)، $D_f = D_g = [0, 1]$ و اگر $x \in [0, 1]$ آن گاه $f(x) = g(x)$ ، بنابراین این دو تابع برابرند. در مورد گزینه های دیگر، یا دامنه تابع ها برابر نیست، یا $f(x) \neq g(x)$.

گزینه (۱) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ، $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینه (۲) $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ، $f(x) = |x|$ ، $g(x) = x \Rightarrow f(x) \neq g(x)$

گزینه (۳) $D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ، $D_g = [1, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

۲۵- گزینه ۱ توجه کنید که $S = \pi r^2$ و در نتیجه $r = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}$ بنابراین $P = 2\pi r = 2\pi \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}\right) \Rightarrow P(S) = 2\sqrt{\pi}\sqrt{S} = 2\sqrt{\pi}S$

۲۶- گزینه ۱ اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم، شعاع دایره $\frac{a}{2}$ و محیط مربع برابر $4a$ می شود. بنابراین

$$P = 4a \Rightarrow a = \frac{P}{4}, \text{ مساحت مربع } = \pi \frac{a^2}{4}, \text{ مساحت دایره } = \pi \frac{a^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{مساحت قسمت های رنگ شده} &= a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = a^2 \left(\frac{4-\pi}{4}\right) \\ &= \frac{P^2}{16} \left(\frac{4-\pi}{4}\right) = \left(\frac{4-\pi}{64}\right) P^2 \end{aligned}$$

۲۷- گزینه ۳ معادله نیم دایره را پیدا می کنیم:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \xrightarrow{y \geq 0} y = \sqrt{1 - x^2}$$

بنابراین طول مستطیل $2x$ و عرض آن $\sqrt{1 - x^2}$ می شود و محیط آن برابر است با $P(x) = 2(2x + \sqrt{1 - x^2}) = 4x + 2\sqrt{1 - x^2}$.

۲۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} (f+g)(2) &= f(2) + g(2) = -1 - 2 = -3 \Rightarrow \frac{(f+g)(2)}{(f-g)(1)} = \frac{-3}{3} = -1 \\ (f-g)(1) &= f(1) - g(1) = 2 - (-1) = 3 \end{aligned}$$

۲۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x | x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0\} = \{1, 2, 3\}$$

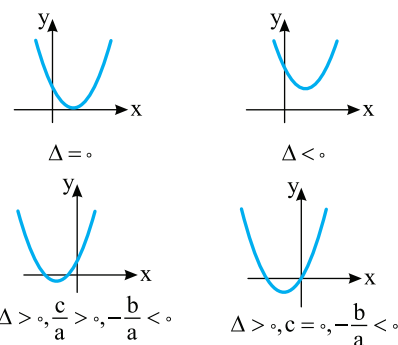
بنابراین

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{6}{-1} = -6, \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{0}{9} = 0$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $\frac{f}{g}$ برابر ۳- است.

۱۷- گزینه ۳ نمودار تابع در حالت های زیر از ناحیه چهارم نمی گذرد:



بنابراین Δ را حساب می کنیم: $\Delta = m^2 - 4(4 - m^2) = \Delta m^2 - 16$ اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} \Delta \leq 0 &\Rightarrow \Delta m^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} \leq m \leq \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \Delta > 0 &\Rightarrow \Delta m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m < -\frac{4}{\sqrt{5}} \text{ یا } m > \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{c}{a} \geq 0 &\Rightarrow 4 - m^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2 \\ -\frac{b}{a} < 0 &\Rightarrow -m < 0 \Rightarrow m > 0 \end{aligned}$$

اشتراک گیری از بازه های به دست آمده

$$\frac{4}{\sqrt{5}} < m \leq 2$$

اجتماع محدوده های به دست آمده در همه حالت ها برابر است با

$$-\frac{4}{\sqrt{5}} \leq m \leq 2$$

۱۸- گزینه ۲ محیط شکل برابر است با

$$4x + 4y = 40 \Rightarrow y = 10 - x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S = 2xy + xy = 3xy = 3x(10 - x) = -3x^2 + 30x$$

بیشترین مقدار این عبارت درجه دوم برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است. بنابراین

$$S_{\max} = -\frac{900}{4(-3)} = 75$$

۱۹- گزینه ۳ اعدادی که جواب معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، در دامنه

تابع f قرار ندارند. با توجه به معادله مجموع این اعداد برابر $S = -\frac{b}{a} = 3$ است.

۲۰- گزینه ۴ اگر دامنه این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به ازای

تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^2 + kx + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \Delta = k^2 - 4 < 0$$

$$k^2 < 4 \Rightarrow |k| < 2 \Rightarrow -2 < k < 2$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینه (۴) درست است.

۲۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$D_f = \{x | 9 - x^2 \geq 0, x^2 - 1 > 0\}$$

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

از اشتراک ناحیه های فوق معلوم می شود که $D_f = [-3, -1) \cup (1, 3]$ ، پس

عددهای صحیح ± 3 و ± 2 در دامنه تابع هستند.

۳۰- گزینه ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 2x + 1) = x + 1$$

بنابراین $(f-g)(x-1) = x - 1 + 1 = x$.

راه‌حل دوم چون $f(1) = 6$ و $g(1) = 4$ ، پس $(f-g)(1) = 6 - 4 = 2$. اکنون اگر در عبارت $(f-g)(x-1)$ به جای x قرار دهیم ۲، $(f-g)(1)$ به دست می‌آید که برابر ۲ است. تنها در عبارت گزینه (۱)، با قرار دادن $x=2$ حاصل ۲ می‌شود.

۳۱- گزینه ۲ راه‌حل اول دامنه تابع f به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} 8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8 \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{cases} \Rightarrow 3 < x \leq 8 \Rightarrow D_f = (3, 8]$$

دامنه تابع g به صورت زیر به دست می‌آید

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$
$8-x$		-	+	-
$x-3$		-	+	+
$8-x$		-	+	-

$$\Rightarrow D_g = [3, 5)$$

بنابراین دامنه تابع $f \times g$ به صورت زیر است

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (3, 8] \cap [3, 5) = (3, 5)$$

راه‌حل دوم با توجه به گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که آیا عدد ۶ در دامنه تابع $f \times g$ قرار دارد یا نه. چون $x=6$ عبارت زیر رادیکال در تابع g را منفی می‌کند، پس $x=6$ در دامنه تابع g نیست و در نتیجه در دامنه $f \times g$ هم نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نمی‌توانند جواب باشند.

۳۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x-1-(x-1) & x \geq 1 \\ 3x+1-(-x+1) & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$$

۳۳- گزینه ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(gof)(1) = g(f(1)) = g(-1) = 2$$

$$(gof)(2) = g(f(2)) = g(-1) = 2$$

$$(gof)(-1) = g(f(-1)) = g(3) = 2$$

$$(gof)(3) = g(f(3)) = g(-2) = 4$$

بنابراین $gof = \{(1, 2), (2, 2), (-1, 2), (3, 4)\}$.

۳۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $(fof)(3) = f(f(3))$. از طرف دیگر،

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13, \quad f(f(3)) = f(13) = \frac{13-1}{2} = 6$$

بنابراین $(fof)(3) = 6$.

۳۵- گزینه ۳ ابتدا $(fog)(a)$ و $(gof)(a)$ را به دست می‌آوریم

$$(fog)(a) = f(g(a)) = f(3a-2) = 2(3a-2) + 3 = 6a-1$$

$$(gof)(a) = g(f(a)) = g(2a+3) = 3(2a+3) - 2 = 6a+7$$

بنابراین معادله زیر به دست می‌آید

$$6a-1+6a+7=2a \Rightarrow 10a=-6 \Rightarrow a=-\frac{3}{5}$$

۳۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2x) = a(x^2 + 2x) + 1 = ax^2 + 2ax + 1$$

بنابراین باید مجموعه جواب‌های معادله $ax^2 + 2ax + 1 = 2$ دوعضوی باشد.

یعنی باید Δ معادله $ax^2 + 2ax - 1 = 0$ مثبت باشد:

$$\Delta = (2a)^2 - 4a(-1) = 4a^2 + 4a > 0 \Rightarrow 4a(a+1) > 0 \Rightarrow a > 0 \text{ یا } a < -1$$

۳۷- گزینه ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(fog)(-3) = f(g(-3)) = f(1) = \sqrt{3}$$

$$(fog)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 2$$

$$(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = \sqrt{3}$$

$$(fog)(1) = f(g(1)) = f(3) \text{ تعریف نشده}$$

بنابراین $fog = \{(-3, \sqrt{3}), (-2, 2), (-1, \sqrt{3})\}$.

۳۸- گزینه ۲ دامنه تابع fog به صورت زیر به دست می‌آید

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{0 \leq x \leq 2, -1 \leq 5-2x \leq 3\}$$

از نامعادله $0 \leq x \leq 2, -1 \leq 5-2x \leq 3$ نتیجه می‌شود $-6 \leq -2x \leq -2$ پس $1 \leq x \leq 3$.

بنابراین $D_{fog} = \{0 \leq x \leq 2, 1 \leq x \leq 3\} = [1, 2]$.

۳۹- گزینه ۳ دامنه تابع‌های f و g به ترتیب $D_f = [1, +\infty)$ و

$D_g = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ است. بنابراین

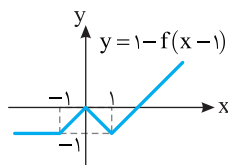
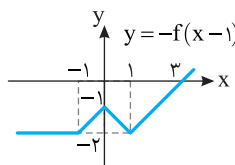
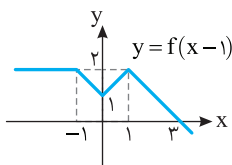
$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \mid x \geq 1, -\sqrt{3} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{3}\}$$

از نامعادله $-\sqrt{3} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{3}$ نتیجه می‌شود $x-1 \leq 3$ پس $x \leq 4$.

بنابراین $D_{gof} = \{x \mid x \geq 1, x \leq 4\} = [1, 4]$.

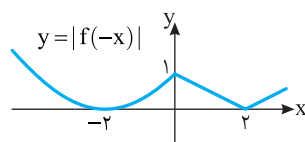
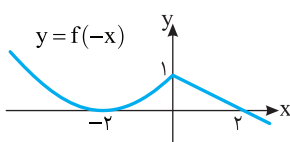
۴۰- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست انتقال

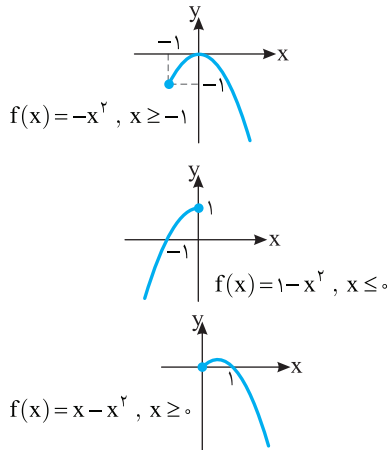
می‌دهیم تا نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(x-1)$ به دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 1 - f(x-1)$ به دست بیاید.

۴۱- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار،

قرینه نمودار f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم نمودار تابع $y = |f(-x)|$ ، قرینه قسمتی از نمودار تابع $y = f(-x)$ را که زیر محور x است

نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.





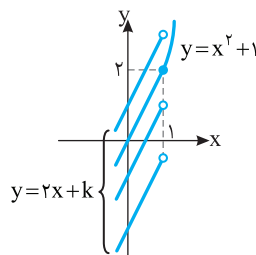
گزینه (۲)

گزینه (۳)

گزینه (۴)

۴۸- گزینه (۴) راه حل اول نمودار تابع به ازای مقادیر مختلف k به

شکل زیر است



واضح است که بیشترین مقدار تابع $y = 2x + k$ به ازای $x < 1$ نباید از ۲

بیشتر باشد، پس

$$2 + k \leq 2 \Rightarrow k \leq 0$$

راه حل دوم اگر $x \geq 1$ ، آنگاه تابع $g(x) = x^2 + 1$ یک به یک است و

$R_g = [2, +\infty)$ و اگر $x < 1$ ، آنگاه تابع $h(x) = 2x + k$ یک به یک است و

$R_h = (-\infty, 2 + k)$. در نتیجه برای اینکه تابع f یک به یک باشد باید

$$R_g \cap R_h = \emptyset$$

$$2 + k \leq 2 \Rightarrow k \leq 0$$

۴۹- گزینه (۳) تابع گزینه (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-3 < -1$ ، اما

$f(-3) < f(-1)$. تابع گزینه (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا $0 < 1$ ، اما

$f(0) = f(1)$. تابع گزینه (۳) اکیداً نزولی است، زیرا $-3 < -1 < 1$ و

$f(-3) > f(-1) > f(1)$. تابع گزینه (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-2 < -1$ ،

$$\text{اما } f(-2) = f(-1)$$

۵۰- گزینه (۳) چون تابع f نزولی است و $1 < 2 < 3$ ، پس

$$f(1) \geq f(2) \geq f(3) \Rightarrow 2a + 1 \geq a - 2 \geq 2 - a$$

اکنون توجه کنید که

$$2a + 1 \geq a - 2 \Rightarrow a \geq -3 \quad (1)$$

$$a - 2 \geq 2 - a \Rightarrow a \geq 2 \quad (2)$$

اشتراک جواب های نامعادله های (۱) و (۲) می شود $a \geq 2$.

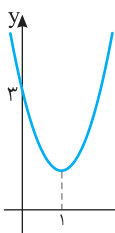
۵۱- گزینه (۲) طول رأس سهمی $y = 2x^2 - 4x + 3$

برابر است با $-\frac{b}{2a} = 1$. از روی نمودار تابع f معلوم است

که این تابع روی بازه $[1, +\infty)$ و هر زیر مجموعه آن اکیداً

صعودی است. از بازه های داده شده فقط بازه $(1, 2)$

زیر مجموعه بازه $[1, +\infty)$ است.



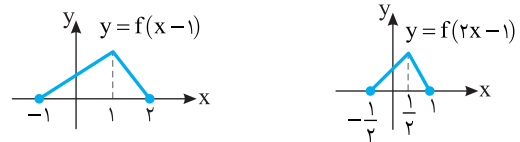
۴۲- گزینه (۲) برای رسم نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ کافی است ابتدا

نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع

$y = f(x - 1)$ رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم

می کنیم تا نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ به دست آید. توجه کنید که با این کار

نمودار در راستای محور طول ها منقبض می شود.



۴۳- گزینه (۲) اگر نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(2(x - 1)) - 1$ به دست می آید. اگر طول

نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y = f(2(2x - 1)) - 1 = f(4x - 2) - 1$

به دست می آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع

$y = 2(f(4x - 2) - 1)$ به دست می آید. پس ضابطه تابعی که نمودار آن

به دست آمده به صورت $y = 2f(4x - 2) - 2$ است.

۴۴- گزینه (۱) ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ را رسم می کنیم و آن را دو

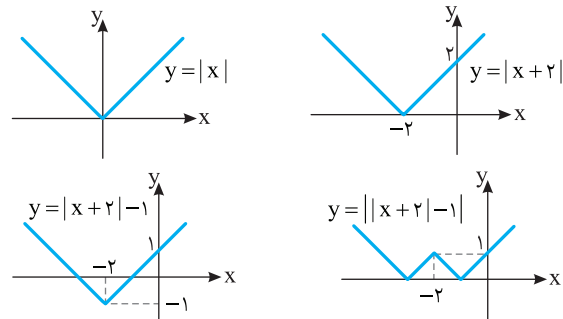
واحد به سمت چپ منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = |x + 2|$ به دست آید. این

نمودار را یک واحد به پایین منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = |x + 2| - 1$ رسم

شود. اکنون قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور

قرینه می کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می کنیم تا نمودار تابع

$y = ||x + 2| - 1|$ رسم شود.



۴۵- گزینه (۳) در تابع $\{(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 1)\}$ هر مؤلفه دوم

متناظر دقیقاً یک مؤلفه اول است. یعنی هیچ دو زوج مرتبی مؤلفه دوم یکسان

ندارند، پس این تابع یک به یک است.

۴۶- گزینه (۲) چون مؤلفه دوم زوج مرتب های $(a, 1)$ و $(4 - a, 1)$

یکسان هستند، پس باید مؤلفه های اول آن ها هم برابر باشند.

$$4 - a = a \Rightarrow a = 2$$

به همین ترتیب باید مؤلفه اول دو زوج مرتب $(1, 3)$ و $(1 + b, 3)$ برابر باشند،

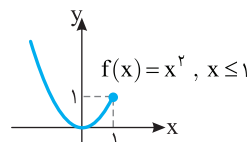
$$1 = 1 + b \Rightarrow b = 0$$

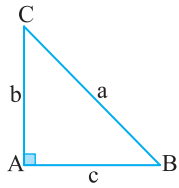
بنابراین $a + b = 11$.

۴۷- گزینه (۳) با توجه به نمودار تابع های داده شده، واضح است که تابع

$f(x) = 1 - x^2, x \leq 0$ یک به یک است.

گزینه (۱)





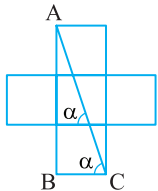
۵۹- گزینه ۲ با توجه به شکل،

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{6}}{a} a$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس،

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{a}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 25 + \frac{24}{a^2}$$

$$\frac{25}{a^2} a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$



۶۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید

که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،
 $\alpha = \hat{ACB}$ در نتیجه،

$$\tan \alpha = \tan \hat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{1} = 3$$

۶۱- گزینه ۲ ابتدا شکل را به

صورت مقابل کامل می‌کنیم. اکنون

توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در

مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$$

$$\text{در نتیجه، } \Delta ABC: \sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

۶۲- گزینه ۴ صورت کسر برابر است با

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

بنابراین $A = 0$

۶۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$S_{ABCD} = 2S_{ADC}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} DC \times AD \times \sin \hat{D}\right)$$

$$= 5 \times 4 \times \sin 120^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

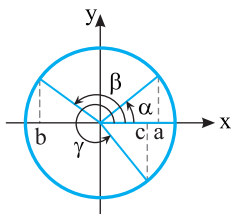
۶۴- گزینه ۲ اگر $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α

در ناحیه سوم قرار دارد.

۶۵- گزینه ۳ از روی شکل

مقابل معلوم می‌شود که $b < 0$ و $a > c$

بنابراین $a > c > b$



۶۶- گزینه ۳ با توجه به $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ ، مشخص است که

مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هم‌علامت هستند. با توجه به $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ ،

مشخص است که مقادیر $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ مختلف‌العلامت هستند. بنابراین

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه سوم قرار دارد. در این ناحیه،

$$\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0, \cot \alpha > 0$$

۶۷- گزینه ۱ چون $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ، پس $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ و در نتیجه

$$0 \leq \frac{m}{2} - 1 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{m}{2} \Rightarrow 2 \leq m \leq 4$$

۵۲- گزینه ۴ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به سمت راست

انتقال دهیم، نمودار تابع $y = f(x-1)$ به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار

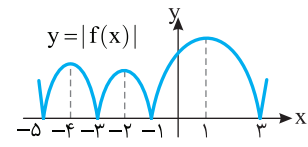
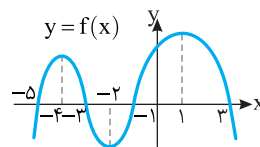
تابع $y = f(x-1)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع

$y = f(x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر قرینه قسمتهایی از این نمودار را که زیر

محور x است، نسبت به محور x رسم کنیم و قسمتهایی را که زیر محور x

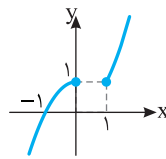
است حذف کنیم، نمودار تابع $y = |f(x)|$ به‌دست می‌آید. از روی این نمودار

معلوم است که تابع $y = |f(x)|$ روی بازه $(-2, -1)$ اکیداً نزولی است.



۵۳- گزینه ۱ با توجه به نمودار، تابع f

صعودی است.



۵۴- گزینه ۲ برای اینکه تابعی وارون‌پذیر باشد، باید یک‌به‌یک باشد.

تابع گزینه (۱) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(1) = f(3) = 2$. تابع گزینه (۲)

یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(2) = f(5) = 3$. تابع گزینه (۳) یک‌به‌یک است، زیرا

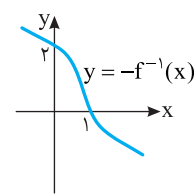
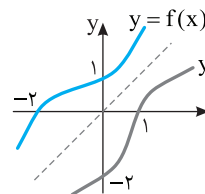
$f(1) = -1$ ، $f(2) = -2$ ، $f(3) = -4$ و $f(4) = -5$ ، بنابراین مقادیر تابع f

متمايزند. تابع گزینه (۴) هم یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(1) = f(3) = 0$.

۵۵- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع f^{-1} را رسم می‌کنیم. برای این کار باید

قرینه نمودار f را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم. سپس نمودار تابع f^{-1} را رسم

می‌کنیم. برای این کار باید قرینه نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور x رسم کنیم.



۵۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1) = 4$$

$$(g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4) = 3$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۵۷- گزینه ۲ توجه کنید که $f(1) = 2$ ، پس $f^{-1}(2) = 1$. به این

ترتیب، $f(1) + f^{-1}(2) = 3$.

۵۸- گزینه ۱ راه‌حل اول ابتدا ضابطه تابع f را به‌صورت

$$y = (x-2)^2 - 4 \text{ می‌نویسیم و } x \text{ را برحسب } y \text{ پیدا می‌کنیم:}$$

$$(x-2)^2 = y+4 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{y+4} \Rightarrow x-2 \leq \sqrt{y+4}$$

$$2-x = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y+4} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4}$$

راه‌حل دوم چون نمودار تابع f از نقطه $(-3, 21)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع

f^{-1} از نقطه $(21, -3)$ عبور می‌کند. اکنون گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

$$f^{-1}(21) = 2 - \sqrt{25} = -3 \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$f^{-1}(21) = -2 + \sqrt{25} = 3 \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$f^{-1}(21) = 2 - \sqrt{17} \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$f^{-1}(21) = 2 + \sqrt{17} \quad \text{گزینه (۴)}$$

راه حل دوم اگر در عبارت داده شده به جای θ مقدار 30° را قرار دهیم، مقدار عبارت برابر است با $3 = 9 - 4 - 9 = 16 - 9 = 7$. اگر در گزینه‌ها به جای θ

مقدار 30° را قرار دهیم، فقط $\cot^2 \theta$ برابر ۳ می‌شود. تنها گزینه (۴) می‌تواند درست باشد.

۷۵- گزینه ۳ طرفین تساوی $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ را به توان دو می‌رسانیم: $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha = 9$
چون $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ ، پس

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = 9 \Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$$

۷۶- گزینه ۱ دو طرف تساوی داده شده را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم:

$$3 + \frac{2 \cos x}{\sin x} = \frac{3}{\sin x} \Rightarrow 3 + 2 \cot x = \frac{3}{\sin x}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$9 + 12 \cot x + 4 \cot^2 x = \frac{9}{\sin^2 x} = 9(1 + \cot^2 x)$$

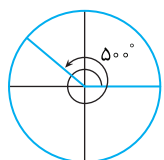
$$9 + 12 \cot x + 4 \cot^2 x = 9 + 9 \cot^2 x \Rightarrow 12 \cot x = 5 \cot^2 x$$

$$\cot x = 0, \cot x = \frac{12}{5}$$

چون $\cos x \neq 0$ ، پس $\cot x \neq 0$ و در نتیجه $\cot x = \frac{12}{5}$

۷۷- گزینه ۴ در تساوی $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ قرار می‌دهیم $D = 75^\circ$:

$$\frac{75^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{12}$$



۷۸- گزینه ۲ **راه حل اول** 50° را می‌توان

۵ تا 90° به علاوه 50° در نظر گرفت. ۵ تا 90° یعنی ۵ تا ربع دایره، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 50° در ناحیه دوم قرار دارد.

راه حل دوم $50^\circ = 360^\circ + 14^\circ$ و $9^\circ \leq 14^\circ \leq 180^\circ$ ، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی 50° در ناحیه دوم قرار دارد.

۷۹- گزینه ۳ ابتدا اندازه زاویه مرکزی AOB را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{2^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{9}$$

طول مسیر ماهواره برابر طول کمان AB است که برابر است با

$$l = r \times \theta \Rightarrow AB = 36000 \times \frac{\pi}{9} = 4000\pi \text{ کیلومتر}$$

۸۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

بنابراین

$$A = \frac{-2 \sin \alpha - 4 \sin \alpha}{-3 \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{-6 \sin \alpha}{-2 \cos \alpha} = 3 \tan \alpha$$

۶۸- گزینه ۴ می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، بنابراین $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ ، پس

$0 \leq 3 \sin^2 x \leq 3$ و در نتیجه $2 \leq 2 + 3 \sin^2 x \leq 5$. بنابراین کمترین مقدار عبارت ۲ و بیشترین مقدار آن ۵ است، که حاصل ضرب آن‌ها ۱۰ می‌شود.

۶۹- گزینه ۱ با توجه به اینکه محور طول‌ها با خط مورد نظر زاویه

مثلثاتی 30° تشکیل می‌دهد، شیب خط برابر $\tan 30^\circ$ یا همان $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

پس معادله آن به صورت $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ است و چون خط از نقطه $(6, \sqrt{3})$

می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کنند:

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 6 + b \Rightarrow b = -\sqrt{3}$$

پس معادله خط $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ یا همان $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ است.

۷۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{1 - \tan x}{\tan x} = 2 \Rightarrow 1 - \tan x = 2 \tan x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}$$

بنابراین $\cot x = \frac{1}{\tan x} = 3$. در نتیجه $\frac{\cot x}{\cot x - 1} = \frac{3}{3 - 1} = \frac{3}{2}$

۷۱- گزینه ۲ با توجه به رابطه $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ می‌توان نوشت

$$\left(\frac{1}{2m-1}\right)(m+2) = 1 \Rightarrow 2m-1 = m+2 \Rightarrow m = 3$$

بنابراین $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ و $\cot \alpha = 5$ و در نتیجه

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{1}{25} + 25 = \frac{626}{25}$$

۷۲- گزینه ۴ با توجه به رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می‌توان نوشت

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

با توجه به اینکه $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، مقدار $\cos \alpha$ باید منفی باشد، پس

$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. با توجه به رابطه $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ، به دست می‌آید

$$\frac{3}{5} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{4}{5}} = \frac{15}{16}$$

۷۳- گزینه ۱ با استفاده از اتحادهای $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$A = \frac{\tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}} + \frac{\cot^2 x}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \tan^2 x \cos^2 x + \cot^2 x \sin^2 x$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \times \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

۷۴- گزینه ۴ **راه حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = 0$$

$$= \frac{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta$$

۸۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha, & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \alpha\end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{-\cos \alpha - \cos \alpha}{-\sin \alpha - \sin \alpha} = \frac{-2 \cos \alpha}{-2 \sin \alpha} = \cot \alpha$$

۸۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sin 135^\circ &= \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 120^\circ &= \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\sin 135^\circ - \cos 120^\circ}{\sin 135^\circ + \cos 120^\circ} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2} + (-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

۸۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{6} &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \tan \frac{5\pi}{6} &= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot \frac{7\pi}{6} &= \cot\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ \cos \frac{5\pi}{6} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$A = -\frac{1}{2} \times \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

۸۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\lambda} + \frac{7\pi}{\lambda} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{\lambda} = -\cos \frac{7\pi}{\lambda} \\ \frac{3\pi}{\lambda} + \frac{5\pi}{\lambda} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{\lambda} = -\cos \frac{5\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\cos^3 \frac{\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{3\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{5\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{7\pi}{\lambda} \\ = -\cos^3 \frac{7\pi}{\lambda} - \cos^3 \frac{5\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{5\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{7\pi}{\lambda} = 0\end{aligned}$$

۸۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin \alpha$ مقداری منفی است. پس

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{غ.ق.ق.})\end{aligned}$$

۸۶- گزینه ۲ توجه کنید که $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ پس

$$\begin{aligned}\frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x} &= \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x} = \frac{\cos(\pi - 2x)}{\cos x} \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x\end{aligned}$$

۸۷- گزینه ۳ می توان نوشت

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} &= \frac{\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} \\ &= \frac{1}{(\sin 15^\circ \cos 15^\circ)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 30^\circ\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16\end{aligned}$$

۸۸- گزینه ۱ با توجه به اینکه $\frac{3\pi}{8}$ رادیان، نصف $\frac{3\pi}{4}$ رادیان است،در تساوی $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ قرار می دهیم $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right) &= 2\cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 \\ \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) &= 2\cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 \\ 2\cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ \cos \frac{3\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

۸۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned}3\cos^2 105^\circ + \sin^2 105^\circ &= 3\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ \\ &= 2\sin^2 15^\circ + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 2\sin^2 15^\circ + 1 \\ &= 1 - \cos(2 \times 15^\circ) + 1 = 2 - \cos 30^\circ = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

۹۰- گزینه ۴ راه حل اول می توان نوشت

$$\begin{aligned}\frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ} - \frac{\cos 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ} &= \frac{\sin^2 22/5^\circ - \cos^2 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ \cos 22/5^\circ} \\ &= \frac{-\cos(2 \times 22/5^\circ)}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 22/5^\circ)} = \frac{-\cos 45^\circ}{\frac{1}{2} \sin 45^\circ} = -2\end{aligned}$$

راه حل دوم می دانیم $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$. بنابراین

$$\begin{aligned}\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ &= -(\cot 22/5^\circ - \tan 22/5^\circ) \\ &= -2 \cot 45^\circ = -2\end{aligned}$$

۹۱- گزینه ۲ راه حل اول عبارت را به شکل زیر ساده می کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{\tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} &= \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{1}{\cos^2 15^\circ}} = \sin 15^\circ \cos 15^\circ \\ &= \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

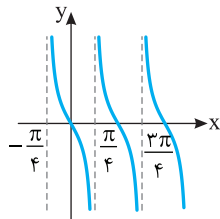
راه حل دوم می دانیم $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ پس

$$\frac{\tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$$

۹۶- گزینه ۱ تابع $f(x) = -\tan 2x$ روی بازه‌های به صورت

$(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$ که $k \in \mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازه

$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



۹۷- گزینه ۲ توجه کنید که تابع تنازانت روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً

صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{4}) < \tan x < \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \tan x < 1$$

$$-1 < \frac{2m-3}{5} < 1 \Rightarrow -1 < m < 4$$

۹۸- گزینه ۲ معادله را به صورت $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را مشخص می‌کنیم:

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$

(غ.ق.ق.)

بنابراین معادله دو جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۹۹- گزینه ۱ توجه کنید که $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ ، بنابراین معادله مورد نظر

می‌شود

$$\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{6} - 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -k\pi - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۱۰۰- گزینه ۴ جایی که نمودار تابع f خط $y = -1$ را قطع می‌کند،

پس $f(x) = -1$ است، پس

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ عبارت‌اند از

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

بنابراین نمودار تابع خط $y = -1$ را در پنج نقطه از بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ قطع می‌کند.

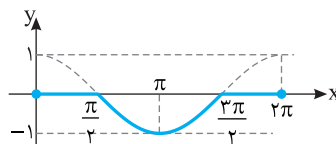
۹۲- گزینه ۲ توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos x}{2} & \cos x \geq 0 \\ \frac{\cos x + \cos x}{2} & \cos x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ \cos x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل

روبه‌رو رسم می‌شود:

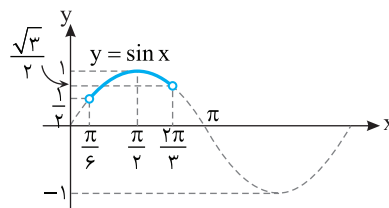
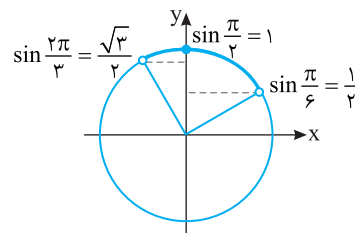


۹۳- گزینه ۲ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر

$$\frac{1}{2} < \sin x \leq 1, \text{ آن‌گاه } \frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Rightarrow 2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow 3 < m \leq 5$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ۴ و ۵ باشد.



۹۴- گزینه ۳ می‌دانیم دوره تناوب توابع $y = a \sin(bx+c)$ و

$y = a \cos(bx+c)$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. پس $T_f = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$$T_g = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$T_f = 2T_g \Rightarrow 4 = \frac{4\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \pi \Rightarrow a = \pm \pi$$

۹۵- گزینه ۱ چون $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ، پس

$$f(x) = \sin^2 x + 1 = \frac{1 - \cos 2x}{2} + 1 = \frac{3 - \cos 2x}{2}$$

بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

نکته دوره تناوب توابع $y = a \sin^2(bx+c)$ و $y = a \cos^2(bx+c)$ برابر

$$T = \frac{\pi}{|b|} \text{ است.}$$

۱۰۵- گزینه ۴ اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه $f(x) \rightarrow (-1)^-$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} f(t) = 2$$

۱۰۶- گزینه ۴ مقادیر حد راست و حد چپ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2x) = 8 + 4 = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x) = 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

بنابراین مقدار حد راست تابع در $x=2$ ، ۱۴ واحد از مقدار حد چپ آن در این نقطه بیشتر است.

۱۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+a}{2x-3} = \frac{3 \times 2 + a}{2 \times 2 - 3} = 6 + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 2^2 + a(2) + b = 4 + 2a + b \end{aligned}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ ، پس هر یک از حدهای بالا برابر با ۴ است:

$$\begin{cases} 6 + a = 4 \\ 4 + 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

۱۰۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

وجود دارد. از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1 - xf(x)) = 6 \Rightarrow (-1)^2 - (-1) + 1 - (-1) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$$

پس $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$

۱۰۹- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه $\sqrt{2x} \rightarrow 2\sqrt{2}^+$ ، در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x[\sqrt{2x}]) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x) = 4 \text{ پس } [\sqrt{2x}] = 2$$

۱۱۰- گزینه ۲ عامل $x-3$ را از صورت و مخارج حذف می‌کنیم،

سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۱۱۱- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 64} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x^2 + 4x + 16)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x^2 + 4x + 16} = \frac{4+4}{4^2 + 4 \times 4 + 16} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

۱۱۲- گزینه ۱ وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $3x-4$ از

سمت چپ به ۱- نزدیک می‌شود، پس $[3x-4] = -2$ ، از طرف دیگر وقتی

x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $|(x-1)| = -(x-1)$ ، بنابراین حد مورد

نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left([3x-4] + \frac{|x-1|}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-2 + \frac{-(x-1)}{x-1} \right) = -2 - 1 = -3$$

۱۰۱- گزینه ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

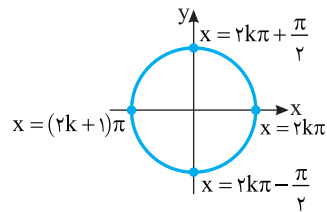
$$\sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x (\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نقاط انتهایی کمان‌های نظیر جواب‌ها را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله را می‌توان به صورت $x = \frac{k\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ نوشت.



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\sin x \cos^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌ها به صورت مضارب زوج و مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ هستند که می‌توان

آن‌ها را به صورت جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ نوشت.

۱۰۲- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x = 4 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

$$(\cos x - 2)(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 2, \cos x = \frac{1}{2}$$

معادله $\cos x = 2$ جواب ندارد، پس $\cos x = \frac{1}{2}$ ، جواب‌های معادله که در

بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi - \frac{\pi}{3}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر 2π است.

۱۰۳- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2 \sin x \cos^2 x = \sin x$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x \cos 2x = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$.

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۱۰۴- گزینه ۱ در یک همسایگی محذوف ۱، مقادیر f منفی هستند،

بنابراین در این همسایگی $|f(x)| = -f(x)$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{-f(x)} = -1$$

۱۱۹- گزینه ۱ توجه کنید که وقتی x از سمت چپ به -2 نزدیک می‌شود، $x+2$ از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

۱۲۰- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[-x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[-x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

۱۲۱- گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 3$ ، آن‌گاه $x \rightarrow 0^+$ ، $(x-3)^2 \rightarrow 0^+$ ، بنابراین برای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (ax^3 + 3) < 0 \Rightarrow 27a + 3 < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{9}$$

۱۲۲- گزینه ۴ برای اینکه نمودار تابع شبیه شکل مورد نظر شود، وقتی $x \rightarrow 2^-$ و $x \rightarrow 2^+$ ، باید $f(x) \rightarrow -\infty$ فقط در گزینه (۴)،

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

۱۲۳- گزینه ۳ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$ و اگر $x \rightarrow 1^+$ ، مقادیر

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

همین‌طور $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ و اگر $x \rightarrow 1^-$ ، مقادیر $x-1$ منفی‌اند و به صفر

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

میل می‌کنند. بنابراین به این ترتیب، نمودار تابع f در همسایگی نقطه $x=1$ به شکل گزینه (۳) است.

۱۲۴- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه $\frac{1}{x} \rightarrow 1^+$ ، پس

$$t = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow t \rightarrow 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty$$

۱۲۵- گزینه ۲ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

۱۲۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2$$

۱۲۷- گزینه ۴ بزرگ‌ترین جمله $(x+1)^2$ برابر x^2 است. همچنین

بزرگ‌ترین جمله $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$ برابر x^3 است. پس

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^3 + (x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{2x^3} = 1$$

۱۲۸- گزینه ۴ توجه کنید که وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر $x+1$ و $3-x$

به ترتیب منفی و مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a|x+1| + 3x-1}{|3-x| + ax-15} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a(-x-1) + 3x-1}{3-x+ax-15}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-a+3)x - a-1}{(a-1)x - 12} = \frac{3-a}{a-1}$$

در نتیجه $\frac{3-a}{a-1} = 2$ ، بنابراین $\frac{a}{3}$.

۱۱۳- گزینه ۲ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که بنابر

اتحاد مزدوج، $x-9 = (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$ ، در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

۱۱۴- گزینه ۱ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x^2-49} &= \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x^2-49} \times \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{x+1-8}{(x-7)(x+7)} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x+7)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4)} = \frac{1}{14(4+4+4)} = \frac{1}{168} \end{aligned}$$

۱۱۵- گزینه ۱ توجه کنید که $f(2) = 1$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x - \frac{x-2}{x-2} \right) = 2-1=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + \frac{x-2}{x-2} \right) = 2+1=3$$

بنابراین تابع در $x=2$ فقط پیوستگی راست دارد.

۱۱۶- گزینه ۴ چون تابع در نقطه ۳ پیوسته است، حدهای چپ و راست

تابع در این نقطه با هم برابرند:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (16-ax^2) = 16-9a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x+a) = 6+a$$

بنابراین $16-9a = 6+a$ و در نتیجه $a=1$. به این ترتیب

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 3 \\ 16-x^2 & x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (16-x^2) = 16-1^2 = 15$$

۱۱۷- گزینه ۳ باید مخرج هیچ‌جا صفر نشود، در نتیجه باید دلتای

معادله $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ منفی باشد

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(m+6) < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m+6) < 0$$

$$m^2 - m - 6 < 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 3$$

بنابراین تابع f به ازای چهار مقدار صحیح -1 ، 0 ، 1 و 2 برای m روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۱۸- گزینه ۱ در نقاطی که مقدار $\frac{1}{x}$ عددی صحیح شود، تابع $y = \left[\frac{1}{x} \right]$

ناپیوسته است. این نقاط به صورت زیر هستند:

$$\frac{1}{x} = k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{1}{k}$$

در بازه $(\frac{1}{10}, 1)$

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{k} < 1 \Rightarrow 1 < k < 10 \Rightarrow 2 \leq k \leq 9$$

یعنی در هشت نقطه تابع ناپیوسته است.

۱۳۷- گزینه ۳ تابع f در نقطه‌های -۳ ، ۱ و ۵ پیوسته نیست، پس در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. همین‌طور، در نقطه‌های -۱ و ۳ مشتق چپ و مشتق راست تابع f برابر نیستند، پس تابع f در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. تابع f در نقطه‌های -۲ و ۴ مشتق‌پذیر است. بنابراین تابع f در پنج نقطه صحیح از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست.

۱۳۸- گزینه ۴ بنابر تعریف مشتق، $g(x) = f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

$$g(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{1^2} = 1$$

۱۳۹- گزینه ۳ بنابر قاعده تقسیم،

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$\text{پس } \left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{f'(-1)g(-1) - g'(-1)f(-1)}{g^2(-1)}$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 1 \\ f'(x) = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -3 \\ f'(-1) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ g'(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(-1) = 2 \\ g'(-1) = -2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{4 \times 2 - (-2)(-3)}{(2)^2} = -1$$

۱۴۰- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$$= x(x^4 - 1) = x^5 - x$$

$$\text{بنابراین } f'(x) = 5x^4 - 1. \text{ پس } f'\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = 9\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4 - 1 = 0$$

۱۴۱- گزینه ۲ توجه کنید که مقدار عبارت $4x - x^2$ در اطراف نقطه $x = -2$ منفی است و مقدار عبارت $x + 1$ هم در اطراف $x = -2$ منفی است.

پس در اطراف این نقطه

$$f(x) = x^2 - 4x - x - 1 = x^2 - 5x - 1$$

$$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(-2) = -9$$

همچنین توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x = 5$ مقدار عبارت‌های

$$4x - x^2 \text{ و } x + 1 \text{ به ترتیب منفی و مثبت است. پس در اطراف این نقطه}$$

$$f(x) = x^2 - 4x + x + 1 = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(5) = 7$$

$$\text{در نتیجه } f'(5) + f'(-2) = -2$$

۱۴۲- گزینه ۲ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 4(2x^2 + 3)'(2x^2 + 3)^{4-1} = 4(4x)(2x^2 + 3)^3 = 16x(2x^2 + 3)^3$$

$$\text{بنابراین } f'(-1) = 16(-1)(2(-1)^2 + 3)^3 = -16 \times 5^3$$

۱۴۳- گزینه ۳ توجه کنید که $(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}} \Rightarrow f'(2) = \frac{3 \times 4}{2\sqrt{9}} = 2$$

۱۲۹- گزینه ۳ برای آنکه حد مورد نظر برابر صفر شود، باید درجه مخرج بیشتر از درجه صورت باشد. مخرج از درجه اول است، پس باید ضریب جملات درجه دوم و سوم در صورت برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ 2a - b = 0 \Rightarrow 2a = b \end{cases} \Rightarrow b = 2$$

بنابراین $a + b = 3$.

۱۳۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \right] = [0] = 0$$

از طرف دیگر، اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $-1 < \frac{1}{x} < 0$ ، بنابراین $\left[\frac{1}{x}\right] = -1$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$$

است.

۱۳۱- گزینه ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = 3$ برابر $f'(3) = 2$ است. پس شیب خط عمود بر این خط، که همان خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $x = -1$ است، برابر $-\frac{1}{2}$ است. پس $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

۱۳۲- گزینه ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های $x = a$ و $x = c$ صفر، در نقطه $x = b$ منفی و در نقطه $x = d$ مثبت است.

۱۳۳- گزینه ۲ با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطه $x = 1$ ،

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + 2}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} (-2) = -1$$

۱۳۴- گزینه ۱ تعریف مشتق تابع f در نقطه $x = 5$ را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)(x-2) \cdots (x-5)}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} ((x-1)(x-2)(x-3)(x-4)) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \end{aligned}$$

۱۳۵- گزینه ۲ می‌دانیم اگر تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + mh) - f(x_0 + nh)}{h} = (m-n)f'(x_0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2-2h)}{3h} &= \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2-2h)}{h} \\ &= \frac{1}{3} (2 - (-2))f'(2) = \frac{4}{3} f'(2) \end{aligned}$$

۱۳۶- گزینه ۳ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2 + 1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+1)}{x^2 + 1} = -1 \end{aligned}$$

بنابراین مقدار مشتق راست تابع f در نقطه $x = 1$ به اندازه ۲ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

۱۵۰- گزینه ۳ چون تابع f در نقطه $x=3$ مشتق پذیر نیست، پس

مقدار $x^2+ax-12$ به ازای $x=3$ صفر است:

$$9+3a-12=0 \Rightarrow a=1$$

بنابراین $f(x)=|x^2+x-12|$ در نزدیکی نقطه -2 علامت عبارت

x^2+x-12 منفی است، بنابراین

$$f(x)=-(x^2+x-12) \Rightarrow f'(x)=-2x-1 \Rightarrow f'(-2)=3$$

۱۵۱- گزینه ۲ فرض کنید نقطه مورد نظر (x_0, y_0) باشد. شیب

خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_0)$ است، که چون خط

مماس موازی محور x است، پس $f'(x_0)=0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$$

$$f'(x_0)=0 \Rightarrow 3(x_0-1)^2=0 \Rightarrow x_0=1$$

بنابراین $y_0=f(x_0)=f(1)=-1$.

۱۵۲- گزینه ۳ شیب خط مماس مورد نظر برابر $f'(-2)$ است:

$$f(x)=\frac{2x}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(-2)=2$$

از طرف دیگر $f(-2)=4$ ، پس خط مماس از نقطه $(-2, 4)$ می‌گذرد.

بنابراین معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$y-4=2(x+2) \Rightarrow y=2x+8$$

۱۵۳- گزینه ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطه (x_0, y_0) بر نمودار

تابع، که سهمی است، مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق f به ازای

$x=x_0$ برابر با شیب خط $y=x+5$ است. بنابراین

$$y'=4x-4 \Rightarrow 4x_0-4=1 \Rightarrow x_0=\frac{5}{4}$$

چون نقطه (x_0, y_0) روی سهمی $y=2x^2-4x+6$ است، پس

$$y_0=2x_0^2-4x_0+6=2\left(\frac{5}{4}\right)^2-4\times\frac{5}{4}+6=\frac{33}{8}$$

بنابراین خط مورد نظر از نقطه $(\frac{5}{4}, \frac{33}{8})$ می‌گذرد و شیب آن ۱ است، پس

معادله اش به صورت $y-\frac{33}{8}=x-\frac{5}{4}$ ، یعنی $8y-8x-23=0$ است.

۱۵۴- گزینه ۲ نقطه تماس را $(a, \frac{1}{\sqrt{a}})$ فرض می‌کنیم. شیب خط

مماس را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a)=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x-a)$ است.

نقطه $(3, 0)$ را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$0-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}(3-a) \Rightarrow 2a=3-a \Rightarrow a=1$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ است. در نتیجه

عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۴۴- گزینه ۱ بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(9x^2-4x)(x+1)^2-2(x+1)(3x^3-2x^2+1)}{(x+1)^4}$$

در نتیجه $f'(1)=\frac{3}{4}$.

۱۴۵- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی $f(-3x+5)=2x^3+4x-6$

طبق قاعده زنجیری مشتق بگیریم به دست می‌آید:

$$(-3x+5)f'(-3x+5)=6x^2+4$$

$$-3f'(-3x+5)=6x^2+4 \xrightarrow{x=1} -3f'(2)=10 \Rightarrow f'(2)=-\frac{10}{3}$$

۱۴۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(2x)g'(f(2x))=\frac{1}{y}(g(f(2x)))'=(\frac{1}{y}g(f(2x)))'$$

بنابراین ضابطه تابع $y=\frac{1}{y}g(f(2x))$ را به دست می‌آوریم و مشتق آن را

حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{y}g(f(2x))=\frac{1}{y}g(8x^3+1)=\frac{1}{y}\sqrt[3]{1-(8x^3+1)}=\frac{1}{y}\sqrt[3]{-8x^3}=-x$$

در نتیجه $y'=-1$.

۱۴۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ 3x^2+2 & x > 1 \end{cases}$$

بنابراین $f'(-1)+f'(2)=-3+14=11$.

۱۴۸- گزینه ۴ شرط لازم برای مشتق پذیری، پیوستگی است:

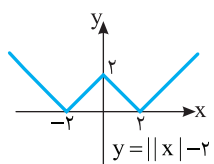
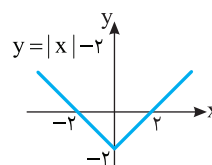
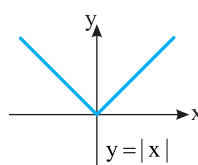
$$f(1)=\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow a+2=1+2b \Rightarrow a-2b=-1$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+2 & x > 1 \\ 3x^2+2b & x < 1 \end{cases} \Rightarrow 2a+2=3+2b \Rightarrow 2a-2b=1$$

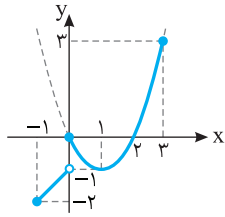
$$\begin{cases} a-2b=-1 \\ 2a-2b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b=\frac{7}{2}$$

۱۴۹- گزینه ۴ نمودار تابع f به صورت زیر رسم می‌شود:



در نقاط $x=0$ ، $x=2$ و $x=-2$ نمودار تابع نقطه گوشه‌ای دارد و تابع در

این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0, \pm 2\}$.



۱۷۷- گزینه ۳ نمودار تابع f

به صورت مقابل است. حداکثر مقدار تابع برابر ۳ و حداقل مقدار آن برابر -۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۵ است.

۱۷۸- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \text{ (غ.ق.ی.)}$$

از طرف دیگر، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ، $f(1) = \frac{1}{2}$ بنابراین

ماکزیمم مطلق تابع f برابر است با $f(1) = \frac{1}{2}$.

۱۷۹- گزینه ۳ چون $y = 2x - a$ پس

$$A(x) = xy = x(2x - a) = 2x^2 - ax$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 4x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{4}$$

بنابراین کمترین مقدار xy برابر است با $-\frac{a^2}{8}$.

۱۸۰- گزینه ۱ طول اضلاع قائمه مثلث را a و b فرض می‌کنیم.

می‌خواهیم بیشترین مقدار مساحت، یعنی $S = \frac{1}{2}ab$ را به دست آوریم. توجه

کنید که $a^2 + b^2 = 16$ پس $b = \sqrt{16 - a^2}$ در نتیجه

$$S(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{16 - a^2}$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - a^2} - \frac{a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} \Rightarrow S'(a) = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{1}{2}(2\sqrt{2})\sqrt{8} = 4$.

۱۸۱- گزینه ۴ نقطه $B(x, y)$ را روی نمودار در نظر می‌گیریم. پس

$$y = \sqrt{2x + 9}$$

$$d(x) = AB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 2x + 9} = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

$$d'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+25}}, \quad d'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین کمترین مقدار d به ازای $x = 3$ به دست می‌آید و برابر است با ۴.

۱۸۲- گزینه ۴ توجه کنید که مساحت مستطیل $ABCD$ برابر است با

$$f(x) = (3x-1)(1-2x)$$

را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 3(1-2x) + (3x-1)(-2) = -12x + 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -12x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{12}$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و بیشترین مقدار آن به ازای $x = \frac{5}{12}$

به دست می‌آید، که برابر است با $\frac{1}{24}$. در نتیجه بیشترین مقدار مساحت

مستطیل $ABCD$ برابر $\frac{1}{24}$ است.

از طرف دیگر،

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2-2x=0 \Rightarrow x=1 \\ -2-2x=0 \Rightarrow x=-1 \text{ (غ.ق.ی.)} \end{cases}$$

بنابراین نقطه به طول ۱ نقطه بحرانی تابع است. مجموع عرض‌های نقاط بحرانی برابر است با $f(-2) + f(1) = -4 + 5 = 1$.

۱۷۰- گزینه ۳ ریشه‌های صورت و مخارج تابع مشتق اگر در دامنه تابع

باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{(x^2-4)}{3\sqrt{x^2}} = \frac{6x^2 + x^2 - 4}{3\sqrt{x^2}} = \frac{7x^2 - 4}{3\sqrt{x^2}}$$

مشخص است که صورت کسر دو ریشه و مخارج آن یک ریشه دارد که همگی در دامنه تابع هستند (دامنه تابع $\mathbb{R}$ است)، بنابراین تابع f سه نقطه بحرانی دارد.

۱۷۱- گزینه ۳ توجه کنید که $D_f = [1, 3]$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

تابع f در نقاط $x=1$ و $x=3$ مشتق پذیر نیست. از طرف دیگر

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{3-x} \Rightarrow x-1 = 3-x \Rightarrow x=2$$

پس مجموعه طول نقاط بحرانی تابع $\{1, 2, 3\}$ است که دارای سه عضو است.

۱۷۲- گزینه ۲ تابع f در نقطه‌های -۱ و ۲ مینیمم نسبی دارد.

مجموع این عددها برابر ۱ است.

۱۷۳- گزینه ۳ جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است.

بنابراین تابع f فقط یک نقطه مینیمم نسبی در $x = -2$ دارد.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+

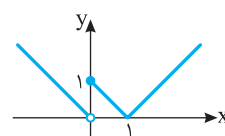
۱۷۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 = x^2(8x-3)$

بنابراین جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

min
نسبی

بنابراین تابع f فقط یک نقطه اکسترمم نسبی دارد.



۱۷۵- گزینه ۱ نمودار تابع f به

شکل مقابل است. این تابع در نقطه $x=0$

ماکزیمم نسبی و در نقطه $x=1$ مینیمم

نسبی دارد.

۱۷۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 4x - 8$ بنابراین

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

اکنون توجه کنید که چون

$$f(0) = 1, \quad f(2) = -7, \quad f(5) = 11$$

پس مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به ترتیب برابر ۱۱ و -۷ و

اختلاف آن‌ها برابر $11 - (-7) = 18$ است.

۱۹۰- گزینه ۲ راه حل اول طول قطر بزرگ، طول قطر کوچک وفاصله کانونی بیضی به ترتیب $2a$ ، $2b$ و $2c$ است. بنابراین

$$2a=8 \Rightarrow a=4, \quad 2b=6 \Rightarrow b=3$$

از طرف دیگر،

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

بنابراین فاصله کانونی بیضی مورد نظر برابر است با $2c = 2\sqrt{7}$.**راه حل دوم** چون $a^2 = b^2 + c^2$ ، پس $4a^2 = 4b^2 + 4c^2$ ، در نتیجه

$$(2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2 \quad \text{یعنی}$$

$$8^2 = 6^2 + (2c)^2 \Rightarrow (2c)^2 = 28 \Rightarrow 2c = 2\sqrt{7}$$

۱۹۱- گزینه ۱ چون مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است و کانون‌هایبیضی روی محور x هستند، پس قطر کوچک بیضی روی محور y است، یعنی BB' قطر کوچک بیضی است. اکنون توجه کنید که $a = OA' = 17$ و $b = OB = 15$ در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 17^2 = 15^2 + c^2 \Rightarrow c = 8$$

بنابراین $AF' = a + c = 25$. در نتیجه، مساحت مثلث ABF' برابر است با

$$\frac{1}{2} AF' \times OB = \frac{1}{2} \times 25 \times 15 = \frac{375}{2}$$

۱۹۲- گزینه ۲ راه حل اول بنابر فرض‌های مسئله، $b = OB' = 6$ و $a = BF = 8$ بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 8^2 = 6^2 + c^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{7}$$

پس خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.**راه حل دوم** چون $a = 8$ و $b = 6$ ، پس

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

۱۹۳- گزینه ۴ راه حل اول بنابر فرض مسئله،

$$2c = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5}, \quad 2a - 2b = 2 \Rightarrow a - b = 1 \quad (1)$$

بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 5$$

$$\xrightarrow{(1)} a+b=5 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲)، $a=3$ ، به دست می‌آید. در نتیجه خروج از مرکز

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{بیضی برابر است با}$$

راه حل دوم برای به دست آوردن a ، از تساوی (۱)، $b = a - 1$ به دست می‌آید.

بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (a-1)^2 + c^2$$

$$a^2 = a^2 - 2a + 1 + c^2 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۱۹۴- گزینه ۲ مرکز دایره وسط دو سر قطر است، پس نقطهیعنی $(1, 4)$ مرکز دایره است. اکنون توجه کنید که شعاع دایره $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{6+2}{2}\right)$ برابر $\frac{1}{2} AB$ است، چون $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ در نتیجه $r = 2\sqrt{2}$. بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8 - 1 - 16 = -9 \Rightarrow c = -9$$

۱۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (-5)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + 2a + 1 + 1} = \sqrt{a^2 - 6a + 9 + 25}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 - 6a + 25 \Rightarrow 8a = 24 \Rightarrow a = 3$$

۱۸۴- گزینه ۲ توجه کنید که $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2} = 3$ ، بنابراین

$$AC = 3 \Rightarrow \sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 \quad (1)$$

$$BC = 3 \Rightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow (3-a)^2 + b^2 = 9$$

$$9 - 6a + a^2 + b^2 = 9 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $9 - 6a = 0$ ، پس $a = \frac{3}{2}$. در نتیجه ازتساوی (۱) به دست می‌آید $b^2 = 9 - a^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$ ، بنابراین

$$|b| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۱۸۵- گزینه ۱ وسط ضلع BC نقطه $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ یعنی نقطه $(1, 2)$ است. طول میانه نظیر رأس A برابر با فاصله نقطه A از نقطه وسط

$$\text{ضلع } BC \text{ است، یعنی برابر است با } \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$$

۱۸۶- گزینه ۳ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(3, a)$ و $(2, 7)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{a-7}{3-2} = a-7$. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-1, 4)$ و $(1, 8)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{4-8}{-1-1} = 2$. اگر دو خط بر هم عمودباشند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است، پس

$$(a-7)(2) = -1 \Rightarrow a = \frac{13}{2}$$

۱۸۷- گزینه ۳ طول عمود وارد از نقطه $(3, 1)$ بر خط $4x + 3y + 20 = 0$

فاصله این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|4 \times 3 + 3 \times 1 + 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{35}{5} = 7$$

۱۸۸- گزینه ۴ فرض کنید خط $ax + by + c = 0$ ویژگی‌های مورد نظررا داشته باشد، چون شیب این خط -1 است، پس $-\frac{a}{b} = -1$ ، در نتیجه $a = b$. از طرف دیگر، چون فاصله مبدأ از این خط برابر با 5 است، پس

$$\frac{|ax_0 + ay_0 + c|}{\sqrt{a^2 + a^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{2}|a|} = 5 \Rightarrow |c| = 5\sqrt{2}|a| \Rightarrow c = \pm 5\sqrt{2}a$$

بنابراین خط‌های راست مورد نظر $ax + ay + 5\sqrt{2}a = 0$ و

$$x + y + 5\sqrt{2} = 0$$

و $x + y - 5\sqrt{2} = 0$ نوشت.**۱۸۹- گزینه ۲** مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضیبرابر $2a$ است. بنابراین $2a = PF + PF' = 6 + 8 = 14$ اکنون دقت کنید که

$$AF' = AF = 5 \quad \text{با توجه به شکل فاصله کانونی بیضی برابر است با}$$

$$FF' = AA' - AF - AF' \Rightarrow 2c = 14 - 5 - 5 = 4$$

۱۹۵- گزینه ۴ در معادله گسترده دایره ضرایب x^2 و y^2 برابر ۱ است.

پس طرفین معادله داده شده را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر ۱ شود:
 $x^2 + \frac{a}{4}y^2 - 2x + \frac{b}{4}y - 4 = 0$ به این ترتیب $\frac{a}{4} = 1$ پس $a = 4$. از طرف دیگر، چون شعاع دایره برابر ۳ است، پس

$$\frac{1}{4}\sqrt{(-2)^2 + (\frac{b}{4})^2 - 4(-4)} = 3 \Rightarrow \sqrt{(\frac{b}{4})^2 + 20} = 6 \Rightarrow b = \pm 8 \Rightarrow ab = \pm 16$$

۱۹۶- گزینه ۲ فرض می‌کنیم معادله دایره مورد نظر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد. مختصات نقطه‌های داده شده در این معادله صدق می‌کنند:

$$1 + a + c = 0, \quad 1 + b + c = 0, \quad 1 + 1 - a + b + c = 0$$

از معادله دوم $b + c = -1$ به دست می‌آید. بنابراین در معادله سوم $2 - a + b + c = 0 \Rightarrow 2 - a + (-1) = 0 \Rightarrow a = 1$

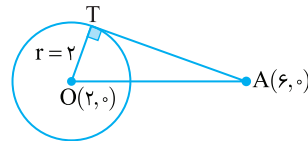
در نتیجه از معادله اول $c = -2$ و از معادله دوم $b = 1$ به دست می‌آید. بنابراین شعاع دایره مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 1 - 4(-2)} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

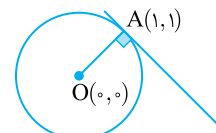
۱۹۷- گزینه ۲ نقطه $O(2, 0)$ مرکز دایره و شعاع دایره $r = 2$ است.

همچنین $OA = \sqrt{(6-2)^2 + 0^2} = 4$ و در نتیجه

$$AT = \sqrt{OA^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



۱۹۸- گزینه ۱ مرکز دایره نقطه $O(0, 0)$ است. شیب خطی که نقطه‌های O



و A روی آن قرار دارند، برابر است با

$$\frac{1-0}{1-0} = 1$$

است، برابر ۱- است. پس معادله خط مماس بر دایره در نقطه $A(1, 1)$ به صورت زیر است:

$$y - 1 = (-1)(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

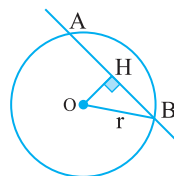
۱۹۹- گزینه ۲ مرکز دایره $x^2 + y^2 = \frac{169}{25}$ نقطه $O(0, 0)$ و شعاع آن

برابر $r = \frac{13}{5}$ است. بنابراین مطابق شکل زیر، OH برابر با فاصله نقطه $(0, 0)$ از خط $4x + 3y - 12 = 0$ است، که برابر است با $\frac{|0 + 0 - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}$.

نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OHB .

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow (\frac{13}{5})^2 = (\frac{12}{5})^2 + HB^2 \Rightarrow HB = 1$$

اکنون توجه کنید که $AB = 2HB = 2$.



یعنی $O_1(2, 0)$ و شعاع آن برابر است با

$$r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{(-4)^2 + 0^2 - 4(0)} = \frac{1}{4}\sqrt{16 + 0 - 0} = 1$$

مرکز دایره $x^2 + y^2 + 2x - 8y + k = 0$ نقطه $O_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ، یعنی

$O_2(-1, 4)$ و شعاع آن برابر است با

$$r_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2^2 + (-8)^2 - 4(k)} = \frac{1}{4}\sqrt{4 + 64 - 4k} = \sqrt{17 - k}$$

برای اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند باید $O_1O_2 = r_1 + r_2$ پس

$$\sqrt{(2+1)^2 + (0-4)^2} = 1 + \sqrt{17-k} \Rightarrow 3 = \sqrt{17-k} \Rightarrow 9 = 17-k \Rightarrow k = 8$$

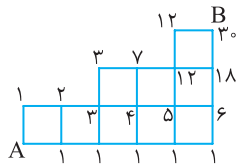
۲۰۱- گزینه ۳ رقم صدگان عدد مورد نظر نمی‌تواند صفر باشد. بنابراین برای صدگان ۴ انتخاب داریم. برای هر یک از رقم‌های دهگان و یکان ۵ انتخاب داریم. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $4 \times 5 \times 5 = 100$.

۲۰۲- گزینه ۴ نفر اول می‌تواند بر روی هر یک از صندلی‌ها بنشینند، پس برای او ۶ انتخاب وجود دارد. نفر دوم باید صندلی‌ای به جز صندلی نفر اول را انتخاب کند، پس ۵ انتخاب دارد. به همین ترتیب، نفر سوم هم ۴ انتخاب دارد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $6 \times 5 \times 4 = 120$.

۲۰۳- گزینه ۱ برای هر سؤال یکی از چهار گزینه درست است، پس کلید هر سؤال ۴ حالت دارد. پس تعداد حالت‌های مختلف که یک کلید

۲۰ سؤالی می‌تواند داشته باشد $4 \times 4 \times \dots \times 4$ یعنی 4^{20} است.

۲۰۴- گزینه ۲ تعداد راه‌های رسیدن از نقطه A به هر نقطه روی شکل را به کمک اصل جمع حساب می‌کنیم که مطابق شکل روبه‌رو است. بنابراین به ۳۰ طریق مختلف می‌توانیم از نقطه A به نقطه B برویم.



۲۰۵- گزینه ۲ اگر صدگان عدد ۷ باشد، هر کدام از رقم‌های دهگان و یکان می‌توانند نه حالت داشته باشند (فقط ۷ نمی‌توانند باشند). پس ۸۱ عدد به این صورت وجود دارد. اگر دهگان عدد ۷ باشد، رقم یکان می‌تواند نه حالت و رقم صدگان می‌تواند هشت حالت داشته باشد (۷ و صفر نمی‌تواند باشد). پس ۷۲ عدد به این شکل وجود دارد. به همین ترتیب اگر یکان عدد ۷ باشد، دهگان می‌تواند نه حالت داشته باشد و صدگان می‌تواند هشت حالت داشته باشد. یعنی ۷۲ عدد نیز به این شکل وجود دارد. بنابراین تعداد کل عددهای مطلوب برابر است با $81 + 72 + 72 = 225$.

۲۰۶- گزینه ۳ حروف یکسان را کنار هم قرار می‌دهیم و آن‌ها را به عنوان یک عضو جایگشت در نظر می‌گیریم. یعنی می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های مختلف P, S, I, M را حساب کنیم که برابر $4! = 24$ است.

۲۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(n, 5) = 2P(n, 4) \Rightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = 2 \times \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{1}{(n-5)!} = \frac{2}{(n-4)(n-5)!} \Rightarrow n-4 = 2 \Rightarrow n = 6$$

۲۱۵- گزینه ۱ ابتدا یک زن و شوهر را از بین شش زن و شوهر به $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

حالت انتخاب می‌کنیم. اکنون باید سه نفر را از بین پنج زوج دیگر انتخاب

کنیم. ابتدا سه زوج انتخاب می‌کنیم که این کار به $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ حالت امکان‌پذیر

است. سپس از بین هر زوج انتخاب شده زن یا شوهر را انتخاب می‌کنیم که این کار به $2 \times 2 \times 2$ راه ممکن است. پس کل حالت‌های انتخاب پنج نفر از بین

$$\cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times 2^3 = 480$$

ساکنین آپارتمان برابر است با

۲۱۶- گزینه ۱ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه

n عضوی برابر $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ است. بنابراین $\begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix}$ و در نتیجه $n = 5 + 6 = 11$.

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه یازده عضوی برابر است با $\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$

یا همان $\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

۲۱۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$n(S) = 2^2 = 4, \quad n(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

بنابراین

۲۱۸- گزینه ۴ تعداد راه‌های انتخاب سه لامپ از دوازده لامپ برابر

است با $n(S) = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$. چون هشت لامپ درون جعبه سالم‌اند، پس اگر A

پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $n(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{8!}{5!3!}}{\frac{12!}{9!3!}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = \frac{14}{55}$$

۲۱۹- گزینه ۱ واضح است که $n(S) = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ برای اینکه سه مهره

هم‌رنگ باشند، یا باید هر سه آبی باشند یا هر سه قرمز. پس تعداد حالت‌های

انتخاب سه مهره هم‌رنگ برابر است با $n(A) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{4 + 20}{120} = \frac{1}{5}$$

۲۰۸- گزینه ۳ باید سه رقم متمایز از میان رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ و ۹

انتخاب کنیم و با آن‌ها عددی سه رقمی بنویسیم. تعداد راه‌های این کار برابر

$$\text{است با } P(6, 3) = \frac{6!}{3!} = 120.$$

۲۰۹- گزینه ۱ ارقام اول و آخر را باید از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم

که این کار به $P(5, 2)$ حالت امکان‌پذیر است. سه رقم وسط را هم باید از بین

هشت رقم باقیمانده انتخاب کنیم که این کار به $P(8, 3)$ حالت امکان‌پذیر

است. بنابراین تعداد اعداد مطلوب سؤال برابر است با

$$P(5, 2) \times P(8, 3) = \frac{5!}{2!} \times \frac{8!}{3!} = \frac{8!}{3!}$$

۲۱۰- گزینه ۴ در اینجا ترتیب بیرون آوردن ۴ گوی از ۲۰ گوی مهم

است، پس تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $P(20, 4) = \frac{20!}{(20-4)!} = \frac{20!}{16!}$.

۲۱۱- گزینه ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{7!(n-7)!} \Rightarrow 4!(n-4)! = 7!(n-7)!$$

$$4! \times (n-4)(n-5)(n-6)(n-7)! = 4! \times 5 \times 6 \times 7 \times (n-7)!$$

$$(n-4)(n-5)(n-6) = 5 \times 6 \times 7 \Rightarrow n-4 = 7 \Rightarrow n = 11$$

$$\cdot \begin{pmatrix} n \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = 165$$

بنابراین

راه‌حل دوم می‌دانیم اگر $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ، آن‌گاه $m+k=n$. پس

$$\cdot \begin{pmatrix} n \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = 165$$

پس $n = 7 + 4 = 11$.

۲۱۲- گزینه ۴ محسن به $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ طریق می‌تواند سه تا از کتاب‌هایش را

انتخاب کند و ابراهیم نیز به $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ طریق می‌تواند سه تا از کتاب‌هایش را انتخاب

کند. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = 1120$.

۲۱۳- گزینه ۴ اگر به چهار پرسش از پنج پرسش نخست پاسخ دهد، باید

به شش پرسش از هشت پرسش دیگر پاسخ دهد. تعداد راه‌های این کار برابر

است با $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 140$. اگر به هر پنج پرسش نخست پاسخ دهد، باید به

پنج پرسش از هشت پرسش دیگر پاسخ دهد. تعداد راه‌های این کار برابر است با

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = 56$$

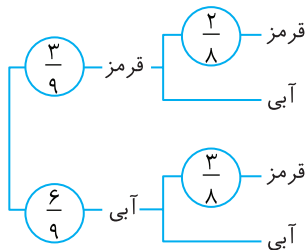
بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $140 + 56 = 196$.

۲۱۴- گزینه ۱ اگر سه نفر از هشت نفر را انتخاب کنیم و در یک تیم قرار

دهیم، پنج نفر باقی‌مانده تیم پنج نفره را تشکیل می‌دهند. بنابراین تعداد

حالت‌های ممکن برابر است: $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$.

راه حل دوم نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید



$$P(\text{قرمز بودن توپ دوم}) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$$

۲۲۸- گزینه ۲ فرض کنید B پیشامد انتخاب جعبه اول برای افزودن ۲

مهرة سفید باشد. در این صورت B' پیشامد انتخاب جعبه دوم برای افزودن ۲ مهرة سفید است. همچنین فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرة انتخاب شده باشد. باید P(A) را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') \\ = \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

توجه کنید که اگر دو مهرة سفید به جعبه اول اضافه شوند، این جعبه شامل ۸ مهرة سفید و ۲ مهرة سیاه می‌شود، پس احتمال سفید بودن مهرة انتخابی از این جعبه

برابر $\frac{8}{10}$ می‌شود، یعنی $P(A|B) = \frac{8}{10}$. به طور مشابه

$$P(A|B') = \frac{7}{10}$$

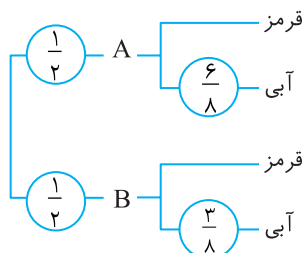
۲۲۹- گزینه ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که در پرتاب دو تاس اول

عددهای برابر نیابند (که از اینها (۲، ۳)، (۳، ۲)، (۱، ۴) و (۴، ۱) مطلوب‌اند)، B پیشامد این باشد که در پرتاب دو تاس اول عددهای برابر بیابند (که ابتدا (۱، ۱) و سپس (۱، ۲) یا (۲، ۱) مطلوب‌اند) و C پیشامد این باشد

که مجموع نهایی برابر ۵ باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) \\ = \frac{30}{36} \times \frac{4}{30} + \frac{6}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{73}{648}$$

۲۳۰- گزینه ۴ جعبه‌ها را A و B می‌نامیم. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم است که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

۲۲۰- گزینه ۴ چون A و B دو پیشامد ناسازگارند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{8}$$

$$\text{بنابراین } P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۲۲۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0/1 = 0/3 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0/2$$

از طرف دیگر

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/3 + 0/4 - 0/2 = 0/5$$

۲۲۲- گزینه ۲ فرض کنید A پیشامد این باشد که هر دو عدد رو شده زوج

باشند و B پیشامد این باشد که مجموع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد، در این صورت $B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$, $A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$

$$\text{پس } P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5}$$

۲۲۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$0/2 = P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A \cap B')}{1 - P(B)} = \frac{P(A \cap B')}{0/8}$$

$$\text{در نتیجه } P(A \cap B') = 0/2 \times 0/8 = 0/16$$

۲۲۴- گزینه ۴ A را پیشامد گرفتن بیماری سارس و B را پیشامد درمان

فرد می‌گیریم. در این صورت $P(B|A) = \frac{1}{10}$ و $P(A) = \frac{2}{100}$. در نتیجه

$$\frac{1}{10} = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{2}{100}} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/02$$

در نتیجه احتمال اینکه فرد هم دچار بیماری شود و هم درمان شود ۰/۰۰۲ است.

۲۲۵- گزینه ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که نفر اول به هدف

بزند و B پیشامد این باشد که نفر دوم به هدف بزند.

توجه کنید که $P(A) = 0/8$ و $P(B) = 0/7$. پیشامدهای A و B مستقل‌اند و در نتیجه $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0/8 \times 0/7 = 0/56$. احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/8 + 0/7 - 0/56 = 0/94$$

۲۲۶- گزینه ۳ پیشامد «به هدف زدن شخص اول» را A و پیشامد «به

هدف زدن شخص دوم» را B می‌نامیم. پس

$$P(A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

پیشامد «حداقل یکی از آنها به هدف نزنند» برابر $A' \cup B'$ است که چون

A' و B' مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A')P(B') = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{29}{32}$$

۲۲۷- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که در اینجا فضای احتمال

$S = \{\bar{A}\bar{B}, \bar{A}B, A\bar{B}, AB\}$ است. فرض کنید R_1 پیشامد این باشد که توپ

دوم قرمز و R_2 به ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز و

توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون R_1 و B_1 فضای S را افزایش می‌کنند،

بنابر قانون احتمال کل،

$$P(R_1) = P(R_1|B_1)P(B_1) + P(R_1|B_2)P(B_2) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{4} + \frac{6}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۲۳۷-۴ اگر تعداد محدودی از اعضای مجموعه نامتناهی A را که

در مجموعه متناهی B نیز قرار دارند، حذف کنیم، باز هم مجموعه‌ای نامتناهی باقی می‌ماند. یعنی $A-B$ نامتناهی است.

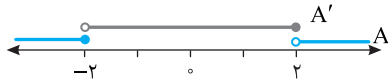
بررسی سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه (۱) اگر $A=\mathbb{W}$ و $B=\mathbb{N}$ ، آن‌گاه $A-B=\{0\}$. پس $A-B$ متناهی است ولی A و B نامتناهی‌اند.

گزینه (۲) اگر $A=\mathbb{Z}$ و $B=\{1\}$ ، آن‌گاه $A-B=\mathbb{Z}-\{1\}$. پس $A-B$ نامتناهی است ولی B متناهی است.

گزینه (۳) اگر $A=\{\frac{1}{p}\}$ و $B=\mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $A-B=\emptyset$. پس A متناهی و B نامتناهی است ولی $A-B$ متناهی است.

گزینه ۲۳۸-۳ با توجه به شکل زیر، $A'=[-2, 2]$. بنابراین اعداد صحیح -۱، صفر، ۱ و ۲ عضو A' هستند، که مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



گزینه ۲۳۹-۳ مجموعه علاقه‌مندان به فوتبال را با A و مجموعه علاقه‌مندان به والیبال را با B نشان می‌دهیم. در این صورت $n(A)=30$ ، $n(B)=35$. از طرف دیگر ۴۰ نفر حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند.

پس $n(A \cup B)=40$. بنابراین

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$40 = 30 + 35 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 25$$

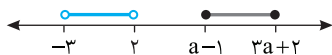
پس ۲۵ نفر به هر دو رشته علاقه دارند.

گزینه ۲۴۰-۲

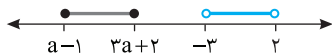
$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$20 - 4 = n(A - B) + n(B - A) \Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = 16$$

گزینه ۲۴۱-۱ توجه کنید که در دو حالت زیر این دو بازه جدا از هم هستند:



$$a-1 \geq 2 \Rightarrow a \geq 3$$



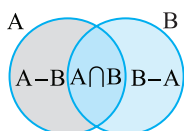
$$3a+2 \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{5}{3}$$

از طرف دیگر برای اینکه $[a-1, 3a+2]$ بازه باشد باید $a-1 < 3a+2$ و در

نتیجه $a > -\frac{3}{2}$. بنابراین

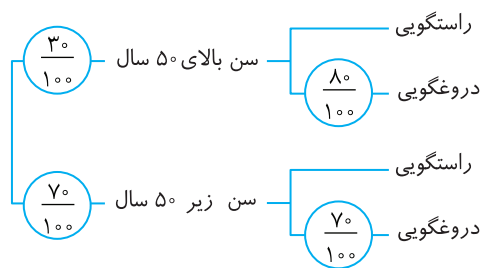
$$a \in ([3, +\infty) \cup (-\infty, -\frac{5}{3}]) \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$$

اگر $a \geq 3$ ، دو بازه مورد نظر جدا از هم هستند.



گزینه ۲۴۲-۱ با توجه به شکل مقابل مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ ، $A \cap B$ و $A \cap B$ دو به دو جدا از هم هستند.

گزینه ۲۳۱-۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:

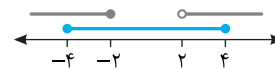


از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{30}{100} \times \frac{80}{100} + \frac{70}{100} \times \frac{70}{100} = \frac{73}{100} = 0.73$$

گزینه ۲۳۲-۲ به کمک شکل زیر، مجموعه داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم: $A = [-4, -2] \cup [2, 4]$. بنابراین اعداد صحیح -۴، -۳، -۲،

۳ و ۴ در مجموعه A قرار دارند.



گزینه ۲۳۳-۲ عدد ۲ باید در نامساوی‌های زیر صدق کند:

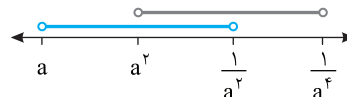
$$2a \leq 2 \Rightarrow a \leq 1, \quad 2 < 3+a \Rightarrow a > -1$$

بنابراین $-1 < a \leq 1$ و در نتیجه $a \in (-1, 1]$.

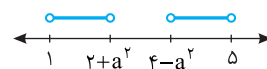
گزینه ۲۳۴-۴ چون $-1 < a < 0$ ، پس $a^2 < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a^4}$. بنابراین با

توجه به شکل زیر،

$$(a, \frac{1}{a^2}) \cap (a^2, \frac{1}{a^4}) = (a^2, \frac{1}{a^2})$$



گزینه ۲۳۵-۳ در حالت زیر اشتراک بازه‌ها تهی خواهد بود:



$$4-a^2 \geq 2+a^2 \Rightarrow a^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

پس

$$a \in [-1, 1]$$

یعنی

گزینه ۲۳۶-۳ ابتدا مجموعه A را با نوشتن اعضایش مشخص می‌کنیم.

توجه کنید برای آنکه $\frac{10}{x}$ عددی صحیح شود، مقادیر صحیحی که x می‌تواند

اختیار کند، شامل مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۰ یعنی $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

است. بنابراین $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. در نتیجه A مجموعه‌ای متناهی

است. از طرفی مجموعه B شامل اعداد صحیحی است که معکوسشان از ۱

بزرگ‌ترند. می‌دانیم معکوس همهٔ عددهای صحیح (به جز صفر)، از ۱

کوچک‌ترند پس مجموعه B تهی است. بنابراین مجموعه B نیز مجموعه‌ای متناهی است.

۲۵۱- گزینه ۲ عدد $\frac{1}{2}$ واسطه حسابی $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+2}$ است. پس

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \right) \Rightarrow 1 = \frac{x+2+x}{x(x+2)}$$

در نتیجه

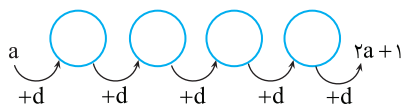
$$x^2 + 2x = 2x + 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

۲۵۲- گزینه ۲ چون $a > 0$ ، پس $2a+1 > a$. اکنون قدرنسبت دنباله

را به دست می آوریم $d = \frac{2a+1-a}{4+1} = \frac{a+1}{5}$. اختلاف کوچک ترین و بزرگ ترین

عددهایی که درج کرده ایم برابر $3d$ است و در نتیجه

$$\frac{3(a+1)}{5} = 9 \Rightarrow 3a+3=45 \Rightarrow 3a=42 \Rightarrow a=14$$



۲۵۳- گزینه ۳ جملات دنباله حسابی را به صورت $a-d, a, a+d$

در نظر می گیریم. مجموع آن ها $3a$ است. پس $3a=21$ و در نتیجه $a=7$. از طرف دیگر،

$$(a-d)(a)(a+d) = 168 \Rightarrow 7(49-d^2) = 168$$

$$49-d^2 = 24 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = \pm 5 \Rightarrow 2, 7, 12 \text{ یا } 12, 7, 2$$

پس نسبت بزرگ ترین عدد به کوچک ترین عدد برابر ۶ است.

۲۵۴- گزینه ۳ فرض کنید قدرنسبت این دنباله هندسی r باشد ($r > 0$).

در این صورت

$$a_1 + a_5 = 3^0 \Rightarrow a_1 + a_1 r^4 = 3^0 \Rightarrow a_1(1+r^4) = 3^0 \quad (1)$$

$$a_3 + a_7 = 12^0 \Rightarrow a_1 r^2 + a_1 r^6 = 12^0 \Rightarrow a_1 r^2(1+r^4) = 12^0 \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به دست می آید $r^2 = 4$ ؛ پس

$$r^4 = 16. \text{ به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می شود } a_1 = \frac{3^0}{17}$$

۲۵۵- گزینه ۲ راه حل اول چون $3+9=5+7=4+8$

$$a_3 a_9 = a_5 a_7 = a_4 a_8$$

$$\text{در نتیجه } a_3 a_5 a_7 a_9 = (a_4 a_8)^2 = 9$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$a_4 = a_1 r^3, \quad a_8 = a_1 r^7 \Rightarrow a_4 a_8 = a_1^2 r^{10} = 3$$

پس

$$a_3 a_5 a_7 a_9 = a_1^2 a_1 r^4 a_1 r^6 a_1 r^8 = a_1^4 r^{18} = (a_1^2 r^{10})^2 = 9$$

۲۵۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$a_1 a_3 \cdots a_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n} \Rightarrow 1 = \sqrt{(a_1 a_n)^n} \Rightarrow a_1 a_n = \pm 1$$

از طرف دیگر،

$$2+7=1+8 \Rightarrow a_2 a_7 = a_1 a_8$$

$$4+5=1+8 \Rightarrow a_4 a_5 = a_1 a_8$$

$$\text{پس } a_2 a_4 a_5 a_7 = (a_2 a_7)(a_4 a_5) = (a_1 a_8)^2 = 9$$

۲۴۳- گزینه ۱ توجه کنید که در شکل اول، ۶ دایره رنگی وجود دارد. در

شکل دوم، ۴ دایره رنگی به دایره های رنگی اولیه اضافه می شود، در شکل سوم، 2×4 دایره رنگی به دایره های رنگی اولیه اضافه می شود، ... در شکل n ام،

$4 \times (n-1)$ دایره رنگی به دایره های رنگی اولیه اضافه می شود. بنابراین اگر تعداد

دایره های رنگی در شکل n ام را a_n بگیریم، $a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$

(توجه کنید که شکل n ام دایره خاکستری دارد). بنابراین

$$a_{20} = 4 \times 20 + 2 = 82$$

۲۴۴- گزینه ۱ جمله عمومی الگو $t_n = an + b$ است، پس

$$\begin{cases} t_4 = 16 \\ t_{16} = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 16 \\ 16a + b = 28 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به دست می آید $a=1$ و $b=12$. بنابراین

$$t_n = n + 12 \Rightarrow t_7 = 19$$

۲۴۵- گزینه ۲ شکل n ام از $(n+2)^2$ مربع کوچک تشکیل شده است

که اگر n زوج باشد، $2(n+2)$ مربع کوچک سفید و اگر n فرد باشد،

$2(n+2)-1=2n+3$ مربع کوچک سفید در شکل وجود دارد. بنابراین در

شکل هجدهم، 2^2 مربع کوچک وجود دارد که ۴۰ تای آن ها سفید هستند.

پس در شکل هجدهم ۳۶۰ مربع کوچک رنگی وجود دارد.

۲۴۶- گزینه ۳ باید ببینیم به ازای کدام مقدار n تساوی $\frac{4n-3}{n+3}$

برقرار می شود. پس

$$4n-3=3n+9 \Rightarrow n=12$$

بنابراین جمله دوازدهم دنباله برابر ۳ است.

۲۴۷- گزینه ۴ عدد آخر دسته اول ۲، عدد آخر دسته دوم ۴، عدد

آخر دسته سوم ۶ و ... عدد آخر دسته n ام برابر $(2n)^2$ است. پس عدد

آخر دسته دهم ۲۰۲ است. بنابراین عدد اول دسته یازدهم ۴۰۲ است.

۲۴۸- گزینه ۴ از رابطه داده شده $a_n = a_{n-1} - 3$ به دست می آید.

یعنی هر جمله دنباله از جمع کردن ۳- با جمله قبلی آن به دست می آید. پس

یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳- و جمله اول ۴- داریم که جمله بیستم آن

$$\text{برابر است با } a_{20} = a_1 + 19d = -4 + 19(-3) = -61$$

۲۴۹- گزینه ۱ فرض کنید جمله اول این دنباله، a_1 و قدرنسبت آن d

باشد. در این صورت

$$a_4 = 5 \Rightarrow a_1 + (4-1)d = 5 \Rightarrow a_1 + 3d = 5 \quad (1)$$

$$a_9 = 3^0 \Rightarrow a_1 + (9-1)d = 3^0 \Rightarrow a_1 + 8d = 3^0 \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به دست می آید $5d = 25$ ، پس

$d = 5$. اکنون اگر این مقدار d را در تساوی (۱) قرار دهیم، به دست می آید

$$a_1 = -1^0. \text{ بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی مورد نظر، برابر است با}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -1^0 + (n-1)(5) = 5n - 1^5$$

۲۵۰- گزینه ۲ این اعداد دنباله ای حسابی تشکیل می دهند که متناهی

بوده و قدرنسبت آن ۷ است. کوچک ترین عدد سه رقمی که بر ۷ بخش پذیر

است، ۱۰۵ و بزرگ ترین عدد سه رقمی که بر ۷ بخش پذیر است، ۹۹۴ است.

$$\text{پس تعداد این اعداد } \frac{994-105}{7} + 1 \text{ است که برابر است با } 128$$

۲۶۶- گزینه ۱ بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab-bc+ca) \quad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$ab+bc-ca=8 \Rightarrow -ab-bc+ca=-8$$

در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$36 = a^2 + b^2 + c^2 - 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 52$$

۲۶۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ و

$$(x-4)(x+1) = x^2 - 3x - 4$$

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x+1) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4)$$

$$= (y+2)(y-4) = 27$$

۲۶۸- گزینه ۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$$

$$= -7x^3 + 6x^2 + 6x - 7$$

بنابراین ضریب x^2 برابر ۶ است.

۲۶۹- گزینه ۳ ابتدا عبارت را به کمک اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$A = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)+1$$

$$= ((x-1)(x^2+x+1))((x+1)(x^2-x+1))+1$$

$$= (x^3-1)(x^3+1)+1 = x^6-1+1 = x^6$$

حال قرار می‌دهیم $x = \sqrt[3]{2}$ و نتیجه می‌شود $A = (\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt{2}$

۲۷۰- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$x^2 - y^2 - 6x - 8y - 7 = (x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 8y + 16)$$

$$= (x-3)^2 - (y+4)^2 = (x-3-(y+4))(x-3+(y+4))$$

$$= (x-y-7)(x+y+1)$$

بنابراین $x+y+1$ عامل عبارت مورد نظر است.

۲۷۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$x^4 + 3x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 = (x^2+2)^2 - x^2$$

$$= (x^2+2-x)(x^2+2+x)$$

بنابراین x^2-x+2 عاملی از عبارت مورد نظر است.

۲۷۲- گزینه ۳ صورت کسر اول برابر است با

$$3y^2 + 3 = 3(y^2+1) = 3(y+1)(y^2-y+1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{3(y+1)(y^2-y+1)}{y-x} \times \frac{x(y-x)}{x(1-y+y^2)} = 3(y+1)$$

۲۷۳- گزینه ۳ با توجه به اتحاد جمله مشترک، عبارت داده شده را

ساده می‌کنیم:

$$a^2 + ab + ac + bc = a^2 + a(b+c) + bc = (a+b)(a+c)$$

توجه کنید که $a+c = a+b+c-b = 3+2=5$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $3 \times 5 = 15$.

۲۵۷- گزینه ۲ اگر جمله اول دنباله حسابی a و قدرنسبت آن d باشد،

جملات دوم، چهارم و نهم به ترتیب $a+d$ ، $a+3d$ و $a+8d$ هستند. پس $a+3d$ واسطه هندسی $a+d$ و $a+8d$ است و در نتیجه

$$(a+3d)^2 = (a+d)(a+8d) \Rightarrow a^2 + 6ad + 9d^2 = a^2 + 9ad + 8d^2$$

$$d^2 = 3ad \Rightarrow d = 3a$$

پس قدرنسبت دنباله حسابی ۳ برابر جمله اول آن است.

۲۵۸- گزینه ۲ چون $x < 0$ ، پس $\sqrt[4]{x^4} = |x| = -x$. در نتیجه

$$3\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^4} = 3x + 2(-x) = x$$

۲۵۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$b\sqrt[6]{a^6} - a = 0 \Rightarrow b|a| - a = 0 \Rightarrow b|a| = a$$

بنابراین اگر $a > 0$ ، $b = 1$ و اگر $a < 0$ ، $b = -1$. در نتیجه

$$\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[6]{b^6} = |a| + |b| = |a| + 1$$

a منفی باشد، برابر با $1-a$ است.

۲۶۰- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^n}}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{8}}} \Rightarrow \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[4]{2} \Rightarrow \sqrt[4]{2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{n}{4 \times \frac{3}{2}} = \frac{3}{4 \times \frac{3}{2}}$$

$$\frac{n}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{n}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow n = 2$$

۲۶۱- گزینه ۳ از $a > \sqrt{a}$ نتیجه می‌شود $a > 1$. بنابراین $a^2 < a^3$ و در

نتیجه $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{a^3}$ ، یعنی $\sqrt[3]{a^2} < a$. همچنین $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ پس

$$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} > \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین نابرابری داده شده در گزینه (۳) نادرست است.

۲۶۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$a^{\frac{3}{5}} = 16 \Rightarrow (a^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = 16^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 16^{\frac{5}{3}}$$

$$a^{\frac{3}{4}} = (16^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32$$

بنابراین $a^{\frac{3}{4}} = (16^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32$

۲۶۳- گزینه ۳ با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به دست می‌آید

$$\sqrt{3^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{3^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{3^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}} = \sqrt{3^{\frac{19}{12}}} = 3^{\frac{19}{24}}$$

$$a = \frac{19}{24}$$

۲۶۴- گزینه ۳ توجه کنید که $(2a + \frac{9}{a})^2 - 12 = \frac{4a^2 + 9}{a^2}$. از طرف

دیگر، بنابر فرض $a + \frac{3}{2a} = 4$. اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به دست

$$2a + \frac{3}{a} = 8$$

می‌آید $2a + \frac{3}{a} = 8$. بنابراین، حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $8^2 - 12 = 52$.

۲۶۵- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \div \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \times \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{9-8}}{\sqrt{36-20}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

۲۸۲- گزینه ۳ معادله گزینۀ (۳) به ازای هر مقدار m جواب حقیقی دارد، زیرا معادله‌ای که به ازای هر m ، دلتای مربوط به آن همیشه مثبت باشد، جواب این تست است.

$$mx^2 - x - m = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4m^2 > 0.$$

توجه کنید که اگر $m = 0$ ، آن گاه معادله به یک معادله درجه اول تبدیل می‌شود که باز هم دارای جواب حقیقی است. بررسی سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه (۱) Δ همواره مثبت نیست. $x^2 - 2x + m = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4m \Rightarrow \Delta < 0$ برای $m > 1$.

گزینه (۲) Δ همواره مثبت نیست. $x^2 - x + m^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4m^2 \Rightarrow \Delta < 0$ برای $m > \frac{1}{2}$.

گزینه (۴) Δ همواره مثبت نیست. $mx^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4m \Rightarrow \Delta < 0$ برای $m > \frac{1}{4}$.

۲۸۳- گزینه ۱ باید $\Delta \geq 0$ ، پس

$$x^2 - (k+1)x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 4 \geq 0.$$

$$(k+1)^2 \geq 4 \xrightarrow{k > 0} k+1 \geq 2 \Rightarrow k \geq 1$$

پس حداقل مقدار مثبت k برابر ۱ است.

۲۸۴- گزینه ۱ توجه کنید که چون مجموع ضرایب‌های معادله

$$x^3 - 167x + 75 = 0 \quad 92x^2 - 167x + 75 = 0$$

مورد نظر ۱ و جواب دیگر آن $\frac{75}{92}$ است. چون $\frac{75}{92} < 1$ ، پس کوچک‌ترین

جواب $\frac{75}{92}$ است.

۲۸۵- گزینه ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x - \sqrt{3})(x - 2\sqrt{2}) = 0 \xrightarrow{x_1 < x_2} x_1 = \sqrt{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (\sqrt{3})^4 + (2\sqrt{2})^4 = 9 + 16 = 25$$

۲۸۶- گزینه ۳ این دو عدد فرد را x و $x+2$ فرض می‌کنیم. بنابراین

$$x^2 + (x+2)^2 = 13 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 13 \Rightarrow x^2 + 2x - 4.5 = 0$$

$$(x+9)(x-7) = 0 \Rightarrow x = -9 \text{ (غ.ق.ی.)}, \quad x = 7$$

بنابراین دو عدد مورد نظر، ۷ و ۹ هستند و اختلاف مربع‌های آن‌ها برابر ۸۱-۴۹ یعنی ۳۲ است.

۲۸۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

از طرف دیگر، $x_1 + x_2 = 4$ و $x_1 x_2 = -1$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $(-1)(4) = -4$.

۲۸۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = 2$ و $\alpha\beta = -5$. بنابراین

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 8 - 3 \times (-5) \times 2 = 38$$

۲۸۹- گزینه ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن گاه $\alpha = -\frac{1}{\beta}$

و در نتیجه $\alpha\beta = -1$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2} = -1 \Rightarrow m-1 = -2 \Rightarrow m = -1$$

۲۹۰- گزینه ۴ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -5$ و چون $2x_1 - x_2 = 17$

پس با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها به دست می‌آید $x_1 = 4$. چون x_1 جواب معادله مورد نظر است، پس ۴ در این معادله صدق می‌کند:

$$4^2 + 5(4) - 4m + 16 = 0 \Rightarrow m = 13$$

۲۷۴- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{a^6 - 1}{a^4 - a^2} &= \frac{(a^2)^3 - 1}{a^2(a^2 - 1)} = \frac{(a^2 - 1)((a^2)^2 + a^2 + 1)}{a^2(a^2 - 1)} \\ &= \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2} = \frac{a^4}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \\ &= (a - \frac{1}{a})^2 + 2 + 1 = \sqrt{5}^2 + 3 = 8 \end{aligned}$$

۲۷۵- گزینه ۱ مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} - 5 &= \frac{(4 + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} - 5 = \frac{4\sqrt{3} + 4 + 6 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} - 5 \\ &= \frac{10 + 6\sqrt{3}}{2} - 5 = 5 + 3\sqrt{3} - 5 = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

۲۷۶- گزینه ۳ صورت و مخرج کسر داده شده را در $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{4}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

اکنون صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم:

۲۷۷- گزینه ۴ ابتدا مخرج طرف چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} - 1} &= \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{9} + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{9} + \sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{9} + \sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^3 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{9} + \sqrt{3} + 1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{9} + \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

بنابراین $a = \frac{1}{2}$

۲۷۸- گزینه ۱ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر

$$P(2) = 2^5 - 4(2)^3 + 3(2)^2 - 2 + 1 = 11$$

۲۷۹- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ برابر

$$P(1) = 3 - 4a - 5 = -4a - 2$$

است. چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-4a - 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۲۸۰- گزینه ۳ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ بخش پذیر است،

پس $P(-3) = 0$. در نتیجه

$$P(-3) = (-3)^4 + 3(-3)^3 + a(-3)^2 - 9 = 0$$

بنابراین $a = 1$ و $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 9$. از طرف دیگر، باقی‌مانده

تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x+2$ برابر است با $P(-1)$.

$$P(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + (-1)^2 - 9 = -10$$

اکنون توجه کنید که $-10 = (-1)^4 + 3(-1)^3 + (-1)^2 - 9 = -10$.

۲۸۱- گزینه ۱ جواب‌های معادله برابر هستند با

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 13}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}$$

۲۹۷- گزینه ۴ توجه کنید که معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و

یکی منفی است، پس حاصل ضرب جواب‌ها منفی است:

$$\frac{5(k-2)}{k+6} < 0 \Rightarrow k \in (-6, 2)$$

از طرف دیگر چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع جواب‌ها منفی است

$$-\frac{17(k+1)}{k+6} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{k+6} > 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -6) \cup (-1, +\infty)$$

بنابراین $k \in (-1, 2)$.

۲۹۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $x = -1$ یک جواب معادله است.

$$(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) - 1 = 0$$

بنابراین معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) - (2x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$x^2(x+1) - (x+1)(2x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

پس جواب‌های دیگر از حل معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ به دست می‌آیند که عبارت‌اند از $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$. در نتیجه مجموع جواب‌های منفی معادله برابر است با $1 - \sqrt{2}$.

۲۹۹- گزینه ۴ چون $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند: $8 + 4a + 2 + 6 = 0$ پس $a = -4$. چون $x = 2$ عاملی از

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)Q(x)$$

برای به دست آوردن $Q(x)$ چندجمله‌ای $x^3 - 4x^2 + x + 6$ را بر $x - 2$

تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود $Q(x) = x^2 - 2x - 3$. بنابراین

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)(x^2 - 2x - 3) = (x-2)(x+1)(x-3)$$

پس به غیر از $x = 2$ جواب‌های دیگر معادله -1 و 3 هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها 10 است.

۳۰۰- گزینه ۴ اگر فرض کنیم $t = x^2 \geq 0$ ، معادله به صورت

$$t^2 - 3t - 1 = 0 \text{ در می‌آید که جواب‌های آن } t = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ است. عدد}$$

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ منفی است و قابل قبول نیست. بنابراین}$$

$$x^2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}$$

پس حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر است با

$$-\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} = -\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

۳۰۱- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm \sqrt{t}$ و $t \geq 0$.

همچنین معادله به شکل $t^2 - 2t + m^2 - 1 = 0$ در می‌آید. اگر این معادله دو جواب مثبت داشته باشد، معادله اصلی چهار جواب خواهد داشت. بنابراین در

معادله $t^2 - 2t + m^2 - 1 = 0$ باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m^2 - 1) > 0 \Rightarrow m^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 2 > 0, \quad \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1$$

بنابراین اگر m عضو مجموعه $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$ باشد، معادله اصلی

چهار جواب خواهد داشت. این مجموعه را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - [-1, 1]$$

۲۹۱- گزینه ۴ β جواب معادله است. پس در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2 - \beta - 7 = 0 \Rightarrow 2\beta^2 = \beta + 7$$

از طرف دیگر، $\alpha + \beta = \frac{1}{\beta}$. بنابراین $\alpha + \beta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} + 7 = \frac{15}{\beta}$.

۲۹۲- گزینه ۳ مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها را حساب می‌کنیم

$$S = \alpha + \beta = 2 - \sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} = 5$$

$$P = \alpha\beta = (2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 3 - \sqrt{3} = 0$$

۲۹۳- گزینه ۱ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 1$ و $x_1 x_2 = -1$. بنابراین

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_2 + 1 + x_1 + 1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{x_1 + x_2 + 2}{1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2} = \frac{1 + 2}{1 + 1 - 1} = 3$$

$$\frac{1}{x_1 + 1} \times \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{1}{1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2} = \frac{1}{1 + 1 - 1} = 1$$

بنابراین معادله مورد نظر $x^2 - 3x + 1 = 0$ است.

۲۹۴- گزینه ۲ برای اینکه جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$

مختلف علامت باشند، کافی است $\frac{c}{a} < 0$. توجه کنید که در این حالت

$\Delta > 0$. بنابراین

$$\frac{m+2}{m} < 0 \Rightarrow -2 < m < 0$$

۲۹۵- گزینه ۴ راه‌حل اول برای اینکه معادله مورد نظر دو جواب منفی

داشته باشد، باید $\Delta > 0$ ، مجموع جواب‌ها منفی و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد. در نتیجه

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(-2)(a) > 0 \Rightarrow a > -2, \quad \frac{4}{-2} = -2 < 0, \quad \frac{a}{-2} > 0 \Rightarrow a < 0$$

بنابراین $-2 < a < 0$.

راه‌حل دوم ابتدا معادله داده‌شده را به صورت

$$2x^2 + 4x = a \text{ می‌نویسیم. اکنون سهمی به معادله}$$

$$y = 2x^2 + 4x \text{ و خط } y = a \text{ را در یک دستگاه}$$

مختصات رسم می‌کنیم. بنابراین اگر $-2 < a < 0$ ،

معادله دو جواب منفی دارد و اگر $a > 0$ ، معادله یک

جواب منفی و یک جواب مثبت دارد.

توجه کنید که $x = 0$ و $x = -2$ طول نقاط برخورد سهمی با محور x هستند و رأسش که نقطهٔ مینیمم آن است نقطهٔ $(-1, -2)$ است.

۲۹۶- گزینه ۱ شرط داشتن دو جواب، مثبت بودن Δ است. پس

$$\Delta = (a+1)^2 - 64 > 0 \Rightarrow (a+1)^2 > 64 \Rightarrow \begin{cases} a+1 > 8 \Rightarrow a > 7 \\ \text{یا} \\ a+1 < -8 \Rightarrow a < -9 \end{cases} \quad (1)$$

شرط مثبت بودن دو جواب این است که مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها مثبت باشند. حاصل ضرب جواب‌ها برابر 4 است که مثبت است و مجموع جواب‌ها

برابر $-\frac{a+1}{2}$ است. پس

$$-\frac{a+1}{2} > 0 \Rightarrow a+1 < 0 \Rightarrow a < -1 \quad (2)$$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a < -9$.

به این ترتیب

$$x^2 + x + 1 = -\frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + x + \frac{7}{2} = 0 \quad (\Delta < 0) \quad \text{جواب ندارد}$$

$$x^2 + x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

۳۰۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4$$

پس معادله مورد نظر به معادله $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2}$ تبدیل می‌شود.

بنابراین یا $x - \frac{1}{x} = 0$ ، یعنی $x^2 - 1 = 0$ ، که مجموع جواب‌هایش صفر است.

یا $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ ، یعنی $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$ که مجموع جواب‌هایش $\frac{3}{2}$ است.

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر با $\frac{3}{2}$ است.

۳۰۹- گزینه ۴ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x + 1 = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - x - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب دارد که حاصل ضرب آن‌ها برابر $-\frac{1}{4}$ است.

۳۱۰- گزینه ۳ اگر ماشین کندتر به تنهایی در t ساعت کار را تمام کند.

ماشین سریع‌تر به تنهایی در $\frac{t}{3}$ ساعت کار را تمام می‌کند. پس ماشین کندتر

به تنهایی در یک ساعت $\frac{1}{t}$ کار و ماشین سریع‌تر به تنهایی در یک ساعت $\frac{3}{t}$

کار را انجام می‌دهد. از طرف دیگر دو ماشین با هم در یک ساعت $\frac{1}{6}$ کار را

انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t} + \frac{3}{t} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{4}{t} = \frac{1}{6} \Rightarrow t = 24$$

بنابراین ماشین کندتر به تنهایی در ۲۴ ساعت کار را انجام می‌دهد.

۳۱۱- گزینه ۳ با توجه به جدول تعیین علامت باید $a - b < 0$ ، پس

$a < b$. همچنین $x = b$ ریشه عبارت است. بنابراین

$$(a - b)b - 2a + 2b = 0 \Rightarrow (a - b)b - 2(a - b) = 0$$

$$(a - b)(b - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \Rightarrow a = b \quad (\text{غ.ق.}) \\ b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

چون a عددی طبیعی است، پس

$$a = b = 2 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $a + b = 3$.

۳۱۲- گزینه ۲ با توجه به جدول تعیین علامت، مشخص است که

عبارت مورد نظر باید چندجمله‌ای درجه اول باشد. پس $a - 2 = 0$ و در نتیجه

$a = 2$. بنابراین عبارت به صورت $y = -(2 + b)x + 4$ است. چون $x = 4$

ریشه عبارت است، پس

$$-(2 + b) \times 4 + 4 = 0 \Rightarrow b = -1$$

بنابراین $a - b = 3$.

۳۰۲- گزینه ۳ معادله را به شکل $(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) - 3 = 0$

می‌نویسیم. با قرار دادن $x^2 - x = t$ به دست می‌آید

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = -3, t = 1$$

معادله جواب ندارد $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow x^2 - x = -3 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0$

$x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $= 1$

۳۰۳- گزینه ۲ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = 0 \Rightarrow x \left(\frac{2(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) = 0$$

$$x \left(\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)} = 0$$

جواب‌های این معادله ۰ و -۳ هستند که هر دو قابل قبول هستند و مجموع آن‌ها -۳ است.

۳۰۴- گزینه ۳ دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرهای دو طرف

که برابر $3(x-3)(x+3)$ است ضرب می‌کنیم:

$$3(x-3)(x+3) \frac{x+3}{x-3} + 3(x-3)(x+3) \frac{x-3}{x+3} = \frac{1}{3} \times 3(x-3)(x+3)$$

$$3(x+3)^2 + 3(x-3)^2 = 1 \Rightarrow (x-3)(x+3)$$

$$3(x^2 + 6x + 9) + 3(x^2 - 6x + 9) = 1 \Rightarrow (x^2 - 9)$$

$$6x^2 + 54 = 1 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 6$$

چون ۶ و -۶ هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول هستند.

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر -۳۶ است.

۳۰۵- گزینه ۲ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{2x - 2a + x + 3}{(x+3)(x-a)} = 4 \Rightarrow \frac{3x - 2a + 3}{(x+3)(x-a)} = 4$$

$$3x - 2a + 3 = 4x^2 + (12 - 4a)x - 12a$$

$$4x^2 + (9 - 4a)x - 10a - 3 = 0$$

بنابراین

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{4a - 9}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4a - 9 = -1 \Rightarrow a = 2$$

اگر $a = 2$ ، آن‌گاه معادله به صورت $4x^2 + x - 23 = 0$ درمی‌آید که چون

$\Delta > 0$ پس معادله دو جواب دارد. $x = -3$ و $x = 2$ که هر کدام مخرج یکی

از کسرهای را در معادله اولیه صفر می‌کنند، هیچ‌کدام جواب معادله بالا نیستند.

پس هر دو جواب این معادله قابل قبول هستند.

۳۰۶- گزینه ۱ طرفین معادله را در $x(x+a)$ ضرب می‌کنیم

$$x + a + 3x = 2x^2 + 2ax \Rightarrow 2x^2 + (2a - 4)x - a = 0$$

برای اینکه معادله جواب داشته باشد باید $\Delta \geq 0$. پس

$$(2a - 4)^2 + 4a \geq 0 \Rightarrow 4a^2 - 16a + 16 + 4a \geq 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 4 \geq 0$$

عبارت $a^2 - 3a + 4$ همواره مثبت است، پس معادله به‌ازای تمام مقادیر a

جواب دارد.

۳۰۷- گزینه ۲ سمت راست معادله داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{15}{x^2 + x + 1} = 2(x^2 + x + 1) - 1$$

اگر فرض کنیم $x^2 + x + 1 = t$ ، این معادله می‌شود

$$\frac{15}{t} = 2t - 1 \Rightarrow 15 = 2t^2 - t \Rightarrow 2t^2 - t - 15 = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{2}, t = 3$$

۳۱۳- گزینه ۳ ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)^3}$$

اکنون آن را ساده می‌کنیم $y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-2)^2}$. چون عبارت‌های $(x-1)^2$ و

$(x-2)^2$ نامنفی هستند، علامت عبارت اخیر را با توجه به علامت $x+1$ تعیین می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y		-	+	+	+

۳۱۴- گزینه ۲ دو نامعادله $3x-2 < 5x+6$ و $4x-1 < 3x-2$ را

حل می‌کنیم:

$$3x-2 < 5x+6 \Rightarrow -2x < 8 \Rightarrow x > -4, \quad 4x-1 < 3x-2 \Rightarrow x < -1$$

اشتراک مجموعه جواب‌های فوق یعنی $-4 < x < -1$ جواب مسئله است. پس $a = -4$ و $b = -1$ و در نتیجه $a+b = -5$.

۳۱۵- گزینه ۱ باید شرایط $\Delta < 0$ و $a > 0$ برقرار باشند. پس

$$m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (1)$$

$$\Delta = 8 - 4m(m-1) < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر باید

$$m < -1 \quad \text{یا} \quad m > 2 \quad (2)$$

از دو شرط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m > 2$.

m	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$m^2 - m - 2$		+	-	+

۳۱۶- گزینه ۴ ابتدا جدول تعیین علامت عبارت $y = \frac{(1-x)^2(x+2)^3}{x|x|(2-x)^5}$

را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
y		+	-	+	+	-

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر $(-\infty, -2] \cup (0, 2)$ است.

۳۱۷- گزینه ۱ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x - \frac{2}{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x} \geq 0$$

به کمک تعیین علامت مجموعه جواب‌های نامعادله را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$\frac{x^2 - x - 2}{x}$		-	+	-	+

این مجموعه به صورت $[0, 2) - [-1, +\infty)$ است. پس $a = -1$ و $b = 2$. در

نتیجه $a+b = 1$.

۳۱۸- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده

می‌کنیم:

$$x-1 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$$

جواب‌های این معادله به صورت $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ و $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ هستند. ولی

$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند زیرا این عدد کوچک‌تر از ۲ است و

در معادله $\sqrt{x-1} = x-2$ اگر $1 < x < 2$ ، آن‌گاه سمت چپ معادله، نامنفی و

سمت راست آن منفی است که قابل قبول نیست. بنابراین فقط $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

جواب معادله است.

۳۱۹- گزینه ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{2x+3}$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+1+1+2\sqrt{x+1} = 2x+3 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = x+1$$

دوباره طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(x+1) = (x+1)^2 \Rightarrow 4x+4 = x^2+2x+1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس مجموع جواب‌ها برابر ۲ است.

۳۲۰- گزینه ۴ معادله مورد نظر را این‌طور می‌نویسیم:

$$x^2 + 5x + 28 - 24 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0$$

اکنون اگر فرض کنیم $\sqrt{x^2 + 5x + 28} = t$ ، این معادله می‌شود

$$t^2 - 24 - 5t = 0 \Rightarrow (t-8)(t+3) = 0 \Rightarrow t = 8, t = -3$$

چون $t \geq 0$ ، پس $t = 8$ ، یعنی

$$\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 8 \Rightarrow x^2 + 5x + 28 = 64 \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$(x-4)(x+9) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -9$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر -36 است.

۳۲۱- گزینه ۲ اگر این عدد را x فرض کنیم، آن‌گاه

$$x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x^2 = 4x$$

$$x = 0, x = 4$$

چون هر دو عدد در معادله اولیه صدق می‌کنند، بنابراین دو عدد با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۳۲۲- گزینه ۱

$$|3 + |2 - |1 + a|| = |3 + |2 - (-(1+a))|| \quad (\text{چون } 1+a < 0)$$

$$= |3 + |3 + a|| = |3 - (3+a)| \quad (\text{چون } 3+a < 0)$$

$$= |-a| = -a \quad (\text{چون } a < 0)$$

۳۲۳- گزینه ۴ چون a منفی است، پس $|a| = -a$ ، در نتیجه

$$|a| - |b| = |-a - b|$$

$$b < |a| = -a \Rightarrow a + b < 0$$

بنابراین $|a| - |b| = |-a - b| = -a - b$ از طرف دیگر،

$$|b - |2a|| = |b - 2|a|| = |b + 2a|$$

چون $b + 2a = \frac{b+a}{2} + \frac{b+a}{2} < 0$ ، در نتیجه $|b + 2a| = -b - 2a$. بنابراین

حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-a - b - (-b - 2a) = a$.

در نتیجه $(2x - (x - 2))(2x + x - 2) > 0$ یا به طور معادل
 $(x + 2)(3x - 2) > 0$.

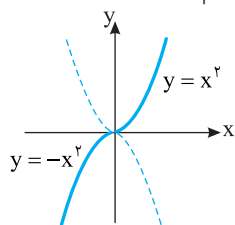
بنابراین مجموعه جواب‌های مورد نظر برابر است با $(-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$.

گزینه ۳۳۲ - ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}-1) + f(\sqrt{5}-2) &= 5|3(\sqrt{3}-1)-2|-3|5(\sqrt{3}-1)-2| \\ &+ 5|3(\sqrt{5}-2)-2|-3|5(\sqrt{5}-2)-2| = 5|\underbrace{3\sqrt{3}-5}_{+}|-3|\underbrace{5\sqrt{3}-7}_{+}| \\ &+ 5|\underbrace{3\sqrt{5}-8}_{-}|-3|\underbrace{5\sqrt{5}-12}_{-}| = -4+4=0. \end{aligned}$$

گزینه ۳۳۳ - ۳ ضابطه تابع f به شکل $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ است.

پس باید برای $x \geq 0$ نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنیم و برای $x \leq 0$ نمودار تابع $y = -x^2$ را رسم کنیم.



گزینه ۳۳۴ - ۱ توجه کنید که $\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$ بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases} \text{ در نتیجه نمودار تابع } f \text{ مانند گزینه (۱) است.}$$

گزینه ۳۳۵ - ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)+x & x \leq -1 \\ x+1+x & -1 < x \leq 0 \\ x+1-x & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ 2x+1 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینه (۳) است.

گزینه ۳۳۶ - ۱ توجه کنید که

$$[\frac{1}{p}] = 0, [\frac{2}{p}] = [\frac{3}{p}] = 1, [\frac{4}{p}] = [\frac{5}{p}] = 2, \dots, [\frac{18}{p}] = [\frac{19}{p}] = 9, [\frac{20}{p}] = 10.$$

از جمع تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

$$[\frac{1}{p}] + [\frac{2}{p}] + [\frac{3}{p}] + \dots + [\frac{20}{p}] = 2(1+2+\dots+9) + 10 = 90 + 10 = 100.$$

گزینه ۳۳۷ - ۴ ابتدا با حل نامعادله، محدوده x را می‌یابیم:

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0.$$

اگر عددی بین -1 و 0 باشد و به توان هر عدد فردی برسد، در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد، عددی بین 0 و 1 می‌شود، یعنی

$$-1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x^{2k} < 1 \Rightarrow [x^{2k}] = 0 \\ -1 < x^{2k+1} < 0 \Rightarrow [x^{2k+1}] = -1 \end{cases}$$

$$[x] + [x^2] + \dots + [x^{10}] = 5 \times 0 + 5 \times (-1) = -5$$

گزینه ۳۳۴ - ۳ چون $1 < x < 2$ ، پس

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \frac{2-x}{x-2} = -1, \quad \frac{x-1}{|x-1|} = \frac{x-1}{x-1} = 1, \quad \frac{|x|}{x} = 1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-1-1+1=-1$.

گزینه ۳۳۵ - ۴ توجه کنید که

$$x^2 < x \Rightarrow x^2 - x = x(x-1) < 0.$$

در نتیجه $0 < x < 1$. بنابراین $|x+1|=x+1$ ، $|1-x|=1-x$ و $|x|=x$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $x+1-(1-x)+x=3x$.

گزینه ۳۳۶ - ۴ معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$|x-2|=3 \Rightarrow \begin{cases} x-2=3 \\ x-2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ است.

گزینه ۳۳۷ - ۱ **راه حل اول** توجه کنید که $|x|=|x|$ و $|x|=|x|$ و $|3x|=3|x|$.

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$|x|+|x|+3|x|=15 \Rightarrow 5|x|=15 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=3, x=-3$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر صفر است.

راه حل دوم توجه کنید که اگر x جواب معادله مورد نظر باشد، $-x$ هم جواب این معادله است. بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر صفر است.

گزینه ۳۳۸ - ۴ از تساوی $|3x-x^2|=|x-1|$ تساوی‌های زیر نتیجه

می‌شوند

$$3x-x^2=x-1 \Rightarrow x^2-2x-1=0 \quad (1)$$

$$3x-x^2=-(x-1) \Rightarrow x^2-4x+1=0 \quad (2)$$

مجموع جواب‌های معادله (۱) برابر ۲ و مجموع جواب‌های معادله (۲) برابر ۴ است. پس مجموع جواب‌های معادله اصلی برابر ۶ است (توجه کنید که معادله‌های به‌دست آمده، جواب مشترک ندارند).

گزینه ۳۳۹ - ۲ نامعادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$-3 \leq 2x-a \leq 3 \Rightarrow a-3 \leq 2x \leq a+3 \Rightarrow \frac{a-3}{2} \leq x \leq \frac{a+3}{2}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله، بازه $[\frac{a-3}{2}, \frac{a+3}{2}]$ است. پس

$$\frac{a-3}{2} = -a \Rightarrow a-3 = -2a \Rightarrow a=1, \quad \frac{a+3}{2} = b \Rightarrow b=2$$

گزینه ۳۳۰ - ۲ نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$||x-2| < 6 \Rightarrow -6 < |x|-2 < 6 \Rightarrow -4 < |x| < 8$$

نابرابری $|x| < 8$ همواره برقرار است. پس کافی است نامعادله $|x| < 8$ را

حل کنیم:

$$|x| < 8 \Rightarrow -8 < x < 8$$

بنابراین اعداد صحیح -7 تا 7 در نامعادله صدق می‌کنند که تعداد آن‌ها ۱۵ تا است.

گزینه ۳۳۱ - ۲ ابتدا نامعادله را به صورت $|x-2| > 2|x|$ می‌نویسیم.

اکنون دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا به نامعادله زیر برسیم:

$$4x^2 > (x-2)^2 \Rightarrow (2x)^2 - (x-2)^2 > 0.$$

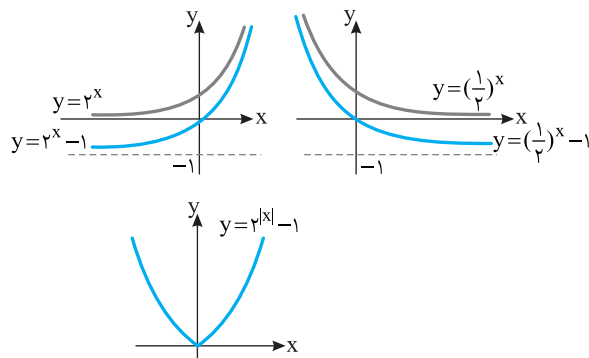
۳۴۶- گزینه ۴ ابتدا $f(-x)$ را به دست می آوریم

$$f(-x) = \frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1} = \frac{1-2^x}{1+2^x}$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{2^x-1}{1+2^x} + \frac{1-2^x}{1+2^x} = \frac{2^x-1+1-2^x}{1+2^x} = 0$$

بنابراین $f(x) = \begin{cases} 2^x-1 & x \geq 0 \\ 2^{-x}-1 & x < 0 \end{cases}$ یعنی $f(x)$ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2^x-1 & x \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^x-1 & x < 0 \end{cases}$$



۳۴۸- گزینه ۱ اگر تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، آن گاه

$a > 1$. بنابراین $3k+1 > 1$ پس $k > 0$.

۳۴۹- گزینه ۲ توجه کنید که $\frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4 = (\frac{1}{3})^{-4}$ ، بنابراین

$$(\frac{1}{3})^{x+2} = (\frac{1}{16})^{x-1} \Rightarrow (\frac{1}{3})^{x+2} = ((\frac{1}{3})^4)^{x-1} = (\frac{1}{3})^{-4(x-1)}$$

در نتیجه $x+2 = -4(x-1)$ پس $x = \frac{2}{5}$.

۳۵۰- گزینه ۱ با فاکتورگیری از 5^x معادله را حل می کنیم

$$5^x(1+3 \times 5^{-2}) = 140 \Rightarrow 5^x(1+\frac{3}{25}) = 140 \Rightarrow 5^x \times \frac{28}{25} = 140$$

$$5^x = \frac{25 \times 140}{28} = 125 = 5^3 \Rightarrow x = 3$$

پس معادله یک جواب دارد.

۳۵۱- گزینه ۲ با توجه به نمودار تابع $y=2^x$ ، معادله $2^x=a$ در

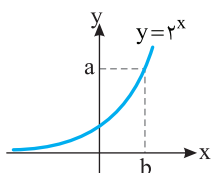
صورتی که $a > 0$ ، دقیقاً یک جواب دارد ($x=b$) و اگر $a \leq 0$ ، جواب ندارد.

بنابراین

یک جواب دارد. $2^x-5=0 \Rightarrow 2^x=5$ ، یک جواب دارد. $2^x-6=0 \Rightarrow 2^x=6$

جواب ندارد. $2^x+6=0 \Rightarrow 2^x=-6$ ، جواب ندارد. $2^x+5=0 \Rightarrow 2^x=-5$

چون تابع $y=2^x$ یک به یک است، پس معادله اصلی دو جواب دارد.



۳۳۸- گزینه ۱ راه حل اول از نابرابری $n^3 < n^3 + 3n^2 < (n+1)^3$ ،

نتیجه می گیریم $n < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2} < n+1$ ، بنابراین $n < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2} = n$.

راه حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً

به ازای $n=2$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=2$ ، آن گاه

$$[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2}] = [\sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2^2}] = [\sqrt[3]{20}] = 2$$

$n=2$ برابر ۲ می شود.

۳۳۹- گزینه ۳ چون $[x]$ عدد صحیح است، معادله را به صورت

$$[x] - [x] = [x] - [x] - 2$$

$$[x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

۳۴۰- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(-\frac{1}{2}) = |[-\frac{5}{2}] + [-\frac{7}{2}]| = |-3 + (-4)| = 7$$

۳۴۱- گزینه ۱ به جای x در ضابطه f قرار می دهیم $x+1$ ، پس

$$f(x+1) = 4(x+1) - [x+1] - [3(x+1)] = 4x+4 - [x] - 1 - [3x] - 3 = 4x - [x] - [3x] = f(x)$$

۳۴۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که باید

$$[x] - 2 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$$

بنابراین $D_f = [2, +\infty)$.

۳۴۳- گزینه ۲ مقادیری از x که مخرج $f(x)$ را صفر می کنند، در

دامنه تابع f قرار ندارند. اکنون توجه کنید که

$$[\frac{x}{3}] - 2 = 0 \Rightarrow [\frac{x}{3}] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{3} < 3 \Rightarrow 6 \leq x < 9$$

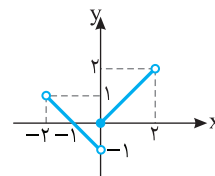
بنابراین $D_f = \mathbb{R} - [6, 9)$. پس $a=6$ ، $b=9$ و در نتیجه $a+b=15$.

۳۴۴- گزینه ۴ ضابطه تابع به شکل زیر است

$$-2 < x < 0 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = -1 \Rightarrow f(x) = -x - 1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است



۳۴۵- گزینه ۲ با توجه به فرض های مسئله،

$$f(0) = -\frac{3}{4} \Rightarrow 4^a + b = -\frac{3}{4}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 4^{1+a} + b = 0 \Rightarrow 4 \times 4^a + b = 0$$

اگر رابطه اول را از رابطه دوم کم کنیم، نتیجه می شود

$$3 \times 4^a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = -1$$

$$4^{-1} + b = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + b = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = -1$$

در نتیجه $a+b=-2$.

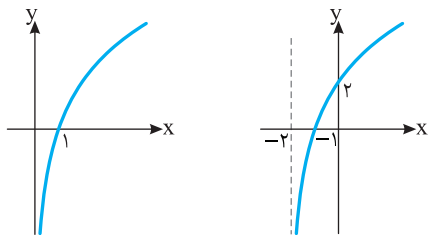
۳۶۱- گزینه ۱ توجه کنید که $3^{x+2} = 3^2 \times 3^x = 9 \times 3^x = 4$ بنابراین

$$3^x = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \log_3 \frac{4}{9}$$

۳۶۲- گزینه ۱ فرض کنید که نمودار f از روی نمودار $y = \log_a x$

به دست آمده باشد. معلوم است که نمودار $y = \log_a x$ دو واحد به سمت چپ منتقل شده است تا نمودار f به دست آید. بنابراین ضابطه تابع f می تواند $f(x) = \log_a (x+2)$ باشد. از طرف دیگر $f(0) = 2$ پس $\log_a 2 = 2$

یعنی $a^2 = 2$ بنابراین $a = \sqrt{2}$ (توجه کنید که $a > 0$). بنابراین $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(x+2)$



۳۶۳- گزینه ۳ می توان نوشت

$$f(x) = 4 + \log(2x-4) = 6 \Rightarrow \log(2x-4) = 2 \Rightarrow 2x-4 = 10^2 \Rightarrow x = 52$$

بنابراین $f(52) = 6$ پس $f^{-1}(6) = 52$.

۳۶۴- گزینه ۲

۳۶۵- گزینه ۲ لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می شود، پس

$$9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow D_f = (-3, 3)$$

بنابراین اعداد صحیح $\pm 1, \pm 2$ و صفر در دامنه تابع هستند.

۳۶۶- گزینه ۴ اگر $y = 3^{5x-1}$ ، آن گاه

$$\log_3 y = 5x - 1 \Rightarrow x = \frac{\log_3 y + 1}{5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_3 x + 1}{5}$$

۳۶۷- گزینه ۲ ابتدا x را بر حسب y حساب می کنیم:

$$y = \log_3(x-2) \Rightarrow 3^y = x-2 \Rightarrow x = 3^y + 2$$

بنابراین $f^{-1}(x) = 3^x + 2$

۳۶۸- گزینه ۱ کافی است معادله $x^2 - 7x = x$ را حل کنیم:

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 8$$

واضح است که $x = 0$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۳۶۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\log_7 \sqrt{x} = \log_7 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_7 x$$

$$\log_7(x-6) = \log_7(x-6) = \frac{1}{2} \log_7(x-6)$$

در نتیجه، معادله مورد نظر می شود

$$\frac{1}{2} \log_7 x + \frac{1}{2} \log_7(x-6) = 2 \Rightarrow \log_7 x + \log_7(x-6) = 4$$

$$\log_7(x(x-6)) = 4 \Rightarrow x(x-6) = 7^4 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x-8)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 8, x = -2 \text{ (غ.ق.)}$$

دقت کنید که $x = -2$ در معادله اصلی صدق نمی کند، بنابراین غیر قابل قبول است.

۳۵۲- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $3^x = t$ ، معادله مورد نظر می شود

$$3 \times 9 \times 9^x - 6 \times 3^x - 1 = 0 \Rightarrow 27t^2 - 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{9}, t = \frac{1}{3}$$

چون $t > 0$ ، پس $t = \frac{1}{3}$ ، یعنی $t = \frac{1}{3} = 3^{-1}$ ، پس $x = -1$. در نتیجه معادله یک جواب دارد.

۳۵۳- گزینه ۱ می دانیم اگر $0 < a < 1$ و $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ، آن گاه

$$f(x) > g(x) \text{ و بالعکس. چون } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{، پس}$$

$$3 - x > x - 3 \Rightarrow x < 3$$

۳۵۴- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $5^x = t$ ، نامعادله داده شده را می توان

این طور نوشت

$$25^x + 24 \times 5^{x-1} < 1 \Rightarrow t^2 + 24 \times \frac{t}{5} < 1 \Rightarrow 5t^2 + 24t < 5$$

$$5t^2 + 24t - 5 < 0 \Rightarrow (t+5)(t-\frac{1}{5}) < 0$$

چون $t+5 > 0$ ، پس $t - \frac{1}{5} < 0$ ، یعنی $t < \frac{1}{5} = 5^{-1}$ ، در نتیجه $x < -1$.

۳۵۵- گزینه ۴ توجه کنید که $\sqrt[5]{\sqrt[4]{7}} = 7^{\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}} = 7^{\frac{1}{20}} = 7^{\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}} = \sqrt[4]{7^{\frac{1}{5}}}$ اکنون اگر

از ویژگی $\log_a x^n = n \log_a x$ استفاده کنیم، به دست می آید

$$\log_7 \sqrt[5]{\sqrt[4]{7}} = \log_7 7^{\frac{1}{20}} = \frac{1}{20} \log_7 7 = \frac{1}{20}$$

۳۵۶- گزینه ۳ با استفاده از تساوی $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$

به دست می آید

$$\log_7(\sqrt{3}-1) + \log_7(\sqrt{3}+1) = \log_7((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)) = \log_7 2 = \frac{1}{p}$$

۳۵۷- گزینه ۱ چون $\frac{1}{\log_a x} = \log_x a$ ، پس

$$\frac{1}{\log_6 6} + \frac{1}{\log_6 6} = \log_6 4 + \log_6 9 = \log_6(4 \times 9)$$

$$= \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$$

۳۵۸- گزینه ۳ به کمک تساوی $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ می توان نوشت

$$3^{\log_9 6} = 6^{\log_9 3} = 6^{\frac{\log_3 3}{\log_3 9}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

۳۵۹- گزینه ۲ از تساوی $\log 4 = a$ نتیجه می شود

$$\log 2^2 = a \Rightarrow 2 \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a}{2}$$

بنابراین

$$\log 125 = \log 5^3 = 3 \log 5 = 3 \log \frac{10}{2} = 3(\log 10 - \log 2)$$

$$= 3(1 - \frac{a}{2}) = 3 - \frac{3a}{2}$$

۳۶۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

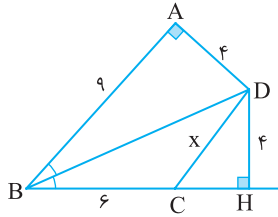
$$\log 30 = a \Rightarrow \log(3 \times 10) = a \Rightarrow \log 3 + \log 10 = a \Rightarrow \log 3 = a - 1$$

$$\log 50 = b \Rightarrow \log(5 \times 10) = b \Rightarrow \log 5 + \log 10 = b \Rightarrow \log 5 = b - 1$$

$$\text{بنابراین } \log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{a-1}{b-1}$$

اکنون، از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه CHD نتیجه می شود

$$CD^2 = CH^2 + DH^2 \Rightarrow x^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$



۳۷۸- گزینه ۴ چون $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \times 2 = 4$$

۳۷۹- گزینه ۴ چون $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x+2} \Rightarrow x^2 + 2x = 2x^2 - 2x$$

$$x^2 = 4x \Rightarrow x = 4$$

۳۸۰- گزینه ۳ چون $ED \parallel BF$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABF،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DF} \Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{x}{x} \Rightarrow x = 2$$

همین طور، چون $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{y}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$xy = \frac{16}{3}$$

بنابراین

۳۸۱- گزینه ۲ راه حل اول در متوازی الاضلاع ضلع های روبه رو برابرند.

در نتیجه $DF = BE = 15$. چون BDFE متوازی الاضلاع است، پس $DF \parallel BE$ ، در نتیجه $DF \parallel BC$. بنابراین، از تعمیم قضیه تالس در مثلث

ABC نتیجه می شود

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{15}{15+12} \Rightarrow 27x = 15(x+8)$$

$$12x = 15 \times 8 \Rightarrow x = 10$$

راه حل دوم چون $EF \parallel BA$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث CAB،

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CF}{FA} \Rightarrow \frac{12}{15} = \frac{CF}{FA} \Rightarrow \frac{FA}{CF} = \frac{5}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر چون $DF \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{(1)} \frac{x}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 10$$

۳۸۲- گزینه ۴ بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 6$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{y}{y} \Rightarrow y = 6$$

$$xy = 36$$

بنابراین

۳۸۳- گزینه ۳ بنابر قضیه تالس در دوزنقه،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

۳۷۰- گزینه ۴ با استفاده از تعریف لگاریتم معادله را به صورت

$$(2x-1)^2 = x \text{ می نویسیم. بنابراین}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = x \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(4x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = 1$$

پایه لگاریتم عبارت $2x-1$ است که به ازای $x=1$ برابر ۱ و به ازای $x=\frac{1}{4}$ برابر $-\frac{1}{2}$ می شود. ولی می دانیم که پایه لگاریتم باید مثبت و مخالف ۱ باشد. پس

هیچ کدام از مقدارهای به دست آمده قابل قبول نیستند و معادله جواب ندارد.

۳۷۱- گزینه ۴ نامعادله را به صورت زیر می نویسیم

$$\log_3(10-x) \leq \log_3 9$$

نتیجه می گیریم

$$10-x \leq 9 \Rightarrow x \geq 1$$

از طرف دیگر عبارت $\log_3(10-x)$ وقتی معنادار است که $10-x > 0$ و در نتیجه $x < 10$. پس مجموعه جواب های نامعادله بازه $[1, 10)$ است.

۳۷۲- گزینه ۲ از نامعادله $\log(x+2) > \log(2x+1)$ نتیجه می شود

$$x+2 > 2x+1 \Rightarrow x < 1$$

عبارت $\log(x+2)$ برای $x > -2$ و عبارت $\log(2x+1)$ برای $x > -\frac{1}{2}$ معنادار است. پس مجموعه جواب های نامعادله $(-\frac{1}{2}, 1)$ است.

۳۷۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که باید $x-2 > 0$ ، یعنی $x > 2$. از

طرف دیگر، باید

$$\log_{0.5}(x-2) \geq 0 = \log_{0.5} 1$$

در نتیجه (چون $0 < 0.5 < 1$)

$$x-2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 3$$

بنابراین $D_f = (2, 3]$ ، به این ترتیب $a=2$ و $b=3$ پس $ab=6$.

۳۷۴- گزینه ۳

۳۷۵- گزینه ۴ چون C روی نیمساز زاویه AOB قرار دارد، پس

OBC و OAC مثلث های قائم الزاویه $x = CA = CB = 6$ از طرف دیگر، مثلث های قائم الزاویه OAC و OBC همنهشت اند (وتر و یک زاویه حاده). بنابراین $y = OA = OB = 12$ ، در نتیجه

$$x+y=18$$

۳۷۶- گزینه ۲ چون D روی نیمساز زاویه A قرار دارد، پس

$y = DH = DB = 3$ از طرف دیگر، مثلث های قائم الزاویه ABD و AHD همنهشت اند (وتر و یک زاویه حاده). بنابراین $x = AH = AB = 4$ ، در نتیجه

$$x+y=7$$

۳۷۷- گزینه ۱ فرض کنید H پای عمود وارد از نقطه D بر خط BC

باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطه D روی نیمساز زاویه ABH است، پس $DH = DA = 4$. از طرف دیگر، مثلث های قائم الزاویه BAD و BHD همنهشت اند (به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه). بنابراین

$$BH = BA = 9 \Rightarrow BC + CH = 9 \Rightarrow 6 + CH = 9 \Rightarrow CH = 3$$

۳۹۱- گزینه ۲) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AH^2 = HB \times HC = 5 \times 4 = 20, \text{ پس } AH = 2\sqrt{5}.$$

۳۹۲- گزینه ۱) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AH^2 = HB \times HC \Rightarrow 6^2 = 3 \times x \Rightarrow x = 12$$

۳۹۳- گزینه ۴) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD،

$$BH^2 = HA \times HD = 4/5 \times 2 = 9 \Rightarrow BH = 3$$

همین‌طور، بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه BAC،

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow (4/5)^2 = 3 \times HC \Rightarrow HC = 6/75$$

$$\text{بنابراین } BC = 3 + 6/75 = 9/75$$

۳۹۴- گزینه ۳) فرض کنید $HC = x$. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث

قائم‌الزاویه،

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow 24 = x(x+5) \Rightarrow x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$(x+8)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

۳۹۵- گزینه ۱) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^2 = AH \times AC, \quad BC^2 = HC \times AC$$

اگر تساوی اول را بر تساوی دوم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AH \times AC}{HC \times AC} = \frac{AH}{HC} = 3 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$$

۳۹۶- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC،

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \text{ پس } AC = 13. \text{ از طرف دیگر،}$$

بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB \times BC = BH \times AC \Rightarrow 12 \times 5 = x \times 13 \Rightarrow x = \frac{60}{13}$$

۳۸۴- گزینه ۴) در مثلث FBC، چون نقطه N وسط ضلع FC است و

$MN \parallel BC$ ، پس بنابر قضیه تالس نقطه M هم وسط ضلع FB است. در

نتیجه در مثلث FBC، پاره‌خط MN میان‌خط است و

$$MN = \frac{BC}{2} \Rightarrow 6 = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 12$$

اکنون توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{EF}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = 4$$

۳۸۵- گزینه ۲) مثلث‌های ABF و ACE دو زاویه برابر دارند

($\hat{AEC} = \hat{AFB}$) و زاویه A در آن‌ها مشترک است. بنابراین این مثلث‌ها

متشابه‌اند (زز). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{3+1}{2+x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2(2+x) = 3 \times 4 \Rightarrow x = 4$$

۳۸۶- گزینه ۳) مثلث‌های AEF و ACB دو زاویه برابر دارند

($\hat{B} = \hat{AFE}$) و در زاویه رأس A مشترک‌اند. پس این دو مثلث متشابه‌اند (زز).

بنابراین

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{4}{6+2} = \frac{6}{4+x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{4+x} \Rightarrow 4+x = 12 \Rightarrow x = 8$$

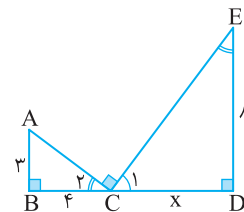
۳۸۷- گزینه ۲) توجه کنید که زاویه‌های C_1 و E متمم یکدیگرند، و

زاویه‌های C_1 و C_2 نیز متمم یکدیگرند. بنابراین زاویه‌های E و C_2 برابرند.

بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و CDE که یک زاویه حاده برابر دارند

متشابه‌اند (زز). در نتیجه

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 6$$



۳۸۸- گزینه ۳) توجه کنید که

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}, \quad \hat{ABD} = \hat{DBC}$$

بنابراین مثلث‌های ABD و DBC متشابه‌اند (ض.ض). در نتیجه

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4$$

۳۸۹- گزینه ۴) توجه کنید که $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$. بنابراین دو مثلث

AEF و ACB دو ضلع متناسب دارند و زاویه بین این دو ضلع متناسب در آن‌ها

(یعنی $\hat{A}$) برابر است. پس این دو مثلث به حالت (ض.ض) متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 16$$

۳۹۰- گزینه ۲) فرض کنید $EB = x$. چون $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه

اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند، پس

$$\frac{\text{مساحت}(AEF)}{\text{مساحت}(ABC)} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{18}{18+32} = \left(\frac{3}{3+x}\right)^2$$

$$\frac{9}{25} = \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 \Rightarrow (3+x)^2 = 25 \Rightarrow x = 2$$

فصل دوم

پاسخ آزمون‌ها

فصل اول

راه حل دوم اگر در رابطه داده شده قرار دهیم $x = -1$ ، به دست می آید $f(0) = -3$

اکنون در توابع داده شده در گزینه ها به جای x مقدار صفر را قرار می دهیم. تنها تابعی که در آن $f(0) = -3$ تابع گزینه (۱) است.

۹- گزینه ۳ برای $x = 2$ از ضابطه اول به دست می آید $f(2) = 4m - 2$ و از ضابطه دوم $f(2) = 8 - m$

برای اینکه رابطه، تابع باشد، باید فقط یک مقدار برای $f(2)$ وجود داشته باشد. یعنی $4m - 2 = 8 - m$ پس $m = 2$. بنابراین باید $f(2)$ را محاسبه کنیم که برابر است با $f(2) = 8 - 2 = 6$.

۱۰- گزینه ۳ اگر $n \in \mathbb{N}$ آن گاه عدد $\sqrt[n]{n}$ وقتی که n توان چهارم عددی طبیعی باشد، گویا خواهد بود. پس $\sqrt[4]{16}$ و $\sqrt[4]{81}$ ، اعدادی گویا هستند و بقیه اعداد داده شده گنگ هستند. بنابراین

$$f(\sqrt[4]{2}) + f(\sqrt[4]{3}) + \dots + f(\sqrt[4]{100}) = 2 \times 1 + 97 \times 0 = 2$$

۱۱- گزینه ۱ با توجه به زوج های مرتب $(2, m^3 - m)$ و $(2, 0)$ نتیجه می شود:

$$m^3 - m = 0 \Rightarrow m = 0, 1, -1$$

اگر $m = 0$ ، $f = \{(2, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ ، f تابع نیست.

اگر $m = 1$ ، $f = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2), (2, 1)\}$ ، f تابع نیست.

اگر $m = -1$ ، $f = \{(2, 0), (-1, 1), (0, 2), (-2, 1)\}$ ، f تابع است.

پس m فقط می تواند برابر -1 باشد.

۱۲- گزینه ۳ چون $f(1) = 2$ و $f(4) = 2$ ، پس $f(a) = 1$ یا $f(a) = 4$.

از $f(a) = 1$ نتیجه می شود $a = 3$ و از $f(a) = 4$ نتیجه می شود $a = 5$. بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۸ است.

۱۳- گزینه ۲ با توجه به شکل، جواب نامعادله مورد نظر به صورت $[-5, -2] \cup [4, 5]$ است. بنابراین ۶ عدد صحیح $(-5, -4, -3, -2, -1, 0)$ در این نامعادله صدق می کنند.

۱۴- گزینه ۴ ابتدا $x = 2$ را در رابطه داده شده قرار می دهیم:

$$f(2) - 2f(2) = 4 - 6 + 4 \Rightarrow f(2) = -2$$

پس $f(x) = x^2 - 3x$ ، در نتیجه $f(-2) = 10$.

۱۵- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $t = x^2 + 1$ ، آن گاه $x^2 = t - 1$ و $t \geq 1$ بنابراین

$$f(x^2 + 1) = (x^2)^2 - x^2 \Rightarrow f(t) = (t - 1)^2 - (t - 1) = t^2 - 3t + 2$$

بنابراین اگر $x \geq 1$ ، آن گاه $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

۱۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$x^3 + 6x^2 + 12x = (x + 2)^3 - 8$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 10 = (x + 2)^3 + 2$$

بنابراین $f(x + 2) = \frac{(x + 2)^3 - 8}{(x + 2)^3 + 2}$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم

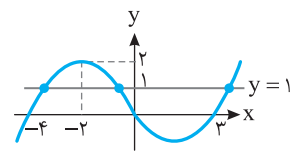
$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3 + 2}, x \neq -2$$

۱- گزینه ۲ چون f فقط یک زوج مرتب دارد، پس تساوی های $2a - b = 1$ ، $2a + c = 2$ و $2a = 2$ برقرار است که نتیجه می شود $a = 1$ ، $b = 1$ و $c = 0$. پس $a + b + c = 2$.

۲- گزینه ۴ از عدد ۲ دو پیکان خارج شده است، پس دو عدد a^2 و $a + 2$ باید یکسان باشند. پس $a^2 = a + 2$ که نتیجه می شود $a = -1$ یا $a = 2$. اگر $a = 2$ ، باید داشته باشیم $b = a^2 = 4$ ، پس $a + b = 6$. اگر $a = -1$ ، باید داشته باشیم $b = 2b + 1$ ، پس $b = -1$ و در نتیجه $a + b = -2$. پس حاصل $a + b$ برابر ۶ یا -2 است.

۳- گزینه ۳ دامنه تابع مجموعه $\{1, 3, 5\}$ است که ۳ عضو دارد. برد تابع مجموعه $\{3, 5, a^2\}$ است که باید تعداد اعضای آن کمتر از ۳ باشد. یعنی یا باید $a^2 = 3$ یا $a^2 = 5$. بنابراین $a = \pm\sqrt{3}$ یا $a = \pm\sqrt{5}$ پس ۴ مقدار مختلف برای a وجود دارد.

۴- گزینه ۴ تعداد جواب های معادله $f(x) = 1$ برابر با تعداد نقطه های برخورد خط $y = 1$ با نمودار تابع f است. از روی شکل روبه رو معلوم است که تعداد این نقطه ها سه تا است.



۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x + 2) = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \Rightarrow f(t) = t^2 - 2$$

اکنون اگر به جای t قرار دهیم $\sqrt{3}$ ، نتیجه می شود $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2 = 1$.

۶- گزینه ۴ در ضابطه تابع به جای x ، مقدار $x - 1$ را قرار می دهیم:

$$f(x - 1) = (x - 1)^2 - 2(x - 1) = x^2 - 4x + 3$$

در ضابطه تابع به جای x مقدار $x + 1$ را قرار می دهیم:

$$f(x + 1) = (x + 1)^2 - 2(x + 1) = x^2 - 1$$

بنابراین $f(x - 1) + f(x + 1) = x^2 - 4x + 3 + x^2 - 1 = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2f(x)$.

۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) = 3x + \frac{3}{x} - 4 \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4$$

بنابراین، اگر x عددی باشد که $x + \frac{1}{x} = 4$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا

معادله $x + \frac{1}{x} = 4$ معادل است با $x^2 - 4x + 1 = 0$ ، که دلتای آن مثبت

است، پس جواب حقیقی دارد.) آن گاه $f(4) = 3 \times 4 - 4 = 8$.

۸- گزینه ۱ **راه حل اول** فرض می کنیم $\frac{x + 1}{x - 2} = t$ و در نتیجه

$$tx - 2t = x + 1 \Rightarrow tx - x = 2t + 1 \Rightarrow (t - 1)x = 2t + 1 \Rightarrow x = \frac{2t + 1}{t - 1}, t \neq 1$$

در رابطه داده شده به جای x قرار می دهیم:

$$f(t) = 2\left(\frac{2t + 1}{t - 1}\right) - 1 = \frac{4t + 2 - t + 1}{t - 1} = \frac{3t + 3}{t - 1}$$

در نتیجه اگر $x \neq 1$ ، آن گاه $f(x) = \frac{3x + 3}{x - 1}$.

۲۳- گزینه ۳ در تابع همانی، ضابطه تابع به شکل $f(x)=x$ است.

$$\text{بنابراین} \quad f(-4)=m-2n=-4, \quad f(6)=m+n=6$$

$$\begin{cases} m-2n=-4 \\ m+n=6 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{8}{3}, \quad n=\frac{10}{3}$$

از طرف دیگر $f(\frac{m}{n})=k=\frac{m}{n}$ ، بنابراین $k=\frac{m}{n}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

۲۴- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^2-4)+2ax+4a}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)+2a(x+2)}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2+2a)}{x+2}=x-2+2a, \quad x \neq -2$$

ضابطه تابع همانی $f(x)=x$ است. بنابراین باید $2a-2=0$ و در نتیجه $a=1$ ، پس $f(-a)=f(-1)=-1$.

راه حل دوم چون تابع f همانی است، پس $f(0)=0$ ، بنابراین

$$\frac{4a-4}{2}=0 \Rightarrow a=1$$

در نتیجه $f(-a)=f(-1)=-1$.

۲۵- گزینه ۱ چون f تابعی خطی است، پس ضابطه آن به صورت

$$f(x)=ax+b \quad \text{بنابراین}$$

$$f(2)-3f(-2)=2a+b-3(-2a+b)=8a-2b=46$$

$$f(3)-3f(1)=3a+b-3(a+b)=-2b=22$$

در نتیجه $a=3$ ، $b=-11$ و $f(x)=3x-11$ ، بنابراین $f(-2)=-17$.

۲۶- گزینه ۳ راه حل اول فرض کنید $f(x)=ax+b$ ، در این صورت

$$f(x-1)=a(x-1)+b=ax-a+b$$

$$2f(x+2)=2(a(x+2)+b)=2(ax+2a+b)=2ax+4a+2b$$

پس $f(x-1)+2f(x+2)=3ax+3a+3b=-9x+21$ ، بنابراین

$$\begin{cases} 3a=-9 \\ 3a+3b=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-3x+1.$$

راه حل دوم تساوی داده شده به ازای هر x برقرار است، پس $x=1$ را در این

تساوی قرار می دهیم: $f(0)+2f(3)=12$ ، فقط در تابع گزینه (۳) این شرط

برقرار است.

۲۷- گزینه ۱ ابتدا $f(-1)$ و $f(2)$ را حساب می کنیم تا مقادیر a و b

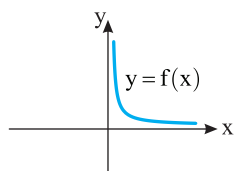
به دست آید:

$$\begin{cases} f(-1)=a+b=3 \\ f(2)=4a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=x^2-2x$ و در نتیجه $f(1)=-1$.

۲۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x>0$ ، آن گاه $|x|=x$ ، پس

$f(x)=\frac{1}{x}$ ، همچنین اگر $x \leq 0$ ، آن گاه $|x|=-x$ و $x+|x|=0$ ، در نتیجه



تابع به ازای $x \leq 0$ تعریف نمی شود،

بنابراین $D_f=(0, +\infty)$ ، بنابراین نمودار

این تابع به صورت مقابل خواهد بود:

۱۷- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $-x \leq 1$ ، $0 < -x < 1$ ، آن گاه $-1 \leq x < 0$ ، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{1+x}}{-x}=-f(x)$$

و اگر $-1 \leq -x < 0$ ، آن گاه $0 < x \leq 1$ ، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1+(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{1-x}}{-x}=-f(x)$$

بنابراین همواره $f(-x)=-f(x)$.

۱۸- گزینه ۲ چون

$$f(-1)=a \times (-1)+b=b-a, \quad f(6)=a \times (6)+4b=6a+4b$$

پس

$$f(-1)+f(6)=-1 \Rightarrow b-a+6a+4b=-1 \Rightarrow 5a+5b=-1$$

$$5(a+b)=-1 \Rightarrow a+b=-\frac{1}{5}$$

در نتیجه $f(1)=a+4b=(a+b)+3b=3b-\frac{1}{5}$.

۱۹- گزینه ۱ برای ورودی های فرد، خروجی تابع f یک واحد از ورودی

آن بیشتر است، یعنی

$$f(1)=1+1=2, \quad f(3)=3+1=4, \quad \dots, \quad f(19)=19+1=20$$

برای ورودی های زوج، خروجی تابع f یک واحد از ورودی آن کمتر است، یعنی

$$f(2)=2-1=1, \quad f(4)=4-1=3, \quad \dots, \quad f(20)=20-1=19$$

بنابراین

$$A=(2+4+\dots+20)+(1+3+\dots+19)$$

$$=1+2+3+\dots+20=\frac{20}{2}(1+20)=210$$

۲۰- گزینه ۴ اگر ضابطه داده شده، متعلق به یک تابع باشد باید در

$x=2$ مقدار $f(x)$ منحصر به فرد باشد. یعنی مقدار $f(2)$ در ضابطه اول با

مقدار آن در ضابطه دوم برابر باشد. اگر $f(x)=2x^2+a$ ، آن گاه

$f(2)=8+a$ ، اگر $f(x)=ax^2-2$ ، آن گاه $f(2)=8a-2$ ، بنابراین

$$8+a=8a-2 \Rightarrow 7a=10 \Rightarrow a=\frac{10}{7}$$

و در نتیجه

$$vf(va)=vf(10)=v(2 \times 10^2 + \frac{10}{7})=1410$$

۲۱- گزینه ۲ برد تابع ثابت، یک عضو دارد. بنابراین

$$m-2=4 \Rightarrow m=6$$

$$m+2n=4 \xrightarrow{m=6} 6+2n=4 \Rightarrow n=-1$$

$$mn+k=4 \xrightarrow{m=6, n=-1} -6+k=4 \Rightarrow k=10$$

۲۲- گزینه ۲ اگر f تابعی ثابت باشد، باید ضرایب x^2 و x برابر با

صفر باشند:

$$4-a=0 \Rightarrow a=4, \quad 3+b=0 \Rightarrow b=-3$$

در این صورت $f(x)=ab+19=4 \times (-3)+19=7$.

بنابراین

$$f(a+b)=f(1)=7$$

۳۳- گزینه ۳ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x)=x$ است. بنابراین

$$a-2=0, \quad b-3=1, \quad a+b-c=0$$

در نتیجه $a=2$, $b=4$, $c=a+b=2+4=6$

۳۴- گزینه ۳ **راه حل اول** ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x)=k$

است. بنابراین

$$\frac{2x+1}{ax-3}=k \Rightarrow 2x+1=kax-3k$$

تساوی فوق یک اتحاد است. پس باید تساوی‌های $ka=2$ و $1=-3k$ برقرار

باشند. بنابراین $k=-\frac{1}{3}$ و $a=-6$

راه حل دوم با توجه به اینکه $f(0)=-\frac{1}{3}$ و تابع ثابت است، پس $f(1)=-\frac{1}{3}$

و در نتیجه

$$f(1)=\frac{2+1}{a-3}=-\frac{1}{3} \Rightarrow 9=-a+3 \Rightarrow a=-6$$

۳۵- گزینه ۴ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=2mx-mx^2+x^2-4x-m=(1-m)x^2+(2m-4)x-m$$

ضابطه توابع خطی به شکل $f(x)=ax+b$ است. یعنی یک چندجمله‌ای

درجه اول است. بنابراین باید $m=1$ تا ضابطه تابع یک چندجمله‌ای درجه اول

شود، یعنی

$$m=1 \Rightarrow f(x)=-2x-1$$

$$f(m)=f(1)=-3$$

۳۶- گزینه ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطه آن یک چندجمله‌ای

درجه اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطه داده شده ساده شوند.

یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+1$ است. یعنی

$$x^2+mx+2=(x+1)(x+a) \Rightarrow x^2+mx+2=x^2+(a+1)x+a$$

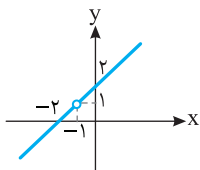
برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

$$a=2, \quad m=a+1 \xrightarrow{a=2} m=3$$

پس ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}=x+2, \quad x \neq -1$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۳۷- گزینه ۳ ضابطه تابع را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر

می‌گیریم. بنابراین

$$f(1)=a+b \Rightarrow f(f(1))=f(a+b)=a(a+b)+b=a^2+ab+b=1$$

$$f(-1)=-a+b \Rightarrow f(f(-1))=f(-a+b)=a(-a+b)+b$$

$$=-a^2+ab+b=-7$$

اگر طرفین تساوی‌های اخیر را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

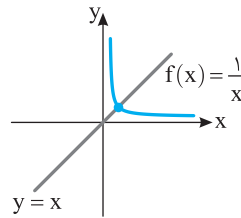
$$a^2+ab+b-(-a^2+ab+b)=1-(-7) \Rightarrow 2a^2=8 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$$

$$a^2+ab+b=1 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow 4+2b+b=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow f(x)=2x-1 \\ a=-2 \Rightarrow 4-2b+b=1 \Rightarrow b=3 \Rightarrow f(x)=-2x+3 \end{cases}$$

بنابراین $f(0)=3$ یا $f(0)=-1$

۲۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=(0, +\infty)$ و

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x}$$



بنابراین نمودار تابع f به صورت روبه‌رو

است و خط $y=x$ را در یک نقطه قطع

می‌کند.

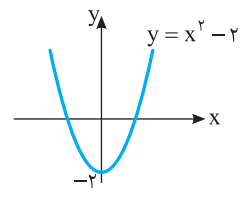
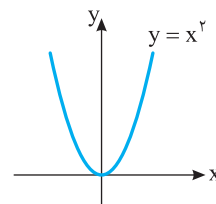
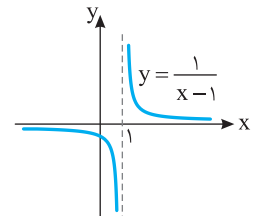
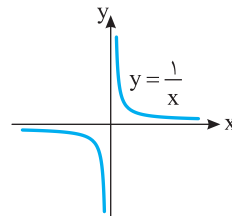
۳۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x-1}$$

بنابراین اگر نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع f

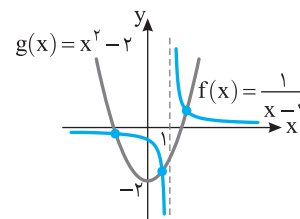
به‌دست می‌آید. همچنین اگر نمودار تابع $y=x^2$ را دو واحد به پایین منتقل

کنیم نمودار تابع g به‌دست می‌آید.



مطابق شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}$ در سه نقطه نمودار

تابع $g(x)=x^2-2$ را قطع می‌کند.



۳۱- گزینه ۳ ضابطه این تابع $f(x)=x$ است. پس $f(2)=2$. در نتیجه

$$14-2k=2 \Rightarrow 2k=12 \Rightarrow k=6$$

بنابراین باید $f(14-3 \times 6)=f(-4)=-4$ را حساب کنیم: $f(14-3 \times 6)=f(-4)=-4$

۳۲- گزینه ۱ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=kmx-kx^2-2m+2x+2x^2=(2-k)x^2+(2+km)x-2m$$

در تابع ثابت، مقدار تابع به x بستگی ندارد. پس در ضابطه نباید x وجود داشته

باشد. یعنی ضرایب x و x^2 باید صفر باشند. پس

$$2-k=0 \Rightarrow k=2, \quad 2+km=0 \xrightarrow{k=2} 2+2m=0 \Rightarrow m=-1$$

بنابراین $k+m=1$

۴۲- گزینه ۳ طول رأس سهمی $x = -\frac{2}{2k} = -\frac{1}{k}$ است. عرض رأس

سهمی را پیدا می‌کنیم: $y = k(\frac{1}{k})^2 - 2(\frac{1}{k}) + 2 = 2 - \frac{1}{k}$. چون رأس سهمی

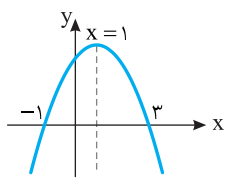
روی خط $y = -2x$ است، پس $2 - \frac{1}{k} = -2(\frac{1}{k})$ در نتیجه $k = \frac{-1}{2}$.

۴۳- گزینه ۲ محور تقارن سهمی به معادله $y = mx^2 + 2mx + 3m$

خط $y = -\frac{2m^2}{2m} = -m$ است. بنابراین $-m = 2$ ، یعنی $m = -2$. به این

ترتیب، معادله سهمی می‌شود $y = -2x^2 + 8x - 6$ ، که عرض رأس آن برابر

$$\text{است با } \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times (-2) \times (-6) - 8^2}{4(-2)} = 2$$



۴۴- گزینه ۲ راه حل اول با توجه به

شکل محور تقارن سهمی داده شده از وسط نقاط $(-1, 0)$ و $(3, 0)$ می‌گذرد، پس

معادله آن $x = \frac{3-1}{2} = 1$ است. از طرف

دیگر با توجه به معادله داده شده، طول رأس سهمی $x = \frac{b}{2a}$ است. بنابراین

$$\frac{b}{2a} = 1 \text{ در نتیجه } \frac{b}{a} = 2$$

راه حل دوم سهمی از نقطه $(-1, 0)$ عبور کرده است، پس مختصات این نقطه

در معادله سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$0 = a(-1)^2 - b(-1) + c \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (1)$$

همچنین سهمی از نقطه $(3, 0)$ عبور کرده است، پس

$$9a - 3b + c = 0 \quad (2)$$

دو طرف معادله (۱) را از دو طرف معادله (۲) کم می‌کنیم:

$$9a - 3b + c - a - b - c = 0 \Rightarrow 8a - 4b = 0 \Rightarrow 8a = 4b \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

راه حل سوم مجموع جواب‌های معادله $ax^2 - bx + c = 0$ برابر $\frac{b}{a}$ است. از

طرف دیگر با توجه به شکل، جواب‌های این معادله $x = 3$ و $x = -1$ هستند.

$$\text{بنابراین } \frac{b}{a} = 3 + (-1) = 2$$

۴۵- گزینه ۱ راه حل اول با توجه به نمودار داده شده، c و $-2c$

جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند. بنابراین

$$\begin{cases} c - 2c = -\frac{b}{a} \\ c(-2c) = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{b}{a} \Rightarrow b = ac \\ -2c = \frac{1}{a} \Rightarrow ac = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ac + b = -1$$

راه حل دوم با توجه به نمودار داده شده، c یکی از جواب‌های معادله

$ax^2 + bx + c = 0$ است. بنابراین

$$ac^2 + bc + c = 0 \xrightarrow{c \neq 0} ac + b + 1 = 0 \Rightarrow ac + b = -1$$

۴۶- گزینه ۱ برای آنکه نمودار یک سهمی، محور x را در دو طرف

مبدأ مختصات قطع کند، باید حاصل ضرب جواب‌های معادله $y = 0$ منفی باشد. پس

$$\frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

۳۸- گزینه ۱ راه حل اول در ضابطه تابع به جای x مقدار $x-1$ را

قرار می‌دهیم:

$$f(x-1) = a(x-1)^2 - b(x-1) + 2 = ax^2 - 2ax - bx + a + b + 2$$

بنابراین از رابطه داده شده به دست می‌آید

$$f(x-1) - f(x) = ax^2 - 2ax - bx + a + b + 2 - ax^2 + bx - 2 = 6x + 2$$

بنابراین $-2ax + a + b = 6x + 2$. چون این رابطه به ازای هر x برقرار است، پس

$$\begin{cases} -2a = 6 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a - b = -8$$

راه حل دوم چون رابطه $f(x-1) - f(x) = 6x + 2$ به ازای هر مقدار x برقرار

است، پس به ازای $x = 1$ هم برقرار است:

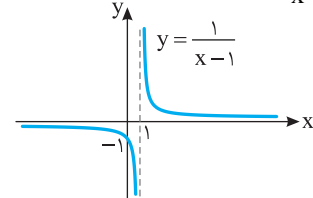
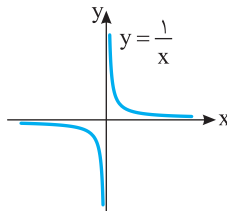
$$f(0) - f(1) = 8 \Rightarrow 2 - (a - b + 2) = 8 \Rightarrow 2 - a + b - 2 = 8 \Rightarrow a - b = -8$$

۳۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع

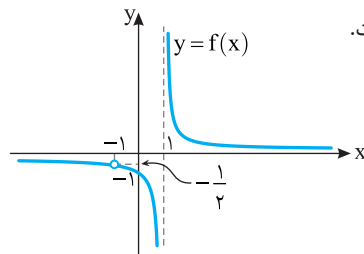
$$y = \frac{1}{x-1}$$



بنابراین نمودار تابع f به صورت شکل رسم شده است که خطوط $y = 0$ و

$y = -\frac{1}{2}$ را قطع نمی‌کند. پس k فقط می‌تواند مقادیر 0 و $-\frac{1}{2}$ را داشته باشد

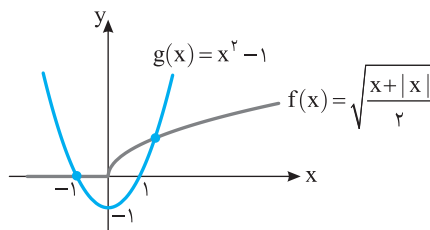
که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{1}{2}$ است.



۴۰- گزینه ۲ برای $x \geq 0$ ، $|x| = x$ و $f(x) = \sqrt{x}$ برای $x < 0$ ،

$|x| = -x$ و $f(x) = 0$. نمودار تابع‌های f و g را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از

روی این شکل معلوم می‌شود که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.



۴۱- گزینه ۴ چون سهمی ماکزیمم دارد، باید ضریب x^2 منفی باشد.

پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. با توجه به شکل داده شده طول رأس سهمی

عددی منفی است. در گزینه (۳) طول رأس سهمی $x = -\frac{4}{2(-1)} = 2$ و در گزینه (۴)

طول رأس سهمی $x = -\frac{4}{2(-1)} = -2$ است. پس گزینه (۴) درست است.

۵۲- گزینه ۳ رأس سهمی $y = ax^2 - 2ax + 2$ نقطه $(1, 2-a)$ است

که روی سهمی $y = bx^2 + 2bx + 1$ قرار دارد. پس

$$2-a = b + 2b + 1 \Rightarrow a + 3b - 1 = 0 \quad (1)$$

رأس سهمی $y = bx^2 + 2bx + 1$ نقطه $(-1, 1-b)$ است که روی سهمی

$y = ax^2 - 2ax + 2$ قرار دارد. پس

$$1-b = a + 2a + 2 \Rightarrow b = -3a - 1 \quad (2)$$

اگر در معادله (۱) مقدار b را از معادله (۲) قرار دهیم، آن‌گاه $a + 3(-3a - 1) - 1 = 0$

در نتیجه $a = -\frac{1}{2}$. بنابراین $b = \frac{1}{2}$ و در نتیجه $a + b = 0$.

۵۳- گزینه ۱ معادله محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$

به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ است. در نتیجه

$$-\frac{m-2}{2(3m-4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3m-4 = -m+2 \Rightarrow 4m=6 \Rightarrow m=\frac{3}{2}$$

۵۴- گزینه ۴ توجه کنید که چون $OA < OB$ ، پس محور تقارن

سهمی پاره خط OB را قطع می‌کند. در نتیجه، $-\frac{b}{2a} > 0$ ، یعنی علامت a و b

فرق می‌کند. از طرف دیگر، چون سهمی پایین‌ترین نقطه دارد، پس $a > 0$ ، در نتیجه $b < 0$. از طرف دیگر، عرض نقطه تلاقی سهمی و محور y منفی است، پس $c < 0$. به این ترتیب، $bc > 0$.

۵۵- گزینه ۲ سهمی از نقطه $(0, 0)$ عبور می‌کند، پس $c = 0$. طول

رأس سهمی برابر $x = 1$ است. پس $-\frac{b}{2a} = 1$ در نتیجه $b = -2a$. عرض

رأس سهمی برابر است با $y = -1$ ، بنابراین

$$ax^2 + bx + 1 = -1 \xrightarrow{b=-2a} a - 2a = -1 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $b = -2$.

۵۶- گزینه ۱ با توجه به اینکه سهمی محور طول‌ها را در $x = 4$ و

$x = -2$ قطع کرده است، معادله سهمی به شکل $f(x) = k(x+2)(x-4)$

است. از طرف دیگر مساحت مستطیل برابر $4f(-1)$ است. بنابراین

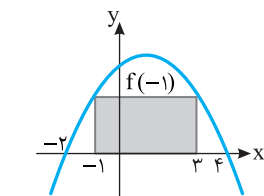
$$4f(-1) = 8 \Rightarrow f(-1) = 2$$

پس

$$k(-1+2)(-1-4) = 2 \Rightarrow k = -\frac{2}{5}$$

بنابراین معادله سهمی به شکل $f(x) = -\frac{2}{5}(x+2)(x-4)$ یا

$$f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{16}{5}$$



۵۷- گزینه ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود ضریب x^2 و عرض

نقطه تقاطع سهمی با محور y مثبت است. در نتیجه

$$m+2 > 0, \quad m > 0 \quad (1)$$

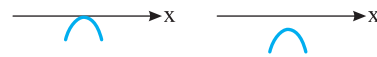
از طرف دیگر، چون مجموع ضرایب صفر است، بنابراین، جواب‌های معادله

$y = 0$ اعداد $\frac{m}{m+2}$ و 1 هستند، که با توجه به شرط (۱) هر دو مثبت هستند.

بنابراین حدود m بازه $(0, +\infty)$ است.

۴۷- گزینه ۲ در حالت‌های زیر نمودار تابع درجه دوم از ناحیه‌های اول و

دوم صفحه مختصات عبور نمی‌کند.



بنابراین معادله $f(x) = 0$ حداکثر یک جواب دارد و ضریب x^2 در این معادله

منفی است.

$$a = m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (1)$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 1 - 4(m-1)^2 \leq 0 \Rightarrow (m-1)^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} m-1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow m \geq \frac{3}{2} \\ \text{یا} \\ m-1 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

از اشتراک ناحیه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m \leq \frac{1}{2}$.

۴۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(2m) - 36}{4} = \frac{4(2m) - 36}{4} = \frac{8m - 36}{4} = 2m - 9 = 5 \Rightarrow m = 7$$

۴۹- گزینه ۳ مجموع طول نرده‌های استفاده شده برابر با

$4x + 3y = 200$ است. پس $4x = 200 - 3y$. همچنین مساحت کل زمین

برابر است با $A = 2xy$. در نتیجه

$$A = 2xy = \frac{1}{2} \times 4xy = \frac{1}{2} (200 - 3y)y = \frac{1}{2} (200y - 3y^2)$$

بنابراین

$$2A = 200y - 3y^2 = -3\left(y^2 - \frac{200}{3}y\right) = -3\left(\left(y - \frac{100}{3}\right)^2 - \frac{10000}{9}\right)$$

$$= \frac{10000}{3} - 3\left(y - \frac{100}{3}\right)^2 \leq \frac{10000}{3}$$

بنابراین $A \leq \frac{5000}{3}$ ، یعنی حداکثر مساحت اصطبل برابر $\frac{5000}{3}$ است.

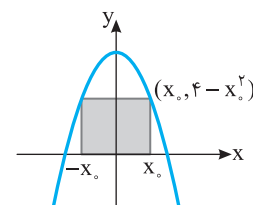
۵۰- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر می‌توان نتیجه گرفت محیط

مستطیل برابر است با

$$2(2x_0 + 4 - x_0^2) = -2x_0^2 + 4x_0 + 8 = -2(x_0^2 - 2x_0 + 1) + 10$$

$$= -2(x_0 - 1)^2 + 10 \leq 10$$

در نتیجه بیشترین محیط مستطیل برابر است با 10 .



۵۱- گزینه ۴ مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x = -\frac{-2}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{2}{3}$$

بنابراین رأس سهمی نقطه $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ است و چون ضریب x^2 عددی مثبت

است، پس سهمی دارای پایین‌ترین نقطه است، یعنی گزینه (۴) درست است.

۶۳- گزینه ۲ محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 - 4x + 1$ خط $x = 2$

است و محور تقارن سهمی به معادله $y = ax^2 - a^2x$ خط $x = \frac{a^2}{2}$ است. پس

$$\frac{a^2}{2} = 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

۶۴- گزینه ۴ ابتدا نابرابری $\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ را به صورت $\frac{b^2}{4a} > c$

می‌نویسیم. می‌دانیم عرض رأس سهمی مورد نظر برابر $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ است.

که منفی است. در نتیجه باید عرض رأس سهمی مورد نظر منفی باشد. بنابراین در بین گزینه‌های داده شده گزینه (۴) می‌تواند درست باشد.

۶۵- گزینه ۴ معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. مختصات

نقاط داده شده را در معادله سهمی قرار می‌دهیم:

$$x = -1, y = 0 \Rightarrow 0 = a - b + c \quad (1)$$

$$x = 1, y = 4 \Rightarrow 4 = a + b + c \quad (2)$$

$$x = 2, y = 9 \Rightarrow 9 = 4a + 2b + c \quad (3)$$

اگر دو طرف معادله (۱) را از دو طرف معادله (۲) کم کنیم، به معادله زیر می‌رسیم:

$$4 - 0 = a + b + c - (a - b + c) \Rightarrow 4 = 2b \Rightarrow b = 2$$

در معادله‌های (۱) و (۳) به جای b مقدار ۲ را قرار می‌دهیم و دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a - 2 + c = 0 \\ 4a + 4 + c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 4a + c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

بنابراین معادله سهمی $y = x^2 + 2x + 1$ است. این سهمی از نقطه $(-2, 1)$ عبور می‌کند.

۶۶- گزینه ۱ چون سهمی ماکزیمم دارد، پس

$$m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$$

همچنین، سهمی محور x را قطع نمی‌کند، در نتیجه دلتای معادله آن منفی است:

$$\Delta = (m+1)^2 + 16(m+1) < 0$$

بنابراین به نامعادله $(m+1)(m+17) < 0$ می‌رسیم. می‌دانیم $m+1 < 0$ ، در

نتیجه $m+17 > 0$ ، پس $m > -17$. بنابراین $m \in (-17, -1)$.

۶۷- گزینه ۲ اگر نمودار تابع f فقط از ناحیه سوم عبور نکند، آن‌گاه از

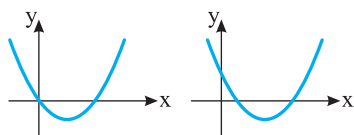
ناحیه‌های اول، دوم و چهارم عبور می‌کند. (توجه کنید که ضریب x^2 مثبت است و سهمی کمترین مقدار دارد.) پس باید معادله $f(x) = 0$ دو جواب داشته باشد که یا هر دو مثبت باشند یا یکی مثبت و دیگری صفر باشد. بنابراین

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 4m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty) \quad (1)$$

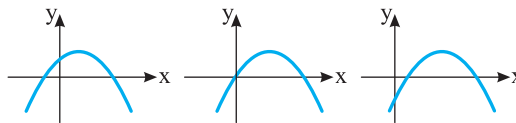
$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \quad (2)$$

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow -m \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0] \quad (3)$$

از اشتراک مجموعه جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $m \in (-\infty, -4)$.



۵۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع f یک سهمی است که ماکزیمم دارد. بنابراین در حالت کلی باید به صورت‌های زیر باشد تا از ناحیه اول صفحه مختصات عبور کند.



بنابراین باید معادله $f(x) = 0$ دو جواب داشته باشد که هر دو منفی نباشند یا اینکه یکی صفر و دیگری منفی نباشد. اگر یکی از جواب‌ها $x = 0$ باشد، آن‌گاه $m = 0$ و معادله به صورت $f(x) = -x^2$ در می‌آید که از ناحیه اول صفحه مختصات عبور نمی‌کند. پس شرط داشتن دو جواب منفی

$$\left(\frac{c}{a} > 0, -\frac{b}{a} < 0, \Delta > 0\right) \text{ را بررسی می‌کنیم:}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 4m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -4 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -2m > 0 \Rightarrow m < 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases}$$

پس $m < 0$ ، نباید برقرار باشد و در نتیجه $m > 0$.

۵۹- گزینه ۱ جواب‌های معادله را با α و β نشان می‌دهیم. در این

صورت طبق فرض مسئله، $\alpha + \beta = 2\alpha\beta$ ، چون $\alpha + \beta = -(k-2)$ و

$\alpha\beta = -k$ ، بنابراین $-k + 2 = -2k$ پس $k = -2$. بنابراین

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 1 = -2(x^2 + 2x) + 1 = -2(x+1)^2 + 3 \leq 3$$

پس بیشترین مقدار $f(x)$ برابر ۳ است.

۶۰- گزینه ۲ طول اضلاع قائمه را با b و c نشان می‌دهیم. در این

صورت $b + c = 8$ ، از طرف دیگر،

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b(8-b) = \frac{1}{2}(8b - b^2)$$

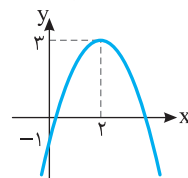
بیشترین مقدار عبارت $8b - b^2$ با ازای $b = \frac{-8}{2(-1)} = 4$ به دست می‌آید. در

$$\text{نتیجه، بیشترین مقدار } S \text{ برابر است با } \frac{1}{2}(8 \times 4 - 4^2) = \frac{1}{2} \times 16 = 8.$$

۶۱- گزینه ۲ سهمی از نقطه $(0, -1)$ عبور می‌کند، طول رأس سهمی

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-1) - 16}{4(-1)} = 3 \text{ و عرض آن } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

است، در نتیجه رأس سهمی نقطه $(2, 3)$ و نمودار آن به شکل زیر است.



بنابراین این سهمی از ناحیه دوم نمی‌گذرد.

۶۲- گزینه ۱ سهمی به معادله $y = x^2 - 2x$ دارای پایین‌ترین نقطه

به مختصات $x = 1$ و $y = -1$ است. پس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$

از نقطه $(0, -2)$ عبور می‌کند و رأس آن $(1, -1)$ است. بنابراین

$$-2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -2$$

$$\text{طول رأس سهمی: } x = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$$

$$\text{عرض رأس سهمی: } y = a(1)^2 + b(1) - 2 = -1 \Rightarrow a + b = 1$$

$$\xrightarrow{b = -2a} a - 2a = 1 \Rightarrow a = -1, b = 2$$

$$\text{بنابراین } abc = (-1)(2)(-2) = 4$$

در نتیجه $D_f = \mathbb{R} - \{-1, \frac{1}{3}\}$. بنابراین دو عدد -1 و $\frac{1}{3}$ در دامنه تابع قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{2}{3}$ است.

۷۴- گزینه ۱ برای اینکه $\mathbb{R}$ دامنه تابع باشد، باید مخرج کسر ضابطه تابع ریشه نداشته باشد. بنابراین

$$\Delta = m^2 - 16 < 0 \Rightarrow m^2 < 16 \Rightarrow -4 < m < 4$$

۷۵- گزینه ۲ باید نامعادله $\frac{9-x}{x+2} \geq 0$ را حل کنیم. با توجه به جدول

x	$-\infty$	-2	9	$+\infty$
$\frac{9-x}{x+2}$		-	+	-

پس $D_f = (-2, 9]$. در نتیجه $a = -2$ ، $b = 9$ و $a - b = -11$.

۷۶- گزینه ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنه وجود دارد:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1, \quad y - x \geq 0 \Rightarrow x \leq y$$

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{y-x} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \neq \sqrt{y-x} \Rightarrow x-1 \neq y-x \Rightarrow x \neq \frac{y+1}{2}$$

بنابراین $D_f = [1, y] - \{\frac{y+1}{2}\}$. پس عددهای صحیح $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ در دامنه تابع قرار دارند.

۷۷- گزینه ۲ توجه کنید که $D_f = \{x | x^2 + 2x + 2 - m^2 \geq 0\}$ توجه کنید که

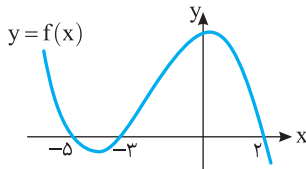
برای اینکه همواره $x^2 + 2x + 2 - m^2 \geq 0$ ، باید $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4(2 - m^2) \leq 0 \Rightarrow 4 - 8 + 4m^2 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 1$$

بنابراین کمترین مقدار ممکن m برابر -1 و بیشترین مقدار آن برابر 1 است که اختلاف آن‌ها برابر 2 است.

۷۸- گزینه ۲ برای اینکه از نمودار تابع $y = f(x-2)$ به نمودار تابع

$y = f(x)$ برسیم، کافی است آن را دو واحد به چپ منتقل کنیم.



برای به دست آوردن دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ ، عبارت $\frac{x}{f(x)}$ را تعیین

علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-5	-3	0	2	$+\infty$
f(x)		+	-	+	+	-
x		-	-	-	+	+
$\frac{x}{f(x)}$		-	+	-	+	-

بنابراین $D_g = (-5, -3) \cup [0, 2)$. پس دامنه تابع g شامل سه عدد صحیح است.

۷۹- گزینه ۲ تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:

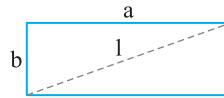
$$(1, 2a) = (1, 8) \Rightarrow a = 4$$

$$(2, 2a+b) = (2, 5) \Rightarrow 2a+b=5 \xrightarrow{a=4} 8+b=5 \Rightarrow b=-3$$

$$(a+c, 3) = (5, 3) \Rightarrow a+c=5 \xrightarrow{a=4} 4+c=5 \Rightarrow c=1$$

بنابراین $a+b+c=2$.

۶۸- گزینه ۳ از شکل روبه‌رو و فرض



مسئله نتیجه می‌شود

$$2(a+b) = 24 \Rightarrow a+b=12 \Rightarrow b=12-a$$

اکنون توجه کنید که $l^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (12-a)^2 = 2a^2 - 24a + 144$.

$$\text{کمترین مقدار } l^2 \text{ برابر است با } 72 \Rightarrow \frac{(-24)^2 - 4 \times 2 \times 144}{4 \times 2} = 72$$

بنابراین

$$l^2 \geq 72 \Rightarrow l \geq 6\sqrt{2}$$

۶۹- گزینه ۳ چون نمودار تابع f از نقطه $(0, -2)$ گذشته است، پس

$$f(0) = -2 \Rightarrow c = -2$$

از طرف دیگر، x_1 و x_2 جواب‌های معادله $-x^2 + bx + c = 0$ هستند، در

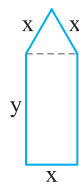
نتیجه $x_1 + x_2 = b$ و $x_1 x_2 = -c = 2$ بنابراین

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2} x_1 x_2 = 42 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - \frac{3}{2} x_1 x_2 = 42$$

$$b^2 - \frac{3}{2} \times 2 = 42 \Rightarrow b^2 = 49$$

عرض رأس سهمی برابر است با $\frac{fac-b^2}{4a}$. در نتیجه بیشترین مقدار تابع f

$$\text{برابر است با } \frac{4(-1)(-2) - 49}{4(-1)} = \frac{41}{4}$$



۷۰- گزینه ۲ از فرض مسئله، معلوم می‌شود که

$$\text{محیط شکل} = 3x + 2y = 4$$

باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن شود. در نتیجه مساحت پنجره را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + xy \Rightarrow 4S = \sqrt{3} x^2 + 4xy$$

چون $2y = 4 - 3x$ پس

$$4S = \sqrt{3} x^2 + 2x(4 - 3x) = \sqrt{3} x^2 + 8x - 6x^2 = (\sqrt{3} - 6)x^2 + 8x$$

چون $\sqrt{3} - 6 < 0$ ، بیشترین مقدار عبارت فوق به ازای

$$x = \frac{-8}{2(\sqrt{3} - 6)} = \frac{4}{6 - \sqrt{3}}$$

۷۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1, \quad 1-\frac{1}{x+1}=0 \Rightarrow \frac{x}{x+1}=0 \Rightarrow x=0$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{0, -1\}$.

۷۲- گزینه ۳ ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \quad x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1, \pm \sqrt{2}\}$. پس چهار عدد در دامنه تابع قرار ندارند.

۷۳- گزینه ۲ مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را

به دست می‌آوریم:

$$2|x| - |x-1| = 0 \Rightarrow 2|x| = |x-1|$$

$$2x = x-1 \Rightarrow x = -1, \quad 2x = -x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

۸۶- گزینه ۳ شرطهای زیر برای تعیین دامنه تابع وجود دارند:

$$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3, \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\sqrt{x+2}-2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} \neq 2 \Rightarrow x+2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$$

بنابراین $D_f = [-2, 3] - \{2\}$ و عددهای صحیح $-2, -1, 0, 1, 3$ در دامنه تابع قرار دارند.

۸۷- گزینه ۳ دامنه تابع f بازه $[-3, 2]$ است. بنابراین عبارت

$$\mathbb{R} - [-3, 2] \quad ax^2 + bx + 2a^2$$

منفی باشد. پس $x=2$ و $x=-3$ جوابهای معادله $ax^2 + bx + 2a^2 = 0$ هستند. یعنی اگر به جای x یک بار 2 و بار دیگر -3 قرار دهیم مقدار عبارت برابر صفر خواهد شد:

$$\begin{aligned} 3 \times \begin{cases} 4a + 2b + 2a^2 = 0 \\ 9a - 3b + 2a^2 = 0 \end{cases} & \Rightarrow + \begin{cases} 12a + 6b + 6a^2 = 0 \\ 18a - 6b + 4a^2 = 0 \end{cases} \\ 3 \times a + 10a^2 & = 0 \\ 10a(3+a) & = 0 \Rightarrow a = 0, a = -3 \end{aligned}$$

اگر $a=0$ از معادله (I) نتیجه می شود $b=0$ و اگر $a=-3$ از معادله (I) نتیجه می شود

$$-12 + 2b + 18 = 0 \Rightarrow b = -3$$

اگر $a=b=0$ آن گاه $f(x)=0$ و $D_f = \mathbb{R}$. پس فقط $a=b=-3$ قابل قبول است و در نتیجه $a+b=-6$.

۸۸- گزینه ۴ باید نامعادله $\frac{f(x)}{x^2-x} \geq 0$ را حل کنیم. مطابق جدول

تعیین علامت زیر جواب نامعادله به صورت زیر است:

$$x \leq -1 \text{ یا } 0 < x < 1 \text{ یا } x \geq 2$$

بنابراین $D_g = \{-1\} \cup (0, 1) \cup [2, +\infty)$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
f(x)	+	-	+	-	+	-	+
x^2-x	+	+	+	+	-	+	+
$\frac{f(x)}{x^2-x}$	+	-	+	-	+	-	+

۸۹- گزینه ۲ راه حل اول فرض کنید $g(x)=ax+b$ و تابع f با تابع

$$\frac{x^2-mx+3}{3-x} = ax+b \quad x \neq 3 \text{ تساوی}$$

برقرار است. پس

$$x^2 - mx + 3 = 3ax + 3b - ax^2 - bx = -ax^2 + (3a-b)x + 3b$$

تساوی بالا به ازای هر $x \neq 3$ برقرار است. بنابراین

$$a = -1, \quad 3 = 3b \Rightarrow b = 1$$

$$-m = 3a - b \xrightarrow{b=1} m = 4$$

بنابراین $g(x) = -x + 1$. همچنین باید تساوی $f(3) = g(3)$ درست باشد. پس

$$f(3) = n, \quad g(3) = -3 + 1 = -2 \Rightarrow n = -2$$

در نتیجه $m+n=2$.

۹۰- گزینه ۲ تابعهای $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{6-x}$ و $f(x) = \sqrt{6x-x^2}$

برابرند، زیرا

$$D_f = D_g = [0, 6], \quad f(x) = \sqrt{6x-x^2} = \sqrt{x(6-x)} = \sqrt{x}\sqrt{6-x} = g(x)$$

تابعهای $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-3}$ و $f(x) = \sqrt{x^2-3x}$ و همین طور تابعهای

$$g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x+3} \text{ و } f(x) = \sqrt{x^2+3x}$$

نیستند. تابعهای $g(x) = x-3$ و $f(x) = \sqrt{x^2-6x+9}$ دامنه یکسان

دارند، اما ضابطه برابر ندارند، زیرا

$$f(x) = \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| \neq g(x)$$

۹۱- گزینه ۴ سه کسر در ضابطه تابع وجود دارد. مخرج هر یک را

برابر صفر قرار می دهیم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1, \quad x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$1 - \frac{4}{x+1} = 0 \Rightarrow x+1-4=0 \Rightarrow x=3$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$. پس حاصل ضرب عددهایی که در دامنه

تابع قرار ندارند برابر -6 است.

۹۲- گزینه ۳ مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه های آن

را به دست می آوریم:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^3 - x - 2x^2 + 2 = 0$$

$$x(x^2-1) - 2(x^2-1) = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x-2) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1, x=-1, x=2$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{1, -1, 2\}$. پس سه عدد در دامنه تابع قرار ندارند.

۹۳- گزینه ۳ چون $x=4$ در دامنه تابع نیست، پس مخرج حداقل

یکی از کسره های ضابطه تابع را صفر می کند. بنابراین

$$x-a=0 \xrightarrow{x=4} 4-a=0 \Rightarrow a=4$$

$$x - \frac{a+1}{x-a} = 0 \xrightarrow{x=4} 4 - \frac{a+1}{4-a} = 0 \Rightarrow a=3$$

پس حاصل جمع مقادیر ممکن برای a برابر 7 است.

۹۴- گزینه ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنه تابع قرار ندارد، پس

معادله $m^2x^2 + x + 1 = 0$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می افتد.

حالت اول مخرج ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = 1 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

در این حالت $x=-2$ ریشه مخرج است، در نتیجه $n=-2$.

حالت دوم مخرج عبارت درجه اول باشد، یعنی ضریب x^2 برابر صفر باشد.

در این حالت $m=0$ و $x=-1$ ریشه مخرج است. در نتیجه $n=-1$.

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای n برابر 2 است.

۹۵- گزینه ۱ باید $x=-1$ و $x=2$ جوابهای معادله

$a|x| - bx + 1 = 0$ باشند. بنابراین

$$a|x| - bx + 1 = 0 \xrightarrow{x=-1} a + b + 1 = 0$$

$$a|x| - bx + 1 = 0 \xrightarrow{x=2} 2a - 2b + 1 = 0$$

$$ab = \frac{3}{16} \text{ و } b = -\frac{1}{4} \text{ و } a = -\frac{3}{4} \text{ بنابراین}$$

۹۳- گزینه ۳ هر دو عبارت رادیکالی باید بامعنی باشند. در نتیجه

$$\frac{16-x^2}{x} \geq 0 \text{ و } \frac{-x}{x+5} \geq 0.$$

جواب‌های نامعادله اول $(-\infty, -4] \cup (0, 4]$ و مجموعه جواب‌های نامعادله

دوم $[-5, 0]$ است. بنابراین دامنه تابع f برابر است با

$$((-\infty, -4] \cup (0, 4]) \cap (-5, 0] = (-5, -4]$$

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
$16-x^2$	-	0	+	+	-
x	-	-	0	+	+
$\frac{16-x^2}{x}$	+	0	-	+	-

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
$\frac{-x}{x+5}$	-	0	+	-

بنابراین $a=-5$ ، $b=-4$ و $a+b=-9$.

۹۴- گزینه ۳ شرط تعیین دامنه به صورت زیر است

$$(a+2)x^2+ax+b \geq 0$$

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق نمی‌تواند به صورت $(-\infty, 3]$ باشد، مگر

اینکه عبارت $(a+2)x^2+ax+b$ درجه اول باشد، یعنی $a+2=0$. در نتیجه

$a=-2$. پس نامعادله به صورت $-2x+b \geq 0$ درمی‌آید:

$$-2x+b \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{b}{2} \Rightarrow D_f = (-\infty, \frac{b}{2}]$$

بنابراین $\frac{b}{2}=3$ و در نتیجه $b=6$.

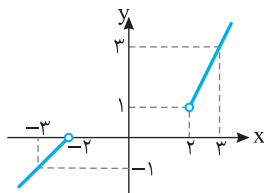
۹۵- گزینه ۳ دامنه تابع g از حل نامعادله $-x^3 f(x) \geq 0$ به دست

می‌آید. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه جواب‌های این نامعادله $\{ -1, 0 \} \cup [1, 2]$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$-x^3$	+	+	+	0	-	-	-
f(x)			-	0	+	-	
$-x^3 f(x)$			-	0	-	+	

۹۶- گزینه ۱ راه حل اول نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است

که برد تابع $[0, 1]$ است. پس $a=0$ و $b=1$. در نتیجه $a+b=1$.



راه حل دوم اگر $x > 2$ ، آن‌گاه

$$2x > 4 \Rightarrow 2x-3 > 1 \Rightarrow f(x) > 1$$

اگر $x < -2$ ، آن‌گاه

$$x+2 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

پس $R_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - [0, 1]$. در نتیجه

$$a+b=1$$

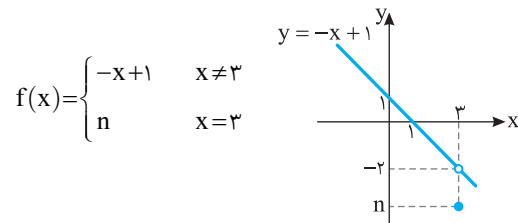
راه حل دوم برای اینکه تابع f خطی باشد، باید کسر $\frac{x^2-mx+3}{3-x}$ ساده

شود. یعنی باید صورت کسر عامل $x-3$ داشته باشد. پس صورت کسر به ازای $x=3$ صفر می‌شود.

$$9-3m+3=0 \Rightarrow m=4$$

$$\frac{x^2-mx+3}{3-x} = \frac{x^2-4x+3}{3-x} = \frac{(x-1)(x-3)}{-(x-3)} = -x+1$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



واضح است که اگر $n \neq -2$ آن‌گاه تابع f خطی نیست. پس $n=-2$ ، بنابراین

$$m+n=2$$

۹۰- گزینه ۳ ضابطه دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{bx+2}{ax+b} = c \Rightarrow acx+bc = bx+2$$

$$\begin{cases} ac=b \\ bc=2 \end{cases} \Rightarrow c \times ac = 2 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}, b=4 \\ c = -\frac{1}{2}, b=-4 \end{cases}$$

اگر $b=4$ ، آن‌گاه $f(x) = \frac{4x+2}{\lambda x+4}$. بنابراین $x = -\frac{1}{\lambda}$ در دامنه تابع f قرار

ندارد و در دامنه تابع g نیز نباید قرار داشته باشد. پس $a = -\frac{1}{\lambda}$ و در نتیجه

$\frac{ab}{c} = -4$. در حالت $b=-4$ ، $f(x) = \frac{-4x+2}{\lambda x-4}$ که نتیجه می‌شود $a = \frac{1}{\lambda}$

$$\frac{ab}{c} = 4 \text{ و}$$

۹۱- گزینه ۱ عددهایی که مخرج ضابطه تابع را صفر می‌کنند، در

دامنه تابع قرار ندارند. پس $x=2$ جواب معادله $x^3-(a+1)x+a=0$

است. پس

$$8-2(a+1)+a=0 \Rightarrow a=6$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{1}{x^3-7x+6}$ است. دامنه تابع را

به دست می‌آوریم:

$$x^3-7x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x-3)=0 \Rightarrow x=2, x=1, x=-3$$

در نتیجه $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2, -3\}$.

۹۲- گزینه ۳ شرایط زیر برای تعیین دامنه تابع وجود دارد:

$$2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$4-\sqrt{2x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} \leq 4 \Rightarrow 2x-1 \leq 16 \Rightarrow x \leq \frac{17}{2}$$

بنابراین $D_f = [\frac{1}{2}, \frac{17}{2}]$. پس $a = \frac{1}{2}$ ، $b = \frac{17}{2}$ و $a+b=9$.

۱۰۲- گزینه ۴ اگر شعاع دایره باشد، $P = 2\pi r$ و در نتیجه $r = \frac{P}{2\pi}$.

از طرف دیگر $S = \pi r^2$ بنابراین

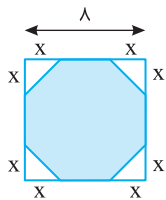
$$S = \pi \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 = \frac{\pi P^2}{4\pi^2} \Rightarrow S(P) = \frac{1}{4\pi} P^2$$

۱۰۳- گزینه ۲ ابعاد مستطیل x و $2 - \frac{x}{2}$ هستند، پس محیط آن

$$\text{به صورت } P(x) = 2(x + 2 - \frac{x}{2}) = x + 4$$

۱۰۴- گزینه ۲ با توجه به شکل درمی یابیم که اندازه شعاع ربع دایره و ضلع مربع برابر r است. از طرف دیگر، اگر مساحت ربع دایره را از مساحت مربع کم کنیم، مساحت قسمت رنگی به دست می آید، بنابراین

$$S(r) = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = \left(\frac{4-\pi}{4} \right) r^2$$



۱۰۵- گزینه ۳ مقدار x باید مثبت باشد و مقدار بریده شده یعنی $2x$ باید از ۸ کمتر باشد. پس $0 < 2x < 8 \Rightarrow 0 < x < 4$ در نتیجه $0 < x < 4$ بنابراین دامنه این تابع بازه $(0, 4)$ است.

۱۰۶- گزینه ۴ از روی شکل معلوم است که نقطه A از یک طرف تا محل برخورد خط با محور x ، یعنی نقطه $(6, 0)$ ، و از طرف دیگر تا مبدأ مختصات می تواند حرکت کند. بنابراین، دامنه این تابع بازه $(0, 6)$ است.

۱۰۷- گزینه ۴ توجه کنید که حجم مخزن برابر است با حجم نیم کره $2x$ + حجم استوانه V

$$= \pi(r^2)(2x) + 2x \times \frac{1}{3}\pi(r^2) = \frac{4\pi}{3}r^3 + 2\pi r^2 x$$

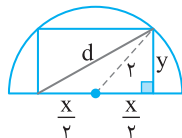
۱۰۸- گزینه ۲ مطابق شکل زیر، با استفاده از رابطه فیثاغورس،

$$\left(\frac{x}{2} \right)^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$$

همچنین طول قطر مستطیل از رابطه فیثاغورس قابل محاسبه است:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 4 - \frac{x^2}{4}}$$

بنابراین $d(x) = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 4}$ ضابطه تابع مورد نظر است.



۱۰۹- گزینه ۳ شیب خطی که از نقطه های $(2, 3)$ و $(x, 0)$ عبور

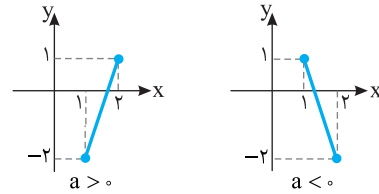
می کند، برابر $\frac{3-0}{2-x}$ است. شیب خطی که از نقطه های $(2, 3)$ و $(0, y)$ عبور

می کند، برابر $\frac{y-3}{0-2}$ است. چون نقطه های $(2, 3)$ ، $(x, 0)$ و $(0, y)$ روی

یک خط واقع اند، پس برابری $\frac{3-0}{2-x} = \frac{y-3}{0-2}$ برقرار است. بنابراین

$$y - 3 = \frac{-6}{2-x} \Rightarrow y = 3 - \frac{6}{2-x} \Rightarrow y = \frac{3x}{x-2}$$

۹۷- گزینه ۳ فرض کنید $f(x) = ax + b$. نمودار تابع f در دو حالت $a > 0$ و $a < 0$ را در شکل های زیر رسم کرده ایم.



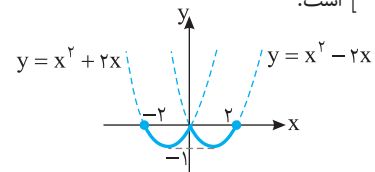
اگر $a > 0$ ، آن گاه $f(1) = -2$ و $f(2) = 1$ پس

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow f(x)=3x-5 \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right)=-1$$

اگر $a < 0$ ، آن گاه $f(1) = 1$ و $f(2) = -2$ پس

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-3x+4 \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right)=0$$

۹۸- گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که برد تابع f بازه $[-1, 0]$ است.

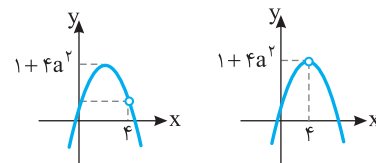


۹۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر دامنه تابع $f(x) = -x^2 - 4ax + 1$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، برد آن بازه $(-\infty, 1 + 4a^2]$ است. در این حالت نمودار تابع f یک سهمی است و با حذف یک عدد از دامنه مطابق شکل زیر، عددی از برد حذف نمی شود، مگر اینکه طول رأس سهمی را حذف کنیم. بنابراین طول رأس سهمی برابر ۴ و عرض آن برابر $1 + 4a^2$ است:

$$\text{طول رأس سهمی } x = -\frac{-4a}{2(-1)} = 4 \Rightarrow a = -2$$

$$y = 1 + 4a^2 = 1 + 16 \Rightarrow b = 17$$

بنابراین $a + b = 15$.



۱۰۰- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x \neq 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow a = 1$$

از طرف دیگر،

$$x = 1 \Rightarrow g(x) = g(1) = b, \quad f(1) = 4, \quad g(1) = f(1) \Rightarrow b = 4$$

بنابراین $a + b = 5$.

راه حل دوم با استفاده از نقطه های $x = 1$ و $x = 0$ مقادیر a و b به راحتی به دست می آیند.

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \Rightarrow a = 1 \\ f(1) = g(1) \Rightarrow 3 + a = b \end{cases} \xrightarrow{a=1} \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5$$

۱۰۱- گزینه ۴ طول مستطیل را x و عرض آن را $x - 2$ در نظر می گیریم، پس محیط آن برابر است با $P(x) = 2(x + x - 2) = 4x - 4$.

پس باید حاصل ضرب جواب‌های معادله $\frac{x^2+x-4}{2}=2$ را به دست آوریم

$$x^2+x-4=4 \Rightarrow x^2+x-8=0$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله بالا برابر $\frac{c}{a}=-8$ است.

۱۱۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$

از طرف دیگر،

$$D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x | f(x) = 0\} = (\mathbb{R} - \{2, 3\}) - \{x | \frac{x+4}{x-2} = 0\} \\ = \mathbb{R} - \{2, 3, -4\}$$

پس مجموع اعدادی که در دامنه تابع $\frac{g}{f}$ قرار ندارند برابر ۱ است.

۱۱۷- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع را حساب می‌کنیم:

$$f(x) + g(x) = x^2 - 4x, \quad f(x) - g(x) = x^2 - 6x - 12$$

با جمع طرفین دو تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$2f(x) = 2x^2 - 10x - 12 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x - 6$$

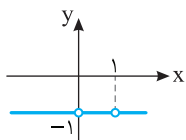
بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x | f(x) = 0\} \\ = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x | x^2 - 5x - 6 = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 6\}$$

۱۱۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ پس

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x^2+1}{x^2-x} = \frac{x-x^2}{x^2-x} = -1$$

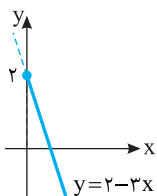


بنابراین باید نمودار تابع $y = -1$ را با دامنه $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ رسم کنیم که به صورت مقابل است.

۱۱۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = D_g = [0, +\infty)$ پس

$$D_{g-f} = D_f \cap D_g = [0, +\infty)$$

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = 2 - \sqrt{x} - (3x - \sqrt{x}) = 2 - 3x$$



پس نمودار تابع $g-f$ به صورت روبه‌رو است و برد آن بازه $(-\infty, 2]$ است.

۱۲۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x - (x+1) & x \geq 1 \\ x - 1 - 3x & x \leq -1 \end{cases} \\ = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -2x - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

اکنون برد تابع $f-g$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم

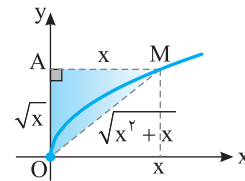
$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \\ x \leq -1 \Rightarrow -2x \geq 2 \Rightarrow -2x - 1 \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \end{cases}$$

۱۱۰- گزینه ۴ مطابق شکل زیر طول ضلع OM به کمک قضیه

$$\text{پیتاگورس برابر است با } \sqrt{AM^2 + OA^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + x}$$

پس محیط مثلث OAM برابر است با

$$P(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt{x^2 + x}$$



۱۱۱- گزینه ۲ اشتراک دامنه‌های f و g مجموعه $\{2, 3, 4\}$ است که

دامنه تابع $f+g$ است. پس این تابع به شکل

$$R_{f+g} = \{2, 11, -1\} \text{ است. بنابراین } f+g = \{(2, 2), (3, 11), (4, -1)\}$$

و مجموع اعضای برد $f+g$ برابر ۱۲ است.

۱۱۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f = \{1, 3, 5, -1\}, \quad D_g = \{1, 2, 5, 4\}$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1, 5\}$$

راه حل اول بنابراین a یکی از مقادیر ۱ یا ۵ است. از طرف دیگر،

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 4 = 6$$

$$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 2 - 4 = -2$$

$$(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 6 + 2 = 8$$

$$(f-g)(5) = f(5) - g(5) = 6 - 2 = 4$$

پس $(f+g)(5) = 2(f-g)(5)$ و در نتیجه $a = 5$.

راه حل دوم توجه کنید که

$$(f+g)(a) = 2(f-g)(a) \Rightarrow f(a) + g(a) = 2f(a) - 2g(a) \Rightarrow f(a) = 3g(a)$$

$$f(1) = 2, g(1) = 4 \Rightarrow f(1) \neq 3g(1)$$

$$f(5) = 6, g(5) = 2 \Rightarrow f(5) = 3g(5) \Rightarrow a = 5$$

۱۱۳- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ و

$$D_{2g-f} = D_g \cap D_f = \{-1, 0, 4\} \text{ بنابراین } D_g = \{-1, 1, 0, 2, 4\}$$

بنابراین a باید یکی از مقدارهای -1 یا 4 باشد:

$$(2g-f)(-1) = 2g(-1) - f(-1) = 4 - 2 = 2$$

$$(2g-f)(0) = 2g(0) - f(0) = 2 - 0 = 2$$

$$(2g-f)(4) = 2g(4) - f(4) = 6 - 2 = 4$$

پس $(2g-f)(4) = 4$ بنابراین $a = 4$ و در نتیجه $f(-a) = f(-4) = \sqrt{28}$.

۱۱۴- گزینه ۳ **راه حل اول** توجه کنید که

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{x^4-x^2}{x^2+1} = \frac{x^2-1+x^4-x^2}{x^2+1} \\ = \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x^2-1$$

راه حل دوم توجه کنید که $f(0) = -1$ و $g(0) = 0$ پس $(f+g)(0) = -1$ با

توجه به گزینه‌ها فقط در گزینه (۳) به ازای $x=0$ حاصل -1 است.

۱۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow f(x) + g(x) = x^2 - 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = x - 3$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم

$$f(x) + g(x) + f(x) - g(x) = x^2 - 1 + x - 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{2}$$

۱۲۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = x \Rightarrow g(x) = xf(x) \quad (2)$$

اگر به جای $g(x)$ در تساوی (۱) معادل آن یعنی $xf(x)$ را از تساوی (۲) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$f(x) \times xf(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

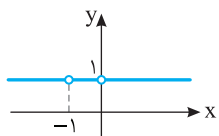
$$\text{بنابراین } g^2(x) = x^2 f^2(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2} \quad \text{در نتیجه}$$

$$(f^2 - g^2)(x) = f^2(x) - g^2(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{1+x}$$

۱۲۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$$



پس اگر $x \neq -1$ و $x \neq 0$ ، آن‌گاه $(f+g)(x) = 1$. بنابراین نمودار تابع $f+g$ به صورت مقابل است.

۱۲۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

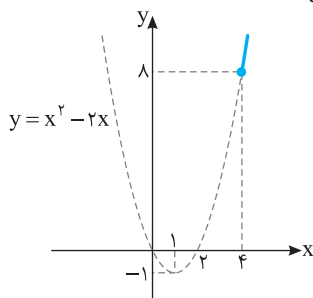
$$D_f = D_g = [4, +\infty)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + \sqrt{x-4} - 2x - \sqrt{x-4} = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

برای تعیین برد تابع $f-g$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$x \geq 4 \Rightarrow x-1 \geq 3 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 9 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 \geq 8 \Rightarrow (f-g)(x) \geq 8$$

پس $R_{f-g} = [8, +\infty)$. برد تابع $f-g$ از روی نمودار آن هم مشخص است.



۱۳۰- گزینه ۴ اگر $x > 1$ ، آن‌گاه

$$f(x) = 1, g(x) = -2 \Rightarrow (f-g)(x) = 1 - (-2) = 3$$

اگر $0 < x \leq 1$ ، آن‌گاه

$$f(x) = 1, g(x) = 2 \Rightarrow (f-g)(x) = 1 - 2 = -1$$

اگر $-1 \leq x < 0$ ، آن‌گاه

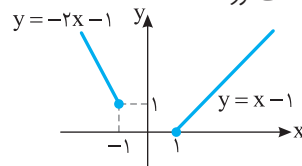
$$f(x) = -1, g(x) = 2 \Rightarrow (f-g)(x) = -1 - 2 = -3$$

اگر $x < -1$ ، آن‌گاه

$$f(x) = -1, g(x) = -2 \Rightarrow (f-g)(x) = -1 - (-2) = 1$$

بنابراین $R_{f-g} = \{3, -1, -3, 1\}$.

بنابراین برد تابع $f-g$ بازه $[0, +\infty)$ است. از روی نمودار تابع $f-g$ هم می‌توان برد آن را به دست آورد.



۱۳۱- گزینه ۴ توجه کنید که $D_{f-2g} = D_f \cap D_g = \{0, 1, 2\}$. بنابراین

$$(f-2g)(0) = f(0) - 2g(0) = 1 - 2(-1) = 3$$

$$(f-2g)(1) = f(1) - 2g(1) = 4 - 2(-2) = 8$$

$$(f-2g)(2) = f(2) - 2g(2) = -6 - 2(3) = -12$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $f-2g$ برابر ۱- است.

۱۳۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f+g)(x) = 2x+1 \Rightarrow (f+g)(2) = 2 \times 2 + 1 = 5 \Rightarrow f(2) + g(2) = 5 \quad (1)$$

$$(f-g)(x) = 1-x \Rightarrow (f-g)(2) = 1-2 = -1 \Rightarrow f(2) - g(2) = -1 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به دست می‌آید $f(2) = 2$ و $g(2) = 3$. بنابراین $(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 2 \times 3 = 6$.

۱۳۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$D_f = (-\infty, 4] - \{0\}, \quad D_g = \{-2, -1, 0, 3, 4, 5\}$$

بنابراین

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\} = \{-2, -1, 3, 4\} - \{-1\} = \{-2, 3, 4\}$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ سه زوج مرتب دارد.

۱۳۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |x-1| + |x| = \begin{cases} -2x+1 & x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

در بازه $[0, 1]$ تابع $f+g$ ثابت است. در این بازه،

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \left| \frac{x-1}{-} \right| - \left| \frac{x}{+} \right| = -x+1-x = -2x+1$$

۱۳۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f+2g)(x) = f(x) + 2g(x) \Rightarrow f(x) + 2g(x) = 1-x$$

$$f(x) = 1-x-2g(x)$$

$$(2f-g)(x) = 2f(x) - g(x) \Rightarrow 2f(x) - g(x) = x^2$$

بنابراین

$$2(1-x-2g(x)) - g(x) = x^2 \Rightarrow -5g(x) + 2-2x = x^2$$

$$g(x) = \frac{1}{5}(-x^2 - 2x + 2)$$

۱۳۶- گزینه ۱ ابتدا دامنه تابع‌های f و g را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5-x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow 1 < x \leq 5 \Rightarrow D_f = (1, 5]$$

$$\frac{x-1}{4-x} \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x < 4 \Rightarrow D_g = [1, 4)$$

بنابراین

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (1, 5] \cap [1, 4) = (1, 4)$$

۱۳۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1}{(ax+2)^2}, \quad g(x) = \frac{1}{(x+1)(x+b)}$$

چون فقط $x = -1$ در دامنه تابع $f+g$ قرار ندارد، پس تنها $x = -1$ می‌تواند ریشه مخرج در تابع‌های f و g باشد. بنابراین باید $b = 1$. برای a دو حالت وجود دارد:

حالت اول اگر $x = -1$ ریشه مخرج $f(x)$ باشد، آن‌گاه $a = 2$.

حالت دوم اگر مخرج $f(x)$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه $a = 0$.
بنابراین $a+b$ می‌تواند ۱ یا ۳ باشد.

۱۳۷- گزینه ۲ ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$ax - a + 1 \geq 0 \Rightarrow ax \geq a - 1$$

اگر $a > 0$ ، آن‌گاه $x \geq \frac{a-1}{a}$. اگر $a < 0$ ، آن‌گاه $x \leq \frac{a-1}{a}$. اگر $a = 0$ ، آن‌گاه

$x \in \mathbb{R}$. با توجه به این موضوع و اینکه $D_{f \times g} = [2, 5]$ و $D_g = [2, +\infty)$

باید $D_f = (-\infty, \frac{a-1}{a}]$ در نتیجه

$$\frac{a-1}{a} = 5 \Rightarrow a - 1 = 5a \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{پس } f(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \text{ و در نتیجه } f(x) = \sqrt{-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}$$

۱۳۸- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع $(f+g)^2$ را به دست می‌آوریم (توجه کنید که $x \geq 1$):

$$\begin{aligned} (f+g)^2(x) &= f^2(x) + g^2(x) + 2f(x)g(x) \\ &= x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 2\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = 2x + 2\sqrt{x^2 - x} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $f(x)$ و $g(x)$ عبارت‌هایی مثبت هستند، پس $(f+g)(x)$ هم مثبت است. بنابراین $(f+g)(x) = \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - x}}$. پس $a = 2$ ، $b = 1$ و در نتیجه $a+b = 3$.

۱۳۹- گزینه ۳ دامنه تابع‌های f و g به صورت زیر است:

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$a - x \geq 0 \Rightarrow x \leq a \Rightarrow D_g = (-\infty, a]$$

چون $D_{f-g} = D_f \cap D_g = [2, 4]$ ، پس $a = 4$. از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} (f+g)(3) = 5 &\Rightarrow f(3) + g(3) = \sqrt{3-2} + \sqrt{4-3} + b = 5 \\ 2+b=5 &\Rightarrow b=3 \end{aligned}$$

در نتیجه $a+b = 7$.

۱۴۰- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ x+2 & 0 < x < 1 \\ x+2 & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \leq 0 \\ 2x+3 & 0 < x < 1 \\ 3x+2 & x \geq 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} -3x-1 & x \leq 0 \\ -x-1 & 0 < x < 1 \\ -2x & x \geq 1 \end{cases}$$

۱۳۱- گزینه ۱ دامنه تابع g به شکل زیر است:

$$D_g = D_f - \{x | f(x) = 2\} = \{1, 4, 3, 5\} - \{4, 3\} = \{1, 5\}$$

از طرف دیگر،

$$g(1) = \frac{f(1)}{2-f(1)} = \frac{-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}, \quad g(5) = \frac{f(5)}{2-f(5)} = \frac{1}{2-1} = 1$$

بنابراین $g = \{(1, -\frac{1}{3}), (5, 1)\}$.

۱۳۲- گزینه ۱ ابتدا مقادیر $f(a)$ و $g(a)$ را به دست می‌آوریم:

$$(f-g)(a) = 2 \Rightarrow f(a) - g(a) = 2 \Rightarrow f(a) = g(a) + 2 \quad (1)$$

$$(f \times g)(a) = 8 \Rightarrow f(a)g(a) = 8 \xrightarrow{(1)} (g(a)+2)g(a) = 8$$

$$g^2(a) + 2g(a) - 8 = 0 \Rightarrow (g(a)+4)(g(a)-2) = 0$$

$$\begin{cases} g(a) = -4 \xrightarrow{(1)} f(a) = -2 \\ g(a) = 2 \xrightarrow{(1)} f(a) = 4 \end{cases}$$

بنابراین

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{4}{2} = 2, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

۱۳۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$D_f = [-3, 3], \quad D_g = \{1, -1, 3, -3, -4\}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{9-x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\} = \{1, -1, 3, -3\} - \{3, -3\} = \{1, -1\}$$

از طرف دیگر،

$$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left(\frac{g}{f}\right)(-1) = \frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین $\frac{g}{f} = \{(1, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-1, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$ و در نتیجه برد تابع $\frac{g}{f}$ فقط یک عضو دارد.

۱۳۴- گزینه ۴ دامنه تابع‌های f و g مجموعه $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ است. پس

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

اکنون ضابطه تابع $f-g$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-x} \\ &= \frac{x+x-1-1}{x^2-x} = \frac{2(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

۱۳۵- گزینه ۱ ابتدا دامنه تابع‌های f و g را به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow D_g = [-2, 1]$$

بنابراین $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 1]$. پس $a = -2$ ، $b = 1$ و در نتیجه

$$a+b = -1$$

۱۴۸- گزینه ۳ ابتدا دامنه تابع $g \circ f$ را با توجه به $D_f = [-2, 2]$ و

$$D_g = \mathbb{R} \text{ به دست می آوریم}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{-2 \leq x \leq 2, \sqrt{4-x^2} \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

اکنون ضابطه تابع $g \circ f$ را مشخص می کنیم

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{4-x^2}) = (\sqrt{4-x^2})^2 + 1 = 5 - x^2$$

برای محاسبه برد از دامنه تابع کمک می گیریم

$$-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -x^2 \leq 0$$

$$1 \leq 5 - x^2 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq (g \circ f)(x) \leq 5$$

$$\text{بنابراین } R_{g \circ f} = [1, 5]$$

۱۴۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \geq a, 0 \leq |x-1| \leq 3\}$$

$$= \{x \mid x \geq a, -3 \leq x-1 \leq 3\} = \{x \mid x \geq a, -2 \leq x \leq 4\}$$

بنابراین $D_{f \circ g} = [a, +\infty) \cap [-2, 4] = [-2, 4]$ برای اینکه این تساوی برقرار

باشد، باید $a \leq -2$ یعنی حداکثر مقدار a برابر -2 است.

۱۵۰- گزینه ۳ می توان نوشت

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x)-1 & g(x) < 0 \\ g(x)+4 & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(3x-6)-1 & 3x-6 < 0 \\ 3x-6+4 & 3x-6 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 6x-13 & x < 2 \\ 3x-2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۱۵۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(3) = 7, \quad (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 5$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(0) = -1, \quad (f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(1) = 0$$

$$\text{بنابراین } f \circ g = \{(-1, 7), (1, 5), (3, -1), (5, 0)\}$$

۱۵۲- گزینه ۱ توجه کنید که $f(2) = 3$ در نتیجه

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 3m+2 = 8 \Rightarrow m = 2$$

۱۵۳- گزینه ۴ ابتدا $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ را به دست می آوریم

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = \frac{1}{2x+1-1} = \frac{1}{2x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{x-1} + 1 = \frac{x+1}{x-1}$$

بنابراین

$$(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2x^2+2x}{2x(x-1)} = \frac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x}$$

۱۵۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f^2(x) + 3f(x) + 2$$

بنابراین

$$(f \circ f)(x) = 6 \Rightarrow f^2(x) + 3f(x) + 2 = 6$$

$$f^2(x) + 3f(x) - 4 = 0 \Rightarrow (f(x)-1)(f(x)+4) = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 & (1) \\ f(x) = -4 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = -4 \Rightarrow x^2 + 3x + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

معادله (۲) جواب ندارد ($\Delta < 0$). در معادله (۱) حاصل جمع جوابها برابر -3 است.
پس حاصل جمع جوابهای معادله $(f \circ f)(x) = 6$ برابر -3 است.

راحل دوم توجه کنید که $f(2) = 4$ و $g(2) = 8$ پس

$$(f-g)(2) = 4-8 = -4$$

$$\text{همچنین } g\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \text{ و } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \text{ پس } (f-g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{همچنین } f(-1) = 3 \text{ و } g(-1) = 1 \text{ پس } (f-g)(-1) = 3-1 = 2$$

همه این شرایط فقط در تابع گزیده (۲) وجود دارد.

۱۴۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(2) = 3$$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-3) = -2$$

$$\text{بنابراین } (f \circ g)(-2) - (g \circ f)(-1) = 3 - (-2) = 5$$

۱۴۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $(f \circ g)(-2) = f(g(-2))$ از

$$f(g(-2)) = f(4) = 4^2 + 2 = 18 \text{ و } g(-2) = -2 + 6 = 4$$

۱۴۳- گزینه ۲ راحل اول توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 2 = 3(4x+3) - 2 = 12x + 7$$

$$\text{بنابراین } (f \circ g)(x-1) = 12(x-1) + 7 = 12x - 5$$

راحل دوم دقت کنید که

$$(f \circ g)(x-1) = f(g(x-1)) = f(4(x-1)+3)$$

$$= f(4x-1) = 3(4x-1) - 2 = 12x - 5$$

۱۴۴- گزینه ۴ راحل اول توجه کنید که $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

بنابراین

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) - 2}{\frac{2x+1}{x-1} + 2} = \frac{4x+2-2x+2}{2x+1+2x-2} = \frac{2x+4}{4x-1}$$

راحل دوم توجه کنید که $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = -4$ فقط در

گزینه (۴)، تساوی بالا برقرار است.

۱۴۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 6x + 15) = 5x^2 - 3x + 2$$

بنابراین $f((x-3)^2 + 6) = 5x^2 - 3x + 2$ اگر در این تساوی قرار دهیم

$$x = 3, \text{ به دست می آید } f(6) = 38$$

۱۴۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$D_{f \circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_f\} = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq 4-2x \leq 2\}$$

از نامعادله $1 \leq 4-2x \leq 2$ نتیجه می شود $-3 \leq -2x \leq -2$ پس $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

$$\text{بنابراین } D_{f \circ f} = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\} = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

۱۴۷- گزینه ۳ فرض کنید $g(x) = x^2$ تابع $f(x^2)$ تابع $f \circ g$

است. بنابراین می توان نوشت

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 \leq x^2 \leq 4\}$$

از نامعادله های $1 \leq x^2 \leq 4$ نتیجه می شود

$$\begin{cases} x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x^2 \Rightarrow x \leq -1, x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2 \leq x \leq -1, 1 \leq x \leq 2$$

$$\text{بنابراین } D_{f \circ g} = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

کافی است نامعادله‌های $f(x) > 0$ و $f(x) < 0$ را حل کنیم.

حل $f(x) > 0$: اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \geq 0$$

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

حل $f(x) < 0$: اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x < 0$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 3-(x+1) & x \geq 0 \\ 2-(x-1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x & x \geq 0 \\ 3-x & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین **۱۶۱- گزینه ۳** توجه کنید که

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(3) = 3 \Rightarrow d = 3$$

بنابراین $a-b+c-d=0$.

۱۶۲- گزینه ۴ ابتدا مقادیر $(f \circ g)(2)$ و $(g \circ f)(a)$ را به دست می‌آوریم

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 4 + a$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(3a) = 6 - 6a$$

بنابراین باید معادله زیر را حل کنیم

$$4 + a - (6 - 6a) = 3 \Rightarrow 7a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{7}$$

۱۶۳- گزینه ۴ باید $(f \circ f)(x)$ را به دست آوریم

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)+2}{f(x)-2} = \frac{\frac{x+2}{x-2}+2}{\frac{x+2}{x-2}-2} = \frac{x+2+2x-4}{x+2-2x+4} = \frac{3x-2}{-x+6}$$

۱۶۴- گزینه ۴ با توجه به ضابطه تابع f ،

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-1}$$

بنابراین

$$\frac{g(x)}{g(x)-1} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow 2xg(x) + g(x) = xg(x) - x$$

$$(x+1)g(x) = -x \Rightarrow g(x) = \frac{-x}{x+1}$$

۱۶۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{4f(x)-19}$$

بنابراین

$$\sqrt{4f(x)-19} = \sqrt{4g(x)+x} \Rightarrow 4f(x)-19 = 4g(x)+x$$

$$f(x) - g(x) = \frac{x+19}{4} \Rightarrow (f-g)(x) = \frac{x+19}{4}$$

$$(f-g)(5) = \frac{5+19}{4} = 6 \text{ در نتیجه}$$

۱۵۵- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$g(x-1) = \frac{x+2}{3} \xrightarrow{x \rightarrow x+1} g(x) = \frac{(x+1)+2}{3} = \frac{x+3}{3}$$

بنابراین

$$(f \circ g)(x) = 6x+5 \Rightarrow f(g(x)) = 6x+5 \Rightarrow f\left(\frac{x+3}{3}\right) = 6x+5$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$ ، به دست می‌آید $f(1)=5$.

۱۵۶- گزینه ۲ ابتدا دامنه تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \sqrt{3-x^2} \in \{-3, 0, 1, 2\}\}$$

$$\sqrt{3-x^2} = -3 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$\sqrt{3-x^2} = 0 \Rightarrow 3-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3-x^2} = 1 \Rightarrow 3-x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3-x^2} = 2 \Rightarrow 3-x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین

$$D_{g \circ f} = \{-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, x \in \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}\} = \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}$$

پس حاصل ضرب اعضای دامنه تابع $g \circ f$ برابر ۶ است.

۱۵۷- گزینه ۳ فرض کنید $g(x) = 2^x$ ، تابع $y = f(2^x)$ تابع

$y = (f \circ g)(x)$ است. دامنه تابع g ، $\mathbb{R}$ است، پس

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 \leq 2^x \leq 4\}$$

از نامعادله‌های $1 \leq 2^x \leq 4$ نتیجه می‌شود $0 \leq x \leq 2$ ، پس $D_{f \circ g} = [0, 2]$.

۱۵۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ و

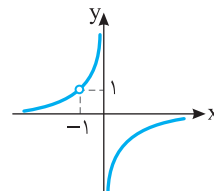
$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq -1, \frac{x-1}{x+1} \neq -1\}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = -1 \Rightarrow x-1 = -x-1 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین $D_g = D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$. اکنون ضابطه تابع g را به دست می‌آوریم

$$g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} = \frac{x-1-x-1}{x-1+x+1} = \frac{-2}{x+1}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل مقابل است.



۱۵۹- گزینه ۳ توجه کنید که

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, 1 \leq x^2 - 3 \leq 13\}$$

از حل نامعادله $1 \leq x^2 - 3 \leq 13$ نتیجه می‌شود $2 \leq x \leq 4$ یا $-4 \leq x \leq -2$.

بنابراین $D_{g \circ f} = [2, 3] \cup \{-2\}$.

۱۶۰- گزینه ۴ تابع $g \circ f$ به شکل زیر است

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 3-f(x) & f(x) > 0 \\ 2-f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

۱۷۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 6x-1 & x < 0 \\ 3x-4 & x \geq 0 \end{cases}$$

۱۷۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(1) &= 4, & f(2) &= 3, & f(3) &= 2, & f(4) &= 1, & f(5) &= 5 \\ f(g(1)) &= 2, & f(g(2)) &= 5, & f(g(3)) &= 1, & f(g(4)) &= 4, & f(g(5)) &= 3 \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(g(1)) &= f(2) \Rightarrow g(1) = 3, & f(g(2)) &= f(3) \Rightarrow g(2) = 5 \\ f(g(3)) &= f(2) \Rightarrow g(3) = 4, & f(g(4)) &= f(1) \Rightarrow g(4) = 1 \\ f(g(5)) &= f(5) \Rightarrow g(5) = 2 \end{aligned}$$

بنابراین $g = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (5, 2)\}$

۱۷۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \Delta &= (gof)(a) = g(f(a)) = g(a + \sqrt{a}) \\ \text{از طرف دیگر } g(6) &= 5, \text{ پس} \\ a + \sqrt{a} &= 6 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow g(a) = g(4) = 1 \end{aligned}$$

۱۷۳- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$\begin{aligned} (fog)(x) &= f(g(x)) = f(-5x + 2a) \\ &= 2(-5x + 2a) - a + 1 = -10x + 3a + 1 \\ (gof)(x) &= g(f(x)) = g(2x - a + 1) \\ &= -5(2x - a + 1) + 2a = -10x + 7a - 5 \end{aligned}$$

چون $(fog)(x) = (gof)(x)$ همواره برقرار است، پس

$$7a - 5 = 3a + 1 \Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

راه حل دوم تساوی داده شده به ازای $x = 0$ برقرار است. پس

$$\begin{aligned} (fog)(0) &= (gof)(0) \Rightarrow f(g(0)) = g(f(0)) \Rightarrow f(2a) = g(-a + 1) \\ 4a - a + 1 &= -5(-a + 1) + 2a \Rightarrow 3a + 1 = 7a - 5 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

۱۷۴- گزینه ۱ توجه کنید که $(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

$$g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-2} - 2} \quad (*)$$

اگر فرض کنیم $t = \frac{x+1}{x-2}$ ، آن گاه

$$tx - 2t = x + 1 \Rightarrow (t-1)x = 2t + 1 \Rightarrow x = \frac{2t+1}{t-1}$$

در تساوی $(*)$ به جای x قرار می دهیم و نتیجه می شود

$$g(t) = \frac{1}{\frac{2t+1}{t-1} - 2} = \frac{t-1}{2t+1-2t+2} = \frac{t-1}{4t-1} \Rightarrow g(x) = \frac{x-1}{4x-1}$$

۱۷۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(gof)(x) = x^2 + f(x) \Rightarrow g(f(x)) = x^2 + f(x)$$

$$f^2(x) - 3f(x) + 4 = x^2 + f(x)$$

$$f^2(x) - 4f(x) - x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (f(x) - 2)^2 = x^2$$

چون f تابعی چند جمله ای است، پس $f(x) - 2 = -x$ یا $f(x) - 2 = x$. پس

$$f(x) = -x + 2 \quad \text{یا} \quad f(x) = x + 2$$

۱۶۶- گزینه ۳ دامنه تابع های f و g به شکل زیر است:

$$D_f = [1, +\infty), \quad D_g = [0, 3]$$

بنابراین $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 1 \mid 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3\}$

نامعادله های $0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$ نتیجه می شود
 $x-1 \leq 9 \Rightarrow x \leq 10$

بنابراین $D_{gof} = \{x \mid x \geq 1, x \leq 10\} = [1, 10]$

۱۶۷- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $g(x) = \frac{1}{x} + 3$ ، آن گاه $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

و $h(x) = f(g(x)) = (fog)(x)$ بنابراین

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid 2 \leq \frac{1}{x} + 3 \leq 4\}$$

باید نامعادله های $2 \leq \frac{1}{x} + 3 \leq 4$ را حل کنیم:

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 & (1) \\ \frac{1}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x} \geq 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

از حل نامعادله (۱) نتیجه می شود $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ و از حل نامعادله (۲)

نتیجه می شود $x \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$. از اشتراک ناحیه های به دست آمده

دامنه تابع h مشخص می شود: $D_h = \mathbb{R} - (-1, 1)$

۱۶۸- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا دامنه تابع gof را مشخص می کنیم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 1 \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

اکنون ضابطه تابع gof را به دست می آوریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 6 = x - 1 + 6 = x + 5$$

اکنون با توجه به دامنه تابع gof که شرط $x \geq 1$ را دارد، برد آن را پیدا می کنیم:

$$x \geq 1 \Rightarrow x + 5 \geq 6 \Rightarrow (gof)(x) \geq 6 \Rightarrow R_{gof} = [6, +\infty)$$

راه حل دوم چون $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، پس $f(x) \geq 0$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x) = g(f(x)) = f^2(x) + 6 \geq 6$$

بنابراین $R_{gof} = [6, +\infty)$

۱۶۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq -2, \frac{2x-4}{x+2} \neq -2\}$$

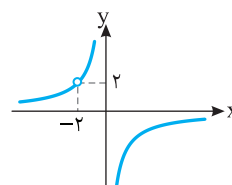
$$\frac{2x-4}{x+2} \neq -2 \Rightarrow 2x-4 \neq -2x-4 \Rightarrow x \neq 0$$

بنابراین $D_g = D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$. اکنون ضابطه تابع g را به دست می آوریم:

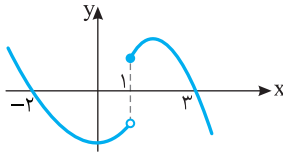
$$g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2f(x) - 4}{f(x) + 2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\left(\frac{2x-4}{x+2}\right) - 4}{\frac{2x-4}{x+2} + 2} = \frac{4x-8-4x-4}{2x-4+2x+4} = -\frac{4}{x} \end{aligned}$$

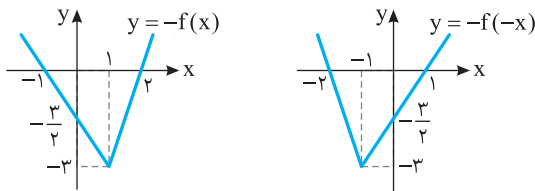
بنابراین نمودار تابع g به شکل زیر است و برد تابع g برابر است با $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.



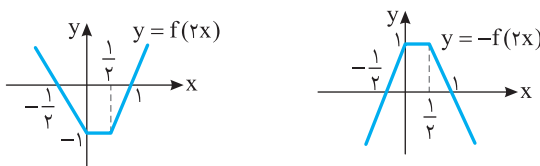
۱۸۱- گزینه ۱ برای رسم نمودار تابع f باید قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.



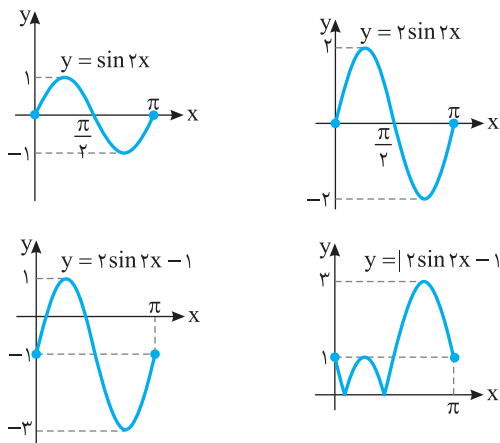
۱۸۲- گزینه ۳ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(x)$ به دست بیاید. سپس، قرینه این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(-x)$ به دست بیاید.



۱۸۳- گزینه ۲ ابتدا طول نقاط روی نمودار f را در $\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(2x)$ به دست بیاید. اکنون قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(2x)$ به دست بیاید.



۱۸۴- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = \sin 2x$ را روی بازه $[0, \pi]$ رسم می‌کنیم. برای این کار، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم. سپس عرض هر نقطه روی نمودار به دست آمده را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2 \sin 2x$ روی بازه $[0, \pi]$ به دست بیاید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y = 2 \sin 2x - 1$ روی بازه $[0, \pi]$ به دست می‌آید. در آخر قرینه قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



۱۷۶- گزینه ۲ چون f خطی است، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

$$a^2x + ab + b = 4x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2, b = 3 \\ a = 2, b = -1 \end{cases}$$

بنابراین $f(x) = 2x - 1$ یا $f(x) = -2x + 3$ که نتیجه می‌شود $f(0) = 3$ یا $f(0) = -1$.

۱۷۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $((f \circ f) \circ g)(x) = f(f(g(x)))$ از طرف دیگر، می‌توان نوشت $f(g(x)) = f(|x|) = |x| + 2 - 4 = |x| - 2$ چون

$$f(g(x)) = |x| + 2 - 4 = |x| - 2 \text{ و } f(g(x)) = |x| + 2 - 4 = |x| - 2$$

$$f(f(g(x))) = f(|x| - 2) = ||x| - 2| + 2 - 4 = ||x| - 2| - 2 = |x| - 4$$

۱۷۸- گزینه ۳ ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4 - x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [0, 4]$$

بنابراین

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \in [0, 4] \mid 0 \leq 4x - x^2 - 1 \leq 4\}$$

پس

$$1 \leq \sqrt{4x - x^2} - 1 \leq 4 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 5 \Rightarrow 4 \leq 4x - x^2 \leq 25 \Rightarrow -3 \leq 4x - x^2 - 4 \leq 21$$

$$-3 \leq -(x-2)^2 \leq 21 \Rightarrow -21 \leq (x-2)^2 \leq 3 \Rightarrow |x-2| \leq \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3} \leq x-2 \leq \sqrt{3} \Rightarrow 2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in [0, 4] \mid 2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}\} = [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$$

۱۷۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_f = [k, +\infty)$

بنابراین

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{1}{x} + 3 \geq k\}$$

نامعادله $\frac{1}{x} + 3 \geq k$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} + 3 - k \geq 0 \Rightarrow \frac{1 + (3-k)x}{x} \geq 0$$

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق یا به صورت $[\frac{1}{k-3}, 0)$ یا به صورت

$$(-\infty, \frac{1}{k-3}) \cup (0, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

بنابراین

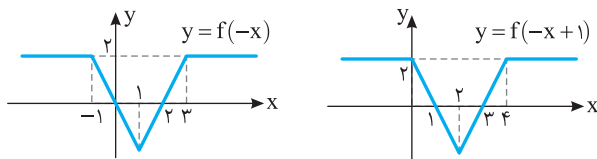
$$\frac{1}{k-3} = -1 \Rightarrow k-3 = -1 \Rightarrow k = 2$$

۱۸۰- گزینه ۳ توجه کنید که

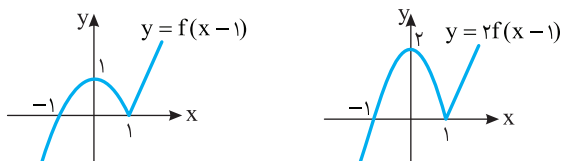
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) - 1 & g(x) < 0 \\ 3g(x) + 4 & 0 \leq g(x) < 2 \\ 5 & g(x) \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & x+1 < 0 \\ 3(x+1) + 4 & 0 \leq x+1 < 2 \\ 5 & x+1 \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2x & x < -1 \\ 3x + 7 & -1 \leq x < 1 \\ 5 & x \geq 1 \end{cases}$$

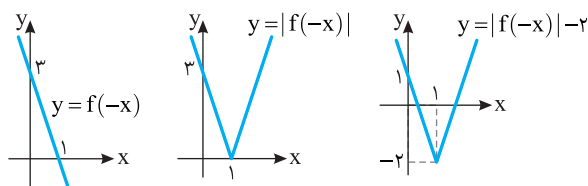
۱۹۰- گزینه ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(-(x-1))=f(-x+1)$ به دست می‌آید.



۱۹۱- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2f(x-1)$ به دست بیاید.



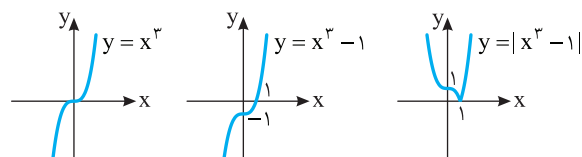
۱۹۲- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینه قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. در آخر، نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(-x)|-2$ به دست بیاید.



۱۹۳- گزینه ۱ برای رسم نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{2})$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم. همچنین باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.

۱۹۴- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=x^3-1$ به دست آید.

اکنون قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم، سپس قسمتی را که پایین محور طول‌ها است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x^3-1|$ به دست آید.



۱۹۵- گزینه ۱ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-1)+2$ به دست می‌آید. بنابراین باید جواب‌های معادله $f(x-1)+2=0$ را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} -(x-1)^2 + (x-1) - 2 + 2 &= 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 + x - 1 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1, x=2 \end{aligned}$$

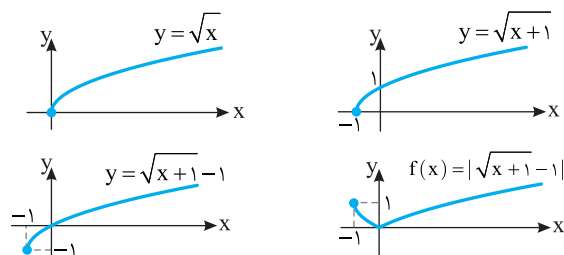
۱۸۵- گزینه ۳ اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را a واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به دست می‌آید. چون نمودار اخیر از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس $g(0)=0$. در نتیجه

$$\begin{aligned} g(0) &= f(-a) + a = 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 9 + a = 0 \\ a^2 - 6a + 9 &= 0 \Rightarrow (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a=3 \end{aligned}$$

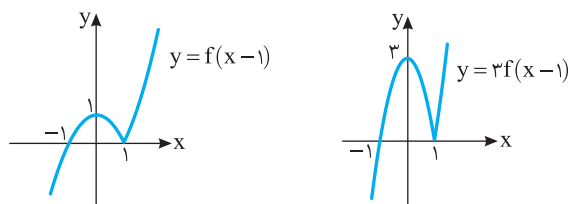
۱۸۶- گزینه ۲ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x-1}{2})$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت

به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(\frac{x-1}{2})$ به دست می‌آید.

۱۸۷- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+1}$ به دست آید، سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+1}-1$ به دست آید. اکنون قرینه قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f رسم شود.



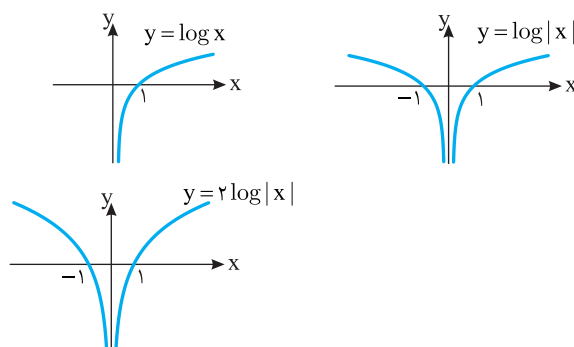
۱۸۸- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=3f(x-1)$ به دست بیاید.



۱۸۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log x^2=\log |x|^2=2\log |x|$$

پس ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و قرینه آن نسبت به محور عرض‌ها را به نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log |x|$ به دست آید. اکنون عرض نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2\log |x|$ به دست آید.



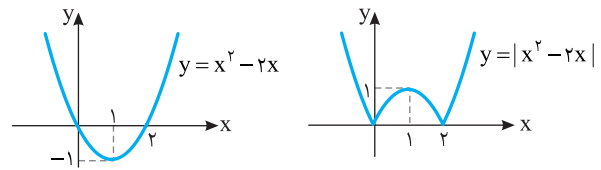
۱۹۶- گزینه ۱ اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار

تابع $y=f(2x)$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را سه برابر کنیم، نمودار تابع $y=3f(2x)$ رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=3f(2(x+2))$ رسم می‌شود. پس اکنون نمودار تابع $y=3f(2x+4)$ به دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=3f(-2x+4)$ به دست می‌آید.

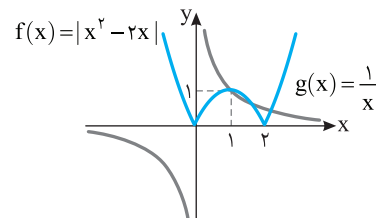
۱۹۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x)=|x||x-2|=|x(x-2)|=|x^2-2x|$$

بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^2-2x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینه قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در سه نقطه متقاطع‌اند.



۲۰۰- گزینه ۱ فرض کنید $h(x)=x-|x|$. در این صورت دامنه تابع g

با دامنه تابع f برابر است:

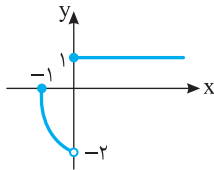
$$D_{f \circ h} = \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\} = \{x \mid -2 \leq x - |x| \leq 2\} = [-1, +\infty)$$

اکنون توجه کنید که

$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) = -f(0), \quad x < 0 \Rightarrow g(x) = -f(2x)$$

پس $g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -f(2x) & -1 \leq x < 0 \end{cases}$. پس در بازه $[0, +\infty)$ باید نمودار

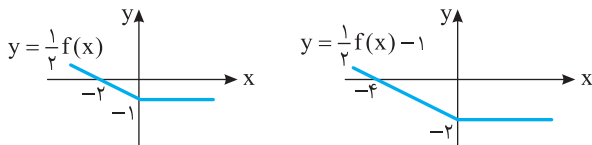
تابع $y=1$ را رسم کنیم و در بازه $[-1, 0)$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم تا نمودار تابع $y=-f(2x)$ رسم شود.



۲۰۱- گزینه ۳ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم

تا نمودار تابع $\frac{1}{2}f$ به دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال

می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(x)-1$ به دست بیاید.



توجه کنید که اگر $x < 0$ ، نمودار f خطی است که از نقطه‌های $(0, -2)$ و

$(-2, 0)$ می‌گذرد، بنابراین اگر $x < 0$ ، ضابطه f به صورت $f(x) = -x - 2$

است. در نتیجه اگر $x < 0$ و $\frac{1}{2}f(x) - 1 = 0$ ، آن‌گاه $\frac{1}{2}(-x-2) - 1 = 0$ ، پس

$x = -4$. یعنی نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(x)-1$ محور x را در نقطه‌ای به طول

-4 قطع می‌کند.

۲۰۲- گزینه ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم،

نمودار تابع $y=f(-x)$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت

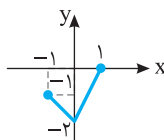
راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(-(x-1))$ به دست می‌آید. پس نمودار

نهایی نمودار تابع $y=f(-x+1)$ است.

۲۰۳- گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)$ باید در نمودار

تابع f طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم و عرض نقاط را در $-\frac{1}{2}$ ضرب کنیم.

بنابراین نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود و در راستای محور عرض‌ها علاوه بر اینکه منقبض می‌شود، نسبت به محور طول‌ها قرینه هم می‌شود.

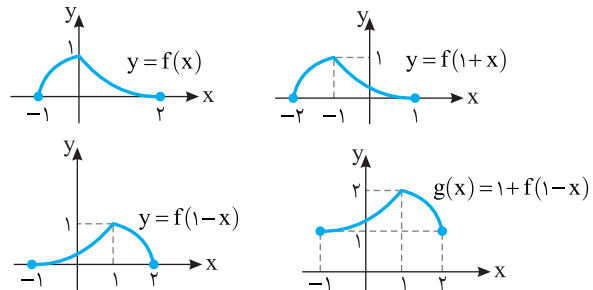


۱۹۸- گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا

نمودار تابع $y=f(1+x)$ رسم شود. سپس نمودار این تابع را نسبت به محور

عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1-x)$ رسم شود. در آخر نمودار حاصل

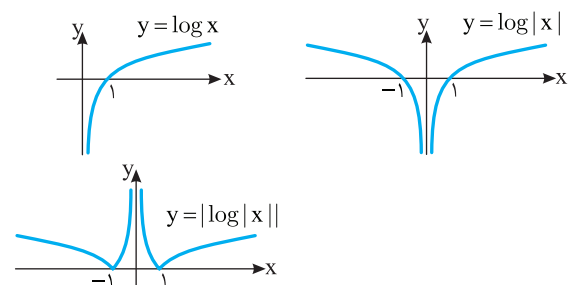
را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $g(x)=1+f(1-x)$ رسم شود.



نمودار تابع‌های f و g را در شکل روبه‌رو

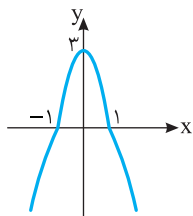
مشاهده می‌کنید که نقطه مشترکی ندارند.

۱۹۹- گزینه ۳ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم



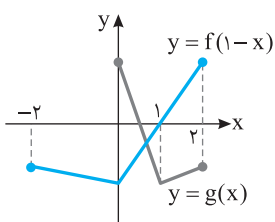
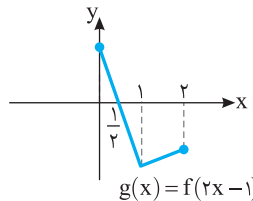
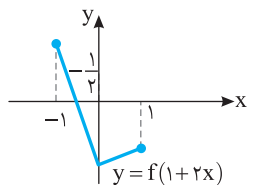
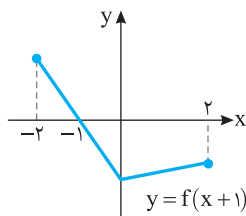
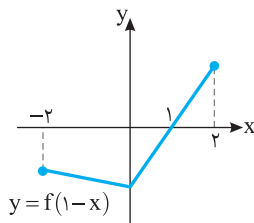
۲۰۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$g(x) = -2f(x) + |f(x)| = \begin{cases} -2f(x) + f(x) & f(x) \geq 0 \\ -2f(x) + (-f(x)) & f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} -f(x) & f(x) \geq 0 \\ -3f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$



بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f منفی است، یعنی در بازه $(-1, 1)$ ، عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، در بقیه جاها نمودار g قرینه نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

۲۰۹- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = f(1-x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f(1+x)$ به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y = f(1+2x)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(1+2(x-1)) = f(2x-1)$ به دست می‌آید.

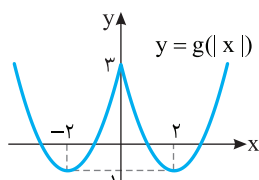
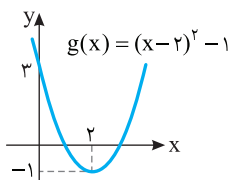


با توجه به شکل مقابل نمودار توابع $y = f(1-x)$ و $y = g(x)$ یک نقطه برخورد دارند.

۲۱۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = |x|^2 - 4|x| + 3$$

پس اگر فرض کنیم $g(x) = x^2 - 4x + 3$ ، آن‌گاه $f(x) = g(|x|)$. به این ترتیب، کافی است نمودار $y = g(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، ابتدا نمودار تابع g را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



۲۰۴- گزینه ۴ توجه کنید که اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(x-a)$ به دست می‌آید و اگر نمودار به دست آمده را a واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x) = f(x-a) + a$ به دست می‌آید. این نمودار باید از مبدأ مختصات عبور کند، پس $g(0) = 0$ و در نتیجه $f(-a) + a = 0$. اگر $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ ، آن‌گاه

$$f(-a) + a = 0 \Rightarrow -a^2 - 3a - 2 + a = 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 2 = 0$$

$$\text{اگر } f(x) = x^2 + 1, \text{ آن‌گاه}$$

$$f(-a) + a = 0 \Rightarrow a^2 + 1 + a = 0 \Rightarrow a^2 + a + 1 = 0$$

$$\text{اگر } f(x) = -x^2 - 1, \text{ آن‌گاه}$$

$$f(-a) + a = 0 \Rightarrow -a^2 - 1 + a = 0 \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0$$

معادله‌های بالا جواب ندارند، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) جواب نیستند.

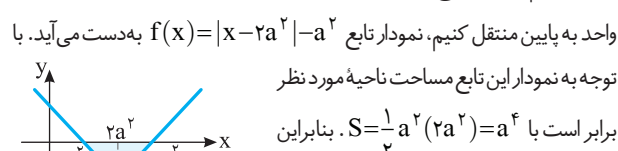
$$\text{اگر } f(x) = x^2 + 5x + 4, \text{ آن‌گاه}$$

$$f(-a) + a = 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 + a = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$(a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۲۰۵- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = |x|$ را $2a^2$ واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع $y = |x - 2a^2|$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را a^2 واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x) = |x - 2a^2| - a^2$ به دست می‌آید. با توجه به نمودار این تابع مساحت ناحیه مورد نظر



$$\text{برابر است با } S = \frac{1}{2} a^2 (2a^2) = a^4 \text{، بنابراین}$$

$$a^4 = 4 \text{، پس } a = \pm \sqrt{2}$$

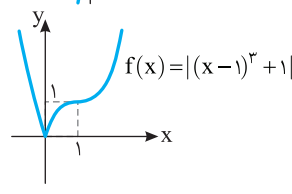
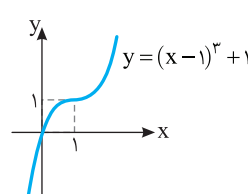
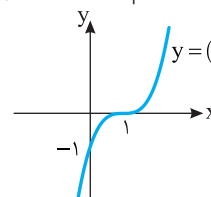
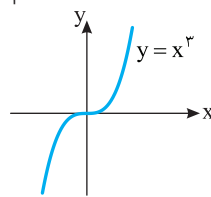
۲۰۶- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = f(x-2)$ را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(x-1-2) = f(x-3)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(x-3) - 1$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -f(x-3) + 1$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -f(-x-3) + 1$ به دست می‌آید. اکنون اگر طول نقاط روی نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y = -f(-2x-3) + 1$ به دست می‌آید.

۲۰۷- گزینه ۱ ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = |x^3 - 3x^2 + 3x| = |(x-1)^3 + 1|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه کنیم و در آخر قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.



۲۱۵- گزینه ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که a عددی مثبت است.

از طرف دیگر،

$$f(0) = |a| - 2 = a - 2, \quad f(a) = -2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow |x - a| - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - a = 2 \Rightarrow x = a + 2 \\ x - a = -2 \Rightarrow x = a - 2 \end{cases}$$

بنابراین با توجه به شکل زیر

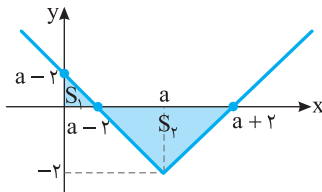
$$S_1 = \frac{(a-2)^2}{2}, \quad S_2 = \frac{2(a+2-(a-2))}{2} = 4$$

$$S_1 + S_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{(a-2)^2}{2} + 4 = \frac{9}{2} \Rightarrow a^2 - 4a + 4 + 8 = 9$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a-1) = 0 \Rightarrow a = 3, a = 1 \text{ (غ.ق.)}$$

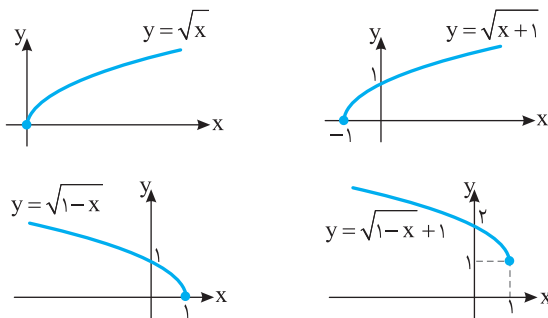
اگر $a = 1$ ، آن‌گاه $f(x) = |x-1| - 2$ و در نتیجه $f(0) = -1$ ولی در نمودار رسم شده مقدار $f(0)$ عددی مثبت است. پس $a = 1$ قابل قبول نیست. در نتیجه

$$f(x) = |x-3| - 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left|\frac{1}{3} - 3\right| - 2 = \frac{2}{3}$$



۲۱۶- گزینه ۴ نمودار تابع را به شکل زیر رسم می‌کنیم. بنابراین اگر

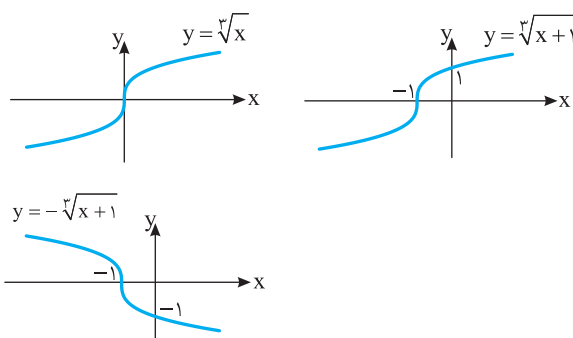
نمودار نهایی را دو واحد به پایین ببریم، هر دو محور مختصات را قطع می‌کند.



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x > 0 \\ -\sqrt[3]{x+1} & x < 0 \end{cases} \quad \text{ضابطهٔ تابع به شکل}$$

است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y = \sqrt[3]{x+1}$ و $y = -\sqrt[3]{x+1}$

به صورت زیر است:



۲۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که همواره $f(x) \leq 0$. بنابراین

$$y = |f(x)| - f(x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$$

برای رسم کردن نمودار $y = -2f(x)$ ، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2f(x)$ به دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -2f(x)$ به دست بیاید.



۲۱۲- گزینه ۴ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع

$y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به چپ

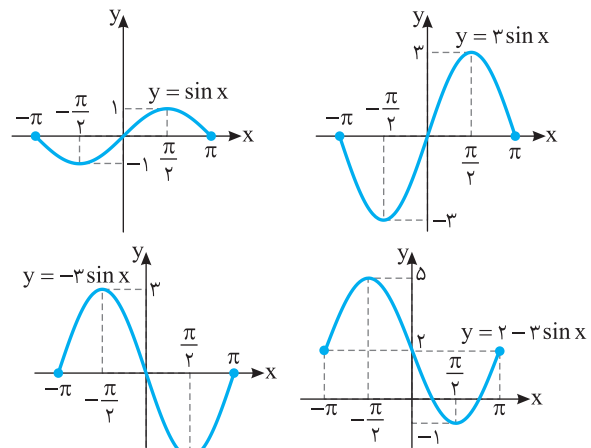
منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ به دست می‌آید. پس نمودار مورد نظر

متعلق به تابع $y = f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ است.

۲۱۳- گزینه ۴ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ روی

بازه $[-\pi, \pi]$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 3 \sin x$ به دست بیاید.

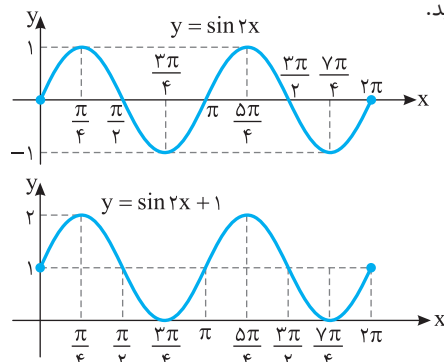
سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -3 \sin x$ به دست بیاید. در آخر، نمودار تابع $y = -3 \sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 2 - 3 \sin x$ به دست بیاید.



۲۱۴- گزینه ۱ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ روی بازهٔ

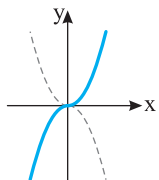
$[0, 4\pi]$ را ضرب در $\frac{1}{2}$ می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \sin 2x$ روی بازهٔ $[0, 2\pi]$

به دست بیاید. سپس، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.



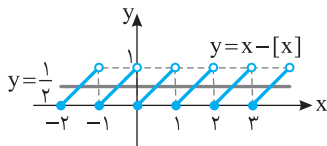
۲۲۱- گزینه ۲ با توجه به دوز زوج مرتب $(2b, 3)$ و $(2, 3)$ نتیجه می گیریم که $2b=2$ و در نتیجه $b=1$. با توجه به دوز زوج مرتب $(2a, 1)$ و $(b, 1)$ نتیجه می گیریم $2a=b$ ، پس $a=\frac{1}{2}$. بنابراین $a+b=\frac{3}{2}$.

۲۲۲- گزینه ۳ توابع $y=x^2$ ، $y=|x|$ و $y=[x]$ یک به یک نیستند، چون خطی موازی محور طول ها وجود دارد که نمودار آن ها را در بیش از یک نقطه قطع می کند. ولی نمودار تابع $y=x|x|$ به صورت زیر است و هر خط موازی محور طول ها آن را در یک نقطه قطع می کند. پس این تابع یک به یک است.

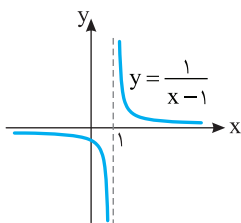
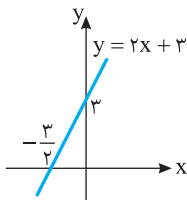
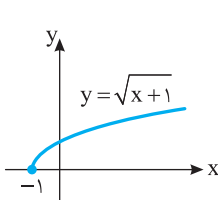


$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

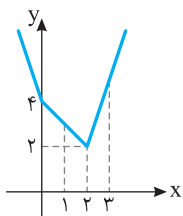
۲۲۳- گزینه ۴ توابع $y=\sqrt{x+1}$ ، $y=2x+3$ و $y=\frac{1}{x-1}$ یک به یک هستند چون هر خط موازی محور طول ها نمودار آن ها را حداکثر در یک نقطه قطع می کند. تابع $y=x-[x]$ یک به یک نیست. چون مثلاً خط $y=\frac{1}{2}$ نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع می کند.



نمودار سایر توابع به صورت زیر است:



۲۲۴- گزینه ۱ تابع $f(x)=x^3-\sqrt{x}$ یک به یک نیست. زیرا $f(0)=f(1)=0$.

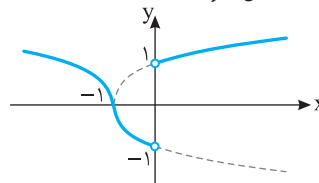


۲۲۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 3x-4 & x \geq 2 \\ -x+4 & 0 \leq x \leq 2 \\ -3x+4 & x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت مقابل است. این تابع روی بازه های $(-\infty, 2]$ و $[2, +\infty)$ و $[0, 2]$ یک به یک است ولی روی بازه $[1, 3]$ یک به یک نیست.

بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است:



۲۱۸- گزینه ۴ فرض کنید $h(x)=x+|x|$. در این صورت دامنه تابع g با دامنه تابع foh برابر است:

$$D_{foh} = \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\} = \{x \mid -2 \leq x+|x| \leq 2\} = (-\infty, 1]$$

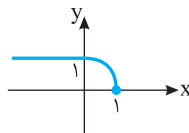
اکنون توجه کنید که

$$x \leq 0 \Rightarrow g(x) = -f(x-x) = -f(0) = 1$$

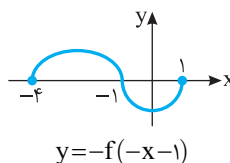
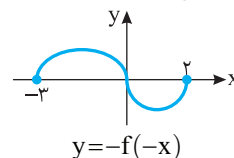
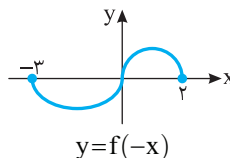
$$0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) = -f(x+x) = -f(2x)$$

پس $g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -f(2x) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ باید نمودار تابع

$y=1$ را رسم کنیم و در بازه $(0, 1]$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f واقع در بازه $(0, 2]$ را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم.



۲۱۹- گزینه ۴ **راه حل اول** اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به دست می آید. اگر این نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x)$ به دست می آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=-f(-(x+1))$ به دست می آید، که همان نمودار شکل (۲) است.

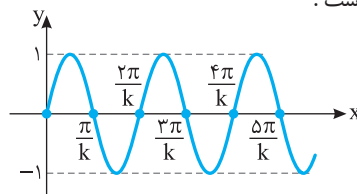


راه حل دوم در شکل (۲)، نقطه $(-4, 0)$ روی نمودار تابع است. در گزینه های (۱)، (۲) و (۳) به ازای $x=-4$ مقادیر $f(5)$ و $f(-5)$ ظاهر می شوند اما با توجه به شکل (۱)، عددهای ۵ و -۵ در دامنه تابع f نیستند، پس این سه گزینه رد می شوند.

۲۲۰- گزینه ۳ مطابق شکل باید $\frac{4\pi}{k} \leq \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{k}$ تا نمودار تابع پنج بار

محور طول ها را روی بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ قطع کند. بنابراین $8 \leq k < 10$ ، پس حداقل

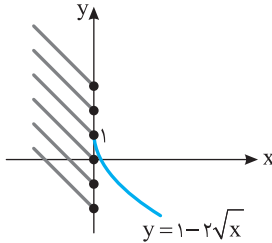
مقدار k برابر ۸ است.



۲۳۰- گزینه ۱ راه‌حل اول نمودار تابع f به ازای مقدارهای مختلف k به شکل زیر است. برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، باید کمترین مقدار عبارت $4k-x$ به ازای $x \leq 0$ از ۱ کمتر نباشد:

$$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow 4k - x \geq 4k$$

یعنی $4k \geq 1$ پس $k \geq \frac{1}{4}$.



راه‌حل دوم اگر $x > 0$ ، آن‌گاه تابع $g(x) = 1 - 2\sqrt{x}$ یک‌به‌یک است و اگر $x \leq 0$ ، آن‌گاه تابع $h(x) = 4k - x$ یک‌به‌یک است و

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow -2\sqrt{x} < 0 \Rightarrow 1 - 2\sqrt{x} < 1 \Rightarrow R_g = (-\infty, 1)$$

$$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow 4k - x \geq 4k \Rightarrow R_h = [4k, +\infty)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک شود، باید $R_g \cap R_h = \emptyset$ پس

$$4k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{4}$$

۲۳۱- گزینه ۳ چون مؤلفه دوم زوج مرتب‌های $(a^2, 1)$ و $(9, 1)$

مساوی هستند، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم مساوی باشند:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

به همین ترتیب باید مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های $(6, 2)$ و $(3a+b, 2)$ نیز

مساوی باشند، پس $3a+b=6$ ، بنابراین $b=6-3a$.

اگر $a=3$ ، آن‌گاه $b=-3$ و تابع به صورت زیر است:

$$f = \{(9, 1), (6, 2), (3, 9)\}$$

اگر $a=-3$ ، آن‌گاه $b=15$ و تابع به صورت زیر است:

$$f = \{(9, 1), (6, 2), (-3, -45)\}$$

پس $a-b=-18$ یا $a-b=6$.

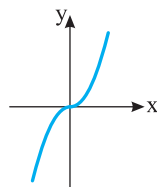
۲۳۲- گزینه ۳ در گزینه (۱)، $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ پس تابع

یک‌به‌یک نیست. در گزینه (۲)، $f(x) = |x|$ ، $x \neq 0$ پس تابع یک‌به‌یک

نیست. در گزینه (۴) مثلاً $f(1) = f(-1)$ پس تابع یک‌به‌یک نیست. در

گزینه (۳) نمودار تابع به صورت زیر است و تابع یک‌به‌یک است.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



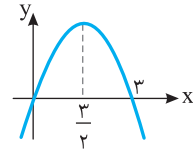
۲۲۶- گزینه ۱ شرط یک‌به‌یک نبودن این تابع $-2a-3=0$ است.

پس $a = -\frac{3}{2}$. توجه کنید که در این صورت تابع f با یک تابع ثابت برابر است

$$f(x) = \frac{ax+3}{x-2} = \frac{-\frac{3}{2}x+3}{x-2} = \frac{-3x+6}{2x-4} = \frac{-3(x-2)}{2(x-2)} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(3) = -\frac{3}{2}$$

۲۲۷- گزینه ۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. از روی شکل

معلوم است که تابع روی بازه $(-\infty, \frac{3}{2}]$ یک‌به‌یک است. اما اگر $a > \frac{3}{2}$ ،



خطی موازی با محور طول‌ها وجود دارد که

نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{3}{2}$ است.

۲۲۸- گزینه ۴ نمودار تابع گزینه (۴)

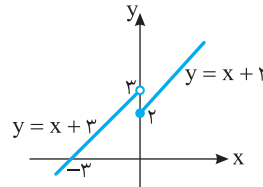
به صورت رویه‌رو است. هر خط موازی محور

طول‌ها نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه

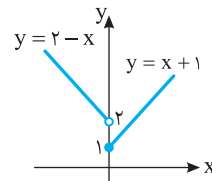
قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است.

نمودار تابع‌های سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

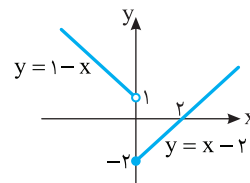
گزینه (۱)



گزینه (۲)

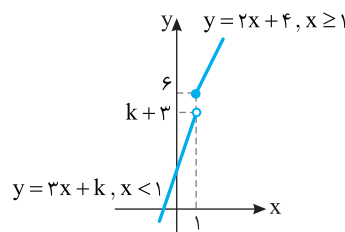


گزینه (۳)



۲۲۹- گزینه ۳ راه‌حل اول نمودار تابع f به صورت زیر است. مطابق

شکل واضح است که با شرط $k+3 \leq 6$ تابع f یک‌به‌یک است. پس $k \leq 3$.



راه‌حل دوم اگر $x \geq 1$ ، آن‌گاه تابع $g(x) = 2x + 4$ یک‌به‌یک است. همچنین

اگر $x < 1$ ، تابع $h(x) = 3x + k$ یک‌به‌یک است. از طرف دیگر

$$x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow 2x + 4 \geq 6 \Rightarrow g(x) \geq 6 \Rightarrow R_g = [6, +\infty)$$

$$x < 1 \Rightarrow 3x < 3 \Rightarrow 3x + k < k + 3 \Rightarrow h(x) < k + 3 \Rightarrow R_h = (-\infty, k + 3)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد، باید

$$R_g \cap R_h = \emptyset \Rightarrow [6, +\infty) \cap (-\infty, k + 3) = \emptyset \Rightarrow k + 3 \leq 6 \Rightarrow k \leq 3$$

پس حداکثر مقدار ممکن k برابر ۳ است.

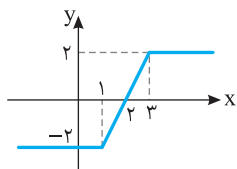
۲۳۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = x - 1 - x + 3 = 2$$

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(x) = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$$

$$x \leq 1 \Rightarrow f(x) = -x + 1 + x - 3 = -2$$

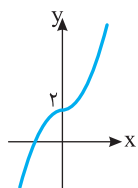
بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و این تابع روی بازه $[1, 3]$ یک به یک است. توجه کنید که تابع f روی هر بازه $[c, d]$ که $c \geq 1$ و $d \leq 3$ نیز یک به یک است. پس حداکثر مقدار ممکن برای b برابر ۳ و حداقل مقدار ممکن برای a برابر ۱ است و در نتیجه حداکثر مقدار ممکن برای $b - a$ برابر ۲ است.



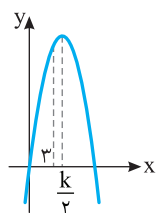
۲۳۶- گزینه ۳ تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ یک به یک

است و اگر $ad - bc = 0$ ، آن گاه تابع f برابر یک تابع ثابت است که یک به یک نیست. پس اگر $k^3 - 4k = 0$ ، آن گاه تابع f یک به یک نیست. از معادله اخیر به دست می آید $k = 0$ و $k = \pm 2$. پس به ازای سه مقدار مختلف k تابع f یک به یک نیست.

۲۳۷- گزینه ۲ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ x^2+2 & x \geq 0 \end{cases}$ به شکل زیر



است. واضح است که تابع یک به یک است. بقیه گزینه ها را می توانید با رسم نمودار یا آوردن مثال نقض، رد کنید.



۲۳۸- گزینه ۳ نمودار تابع $y = -x^2 + kx$

به شکل مقابل است. اگر $x = 3$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع در بازه $(-\infty, 3]$ یک به یک است. بنابراین

$$3 \leq \frac{k}{2} \Rightarrow k \geq 6$$

۲۳۹- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که اگر $f(x_1) = f(x_2)$ ، آن گاه

$$x_1 - k\sqrt{x_1} = x_2 - k\sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 - x_2 - k(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = 0$$

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) - k(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = 0$$

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - k) = 0$$

اگر $k < 0$ ، آن گاه $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - k \neq 0$ و در نتیجه

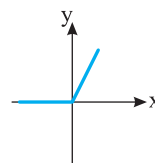
$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک به یک است.

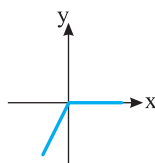
به ازای $k = 0$ هم تابع به صورت $f(x) = x$ است و یک به یک است. اما اگر $k > 0$ ، آن گاه از $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - k = 0$ می توان مقدار x_1 را بر حسب x_2 به دست آورد و از $f(x_1) = f(x_2)$ لزوماً $x_1 = x_2$ نتیجه نمی شود. پس در این حالت تابع یک به یک نیست.

۲۳۳- گزینه ۳ نمودار تابع ها به شکل زیر است:

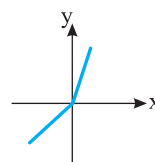
گزینه (۱): $f(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک به یک نیست



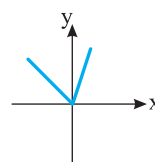
گزینه (۲): $f(x) = x - |x| = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک به یک نیست



گزینه (۳): $f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک به یک است



گزینه (۴): $f(x) = x + 2|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک به یک نیست



۲۳۴- گزینه ۱ در تابع گزینه (۲)، $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$.

در تابع گزینه (۳)، اگر $x \leq 0$ ، آن گاه $f(x) = 0$.

در تابع گزینه (۴)، $f(0) = f(2) = 0$.

بنابراین گزینه های (۲)، (۳) و (۴) رد می شوند. توجه کنید که می توانید ثابت

کنید تابع گزینه (۱) یک به یک است. اگر $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ دو

زوج مرتب از تابع f باشند که $f(x_1) = f(x_2)$ ، آن گاه

$$x_1^3 + x_1 + 1 = x_2^3 + x_2 + 1 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(\underbrace{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1}_A) = 0 \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که

$$A = (x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 1 > 0$$

بنابراین از معادله (۱) نتیجه می شود $x_1 - x_2 = 0$ ، پس $x_1 = x_2$ و تابع f یک به یک است.

۲۴۷- گزینه ۱ شرط صعودی بودن تابع f آن است که همه مقادیر تابع $y_2 = 2x + 1$ کوچک‌تر از یا مساوی با کمترین مقدار تابع $y_1 = x + a$ باشد:

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow x + a \geq 1 + a \Rightarrow y_1 \geq 1 + a \\ x < 1 \Rightarrow 2x + 1 < 3 \Rightarrow y_2 < 3 \end{cases}$$

بنابراین $1 + a \leq 3$. پس $a \geq 2$.

۲۴۸- گزینه ۲ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$2m - 1 \geq m + 1 \Rightarrow m \geq 2$$

۲۴۹- گزینه ۲ برای پیدا کردن دامنه تابع g باید نامعادله $f(x) \geq 0$ را

حل کنیم. چون $f(0) = 0$ و اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $f(x) < f(0)$ ، پس باید نامعادله $f(x) \geq f(0)$ را حل کنیم که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x \geq 0$. پس $D_g = [0, +\infty)$.

۲۵۰- گزینه ۱ مجموع دو تابع صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ ، تابعی صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ است. بنابراین مجموع دو تابع $f + g$ و $f - g$ ، یعنی تابع $2f$ صعودی است، پس تابع f نیز صعودی است.

۲۵۱- گزینه ۴ تابع f اکیداً صعودی، تابع g اکیداً نزولی، تابع h ثابت (هم صعودی و هم نزولی) و تابع k غیریکنواست.

۲۵۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} -2 < 0 < 1 &\Rightarrow 4x \leq x^2 + 3 \leq 7x - x^2 \\ 4x \leq x^2 + 3 &\Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3 \end{aligned} \quad (1)$$

$$x^2 + 3 \leq 7x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 \leq 0$$

$$(2x - 1)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \quad (2)$$

با توجه به شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود اگر $x = 3$ یا $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ، آن‌گاه تابع f صعودی است. پس به ازای مقادیر صحیح ۳ و ۱ تابع f صعودی است.

۲۵۳- گزینه ۳ تابع $-f$ روی بازه‌هایی اکیداً صعودی است که تابع f روی آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع f روی بازه $[-3, 1]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع $-f$ روی این بازه اکیداً صعودی است.

۲۵۴- گزینه ۳ باید مبنای لگاریتم بین صفر و ۱ باشد. پس

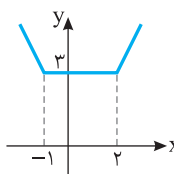
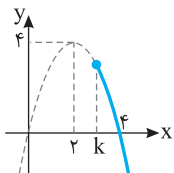
$$0 < k - 1 < 1 \Rightarrow 1 < k < 2$$

۲۵۵- گزینه ۲ نمودار تابع f به شکل مقابل

است. برای اینکه تابع نزولی باشد، باید دامنه آن زیرمجموعه بازه $[2, +\infty)$ باشد، بنابراین $k \geq 2$.

۲۵۶- گزینه ۳ نمودار تابع f به صورت

مقابل است. چون تابع f روی بازه $[a, b]$ هم صعودی است هم نزولی، پس روی این بازه تابعی ثابت است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه $[-1, 2]$ تابعی ثابت است، همین‌طور روی هر بازه‌ای مانند $[a, b]$ که $-1 \leq a < b \leq 2$. بنابراین بیشترین مقدار ممکن $b - a$ وقتی به دست می‌آید که $a = -1$ و $b = 2$. که در این صورت $b - a = 3$.



راه‌حل دوم (این راه‌حل پس از مطالعه فصل کاربرد مشتق قابل استفاده است). تابع f روی بازه $[0, +\infty)$ پیوسته است. پس در صورتی که یک‌به‌یک باشد، اکیداً یکنواست. اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = 1 - \frac{k}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - k}{2\sqrt{x}}$$

اگر $k \leq 0$ ، آن‌گاه $f'(x) > 0$ و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است و یک‌به‌یک است. اگر $k > 0$ ، آن‌گاه تابع f روی بازه $[0, \frac{k^2}{4}]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[\frac{k^2}{4}, +\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازه $[0, +\infty)$ غیریکنواست.

۲۴۰- گزینه ۱ معادله را به صورت $f(x^3 + 3) = f(x^2 + 1)$ می‌نویسیم.

چون f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$x^3 + 3 = x^2 + 1 \Rightarrow x^3 - x^2 + 2 = 0$$

واضح است که $x = -1$ یکی از جواب‌های معادله است، به کمک تقسیم عبارت $x^3 - x^2 + 2$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

معادله $x^2 - 2x + 2 = 0$ جواب ندارد. پس $x = -1$ تنها جواب معادله است.

۲۴۱- گزینه ۲ تابع گزینه (۱) صعودی نیست، زیرا $1 < 2$ ، اما $f(1) > f(2)$.

تابع گزینه (۲) صعودی است، زیرا $2 < 4 < 5$ و $f(2) = f(4) < f(5)$.

تابع گزینه (۳) صعودی نیست، زیرا $2 < 3$ ، اما $f(2) > f(3)$.

تابع گزینه (۴) هم صعودی نیست، زیرا $-2 < 3$ ، اما $f(-2) > f(3)$.

۲۴۲- گزینه ۲ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$1 < 2 < 3 \Rightarrow f(1) < f(2) < f(3) \Rightarrow a^2 - 1 < a + 1 < 3a - 1$$

$$a^2 - 1 < a + 1 \Rightarrow (a + 1)(a - 2) < 0 \Rightarrow -1 < a < 2 \quad (1)$$

$$a + 1 < 3a - 1 \Rightarrow a > 1 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $1 < a < 2$.

۲۴۳- گزینه ۲ با توجه به شکل سؤال تابع f روی بازه $[-2, 3]$ و هر بازه $[a, b]$ که $-2 \leq a < b \leq 3$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار $b - a$ برابر ۵ است.

۲۴۴- گزینه ۱ در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ ، آن‌گاه تابع صعودی

است. بنابراین

$$k^2 - 3 > 1 \Rightarrow k^2 > 4 \Rightarrow |k| > 2$$

۲۴۵- گزینه ۱ طول رأس سهمی به معادله

$$f(x) = -4x^2 + 6x - 1 \text{ برابر است با } -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$$

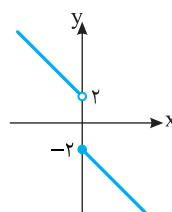
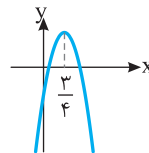
از روی نمودار این سهمی معلوم است که تابع f روی بازه $(\frac{3}{4}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۲۴۶- گزینه ۴ نمودار تابع گزینه (۴)

به صورت زیر است و این تابع نزولی است.

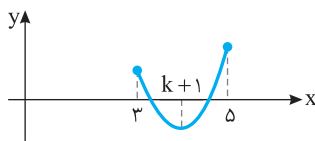
$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & x \geq 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$$

با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آن‌ها را رد کنید.

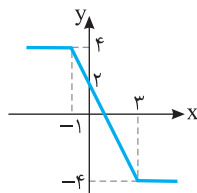


۲۶۵- گزینه ۳ نمودار تابع باید به شکل زیر باشد، یعنی اگر طول رأس سهمی که $x=k+1$ است، در بازه $(۳, ۵)$ باشد، آن گاه تابع غیر یکنوا می شود. پس

$$۳ < k+1 < ۵ \Rightarrow ۲ < k < ۴$$



۲۶۶- گزینه ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه $[-۱, ۳]$ و هر بازه ای به صورت $[a, b]$ که $-۱ \leq a < b \leq ۳$ اکیداً نزولی است. بنابراین، بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به دست می آید که $a=-۱$ و $b=۳$ ، که در این صورت $b-a=۴$.



۲۶۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = kx + |x-۱| = \begin{cases} (k+1)x-۱ & x \geq 1 \\ (k-1)x+۱ & x < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید هر دو خط موجود در ضابطه تابع صعودی باشند، یعنی شیب نامنفی داشته باشند. پس

$$\begin{cases} k+1 \geq 0 \\ k-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k \geq 1$$

۲۶۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$x > ۶ \Rightarrow f(x) > f(۶) \Rightarrow f(x) > ۰$$

$$x < ۶ \Rightarrow f(x) < f(۶) \Rightarrow f(x) < ۰$$

برای به دست آوردن دامنه تابع g باید نامعادله $\frac{۴-x^۲}{f(x)} \geq ۰$ را حل کنیم. با

توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به صورت زیر است:

$$x \in (-\infty, -۲] \cup [۲, ۶)$$

بنابراین در دامنه تابع g چهار عدد طبیعی قرار دارد.

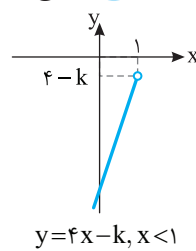
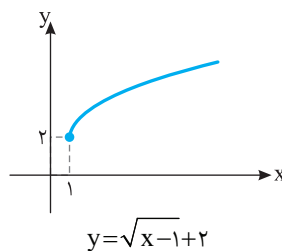
x	$-\infty$	-۲	۲	۶	$+\infty$
$۴-x^۲$	-	۰	+	۰	-
$f(x)$	-	-	-	۰	+
$\frac{۴-x^۲}{f(x)}$	+	۰	-	۰	-

۲۶۹- گزینه ۲ تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است، پس تابع $y=\sqrt{x}+۱$ نیز صعودی است. همچنین مقادیر تابع $y=\sqrt{x}+۱$ همواره مثبت هستند.

بنابراین تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}+۱}$ نزولی است.

۲۷۰- گزینه ۳ تابع های $y=x$ و $y=x^۳$ صعودی اند، پس مجموع آنها یعنی $y=x^۳+x$ صعودی است. توابع سه گزینه دیگر غیر یکنوا هستند.

۲۵۷- گزینه ۳ توابع $y=\sqrt{x-۱}+۲$ و $y=۴x-k$ صعودی هستند.



مطابق شکل های بالا کافی است $۴-k$ بیشتر از ۲ نباشد تا تابع f صعودی باشد. پس $۴-k \leq ۲$ ، در نتیجه $k \geq ۲$.

۲۵۸- گزینه ۳ با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی،

$$a^۲-۳ < ۲a \Rightarrow a^۲-۲a-۳ < ۰ \Rightarrow (a+۱)(a-۳) < ۰ \Rightarrow -۱ < a < ۳$$

۲۵۹- گزینه ۱ دامنه تابع g از حل نامعادله زیر به دست می آید:

$$f(x-۲)-۲ \geq ۰ \Rightarrow f(x-۲) \geq ۲ \Rightarrow f(x-۲) \geq f(۱)$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f نتیجه می شود $x-۲ \leq ۱ \Rightarrow x \leq ۳$ بنابراین $D_g = (-\infty, ۳]$.

۲۶۰- گزینه ۲ توابع $y=f(x)$ و $y=x$ صعودی اند، پس مجموع آنها صعودی است. یعنی تابع $y=x+f(x)$ صعودی است.

۲۶۱- گزینه ۳ از تعریف تابع صعودی نتیجه می شود

$$۱ < ۲ < ۳ \Rightarrow f(۱) \leq f(۲) \leq f(۳) \Rightarrow m-۱ \leq ۲m \leq m+۳$$

$$m-۱ \leq ۲m \Rightarrow m \geq -۱, \quad ۲m \leq m+۳ \Rightarrow m \leq ۳$$

بنابراین $-۱ \leq m \leq ۳$ و در نتیجه m می تواند پنج مقدار صحیح ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ را داشته باشد.

۲۶۲- گزینه ۴ تابعی که هم صعودی است و هم نزولی، تابعی ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین

$$f(۱)=f(۲)=f(۳), \quad a-۲=۳a+۶=۴a-b, \quad a=-۴, \quad b=-۱۰$$

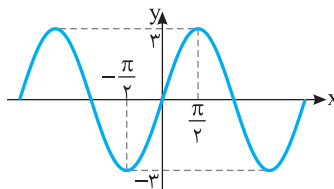
$$\text{در نتیجه } a+b=-۱۴$$

۲۶۳- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم و عرض هر

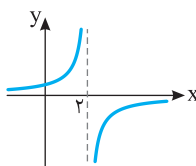
نقطه آن را سه برابر کنیم، نمودار تابع $f(x)=۳ \sin x$ به دست می آید که به صورت زیر است. واضح است که تابع f روی بازه $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ و هر بازه دیگر

به صورت $[-\frac{\pi}{۲}, a]$ که $-\frac{\pi}{۲} \leq a \leq \frac{\pi}{۲}$ صعودی است. پس حداکثر مقدار a

برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.



۲۶۴- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{1}{-x}$



رادو واحد به سمت راست انتقال می دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{-(x-۲)}=\frac{1}{-x+۲}$ به دست بیاید.

اکنون از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-\infty, ۲)$ و هر بازه دیگری مانند $(-\infty, a)$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۲۷۷- گزینه ۳ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم

نمودار تابع f^{-1} به دست می‌آید. بنابراین باید تابع وارون تابع $f(x)=3x-4$ را به دست آوریم.

$$y=3x-4 \Rightarrow y+4=3x \Rightarrow x=\frac{y+4}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3}$$

بنابراین معادله خط جدید $y=\frac{x+4}{3}$ است.

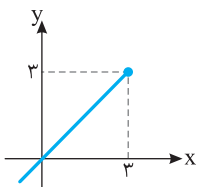
۲۷۷- گزینه ۳ راه حل اول از تساوی $y=\sqrt{x-1}+2$ مقدار x را

برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y-2=\sqrt{x-1} \Rightarrow (y-2)^2=x-1 \Rightarrow x=(y-2)^2+1 \Rightarrow x=y^2-4y+5$$

بنابراین $f^{-1}(x)=x^2-4x+5$.

راه حل دوم توجه کنید که $f(1)=2$ ، پس $f^{-1}(2)=1$ که فقط در تابع گزینه (۳) صدق می‌کند.



۲۷۸- گزینه ۲ برای هر $x \in D_f$

تساوی $(f^{-1} \circ f)(x)=x$ برقرار است. پس

تابع g به صورت $g(x)=x$ ، $x \leq 3$ است و

نمودار آن به شکل روبه‌رو است.

۲۷۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=\{1, 2, 3, 5\}$ و

$$f^{-1}=\{(3, 1), (4, 2), (2, 3), (1, 5)\} \Rightarrow D_{f^{-1}}=\{3, 4, 2, 1\}$$

بنابراین

$$D_{f \circ f^{-1}}=D_f \cap D_{f^{-1}}=\{1, 2, 3\}$$

$$(f \circ f^{-1})(1)=f(1) \times f^{-1}(1)=3 \times 5=15$$

$$(f \circ f^{-1})(2)=f(2) \times f^{-1}(2)=4 \times 3=12$$

$$(f \circ f^{-1})(3)=f(3) \times f^{-1}(3)=2 \times 1=2$$

بنابراین تابع $f \circ f^{-1}$ به صورت زیر است

$$f \circ f^{-1}=\{(1, 15), (2, 12), (3, 2)\}$$

۲۷۸- گزینه ۲ فرض کنید $f^{-1}(3)=a$. پس $f(a)=3$ و در نتیجه

$$\frac{a}{a-1}=3 \Rightarrow a=3a-3 \Rightarrow 2a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$\text{یعنی } f^{-1}(3)=\frac{3}{2}$$

۲۷۸- گزینه ۴ چون نمودار تابع f از نقطه $(8, 9)$ عبور می‌کند، نمودار

تابع f^{-1} از نقطه $(9, 8)$ عبور می‌کند:

$$f(8)=8+\sqrt{8}-1=9 \Rightarrow f^{-1}(9)=8$$

۲۷۸- گزینه ۴ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم

می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست بیاید. سپس قرینه نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ به دست بیاید.

در آخر نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا

نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)-1$ به دست بیاید.

۲۷۱- گزینه ۳ ابتدا از تساوی $(f^{-1} \circ g^{-1})(a)=-1$ مقدار a را پیدا

می‌کنیم:

$$f^{-1}(g^{-1}(a))=-1 \Rightarrow f(-1)=g^{-1}(a)$$

$$4=g^{-1}(a) \Rightarrow g(4)=a \Rightarrow a=-2$$

بنابراین مقدار $f^{-1}(-2)$ را می‌خواهیم که با توجه به تساوی $f(3)=-2$

نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(-2)=3$.

۲۷۲- گزینه ۴ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}=\{(2, -1), (5, 3), (3, -2), (-1, 5)\}$$

در نتیجه $g \circ f^{-1}=\{(2, 4), (5, 0)\}$.

۲۷۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $g(3)=2$ ، پس $g^{-1}(2)=3$. بنابراین

$$f^{-1}(a)+g^{-1}(2)=6 \Rightarrow f^{-1}(a)+3=6$$

$$f^{-1}(a)=3 \Rightarrow f(3)=a \Rightarrow a=2$$

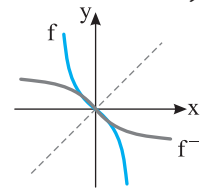
در نتیجه $g(a)=g(2)=4$.

۲۷۴- گزینه ۴ چون نمودار تابع f از نقطه $(9, 11)$ عبور می‌کند، نمودار

تابع f^{-1} از نقطه $(11, 9)$ عبور می‌کند.

۲۷۵- گزینه ۳ نمودار تابع f^{-1} قرینه نمودار تابع f نسبت به خط

$y=x$ است که به شکل زیر است:



۲۷۶- گزینه ۱ دامنه تابع f^{-1} همان برد تابع f است. پس برد تابع f

را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+1)^2-1$$

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 3$$

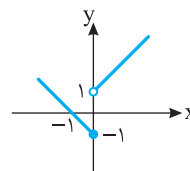
$$0 \leq (x+1)^2 \leq 9 \Rightarrow -1 \leq (x+1)^2-1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 8$$

بنابراین $D_{f^{-1}}=R_f=[-1, 8]$.

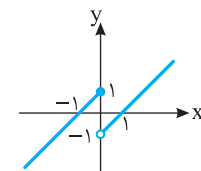
۲۷۷- گزینه ۴ نمودار تابع f به شکل زیر است:

گزینه (۲)

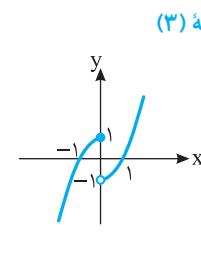
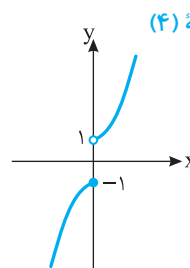
گزینه (۱)



گزینه (۴)



گزینه (۳)



با توجه به نمودارها واضح است که تابع گزینه (۴) وارون‌پذیر است.

گزینه ۲۸۸ - ۲ توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2, D_f = [2, +\infty)$$

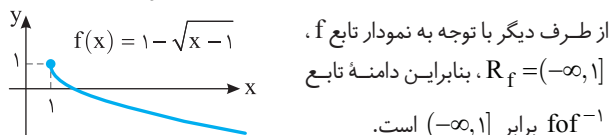
بنابراین f تابعی یک به یک است. توجه کنید که

$$y = (x-2)^2 - 2 \Rightarrow (x-2)^2 = y+2 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{y+2}$$

$$\xrightarrow{x \geq 2} x-2 = \sqrt{y+2} \Rightarrow x = \sqrt{y+2} + 2$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} + 2$

گزینه ۲۸۹ - ۳ توجه کنید که $D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$



گزینه ۲۹۰ - ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$(f^{-1} \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-2}{2} \Rightarrow (g^{-1} \circ f)(x) = \frac{x-2}{2} \Rightarrow g^{-1}(f(x)) = \frac{x-2}{2}$$

$$g^{-1}(x-1) = \frac{x-2}{2} \xrightarrow{(x \rightarrow x+1)} g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow g(x) = 2x+1$$

راه حل دوم اگر تابع های وارون دو طرف تساوی $(f^{-1} \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}$ را

پیدا کنیم به دست می آید

$$(f^{-1} \circ g)(x) = 2x+2 \quad (1)$$

از طرف دیگر، $f^{-1}(x) = x+1$ پس از تساوی (۱) نتیجه می شود

$$f^{-1}(g(x)) = 2x+2 \Rightarrow g(x)+1 = 2x+2 \Rightarrow g(x) = 2x+1$$

گزینه ۲۹۱ - ۱ ابتدا f^{-1} و g^{-1} را به دست می آوریم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, -2), (1, 4)\}$$

$$g^{-1} = \{(2, 2), (1, 3), (-1, 4), (-2, 1)\}$$

اکنون $g^{-1} \circ f^{-1}$ را به دست می آوریم:

$$2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{g^{-1}} 3$$

$$3 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{g^{-1}} 2$$

$$4 \xrightarrow{f^{-1}} -2 \xrightarrow{g^{-1}} 1$$

$$1 \xrightarrow{f^{-1}} 4 \xrightarrow{g^{-1}} \text{تعریف نشده}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \{(2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

توجه کنید که می توان ابتدا $f \circ g$ را حساب کرد، سپس با استفاده از تساوی

$$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$$

گزینه ۲۹۲ - ۱ اگر نقطه های (y, a) و $(-1, b)$ روی نمودار تابع وارون

تابع f باشند، نقطه های (a, y) و $(b, -1)$ روی تابع f هستند. اما از طرف دیگر نمی دانیم a و b بزرگ تر از یک هستند یا کوچک تر از آن. پس با فرض $x < 1$ به دست می آید:

$$x+3=7 \Rightarrow x=4 \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad x+3=-1 \Rightarrow x=-4 \quad (\text{ق.ق.})$$

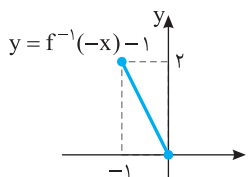
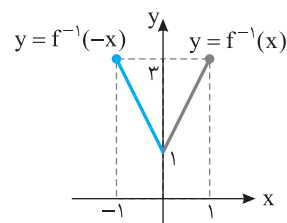
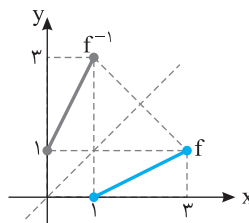
همچنین با فرض $x \geq 1$

$$3x+1=7 \Rightarrow x=2 \quad (\text{ق.ق.}), \quad 3x+1=-1 \Rightarrow x=-\frac{2}{3} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین می توان نوشت

$$f(-4) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -4, \quad f(2) = 7 \Rightarrow f^{-1}(7) = 2$$

$$f^{-1}(7) + f^{-1}(-1) = 2 - 4 = -2 \quad \text{بنابراین}$$



گزینه ۲۸۵ - ۳ برد تابع f^{-1} برابر دامنه تابع f است. پس دامنه تابع f را به دست می آوریم:

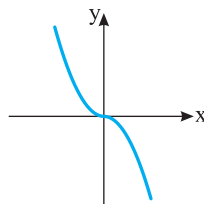
$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4, \quad x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

پس $R_{f^{-1}} = D_f = [0, 1) \cup (1, 4]$. بنابراین اعداد صحیح صفر، ۲، ۳ و ۴ در

برد تابع f^{-1} قرار دارند.

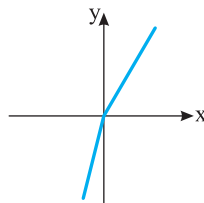
گزینه ۲۸۶ - ۴ نمودار تابع های چهار گزینه به صورت زیر است:

گزینه (۱)



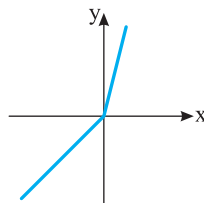
$$f(x) = -x|x| = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

گزینه (۲)



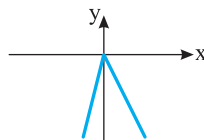
$$f(x) = 3x - |x| = \begin{cases} 4x & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

گزینه (۳)



$$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$$

گزینه (۴)



$$f(x) = x - 3|x| = \begin{cases} 4x & x < 0 \\ -2x & x \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودارها، تابع $f(x) = x - 3|x|$ وارون پذیر نیست.

گزینه ۲۸۷ - ۱ ابتدا $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم

$$y = a - 3x \Rightarrow 3x = a - y \Rightarrow x = \frac{a-y}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{a-x}{3}$$

بنابراین باید معادله $x^2 = \frac{a-x}{3}$ فقط یک جواب داشته باشد

$$3x^2 + x - a = 0, \quad \Delta = 1 + 12a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{12}$$

۲۹۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x) = (x+1)^3 - 1$ بنابراین تابع f

یک به یک است. از طرف دیگر،

$$y = (x+1)^3 - 1 \Rightarrow (x+1)^3 = y+1 \Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{y+1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+1} - 1$$

$$\text{در نتیجه } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

۲۹۹- گزینه ۱ توجه کنید که $f^{-1}(x) = \frac{x+a}{x-2}$ بنابراین

$$\text{پس } f^{-1}(3) = \frac{3+a}{3-2} = a+3$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(3) = \frac{9}{4} \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(3)) = \frac{9}{4}$$

$$f^{-1}(a+3) = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{(a+3)+a}{a+3-2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2a+3}{a+1} = \frac{9}{4} \Rightarrow 4a+12=9a+9 \Rightarrow a=3$$

۳۰۰- گزینه ۱ توجه کنید که $D_{f^{-1} \circ f} = D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

۳۰۱- گزینه ۲ ابتدا به تابع‌های f^{-1} و g^{-1} توجه کنید:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, -1), (-2, 2), (1, 4)\}$$

$$g^{-1} = \{(2, 3), (3, 4), (4, 2), (1, 1)\}$$

$$D_{f^{-1} \circ g^{-1}} = D_{f^{-1}} \cap D_{g^{-1}} = \{2, 3, -2, 1\} \cap \{2, 3, 4, 1\} = \{2, 3, 1\}$$

اکنون می‌توانیم تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ را به دست آوریم:

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \{(2, 1-3), (3, -1-4), (1, 4-1)\}$$

$$= \{(2, -2), (3, -5), (1, 3)\}$$

مجموع عضوهای دامنه و برد تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ برابر است با

$$2 + (-2) + 3 + (-5) + 1 + 3 = 2$$

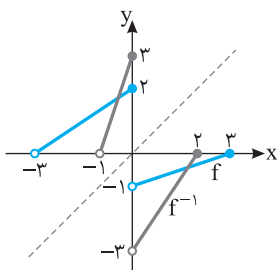
۳۰۲- گزینه ۴ توجه کنید که $f(9) = \sqrt[3]{9-1} + 2 = 2+2=4$ پس

$$f^{-1}(4) = 9 \text{ و در نتیجه } f(9) + f^{-1}(4) = 13$$

۳۰۳- گزینه ۴ چون نمودار تابع f از نقطه $(8, 13)$ عبور می‌کند،

نمودار تابع f^{-1} از نقطه $(13, 8)$ می‌گذرد:

$$f(8) = 2 \times 8 + \sqrt[3]{8-5} = 13 \Rightarrow f^{-1}(13) = 8$$



۳۰۴- گزینه ۲ نمودار تابع f

را نسبت به خط $y=x$ قرینه

می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} رسم

شود. بنابر شکل زیر، نمودار تابع‌های

f و f^{-1} در دو نقطه متقاطع‌اند.

۳۰۵- گزینه ۳ چون $(1, 2)$ نقطه برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1}

است، پس $(1, 2) \in f$ و $(1, 2) \in f^{-1}$ ، یعنی $(2, 1) \in f$ بنابراین

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow a\sqrt{b-3} = 2 \\ f(2) = 1 \Rightarrow a\sqrt{b-6} = 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{b-3} = 2\sqrt{b-6} \Rightarrow b-3 = 4b-24 \Rightarrow b=7$$

پس $a=1$ و در نتیجه $a+b=8$

۲۹۳- گزینه ۴ نمودار تابع f^{-1} از نقطه $(3, 2)$ عبور می‌کند، پس

نمودار تابع f از نقطه $(2, 3)$ عبور می‌کند. بنابراین

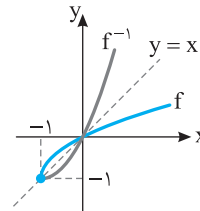
$$f(2) = 3 \Rightarrow 8+2+a=3 \Rightarrow a=-7$$

در نتیجه

$$f(x) = x^3 + x - 7 \Rightarrow f(3) = 27+3-7=23$$

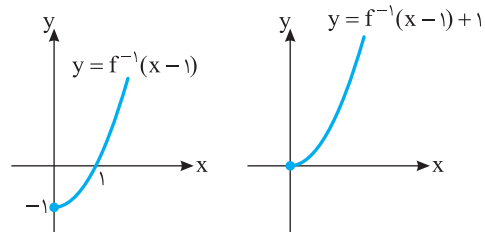
۲۹۴- گزینه ۲ نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$

نسبت به خط $y=x$ است.



اگر نمودار $y=f^{-1}(x)$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم،

نمودار تابع $y=f^{-1}(x-1)+1$ رسم می‌شود.



۲۹۵- گزینه ۱ چون نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطه $(1, 2)$ برخورد

می‌کنند، پس

$$(1, 2) \in f \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \sqrt{a+b} = 2$$

$$(1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 1) \in f \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow \sqrt{2a+b} = 1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-3, b=7$$

بنابراین $ab=-21$

۲۹۶- گزینه ۲ چون f تابعی خطی است، فرض می‌کنیم $f(x) = ax+b$

در این صورت

$$f(1) = 3 \Rightarrow a+b=3 \quad (1)$$

$$f^{-1}(11) = 3 \Rightarrow f(3) = 11 \Rightarrow 3a+b=11 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به دست می‌آید $a=4$ و $b=-1$.

بنابراین $f(x) = 4x-1$ و در نتیجه $f(-3) = -13$.

۲۹۷- گزینه ۲ ابتدا $f(x)$ را به دست می‌آوریم که وارون تابع

$f^{-1}(x)$ است:

$$y = 2x+k \Rightarrow 2x = y-k \Rightarrow x = \frac{y-k}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x-k}{2}$$

بنابراین معادله $x^2 = \frac{x-k}{2}$ نباید جواب داشته باشد

$$2x^2 = x-k \Rightarrow 2x^2 - x + k = 0, \quad \Delta < 0 \Rightarrow 1-8k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{8}$$

راه حل دوم توجه کنید که $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$ از طرف دیگر،

$$(g \circ f)(x) = g(1 + \sqrt[3]{x-2}) = (1 + \sqrt[3]{x-2})^3 = x-2$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = x+2 \text{ و } (g \circ f)^{-1}(x) = x+2$$

۳۱۱- گزینه ۲ توجه کنید که $(f \circ g^{-1})(a) = a$

بنابراین $f(g^{-1}(a)) = a$ چون $f(c) = a$ پس $g^{-1}(a) = c$ و در نتیجه

$$g(c) = a \text{ به همین ترتیب}$$

$$(f \circ g^{-1})(b) = c \Rightarrow f(g^{-1}(b)) = c \xrightarrow{f(b)=c}$$

$$g^{-1}(b) = b \Rightarrow g(b) = b$$

$$(f \circ g^{-1})(c) = d \Rightarrow f(g^{-1}(c)) = d \xrightarrow{f(d)=d}$$

$$g^{-1}(c) = d \Rightarrow g(d) = c$$

$$(f \circ g^{-1})(d) = b \Rightarrow f(g^{-1}(d)) = b \xrightarrow{f(a)=b}$$

$$g^{-1}(d) = a \Rightarrow g(a) = d$$

$$\text{پس } g = \{(a, d), (b, b), (c, a), (d, c)\}$$

۳۱۲- گزینه ۲ فرض می کنیم $f^{-1}(1) = a$ در این صورت

$$f(a) = 1 \Rightarrow \sqrt{a + \sqrt{a+2} + 2} = 1 \Rightarrow a + \sqrt{a+2} + 2 = 1$$

$$\sqrt{a+2} = -a-1 \quad (*) \Rightarrow a+2 = a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, a = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ از تساوی } (*) \text{ واضح است که } -a-1 \geq 0, \text{ پس } a \leq -1 \text{ بنابراین}$$

قابل قبول نیست.

۳۱۳- گزینه ۴ فرض می کنیم طول نقطه برخورد a باشد. در این صورت

عرض آن $a+1$ است. پس نقطه $(a, a+1)$ روی نمودار تابع f^{-1} است. در

نتیجه نقطه $(a+1, a)$ روی نمودار تابع f است. پس

$$f(a+1) = a \Rightarrow (a+1)^2 + 2(a+1) + 9 = a$$

$$a^2 + 3a^2 + 4a + 12 = 0 \Rightarrow (a+3)(a^2+4) = 0 \Rightarrow a = -3$$

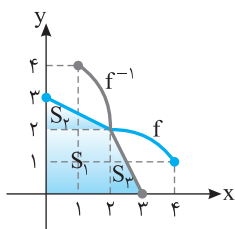
پس عرض نقطه برخورد $a+1 = -2$ است.

۳۱۴- گزینه ۲ نمودار تابع f^{-1} قرینه نمودار تابع f نسبت به خط

$y=x$ است که در شکل رسم شده است. بنابراین مساحت قسمت رنگی

مورد نظر است که از دو مثلث و یک مربع تشکیل شده است:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow S = 2 \times 2 + \frac{1 \times 2}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = 6$$



۳۰۶- گزینه ۳ در تساوی $f(2x-1) = g(3x) - 1$ قرار می دهیم $x=2$:

$$f(3) = g(6) - 1 \Rightarrow g(6) = f(3) + 1$$

از طرف دیگر، $f^{-1}(2) = 3$ پس $f(3) = 2$ در نتیجه $g(6) = 2 + 1 = 3$.

۳۰۷- گزینه ۲ **راه حل اول** ابتدا ضابطه تابع f را به صورت

$$y = (\sqrt{x+1})^2 - 1 \text{ می نویسیم. حالا } x \text{ را بر حسب } y \text{ پیدا می کنیم:}$$

$$y+1 = (\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y+1} - 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y+1} - 1)^2$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 = x + 1 + 1 - 2\sqrt{x+1} = x + 2 - 2\sqrt{x+1}$$

راه حل دوم

$$f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$$

در بین گزینه های داده شده فقط اگر در عبارت داده شده در گزینه (۲)، به جای

x قرار دهیم ۳، حاصل ۱ می شود.

۳۰۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow f(x) = x + 2 - x + 1 - 2x = -2x + 3 \\ -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x + 2 + x - 1 - 2x = 1 \\ x \leq -2 \Rightarrow f(x) = -x - 2 + x - 1 - 2x = -2x - 3 \end{cases}$$

بنابراین تابع f با دامنه $\mathbb{R} - [-2, 1]$ وارون پذیر است. توجه کنید که تابع f روی

$\mathbb{R} - [a, b]$ که در آن $a \leq -2$ و $b \geq 1$ هم وارون پذیر است ولی برای اینکه

$b-a$ کمترین مقدار باشد دامنه را $\mathbb{R} - [-2, 1]$ در نظر می گیریم.

$$x > 1 \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3-y}{2} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{3-x}{2} \\ \frac{3-y}{2} > 1 \Rightarrow y < 1 \end{cases}$$

$$x < -2 \Rightarrow y = -2x - 3 \Rightarrow x = \frac{-y-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{-x-3}{2} \\ \frac{-y-3}{2} < -2 \Rightarrow y > 1 \end{cases}$$

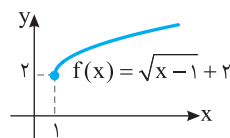
$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2} & x < 1 \\ \frac{-x-3}{2} & x > 1 \end{cases}$$

۳۰۹- گزینه ۲ برای هر $x \in R_f$ تساوی $(f \circ f^{-1})(x) = x$ برقرار

است. با توجه به نمودار تابع f ، $R_f = [2, +\infty)$ پس برای هر $x \geq 2$ ،

$$g(x) = x + 3$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x + 3 \geq 5 \Rightarrow g(x) \geq 5 \Rightarrow R_g = [5, +\infty)$$



۳۱۰- گزینه ۲ **راه حل اول** ضابطه تابع وارون تابع های f و g را پیدا

می کنیم که به صورت زیر هستند:

$$f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2, \quad g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

$$\text{بنابراین } (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{x+1})$$

$$= (\sqrt[3]{x+1} - 1)^2 + 2 = x + 2$$

۳۱۴- گزینه ۴ **راه‌حل اول** چون f و f^{-1} تابع‌هایی برابرند، پس دامنه آن‌ها برابر است. اکنون توجه کنید که

$$f(x) = \frac{(a+1)x+f}{3x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+f}{3x-(a+1)} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \left\{\frac{a+1}{3}\right\}$$

بنابراین $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{a+1}{3}\right\}$. پس $\frac{a+1}{3} = \frac{1}{3}$ ، در نتیجه $a=0$.

توجه کنید که اگر $a=0$ ، آن‌گاه $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+f}{3x-1}$.

راه‌حل دوم در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $f = f^{-1}$ ، آن‌گاه $a=-d$. بنابراین در اینجا $a+1 = -(-1)$ ، در نتیجه $a=0$.

۳۲۰- گزینه ۳ برای هر $x \in D_{f^{-1}} = R_f$ تساوی $(f \circ f^{-1})(x) = x$

برقرار است. برد تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} + 2 \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 2 \Rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

پس برای هر $x \geq 2$ ، $g(x) = 2x$. بنابراین

$$x \geq 2 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow g(x) \geq 4 \Rightarrow R_g = [4, +\infty)$$

۳۲۱- گزینه ۱ با توجه به زوج مرتب‌های $(1, 0)$ و $(4m^3 - m, 1)$

باید تساوی $4m^3 - m = 0$ برقرار باشد. پس

$$m(4m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = \pm \frac{1}{2}$$

به‌ازای $m=0$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f = \{(1, 0), (0, 2), (0, 4)\}$$

به‌ازای $m = \frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f = \{(1, 0), (1, 2), (0, 4), (2, 2)\}$$

به‌ازای $m = -\frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع است.

$$f = \{(1, 0), (-1, 2), (0, 4), (-2, 2)\}$$

پس فقط به‌ازای $m = -\frac{1}{2}$ رابطه تابع است.

۳۲۲- گزینه ۴ **راه‌حل اول** اگر f تابع ثابت c باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{(a+2)x+3}{2x-3} = c$$

بنابراین $(a+2)x+3 = 2cx-3c$. در نتیجه $a+2 = 2c$ و $3 = -3c$. به

این ترتیب $c = -1$ و $a = 2c - 2 = -4$.

راه‌حل دوم f تابعی ثابت است، پس $f(1) = f(2)$. بنابراین

$$\frac{a+2+3}{2-3} = \frac{2(a+2)+3}{4-3} \Rightarrow \frac{a+5}{-1} = 2a+7 \Rightarrow a = -4$$

راه‌حل سوم مشتق تابع برابر صفر است. پس

$$f'(x) = \frac{(a+2)(2x-3) - 2((a+2)x+3)}{(2x-3)^2} = \frac{-3(a+2)-6}{(2x-3)^2}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} -3(a+2)-6=0 \Rightarrow a=-4$$

۳۱۵- گزینه ۲ اگر (m, n) نقطه برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} باشد، نتیجه می‌شود $f(m) = n$ و $f(n) = m$. بنابراین

$$f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow 1-a+b = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{27} + \frac{a}{3} + b = -1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} -a+b = -\frac{2}{3} \\ a+3b = -\frac{26}{9} \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{9}, b = -\frac{8}{9}$$

پس $a+b = -\frac{10}{9}$.

۳۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(g^{-1} \circ f)(-1) = g^{-1}(f(-1)) = g^{-1}(3)$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(3) = s$. در این صورت $g(s) = 3$ و اگر در تساوی

$$g(x) = 1 - f(x+1)$$

$$\begin{cases} g(s) = 1 - f(s+1) \\ g(s) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(s+1) = -2$$

بنابراین، چون تابع f یک‌به‌یک است، $s+1 = 4$ ، پس $s = 3$. یعنی

$$g^{-1}(3) = 3$$

۳۱۷- گزینه ۳ از تساوی $y = \frac{2x+a}{x+b}$ مقدار x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$yx + by = 2x + a \Rightarrow (y-2)x = a - by \Rightarrow x = \frac{a-by}{y-2}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{a-bx}{x-2}$ و در نتیجه $a = -4$ ، $b = -3$ و $ab = 12$.

۳۱۸- گزینه ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 3x + (-(x-1)) & x < 1 \\ 3x + (x-1) & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & x < 1 \\ 4x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

فرض کنید برای $x < 1$ ، $g(x) = 2x+1$ و برای $x \geq 1$ ، $h(x) = 4x-1$.

بنابراین

$$x < 1 \Rightarrow 2x+1 < 3 \Rightarrow g(x) < 3$$

$$g(x) = 2x+1 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow 4x-1 \geq 3 \Rightarrow h(x) \geq 3$$

$$h(x) = 4x-1 \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x+1}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & x < 3 \\ \frac{x+1}{4} & x \geq 3 \end{cases}$$

بنابراین

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0) = 1$ و $f(2) = 7$ ، پس $f^{-1}(1) = 0$ و

$f^{-1}(7) = 2$. این شرایط فقط در تابع گزینه (۱) وجود دارد.

۳۲۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 3x + |k||x| = \begin{cases} (3+|k|)x & x \geq 0 \\ (3-|k|)x & x < 0 \end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید خطوط $y = (3+|k|)x$ و $y = (3-|k|)x$ شیب نامنفی داشته باشند. شیب خط $y = (3+|k|)x$ همواره مثبت است، پس باید شیب خط $y = (3-|k|)x$ همواره نامنفی باشد. یعنی $3-|k| \geq 0 \Rightarrow |k| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq k \leq 3$

۳۲۹- گزینه ۳ اگر (m, n) نقطه برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} باشد، نتیجه می‌شود $f(m) = n$ و $f(n) = m$. بنابراین

$$f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow -a + \frac{2}{9} + b = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a}{27} - \frac{2}{27} + b = -1$$

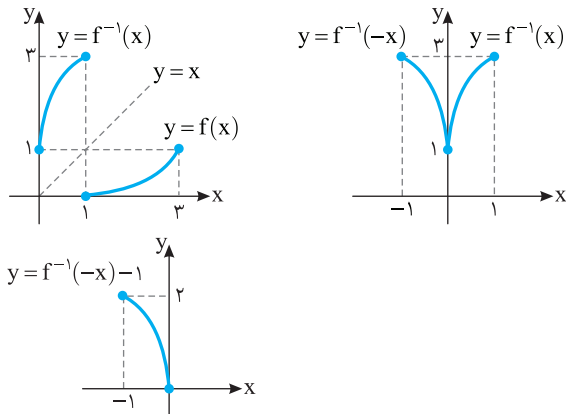
در نتیجه

$$\begin{cases} -a + b = \frac{1}{9} \\ a + 27b = -25 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -\frac{1}{9}$$

$$\text{پس } a + b = -\frac{10}{9}$$

۳۳۰- گزینه ۴ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ رسم

می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست بیاید. سپس قرینه نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x)$ به دست بیاید. در آخر نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ به دست بیاید.



۳۳۱- گزینه ۲ اگر ضابطه داده شده متعلق به یک تابع باشد، باید در

$x = 2$ مقدار $f(x)$ منحصر به فرد باشد، یعنی مقدار $f(2)$ در ضابطه اول با مقدار آن در ضابطه دوم برابر باشد. اگر $f(x) = \sqrt{x+2} + a$ ، آن‌گاه $f(2) = 2 + a$ اگر $f(x) = ax^3 + 16$ ، آن‌گاه $f(2) = 8a + 16$ بنابراین

$$2 + a = 8a + 16 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{و در نتیجه } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} - 2 & x \geq 2 \\ -2x^3 + 16 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(a) = f(-2) = -2(-2)^3 + 16 = 32$$

۳۲۳- گزینه ۱ اولاً توجه کنید که شرط $x \geq 0$ برای دامنه تابع وجود دارد. عددهای داده شده در گزینه‌ها بزرگ‌تر از صفر هستند. پس ریشه‌های مخارج را به دست می‌آوریم:

$$x - 1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x} \xrightarrow{(x-1 \geq 0)} x^2 - 2x + 1 = x$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین دامنه تابع $\left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\} - (0, +\infty)$ است.

۳۲۴- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = \{x | 16 - |x^2 - 9| \geq 0\}$ ، یعنی

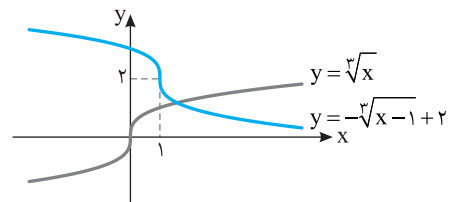
$$D_f = \{x | |x^2 - 9| \leq 16\}$$

$$-16 \leq x^2 - 9 \leq 16 \Rightarrow -7 \leq x^2 \leq 25 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$$

پس $D_f = [-5, 5]$ و در نتیجه $a = -5$ و $b = 5$ و $b - a = 10$.

۳۲۵- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست و دو

واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x} - 1 - 2$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -\sqrt[3]{x} - 1 + 2$ به دست می‌آید. دو نمودار مطابق شکل زیر در یک نقطه متقاطع‌اند.



۳۲۶- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = \{x | x^2 - 4x \geq 0\}$ ، یعنی

$$D_g = \{-1, 0, 1, 3, 4\} \text{ و } D_f = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$D_{fg+f} = D_g \cap D_f = \{-1, 0, 4\}$$

بنابراین a باید -1 یا صفر یا 4 باشد:

$$(fg+f)(-1) = fg(-1) + f(-1) = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$(fg+f)(0) = fg(0) + f(0) = 2 + 0 = 2$$

$$(fg+f)(4) = fg(4) + f(4) = 6 + 0 = 6$$

بنابراین $a = 4$ و در نتیجه $f(-4) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

۳۲۷- گزینه ۲ ابتدا $(fof)(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$(fof)(x) = f(f(x)) = a(ax^2 + b)^2 + b$$

$$= a(a^2x^4 + 2abx^2 + b^2) + b$$

$$= a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b$$

بنابراین تساوی زیر به ازای هر مقدار x برقرار است:

$$a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b = 27x^4 - 18x^2 + 2$$

پس باید تساوی‌های زیر درست باشند:

$$a^3 = 27, \quad 2a^2b = -18, \quad ab^2 + b = 2$$

از $a^3 = 27$ نتیجه می‌شود $a = 3$ ، در نتیجه از $2a^2b = -18$ و $ab^2 + b = 2$ به دست می‌آید که یعنی $b = -1$ و $a = 3$ مقادیر $b = -1$ در تساوی

$$ab^2 + b = 2 \text{ هم صدق می‌کنند. پس } a + b = 2$$

۳۳۲- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = 2mx - mx^2 + x^2 + 4x + m = (1-m)x^2 + (2m+4)x + m$$

ضابطه توابع خطی به شکل $y = ax + b$ است، یعنی یک چندجمله‌ای درجه اول است. بنابراین باید $m = 1$ تا ضابطه تابع یک چندجمله‌ای درجه اول شود، یعنی

$$m = 1 \Rightarrow f(x) = 6x + 1$$

$$f(m) = f(1) = 7$$

۳۳۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

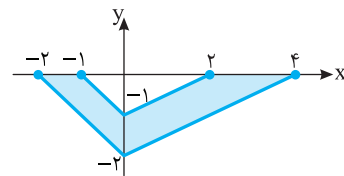
$$f(x) = \left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = \left[1 + \frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = 1 + \left[\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right]$$

$$f(-x) = 1 + \left[-\frac{1}{-x}\right] + \left[\frac{-1}{-x}\right] = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{1}{x}\right] = f(x)$$

۳۳۴- گزینه ۱ برای رسم نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ باید در نمودار تابع f

طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست آید. همچنین در نمودار به دست آمده باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست آید. بنابراین مساحت قسمت رنگی در شکل زیر

$$\text{مورد سؤال است که برابر است با } \frac{1}{2} \times 6 \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{9}{2}$$

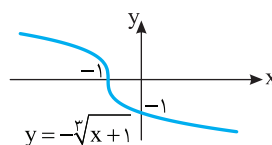
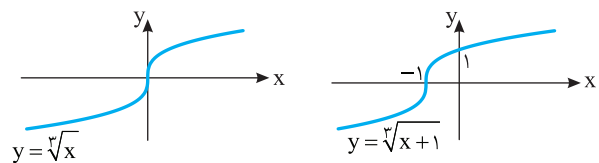


۳۳۵- گزینه ۳ ضابطه تابع به شکل

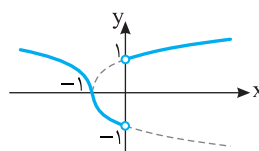
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x > 0 \\ -\sqrt[3]{x+1} & x < 0 \end{cases}$$

است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y = \sqrt[3]{x+1}$ و $y = -\sqrt[3]{x+1}$

به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو



است:

۳۳۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$g(x) = -2f(x) - |f(x)| = \begin{cases} -2f(x) - f(x) & f(x) \geq 0 \\ -2f(x) - (-f(x)) & f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} -3f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f نامنفی است،

در بازه $[-1, 1]$ ، عرض نقاط روی نمودار f را

۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور

طول‌ها قرینه کنیم، در بقیه جاها نمودار g

قرینه نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

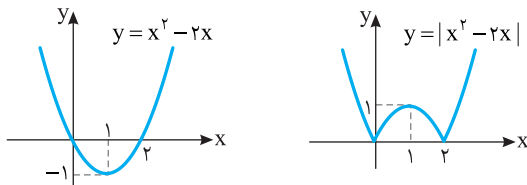
۳۳۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x) = |x||x-2| = |x(x-2)| = |x^2 - 2x|$$

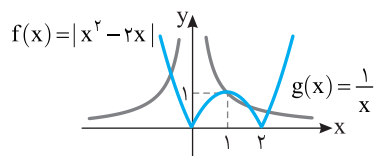
بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینه قسمتی

از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی

را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



متطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در چهار نقطه متقاطع‌اند.



۳۳۸- گزینه ۱ ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

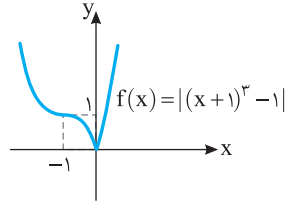
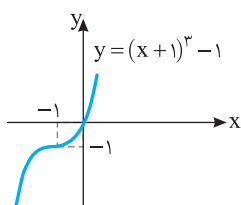
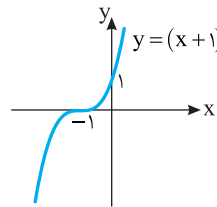
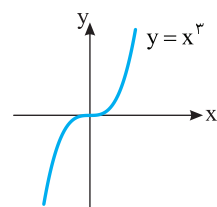
$$f(x) = |x^3 + 3x^2 + 3x| = |(x+1)^3 - 1|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت چپ و یک واحد

به سمت پایین منتقل کنیم، سپس قرینه قسمتی از نمودار را که پایین محور

طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم و قسمتی را که زیر محور x است

حذف کنیم.



۳۴۴- گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$g(f(x)) = g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$$

فرض می‌کنیم $2x+3=t$. در این صورت $x = \frac{t-3}{2}$ و

$$g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20$$

$$= 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20 = 2t^2 - t + 5$$

بنابراین $g(x) = 2x^2 - x + 5$ و

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

ریاضی - ۹۲

۳۴۵- گزینه ۴ برای اینکه از نمودار $y=f(x-2)$ به نمودار

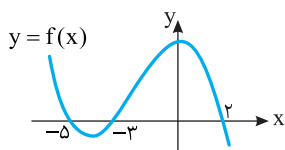
$y=f(x)$ برسیم، کافی است آن را مطابق شکل زیر دو واحد به چپ منتقل

کنیم. برای به دست آوردن دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ ، عبارت $xf(x)$ را

تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$		+	+	-	+	+	-
x		-	-	-	+	+	+
$xf(x)$		-	+	+	-	+	-

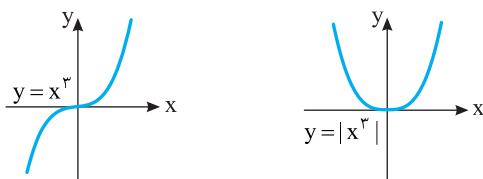
بنابراین $D_g = [-5, -3] \cup [0, 2]$.



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۳۴۶- گزینه ۳ راه حل اول با توجه به نمودار تابع $y=|x^3|$ معلوم

می‌شود که این تابع یک به یک نیست، بنابراین وارون ناپذیر است.



راه حل دوم سه نقطه $(1,1)$ ، $(-1,1)$ و $(0,0)$ روی نمودار این تابع هستند، پس

این تابع صعودی، نزولی، یک به یک و وارون پذیر نیست.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۳۴۷- گزینه ۴ توجه کنید که $(f^{-1} \circ g)(a) = f^{-1}(g(a)) = 6$

بنابراین $g(a) = f(6) = 12 - 5 = 7$. با توجه به اینکه $g(4) = 7$ نتیجه می‌شود

$$a=4$$

ریاضی - ۹۳

۳۴۸- گزینه ۳ اگر $x < 0$ ، آن گاه

$$y = -\sqrt{-x} \Rightarrow -x = y^2 \Rightarrow x = -y^2 \xrightarrow{y < 0} x = y|y|$$

و اگر $x \geq 0$ ، آن گاه

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \xrightarrow{y \geq 0} x = y|y|$$

بنابراین در هر حالتی $x = y|y|$ و ضابطه تابع وارون تابع f به صورت

تجربی - ۹۶

$$f^{-1}(x) = x|x|$$

۳۳۹- گزینه ۲ از تساوی $y = \sqrt[3]{2-3x}$ مقدار x را بر حسب y

به دست می‌آوریم:

$$y^3 = 2-3x \Rightarrow x = \frac{2-y^3}{3}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{-x^3+2}{3}$ و در نتیجه $a = -1$ و $b = 2$ ، $ab = -2$.

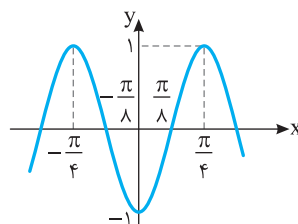
۳۴۰- گزینه ۱ توجه کنید که $f(x) = -\cos 4x$. اگر نمودار تابع

$y = \cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع

$y = -\cos x$ به دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را یک چهارم

کنیم، نمودار تابع $y = -\cos 4x$ به دست می‌آید با توجه به شکل، تابع f روی

بازه $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{4}$ است.



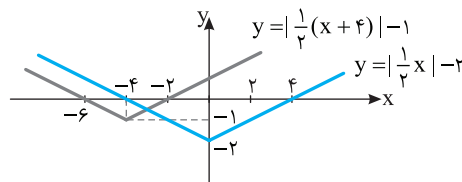
۳۴۱- گزینه ۲ نمودار اولیه و نمودار انتقال یافته را در یک دستگاه

مختصات رسم می‌کنیم. طول نقطه برخورد نمودارها جواب معادله زیر است:

$$|\frac{1}{2}(x+4)| - 1 = |\frac{1}{2}x| - 2 \quad (1)$$

توجه کنید که x منفی و $x+4$ مثبت است. بنابراین معادله (۱) می‌شود

$$\frac{1}{2}(x+4) - 1 = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow x = -3$$



تجربی - ۹۳

۳۴۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(a + \sqrt{a})$$

از طرف دیگر $g(6) = 5$ ، پس

$$a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4$$

تجربی - ۹۱

۳۴۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{\frac{2x-1}{x+1} - 1} = \frac{4x-2+2x+2}{2x-2x-1} = \frac{6x}{-1} = -6x$$

$$\frac{4x-2+2x+2}{2x-2x-1} = \frac{6x}{-1} = -6x$$

تجربی - ۹۶

۳۵۳- گزینه ۲ ابتدا $(fog)(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (2x+4-3)^2 = (2x+1)^2$$

اکنون معادله $(fog)(x) = f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$(2x+1)^2 = (2x-3)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

تجربی - ۹۲

۳۵۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}} = \frac{2-x-6x-9}{2x+3+4-2x} = \frac{-7x-7}{7} = -x-1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۵۵- گزینه ۲ توجه کنید که $D_{gof} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\}$

از طرف دیگر، $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ و $D_g = [0, 1]$ در نتیجه

$$D_{gof} = \{x | x \neq \pm 1, 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 = \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x = 0 \text{ یا } x > 1$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

از اشتراک ناحیه‌های به دست آمده دامنه تابع gof به دست می‌آید، بنابراین

$$D_{gof} = \{0\}$$

ریاضی - ۹۶

۳۵۶- گزینه ۱ دامنه تابع از

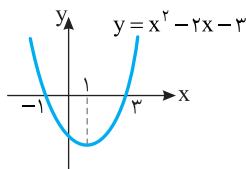
نامساوی $-2 < x-1 < 2$ به دست می‌آید، پس $D_f = (-1, 3)$ با توجه به

نمودار تابع $y = x^2 - 2x - 3$ در بازه

$(-1, 3)$ مقدار تابع f همواره منفی است

و این تابع نه صعودی است و نه نزولی.

ریاضی - ۹۱



۳۵۷- گزینه ۲ راه حل اول از تساوی $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ نتیجه می‌شود

$$g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8 \Rightarrow g(8) = f^{-1}(a)$$

بنابراین

$$\sqrt{5 \times 8 + 9} = f^{-1}(a) \Rightarrow f^{-1}(a) = 7$$

پس $a = f(7)$ ، یعنی $a = 3$.

۳۴۹- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا ضابطه تابع وارون تابع f را به دست می‌آوریم

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = x + 4 \Rightarrow x(y-1) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-1}$. اکنون با حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ نقطه‌های

برخورد دو تابع را می‌یابیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 - 8$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4$$

راه حل دوم کافی است طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع f و خط $y = x$ را بیابیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x^2 - 2x = x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۵۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$ax + by = 8 \Rightarrow y = \frac{8-ax}{b}, \quad 2x - 3y = b \Rightarrow y = \frac{2x-b}{3}$$

چون خط‌های داده شده نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم قرینه یکدیگر

هستند، پس تابع‌های $y = \frac{2x-b}{3}$ و $y = \frac{8-ax}{b}$ وارون یکدیگرند. از طرف

دیگر، وارون تابع $y = \frac{2x-b}{3}$ می‌شود $y = \frac{3x+b}{2}$. بنابراین $\frac{a}{b} = \frac{b}{2}$ و

$$\frac{-a}{b} = \frac{3}{2}. \text{ در نتیجه } b^2 = 16, \text{ یعنی } b = \pm 4. \text{ در نتیجه}$$

$$b = -4 \Rightarrow \frac{-a}{-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2$$

$$b = 4 \Rightarrow \frac{-a}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2$$

بنابراین $a + b = \pm 2$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۳۵۱- گزینه ۳ طول نقاط تلاقی نمودار تابع مورد نظر با محور x

جواب‌های معادله $x^2 - 3x - 10 = 0$ هستند. جواب‌های این معادله $x = -2$ و

$x = 5$ هستند. بنابراین نمودار تابع

مورد نظر به صورت مقابل است. از روی

این شکل معلوم است که باید نمودار

تابع را حداقل دو واحد به طرف x ‌های

مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی

نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۳۵۲- گزینه ۳ ابتدا دقت کنید که

$$f(2x-3) = 2x-3 - [2x-3] = 2x-3 - [2x] + 3 = 2x - [2x]$$

$$\text{پس } g(x) = f(2x-3) - 2f(x) = 2x - [2x] - 2x + 2[2x] = 2[x] - [2x]$$

اکنون فرض می‌کنیم k عدد صحیح دلخواهی باشد. در این صورت اگر

$$[x] = k, \text{ آن گاه } k \leq x < k + \frac{1}{2}$$

$$2k \leq 2x < 2k + 1 \Rightarrow [2x] = 2k$$

بنابراین $g(x) = 2k - 2k = 0$. اگر $k + \frac{1}{2} \leq x < k + 1$ آن گاه $[x] = k$ و

$$2k + 1 \leq 2x < 2k + 2 \Rightarrow [2x] = 2k + 1$$

بنابراین $g(x) = 2k - 2k - 1 = -1$. در نتیجه $R_g = \{-1, 0\}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (fog)^{-1}(x)$ چون $(fog)^{-1}(a) = 8$ ، بنابراین $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ یعنی $(fog)(8) = a$.

در نتیجه $f(g(8)) = a \Rightarrow f(7) = a \Rightarrow a = 3$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۵۸- گزینه ۴ ضابطه تابع را به صورت $f(x) = \begin{cases} 4x-4 & x \leq 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$

می نویسیم. تابع f در بازه $(-\infty, 2]$ وارون پذیر است. فرض می کنیم

$y = 4x - 4$ ، در این صورت $x = \frac{y+4}{4}$ از طرف دیگر،

$x \leq 2 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1$, $x \leq 4$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۵۹- گزینه ۱ ابتدا برای $0 < x < 1$ ضابطه تابع وارون تابع را به دست می آوریم:

$y = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2} = \frac{x}{x} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$

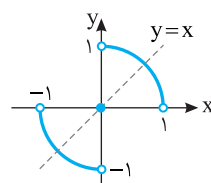
$y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-y^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2} = f(x)$

به همین ترتیب برای $-1 < x < 0$:

$y = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{x} \sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2$

$x^2 = 1-y^2 \Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2} = f(x)$



همچنین $f(0) = 0$ ، در نتیجه $f^{-1}(0) = 0$.

پس در هر صورت می توان نوشت

$f^{-1}(x) = f(x)$. توجه کنید که نمودار تابع

به شکل مقابل است که از دو ربع دایره و یک

نقطه تشکیل شده و نسبت به خط $y = x$ متقارن است، بنابراین وارون آن با

خودش برابر است. خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۳۶۰- گزینه ۴ **راه حل اول** ابتدا ضابطه تابع f^{-1} را به دست می آوریم:

$y = (x+1)^2 \Rightarrow x+1 = \sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{y} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

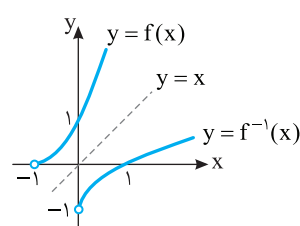
اکنون محل برخورد نمودار تابع های f و f^{-1} را پیدا می کنیم:

$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow (x+1)^2 + 1 = \sqrt{x}$

$\xrightarrow{x \geq 0} (x+1)^4 + 2(x+1)^2 + 1 = x$

$(x+1)^4 + 2x^2 + 3x + 3 = 0$.

معادله بالا با توجه به اینکه مجموع چند مقدار نامنفی است، جواب ندارد.



راه حل دوم نمودار تابع f را رسم

می کنیم. با قرینه کردن نمودار

نسبت به خط $y = x$ ، نمودار

f^{-1} را رسم می کنیم. واضح است

که دو نمودار نقطه برخوردی ندارند.

ریاضی - ۹۲

فصل دوم

۳۶۱- گزینه ۱

با توجه به شکل زیر،

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 6$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow 6^2 = 2^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = 32$$

$$\text{یعنی } AB = 4\sqrt{2} \text{ . بنابراین } \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$



۳۶۲- گزینه ۱

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. با توجه به

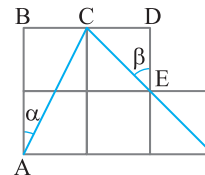
شکل، $\sin \alpha = \frac{BC}{AC}$. از طرف دیگر، بنا بر قضیه فیثاغورس،

$$AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ . بنابراین } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ . همچنین } \cos \beta = \frac{DE}{CE}$$

از طرف دیگر، بنا بر قضیه فیثاغورس، $CE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. بنابراین

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha - \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{10}}$$



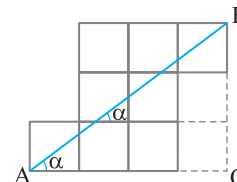
۳۶۳- گزینه ۴

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

بنا بر قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{BAC}$ ، در نتیجه

$$\tan \alpha = \tan \hat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\text{پس } \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$$



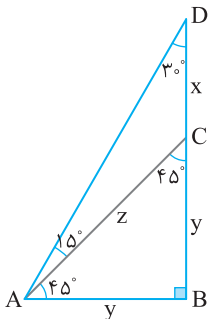
۳۶۴- گزینه ۱

مطابق شکل داده شده، در مثلث قائم الزاویه ABC،

چون $\hat{CAB} = 45^\circ$ پس این مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است. از طرف

دیگر در مثلث قائم الزاویه ABD، $\hat{BAD} = 60^\circ$. پس

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{3} - 1$$



اکنون توجه کنید که بنا بر قضیه فیثاغورس

در مثلث ABC،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow z^2 = y^2 + y^2$$

$$z = y\sqrt{2}$$

بنابراین

$$\frac{DC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

۳۶۵- گزینه ۱

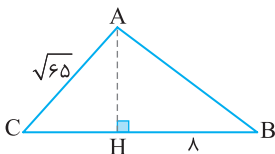
در مثلث قائم الزاویه AHB، در مورد زاویه B می‌دانیم

$$\tan \hat{B} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 6$$

در مثلث قائم الزاویه ACH با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع CH را حساب کنیم:

$$AC^2 = CH^2 + AH^2$$

$$6^2 = CH^2 + 3^2 \Rightarrow CH = \sqrt{27}$$



۳۶۶- گزینه ۳

با توجه به شکل $\cot \hat{B} = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$. بنابراین

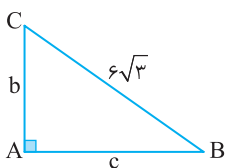
$c = b\sqrt{2}$ از طرف دیگر طبق قضیه فیثاغورس،

$$b^2 + c^2 = (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow b^2 + (b\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{3})^2$$

$$b^2 + 2b^2 = 36 \times 3 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین $c = 6\sqrt{2}$ و در نتیجه

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$



۳۶۷- گزینه ۲

در مثلث قائم الزاویه OBC، $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$. همچنین در

مثلث قائم الزاویه OCH، $\hat{HOC} + \hat{C} = 90^\circ$. در نتیجه $\hat{B} = \hat{HOC} = \alpha$

اکنون در مثلث قائم الزاویه OHB،

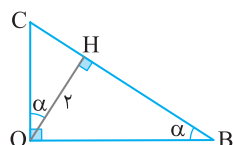
$$\sin \alpha = \sin \hat{B} = \frac{OH}{OB} = \frac{2}{OB} \Rightarrow OB = \frac{2}{\sin \alpha}$$

در مثلث قائم الزاویه OCH،

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OC} = \frac{2}{OC} \Rightarrow OC = \frac{2}{\cos \alpha}$$

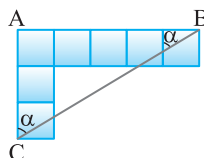
بنابراین

$$OB + OC = \frac{2}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha}$$



۳۷۲- گزینه ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{ACB}$. در نتیجه

$$\tan \alpha = \tan \hat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$$



۳۷۳- گزینه ۱ در مثلث قائم الزاویه ABH،

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{AH}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{\sqrt{2}} \Rightarrow AH = \sqrt{2}$$

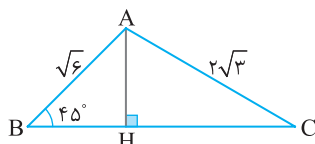
از طرف دیگر چون $\tan \hat{B} = \tan 45^\circ = \frac{AH}{BH}$ پس $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{BH}$ ، بنابراین

$BH = \sqrt{3}$. در مثلث قائم الزاویه AHC، طبق قضیه فیثاغورس،

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 + HC^2 = (2\sqrt{3})^2$$

$$HC^2 = 9 \Rightarrow HC = 3$$

$$\frac{HC}{BH} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ بنابراین}$$

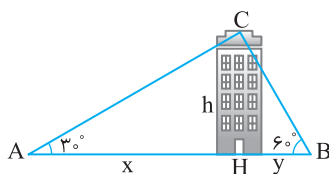


۳۷۴- گزینه ۲ ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر در مثلث‌های قائم الزاویه ACH و BCH،

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}h, \quad \tan 60^\circ = \frac{h}{y} = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}h$$

بنابراین $x + y = 24$ از طرف دیگر $x + y = \frac{4\sqrt{3}}{3}h$

$$24 = \frac{4\sqrt{3}}{3}h \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$$

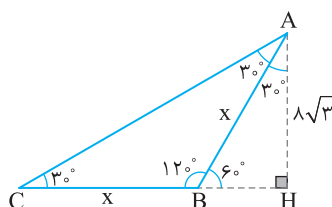


۳۷۵- گزینه ۲ ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، در مثلث قائم الزاویه ABH،

$$\tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{BH} \Rightarrow BH = 8$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ABH،

$$\sin \hat{ABH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 16$$



۳۶۸- گزینه ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر،

$\sin \alpha = \frac{y}{4}$. بنابراین باید مقدار y را به دست آوریم. در مثلث قائم الزاویه

ACH، $x^2 + y^2 = 9$. در مثلث قائم الزاویه ABH،

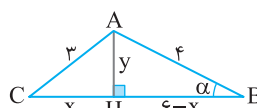
$$y^2 + (6-x)^2 = 16 \Rightarrow y^2 + x^2 - 12x + 36 = 16$$

با جای گذاری $x^2 + y^2 = 9$ به دست می‌آید

$$9 - 12x + 36 = 16 \Rightarrow 12x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{12}$$

$$\frac{x^2 + y^2 = 9}{\frac{29}{12}} \Rightarrow \left(\frac{29}{12}\right)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \frac{455}{144} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{455}}{12}$$

و در نتیجه



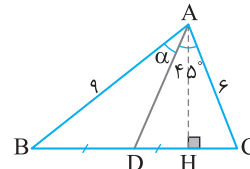
$$\sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{455}}{12}}{\frac{4}{12}} = \frac{\sqrt{455}}{48}$$

۳۶۹- گزینه ۲ ابتداتوجه کنید که چون مثلث‌های ABD و ACD در ارتفاع

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}AH \times CD} = \frac{BD}{CD} = 1 \text{ پس } BD = CD$$

$$S_{ABD} = S_{ACD} \Rightarrow \frac{1}{2}AB \times AD \times \sin \alpha = \frac{1}{2}AC \times AD \times \sin 45^\circ$$

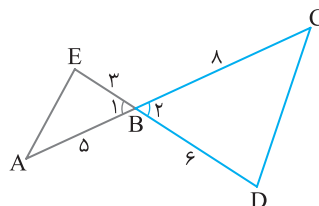
$$AB \times \sin \alpha = AC \times \sin 45^\circ \Rightarrow 9 \times \sin \alpha = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$



۳۷۰- گزینه ۱ دقت کنید که در شکل زیر $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ ، از طرف دیگر،

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin \hat{B}_1, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin \hat{B}_2$$

بنابراین



$$\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}} = \frac{5}{16}$$

۳۷۱- گزینه ۲ مطابق شکل،

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{5}{4}b$$

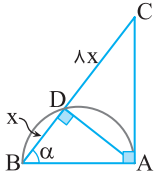
از طرف دیگر $b + c = 7$. بنابراین

$$b + \frac{5}{4}b = 7 \Rightarrow \frac{9b}{4} = 7 \Rightarrow b = \frac{28}{9}, \quad c = \frac{5}{4} \times \frac{28}{9} = \frac{35}{9}$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس،

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(\frac{35}{9}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{28}{9}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{35^2 - 28^2}{9^2} = \frac{(35-28)(35+28)}{9^2} = \frac{7 \times 63}{9^2} = \frac{7 \times 7}{9} = \frac{49}{9} \Rightarrow a = \frac{7}{3}$$



در نتیجه $\cos \alpha = \frac{x}{AB} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

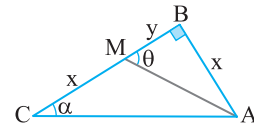
۳۷۶- گزینه ۱ فرض کنید $CM=AB=x$ و $MB=y$. طبق

فرض $\tan \theta = 3 \tan \alpha$ ، بنابراین $\frac{x}{y} = \frac{3x}{x+y}$. پس $x+y=3y$.

نتیجه $x=2y$ از این رو $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ و $\tan \theta = 2$. بنابراین $\cot \alpha = \frac{3}{2}$ و

$\cot \theta = \frac{1}{2}$ و در نتیجه

$$\cot \alpha + \cot \theta = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$



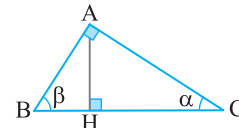
۳۷۷- گزینه ۱ راه حل اول در مثلث‌های قائم الزاویه ABH و ACH،

$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \cos \beta \times AB \\ \cos \alpha = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = \cos \alpha \times AC \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{AB \cos \beta}{AC \cos \alpha}$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ABC،

$$\cos \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{4}, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{4}$$

بنابراین $\frac{BH}{HC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \tan^2 \alpha$



راه حل دوم در مثلث قائم الزاویه ABC،

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{4} \Rightarrow AB = 4 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{4} \Rightarrow AC = 4 \cos \alpha$$

در مثلث قائم الزاویه AHC،

$$\cos \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = AC \cos \alpha = 4 \cos^2 \alpha$$

در مثلث قائم الزاویه ABH،

$$\cos \beta = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cos \beta = 4 \sin \alpha \cos \beta$$

چون α و β متمم هستند، پس $\cos \beta = \sin \alpha$ و در نتیجه

$$\frac{BH}{HC} = \frac{4 \sin^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$$

۳۷۸- گزینه ۲ در مثلث قائم الزاویه ABD، $\cos \alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{x}{AB}$

در مثلث قائم الزاویه ABC، $\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{x+8x} = \frac{AB}{9x}$ ، بنابراین

$$\frac{x}{AB} = \frac{AB}{9x} \Rightarrow AB^2 = 9x^2 \Rightarrow AB = 3x$$

۳۷۹- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times BC \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} BC \quad (1)$$

همین‌طور،

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AB \times BC \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} AB \times BC \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

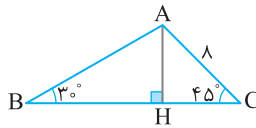
$$2\sqrt{2} BC = \frac{1}{4} AB \times BC \Rightarrow AB = 8\sqrt{2}$$

راه حل دوم ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر در مثلث AHC،

$$\sin \hat{C} = \sin 45^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 4\sqrt{2}$$

در مثلث ABH،

$$\sin \hat{B} = \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{AB} \Rightarrow AB = 8\sqrt{2}$$



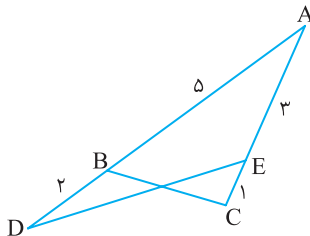
۳۸۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \times AE \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \sin \hat{A} = \frac{21}{2} \sin \hat{A}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin \hat{A} = 10 \sin \hat{A}$$

بنابراین $S_{ADE} + S_{ABC} = \left(\frac{21}{2} + 10\right) \sin \hat{A} = \frac{41}{2} \sin \hat{A}$ پس

$$\frac{41}{2} \sin \hat{A} = \frac{41}{2} \Rightarrow \sin \hat{A} = 1 \xrightarrow{\text{حاده است}} \hat{A} = 90^\circ$$



۳۸۱- گزینه ۴ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 23° در ربع سوم قرار

دارد، پس $\sin 23^\circ$ و $\cos 23^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو

به زاویه 31° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin 31^\circ$ عددی منفی و

$\cos 31^\circ$ عددی مثبت است.

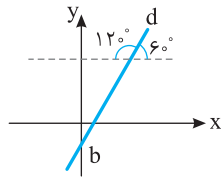
۳۸۲- گزینه ۳ با توجه به تساوی $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ معلوم است که

$\cos \alpha \leq 0$. با توجه به تساوی $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ معلوم است که

$\sin \alpha \leq 0$. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم مثلثاتی است.

بنابراین

$$a = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad b = -2a + \sqrt{3} = -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$$



۳۹۱- گزینه ۱ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 19° ، 17° ، 7° و

26° به ترتیب در ناحیه‌های اول، دوم، سوم و سوم مثلثاتی است. پس $\tan 17^\circ$ عددی منفی است و $\tan 19^\circ$ ، $\cot 7^\circ$ ، $\cot 26^\circ$ اعدادی مثبت هستند.

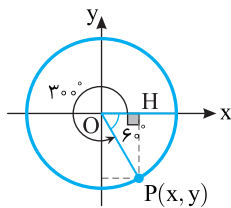
۳۹۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که در مثلث OPH،

$$\sin 60^\circ = \frac{PH}{OP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PH}{1} \Rightarrow PH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{OH}{OP} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OH}{1} \Rightarrow OH = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر $x = OH$ و $y = -PH$ بنابراین

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x-1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \sqrt{3}$$



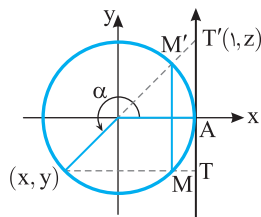
۳۹۳- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر واضح است که $\sin \alpha = y$ و

$\tan \alpha = z$ بنابراین طول پاره خط TT' برابر است با

$$TT' = AT + AT' = |y| + |z| = -y + z = -\sin \alpha + \tan \alpha$$

از طرف دیگر $MM' = 2|y| = -2y = -2\sin \alpha$ بنابراین

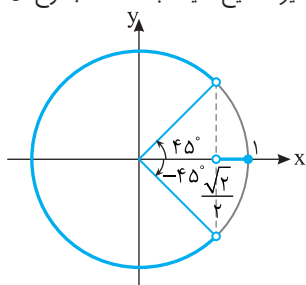
$$TT' - MM' = \tan \alpha - \sin \alpha - (-2\sin \alpha) = \tan \alpha + \sin \alpha$$



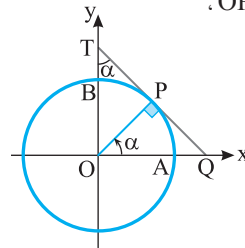
۳۹۴- گزینه ۳ وقتی $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، $-45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ و مطابق

شکل زیر، $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \frac{\alpha}{2} \leq 1$ در نتیجه $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{4} \leq 1$ ، یعنی $2\sqrt{2} < m \leq 4$

پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۳ یا ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.

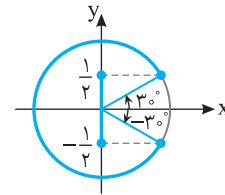


۳۸۳- گزینه ۴ توجه کنید که دو مثلث قائم الزاویه POQ و OTQ در زاویه حاده رأس Q مشترک‌اند، پس زاویه حاده دیگر آن‌ها نیز برابر است، یعنی $OTQ = POQ = \alpha$. در مثلث قائم الزاویه OPT،



$$\sin \alpha = \frac{OP}{OT} = \frac{1}{OB+BT} = \frac{1}{1+BT}$$

$$1+BT = \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow BT = \frac{1}{\sin \alpha} - 1$$



۳۸۴- گزینه ۴ از $-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-30^\circ \leq 2\alpha \leq 30^\circ$. با توجه

به شکل مقابل $-\frac{1}{2} \leq \sin 2\alpha \leq \frac{1}{2}$ و در نتیجه $-\frac{1}{2} \leq \frac{m}{4} \leq \frac{1}{2}$ ، یعنی $-2 \leq m \leq 2$

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ± 2 ، ± 1 و صفر باشد.

۳۸۵- گزینه ۱ می‌دانیم حداکثر مقدار $\sin \alpha$ و $\cos \beta$ برابر ۱ است.

بنابراین از تساوی $2\sin \alpha + 5\cos \beta = 7$ نتیجه می‌شود $\sin \alpha = 1$ و $\cos \beta = 1$. بنابراین $3\sin \alpha - 4\cos \beta = 3 - 4 = -1$.

۳۸۶- گزینه ۳ از $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ نتیجه می‌شود $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ بنابراین

$$0 \leq 2\sin \alpha \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2\sin \alpha + 1 \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2\sin \alpha + 1}{3} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2\sin \alpha + 1} \leq 3$$

پس حداکثر مقدار عبارت برابر ۳ است.

۳۸۷- گزینه ۱ فرض کنید زاویه بین این دو ضلع α باشد. چون

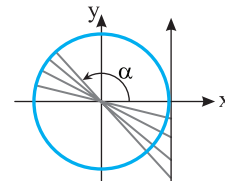
$\sin \alpha \leq 1$ پس

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \sqrt{6} \sin \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha \leq \sqrt{3}$$

اگر زاویه بین این دو ضلع 90° باشد، مساحت مثلث برابر $\sqrt{3}$ می‌شود. بنابراین بیشترین مقدار ممکن مساحت مثلث مورد نظر برابر $\sqrt{3}$ است.

۳۸۸- گزینه ۱ می‌دانیم اگر $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ ، آن‌گاه $\tan \alpha \leq 0$.

بنابراین



$$2m+1 \leq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{2}$$

۳۸۹- گزینه ۳ چون خط از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد، پس مختصات این

نقطه در معادله خط صدق می‌کنند:

$$3 \times 0 - a \times 2 + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

بنابراین معادله خط به صورت $3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ یا همان $y = \sqrt{3}x + 2$

است که شیب آن $\sqrt{3}$ است. پس $\tan \alpha = \sqrt{3}$ بنابراین

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۹۰- گزینه ۱ با توجه به شکل رسم شده شیب خط برابر $\tan 60^\circ$ است

و عرض از مبدأ آن برابر b است. از طرف دیگر در خط به معادله $y = ax - 2a + \sqrt{3}$

شیب خط برابر a و عرض از مبدأ آن برابر $-2a + \sqrt{3}$ است.

۳۹۷- گزینه ۴ می‌دانیم اگر $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$ و

اگر $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$. بنابراین $\sin 20^\circ < \cos 20^\circ$ و $\sin 70^\circ > \cos 70^\circ$ در نتیجه

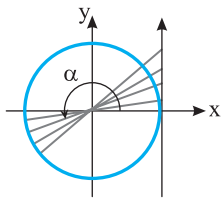
$$A = \underbrace{|\sin 20^\circ - \cos 20^\circ|}_{-} - \underbrace{|\sin 70^\circ - \cos 70^\circ|}_{+}$$

$$= -\sin 20^\circ + \cos 20^\circ - (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ)$$

$$= -\sin 20^\circ + \cos 20^\circ - \sin 70^\circ + \cos 70^\circ$$

چون زاویه‌های 20° و 70° متمم یکدیگرند، پس $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$ و

$\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$ و در نتیجه $A = 0$.



۳۹۸- گزینه ۳ از $180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$

نتیجه می‌شود $\tan \alpha \geq 0$ و در نتیجه $m^2 + m + 1 \geq 0$ ، یعنی $m^3 + m^2 \geq 0$.

چون $m^2 \geq 0$ همواره درست است، پس کافی است $m + 1 \geq 0$ که در نتیجه $m \geq -1$.

۳۹۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که شیب خط d' برابر $\tan 15^\circ$ و

عرض از مبدأ آن برابر ۲ است. پس معادله آن به صورت $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$

است. بنابراین طول نقطه A که محل برخورد خط d' با محور x است، به صورت زیر به دست می‌آید:

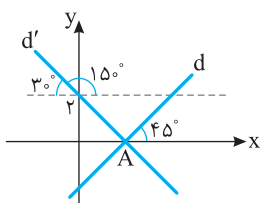
$$0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_A + 2 \Rightarrow x_A = 2\sqrt{3}$$

از طرف دیگر شیب خط d برابر $\tan 45^\circ$ است و این خط از نقطه A می‌گذرد. بنابراین معادله این خط به صورت $y = x + b$ است و اگر مختصات نقطه A را

در معادله این خط قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$0 = 2\sqrt{3} + b \Rightarrow b = -2\sqrt{3}$$

پس معادله خط d به صورت $y = x - 2\sqrt{3}$ است.



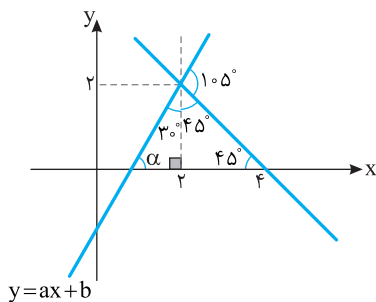
۴۰۰- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر، واضح است که $\alpha = 60^\circ$ و در

نتیجه $a = \tan \alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ، یعنی معادله خط $y = \sqrt{3}x + b$

است و چون نقطه $(2, 2)$ روی خط قرار دارد، پس

$$2 = \sqrt{3} \times 2 + b \Rightarrow b = 2 - 2\sqrt{3}$$

بنابراین $a + b = \sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$.



۳۹۵- گزینه ۳ به جای $\cos^2 x$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 x$. پس

عبارت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A = 4(1 - \sin^2 x) - 2 \sin x = -4 \sin^2 x - 2 \sin x + 4$$

$$= -\left(2 \sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

اکنون دو راه حل ارائه می‌کنیم.

راه حل اول چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$-2 \leq 2 \sin x \leq 2 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq 2 \sin x + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$$

$$0 \leq \left(2 \sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4} \Rightarrow -\frac{25}{4} \leq -\left(2 \sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

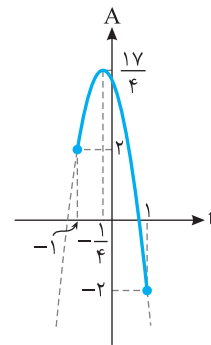
$$-2 \leq \frac{17}{4} - \left(2 \sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{17}{4} \Rightarrow -2 \leq A \leq \frac{17}{4}$$

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر $\frac{17}{4} - (-2) = \frac{25}{4}$ است.

راه حل دوم اگر فرض کنیم $t = \sin x$ ، آن‌گاه

$$A = -\left(2t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

نمودار A بر حسب t به صورت زیر است. واضح است که $-2 \leq A \leq \frac{17}{4}$.



۳۹۶- گزینه ۱ **راه حل اول** عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3} = \frac{3 \cos \alpha + 9}{\cos \alpha + 3} - \frac{8}{\cos \alpha + 3} = 3 - \frac{8}{\cos \alpha + 3}$$

از $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ نتیجه می‌شود

$$2 \leq \cos \alpha + 3 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\cos \alpha + 3} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -4 \leq \frac{-8}{\cos \alpha + 3} \leq -2$$

$$-1 \leq 3 - \frac{8}{\cos \alpha + 3} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq A \leq 1$$

بنابراین A نمی‌تواند برابر $\frac{9}{8}$ شود.

راه حل دوم اگر قرار دهیم $A = \frac{9}{8}$ ، آن‌گاه

$$\frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3} = \frac{9}{8} \Rightarrow 24 \cos \alpha + 8 = 9 \cos \alpha + 27$$

$$15 \cos \alpha = 19 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{19}{15}$$

چون مقدار $\cos \alpha$ نمی‌تواند برابر $\frac{19}{15}$ باشد، پس مقدار A هم نمی‌تواند برابر

$\frac{9}{8}$ باشد.

عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم: **۴-۴۰۶ گزینۀ ۴**

$$\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + \frac{1}{\sin \alpha})}{\cos \alpha (1 + \frac{1}{\sin \alpha})} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \alpha \left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \right) = \tan^2 \alpha \left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)$$

واضح است که عبارت‌های $1 + \sin \alpha$ و $1 + \cos \alpha$ و $\tan^2 \alpha$ همگی همواره نامنفی هستند. پس در هر چهار ناحیه، عبارت فوق نامنفی است.

می‌توان نوشت **۲-۴۰۷ گزینۀ ۲**

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha (1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

عبارت A را ساده می‌کنیم: **۲-۴۰۸ گزینۀ ۲**

$$A = \cot^2 x + \cot^2 x \tan^2 x + \tan^2 x + \tan^2 x \cot^2 x = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 = (\tan x + \cot x)^2$$

بنابراین $\sqrt{A} = \sqrt{(\tan x + \cot x)^2} = |\tan x + \cot x|$ چون انتهای

کمان روبه‌رو به زاویه x در ناحیه دوم قرار دارد، پس $\tan x < 0$ و $\cot x < 0$. در نتیجه $\tan x + \cot x < 0$. بنابراین

$$\sqrt{A} = -\tan x - \cot x$$

طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ را به توان دو **۳-۴۰۹ گزینۀ ۳**

می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

بنابراین

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 2\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{23}{32}$$

۱-۴۱۰ گزینۀ ۱ توجه کنید که

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

پس

$$\frac{2}{3} = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{6}$$

$$(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع دوم است، پس $\sin \alpha > 0$ و

$\cos \alpha < 0$ و در نتیجه $\sin \alpha \cos \alpha < 0$. پس $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

۲-۴۰۱ گزینۀ ۲ با استفاده از اتحاد $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ مقدار

$\tan \alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = \pm 2$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه چهارم است، پس $\tan \alpha < 0$ ،

در نتیجه $\tan \alpha = -2$. بنابراین $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

۳-۴۰۲ گزینۀ ۳ با استفاده از اتحاد $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ مقدار m را

حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2m} (m+3) = 1 \Rightarrow m+3 = 2m \Rightarrow m = 3$$

بنابراین $\cot \alpha = 6$ و به کمک اتحاد $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ مقدار

$\sin^2 \alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$1 + 6^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{37}$$

۴-۴۰۳ گزینۀ ۴ مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{1 + \sin 10^\circ} + \frac{1}{1 - \sin 10^\circ} = \frac{1 - \sin 10^\circ + 1 + \sin 10^\circ}{(1 + \sin 10^\circ)(1 - \sin 10^\circ)} = \frac{2}{1 - \sin^2 10^\circ} = \frac{2}{\cos^2 10^\circ}$$

۳-۴۰۴ گزینۀ ۳ در صورت کسر از $\sin 15^\circ$ و در مخرج کسر از

$\cos 15^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A = \frac{\sin 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\cos 15^\circ (1 - \cos^2 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ \times \cos^2 15^\circ}{\cos 15^\circ \times \sin^2 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \cot 15^\circ$$

۳-۴۰۵ گزینۀ ۳ راه‌حل اول در تساوی $3 \sin^2 x + 1 + 4 \cos^2 x$ به

جای $\sin^2 x$ قرار می‌دهیم $1 - \cos^2 x$ و مقدار $\cos^2 x$ را به دست می‌آوریم:

$$3(1 - \cos^2 x) = 1 + 4 \cos^2 x \Rightarrow 3 - 3 \cos^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$$

$$7 \cos^2 x = 2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{7}$$

اکنون به کمک اتحاد $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ مقدار $\tan^2 x$ را حساب می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{2}{7}} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{5}{2}$$

راه‌حل دوم ابتدا دو طرف معادله داده شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$3 \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x \Rightarrow 3 \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + 4$$

چون $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ پس

$$3 \tan^2 x = 1 + \tan^2 x + 4 \Rightarrow 2 \tan^2 x = 5 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{5}{2}$$

۴۱۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر دو طرف تساوی فرض مسئله را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{9} = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$$

بنابراین $\sin x \cos x = \frac{4}{9}$. اکنون توجه کنید که

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $\frac{9}{4}$ است.

۴۱۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$$

در نتیجه $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{23}{16}$. بنابراین $(\frac{3}{4})^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x > 0$ و $\sin x > 0$. بنابراین

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{23}}{4}$$

۴۱۸- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x + \cot x)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \underbrace{\tan x \cot x}_1 = 5$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x + 2 = 5$$

پس $\tan^2 x + \cot^2 x = 3$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan^2 x + \cot^2 x)^2 = 3^2 \Rightarrow \tan^4 x + \cot^4 x + 2 \underbrace{\tan^2 x \cot^2 x}_1 = 9$$

$$\tan^4 x + \cot^4 x + 2 = 9$$

پس $\tan^4 x + \cot^4 x = 7$

۴۱۹- گزینه ۳ عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

$$= \cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \cos \alpha - |\tan \alpha \sin \alpha|$$

چون $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، پس $\sin \alpha < 0$ و $\tan \alpha > 0$ ، در نتیجه $\sin \alpha \tan \alpha < 0$. بنابراین

$$A = \cos \alpha + \tan \alpha \sin \alpha = \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

۴۲۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}} = \sqrt{1 + 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

چون $36^\circ < \alpha < 15^\circ$ ، پس $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha > 0$. بنابراین $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ ، پس

$$A = \sqrt{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|$$

چون $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha > 0$ ، پس $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$ و در نتیجه

$$A = -\sin \alpha + \cos \alpha$$

۴۱۱- گزینه ۴ به کمک اتحاد $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ مقدار $\sin x$ را

حساب می‌کنیم:

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{13} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ناحیه سوم است، پس $\sin x < 0$.

بنابراین $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. اکنون با استفاده از اتحاد $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ مقدار

$\cos x$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{2}{3} = \frac{\cos x}{-\frac{3}{\sqrt{13}}} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

بنابراین $2 \cos x - \sin x = -\frac{4}{\sqrt{13}} - \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{13}}$

۴۱۲- گزینه ۱ از اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sqrt{k-1})^2 + (\sqrt{2k-3})^2 = 1 \Rightarrow k-1+2k-3=1 \Rightarrow 3k=5 \Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

بنابراین $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ، $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ و در نتیجه

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2}$$

۴۱۳- گزینه ۴

$$\frac{(1 + \tan 2^\circ)(1 - \cot 2^\circ)}{(1 + \cot 2^\circ)(1 - \tan 2^\circ)} = \frac{1 - \cot 2^\circ + \tan 2^\circ - \tan 2^\circ \cot 2^\circ}{1 - \tan 2^\circ + \cot 2^\circ - \tan 2^\circ \cot 2^\circ}$$

$$= \frac{1 - \cot 2^\circ + \tan 2^\circ - 1}{1 - \tan 2^\circ + \cot 2^\circ - 1} = \frac{\tan 2^\circ - \cot 2^\circ}{\cot 2^\circ - \tan 2^\circ} = -1$$

۴۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که $\cot x = \frac{1}{\tan x}$. بنابراین

$$\frac{1 + \cot^2 x}{\cot x} = \frac{1 + \frac{1}{\tan^2 x}}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x}$$

در نتیجه $\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{1 + \cot^2 x}{\cot x} = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x} = 1$

۴۱۵- گزینه ۱ تساوی داده شده را به صورت $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad (*)$$

با استفاده از اتحاد $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ تساوی داده شده به صورت

$$\cos \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{درمی‌آید. پس}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

از تساوی $(*)$ مشخص است که $\cos \alpha$ عددی مثبت است، پس

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

راه حل دوم طرفین تساوی $\sin x - \cos x = \frac{2}{3}$ را به توان سه می‌رسانیم

$$(\sin x - \cos x)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\sin^3 x - 3\sin^2 x \cos x + 3\sin x \cos^2 x - \cos^3 x = \frac{8}{27}$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x - 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x) = \frac{8}{27}$$

بنابراین باید حاصل $\sin x \cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

بنابراین $\sin x \cos x = \frac{5}{18}$ در نتیجه

$$\sin^3 x - \cos^3 x - 3 \times \frac{5}{18} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \Rightarrow \sin^3 x - \cos^3 x = \frac{23}{27}$$

۴۲۷- گزینه ۴ از اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ استفاده

می‌کنیم:

$$\tan^3 x - \cot^3 x = (\tan x - \cot x)^3$$

$$+ 3 \tan x \cot x (\tan x - \cot x)$$

چون $\tan x \cot x = 1$ و $\tan x - \cot x = 3$ پس

$$\tan^3 x - \cot^3 x = 3^3 + 3 \times 1 \times 3 = 36$$

۴۲۸- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t = \tan \alpha$ ، آن‌گاه $\cot \alpha = \frac{1}{t}$ و

معادله داده شده به صورت $t - \frac{2}{t} = \sqrt{2}$ درمی‌آید. دو طرف این معادله را در t

ضرب کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$t^2 - 2 = \sqrt{2}t \Rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه α در ربع اول است، پس $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}$

قابل قبول نیست. در نتیجه $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$

بنابراین $\tan \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ در نتیجه

$$\tan^2 \alpha = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2} = 3 + \sqrt{5}$$

۴۲۹- گزینه ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر دوم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$1 - 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x (1 - \tan^2 x) = \cos^2 x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

در نتیجه دومین کسر برابر با ۱ است. بنابراین حاصل عبارت برابر است با

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + 1 = \frac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$$

با تقسیم صورت و مخرج این کسر بر $\cos x$ معلوم می‌شود که کسر برابر

$$\text{است با } \frac{2 \tan x}{\tan x - 1}$$

۴۲۱- گزینه ۳ از تساوی $\frac{5 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود

$10 \sin x = 2 \sin x + \cos x$ ، بنابراین $8 \sin x = \cos x$ و در نتیجه $\cot x = 8$ پس $\frac{\cos x}{\sin x} = 8$

۴۲۲- گزینه ۱ از اتحاد $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ نتیجه می‌شود

$$1 + \left(\sqrt{\frac{m+2}{2m+5}}\right)^2 = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{m+2}{2m+5}}\right)^2}$$

$$1 + \frac{m+2}{2m+5} = \frac{2m+5}{m+2} \Rightarrow \frac{2m+5+m+2}{2m+5} = \frac{2m+5}{m+2}$$

$$\frac{3m+7}{2m+5} = \frac{2m+5}{m+2} \Rightarrow 2m+5 = m+2 \Rightarrow m = -3$$

(توجه کنید که $2m+7$ نمی‌تواند صفر باشد). بنابراین

$$\tan x = \sqrt{\frac{-3+2}{2(-3)+5}} = 1$$

۴۲۳- گزینه ۲ با استفاده از اتحاد $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ و مخرج

مشترک‌گیری به دست می‌آید

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

۴۲۴- گزینه ۴ چون $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$ ، می‌توان نوشت

$$\frac{\sin^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{\cos^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ = \frac{1 - \cos^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{1 - \sin^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$$

$$= \frac{(1 - \cos 15^\circ)(1 + \cos 15^\circ)}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{(1 - \sin 15^\circ)(1 + \sin 15^\circ)}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$$

$$= 1 - \cos 15^\circ - (1 - \sin 15^\circ) + \cos 15^\circ = \sin 15^\circ$$

۴۲۵- گزینه ۲ صورت و مخرج کسر A را بر $\cos^3 x$ تقسیم می‌کنیم

و از اتحادهای $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \frac{2 \cos x}{\cos^3 x}}{\frac{4 \sin x}{\cos^3 x} - \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}} = \frac{\tan^3 x - \frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{4 \tan x}{\cos^2 x} - 1}$$

$$= \frac{\tan^3 x - 2(1 + \tan^2 x)}{4 \tan x (1 + \tan^2 x) - 1} = \frac{3^3 - 2(1 + 3^2)}{4 \times 3(1 + 3^2) - 1} = \frac{7}{119} = \frac{1}{17}$$

۴۲۶- گزینه ۲ **راه حل اول** توجه کنید که

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

بنابراین باید حاصل $\sin x \cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

بنابراین $\sin x \cos x = \frac{5}{18}$. در این صورت حاصل عبارت مورد نظر برابر

$$\text{است با } \frac{2}{3} \times \frac{23}{18} = \frac{23}{27}$$

۴۳۳- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\cos 2^\circ} + \tan 2^\circ\right)(1 - \sin 2^\circ) &= \left(\frac{1}{\cos 2^\circ} + \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}\right)(1 - \sin 2^\circ) \\ &= \frac{1}{\cos 2^\circ}(1 + \sin 2^\circ)(1 - \sin 2^\circ) = \frac{1}{\cos 2^\circ}(1 - \sin^2 2^\circ) \\ &= \frac{1}{\cos 2^\circ}(\cos^2 2^\circ) = \cos 2^\circ \end{aligned}$$

۴۳۴- گزینه ۳ راه‌حل اول فرض کنید

$$B = \sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} B^2 &= 1 + \cos 36^\circ + 1 - \cos 36^\circ + 2\sqrt{(1 - \cos 36^\circ)(1 + \cos 36^\circ)} \\ &= 2 + 2\sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = 2 + 2\sqrt{\sin^2 36^\circ} = 2 + 2\sin 36^\circ \end{aligned}$$

چون $B > 0$ ، پس $B = \sqrt{2(1 + \sin 36^\circ)}$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با $\sqrt{2}$ است.

راه‌حل دوم می‌دانیم (درس ششم این فصل را ببینید)

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x, \quad 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}}{\sqrt{1 + \sin 36^\circ}} \\ &= \frac{\sqrt{2\cos^2 18^\circ} + \sqrt{2\sin^2 18^\circ}}{\sqrt{2\cos^2 18^\circ + \sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\cos 18^\circ + \sin 18^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 18^\circ + \sin 18^\circ)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۴۳۵- گزینه ۱ راه‌حل اول معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3(1 - \cos^2 \alpha) - 5\cos \alpha + 5 = 0 \Rightarrow 3\cos^2 \alpha + 5\cos \alpha - 8 = 0$$

اگر فرض کنیم $t = \cos \alpha$ ، می‌توانیم معادله را به شکل $3t^2 + 5t - 8 = 0$ بنویسیم که چون مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $t = 1$ و دیگری $t = -\frac{8}{3}$ است. چون $\cos \alpha = -\frac{8}{3}$ قابل قبول نیست، پس

$$\cos \alpha = 1 \text{ و در نتیجه } \alpha = 0$$

راه‌حل دوم $\alpha = 0$ در معادله صدق می‌کند، پس کافی است مقدار $\cos^6 \alpha$ را به ازای $\alpha = 0$ حساب کنیم، که برابر ۱ می‌شود.

۴۳۶- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (\tan x + \cot x)^2 &= (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \underbrace{\tan x \cot x}_1 = 5 \\ \tan^2 x + \cot^2 x + 2 &= 5 \end{aligned}$$

پس $\tan^2 x + \cot^2 x = 3$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان سه می‌رسانیم:

$$(\tan^2 x + \cot^2 x)^3 = 3^3$$

$$\tan^6 x + 3\tan^4 x \cot^2 x + 3\tan^2 x \cot^4 x + \cot^6 x = 27$$

$$\tan^6 x + \cot^6 x + 3\tan^2 x \cot^2 x (\tan^2 x + \cot^2 x) = 27$$

با توجه به اینکه $\tan^2 x \cot^2 x = 1$ و $\tan^2 x + \cot^2 x = 3$ نتیجه می‌شود

$$\tan^6 x + \cot^6 x + 9 = 27 \Rightarrow \tan^6 x + \cot^6 x = 18$$

۴۳۰- گزینه ۳ به جای $\cos^2 x$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 x$. عبارت به

شکل زیر است:

$$A = 1 - \sin^2 x - 2\sin x = 1 - (\sin^2 x + 2\sin x + 1 - 1)$$

$$= 1 - (\sin x + 1)^2 + 1 = 2 - (\sin x + 1)^2$$

چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (\sin x + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -(\sin x + 1)^2 \leq 0$$

$$-2 \leq 2 - (\sin x + 1)^2 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq A \leq 2$$

بنابراین اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر ۴ واحد است.۴۳۱- گزینه ۱ راه‌حل اول از تساوی $\tan x = \frac{1}{3}$ نتیجه می‌شود

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3}$ ، یعنی $\cos x = 3\sin x$. در عبارت A به جای $\cos x$ قرار

می‌دهیم $3\sin x$. در این صورت $A = \frac{2\sin x + 3\sin x}{\sin x + 9\sin x} = \frac{5\sin x}{10\sin x} = \frac{1}{2}$

راه‌حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا برحسب $\tan x$ نوشته شود:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{3\cos x}{\cos x}} = \frac{2\tan x + 1}{\tan x + 3} \end{aligned}$$

اکنون با قرار دادن $\frac{1}{3}$ به جای $\tan x$ در عبارت فوق، مقدار A به دست

$$A = \frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 3} = \frac{1}{2}$$

۴۳۲- گزینه ۲ راه‌حل اول توجه کنید که $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$ و

$$\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$A = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ} = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} - \cos^2 15^\circ}{\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ} - \sin^2 15^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ \sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}} = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ (1 - \cos^2 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ}}$$

$$= \frac{\cos^4 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} = \frac{\cos^6 15^\circ}{\sin^6 15^\circ} = \cot^6 15^\circ$$

راه‌حل دوم کسر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cot^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ} = \frac{\cot^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\tan^2 15^\circ (1 - \cos^2 15^\circ)} \\ &= \frac{\cot^2 15^\circ \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ \sin^2 15^\circ} = \cot^4 15^\circ \left(\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} \right) \\ &= \frac{1}{\cot^2 15^\circ} (\sin^2 15^\circ) \\ &= \cot^4 15^\circ \cot^2 15^\circ = \cot^6 15^\circ \end{aligned}$$

۴۴۲- گزینه ۴ اگر اندازه زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان

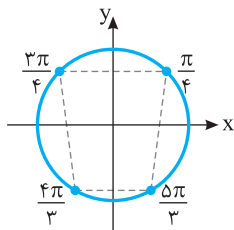
$$R = \frac{\Delta\pi}{4D} \text{ برابر } R \text{ باشد، آن گاه } D \times R = \frac{\Delta\pi}{4} \text{، بنابراین}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \text{، بنابراین}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\Delta\pi}{4D} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\Delta}{4D} \Rightarrow D^2 = \frac{900^\circ}{4} \Rightarrow D = 15^\circ$$

بنابراین اندازه این زاویه برابر ۱۵° است.

۴۴۳- گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، چهارضلعی حاصل دوزنقه است.



۴۴۴- گزینه ۱ می‌دانیم اگر به زاویه‌ای مضرب‌های زوج π را اضافه یا

از آن کم کنیم، زاویه جدید، با زاویه اولیه هم‌انتهاست. اکنون توجه کنید که

$$-56^\circ + 4\pi = -56^\circ + 720^\circ = 16^\circ$$

از طرف دیگر، چون اختلاف -56° با هیچ‌یک از زاویه‌های داده شده دیگر مضربی زوج از π نیست، پس با هیچ‌یک از آن‌ها هم‌انتهای نیست.

۴۴۵- گزینه ۴ زاویه بین هر دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ رادیان است. از

طرف دیگر، $\frac{48\pi}{5} = 8\pi + \frac{8\pi}{5} = 8\pi + 16 \times \frac{\pi}{10}$ ، وقتی چرخ و فلک ۴ دور کامل

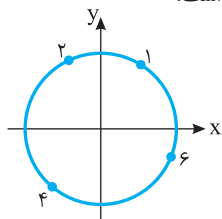
می‌زند، یعنی 8π رادیان می‌چرخد، هر کابین در جای اولیه خود قرار می‌گیرد.

سپس چرخ و فلک به اندازه $16 \times \frac{\pi}{10}$ رادیان دیگر دوران می‌کند که کابین شماره

یک به مکان فعلی ۱۶ کابین جلوتر، یعنی کابین هفدهم منتقل می‌شود.

۴۴۶- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر، واضح است که عرض نقطه‌ای که

انتهای کمان نظیر زاویه ۴ رادیان است، کوچک‌تر از عرض بقیه نقاط است، پس $\sin 4$ از بقیه کوچک‌تر است.



۴۴۷- گزینه ۳ راه‌حل اول در هر ساعت عقربه ساعت‌شمار $\frac{1}{12}$ دور

می‌چرخد که معادل $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان است. بنابراین

$$\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 225 \text{ دقیقه}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم در هر دقیقه، عقربه ساعت‌شمار $(\frac{\pi}{6})^\circ$ یا $\frac{\pi}{36}$ رادیان

$$x = \frac{\Delta\pi}{\frac{\pi}{36}} = 225 \text{ دقیقه، بنابراین } \frac{1}{x} = \frac{36^\circ}{225} = \frac{\pi}{625} \text{، پس}$$

۴۳۷- گزینه ۲ دو طرف تساوی داده شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3 \cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

با توجه به اتحادهای $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ تساوی

قبلی را طوری می‌نویسیم که در آن فقط $\tan x$ وجود داشته باشد:

$$\tan^2 x + 3 - 2 \tan x = 2(1 + \tan^2 x) \Rightarrow \tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$$

$$\text{بنابراین } \tan x = -1 \pm \sqrt{2}$$

۴۳۸- گزینه ۲ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} \\ = \sqrt{1 - 2\sqrt{(\sin \alpha \cos \alpha)^2}} = \sqrt{1 - 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

چون $\alpha = 200^\circ$ ، پس $\sin \alpha < 0$ ، $\cos \alpha < 0$ و در نتیجه $\sin \alpha \cos \alpha > 0$.

بنابراین عبارت A به شکل زیر درمی‌آید:

$$A = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha| = |\sin 200^\circ - \cos 200^\circ|$$

توجه کنید که $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ > 0$ ، بنابراین $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ = A$.

۴۳۹- گزینه ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

صورت کسر

$$\sin^3 40^\circ - \cos^3 40^\circ \\ = (\sin 40^\circ - \cos 40^\circ)(\sin^2 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ) \\ = (\sin 40^\circ - \cos 40^\circ)(1 + \sin 40^\circ \cos 40^\circ)$$

مخرج کسر

$$\cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ \sin 40^\circ = \cos 40^\circ (1 + \cos 40^\circ \sin 40^\circ)$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با

$$\frac{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} - 1 = \tan 40^\circ - 1$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر $\tan 40^\circ$ است.

۴۴۰- گزینه ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} \\ = \frac{(\tan x - \cot x)(\tan^2 x + \tan x \cot x + \cot^2 x)}{\tan x - \cot x}$$

$$= \tan^2 x + 1 + \cot^2 x = 6$$

بنابراین $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ در نتیجه

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \cot^2 x + 1 + \tan^2 x \\ = 2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 2 + 6 = 8$$

۴۴۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که 36° برابر با $\frac{2\pi}{5}$ رادیان

است. بنابراین اندازه زاویه سوم مثلث برابر است با $\pi - (\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}) = \frac{\pi}{2}$ که

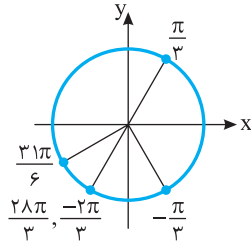
این زاویه از بقیه بزرگ‌تر است.

۴۵۴- گزینه ۳ اگر به زاویه‌ای مضربی زوج از π را اضافه یا از آن کم

کنیم، زاویه جدید با زاویه اولیه هم‌انتهای است. اکنون توجه کنید که $\frac{28\pi}{3} = 9\pi + \frac{\pi}{3}$ و $\frac{31\pi}{6} = 5\pi + \frac{\pi}{6}$. بنابراین انتهای کمان‌های نظیر زاویه‌های

داده شده مانند شکل روبه‌رو است. از روی شکل معلوم است که انتهای کمان

نظیر زاویه‌های $\frac{28\pi}{3}$ و $\frac{31\pi}{6}$ یکسان است.



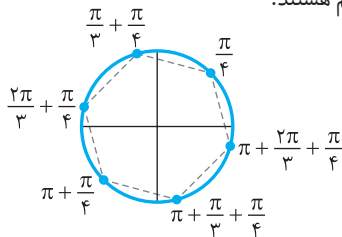
۴۵۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$k=3s \Rightarrow \alpha = \frac{3s\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = s\pi + \frac{\pi}{6}$$

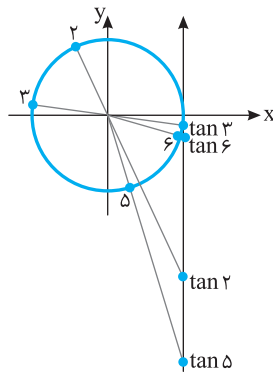
$$k=3s+1 \Rightarrow \alpha = \frac{(3s+1)\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = s\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$k=3s+2 \Rightarrow \alpha = \frac{(3s+2)\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = s\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

بنابراین انتهای کمان نظیر زاویه‌های مورد نظر مطابق شکل زیر رأس‌های یک شش‌ضلعی منتظم هستند.



۴۵۶- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر $\tan 3$ بزرگ‌تر از اعداد دیگر است.



۴۵۷- گزینه ۱ راه‌حل اول چون عقربه ساعت‌شمار در هر ساعت $\frac{1}{12}$

دایره را طی می‌کند، پس در هر ساعت $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان را طی می‌کند. بنابراین

در هر ۲۰ دقیقه، $\frac{20}{60} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{18}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی از ساعت ۹ تا

ساعت ۱۰:۲۰ که یک ساعت و ۲۰ دقیقه زمان گذشته است، عقربه

ساعت‌شمار زاویه‌ای به اندازه $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{18}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی زاویه‌ای به

اندازه $\frac{2\pi}{9}$ رادیان.

۴۴۸- گزینه ۲ طول کمان AB برابر است با $4\pi\alpha$. از طرف دیگر

طول کمان ACB برابر است با محیط دایره منهای طول کمان AB یعنی

$$8\pi^2 - 4\pi\alpha$$

$$8\pi^2 - 4\pi\alpha = 4\pi\alpha + \pi \Rightarrow 8\alpha = 8\pi - 1 \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{1}{8}$$

۴۴۹- گزینه ۱ ۱۶ کابین در این چرخ و فلک وجود دارد. پس زاویه بین

دو کابین متوالی برابر $\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$ است. بنابراین زاویه متناظر به کمان P_0P_1

برابر $\frac{7\pi}{8}$ است. بنابراین

$$\widehat{P_0P_1} = r\theta = 40 \times \frac{7\pi}{8} = 35\pi \text{ متر}$$

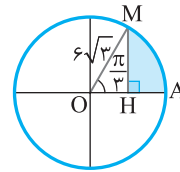
۴۵۰- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر،

$$MH = 6\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = 9, \quad \widehat{AM} = 6\sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$OH = 6\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow AH = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

بنابراین اندازه محیط قسمت رنگی برابر است با

$$9 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\pi = 9 + \sqrt{3}(3 + 2\pi)$$



۴۵۱- گزینه ۱ ابتدا 400° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{400^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{20\pi}{9}$$

بنابراین اگر اندازه زاویه بزرگ‌تر برحسب رادیان برابر X و اندازه زاویه کوچک‌تر

برحسب رادیان برابر Y باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} x+y = \frac{20\pi}{9} \\ x-y = \frac{4\pi}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} \\ y = \frac{8\pi}{9} \end{cases}$$

پس اندازه زاویه بزرگ‌تر برحسب رادیان $\frac{4\pi}{3}$ است.

۴۵۲- گزینه ۲ فرض می‌کنیم اندازه زاویه برحسب درجه برابر D و

برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $R = \frac{\pi}{180^\circ} D - \frac{5\pi}{36}$. از طرف دیگر،

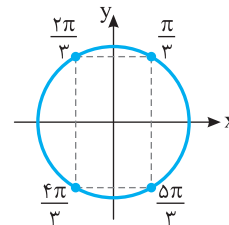
$$\text{بنابراین } \frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{180^\circ} D - \frac{5\pi}{36}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{180^\circ} D - \frac{5 \times 180^\circ}{36}$$

$$\frac{5}{4} D = 225^\circ \Rightarrow D = 20^\circ$$

۴۵۳- گزینه ۱ با توجه به شکل

مقابل، چهارضلعی حاصل مستطیل است.



۴۶۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A &= -\tan \alpha \cot \alpha + (-\sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha \\ &= -\tan \alpha \cot \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

۴۶۲- گزینه ۲ چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ پس

$$\cos(x - 90^\circ) = \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

همچنین، $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ پس

$$\cot(-x - 180^\circ) = -\cot(180^\circ + x) = -\cot x$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sin x(-\cot x) = -\cos x$$

۴۶۳- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) + \sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot \theta \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \tan \theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 0.4} = -\frac{3}{4} \quad \text{بنابراین}$$

۴۶۴- گزینه ۲ چون $x + 3y = \frac{\pi}{2}$ ، در نتیجه $2x + 3y = \frac{\pi}{2} + x$ پس

$$\tan(2x + 3y) = \tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$$

۴۶۵- گزینه ۳ توجه کنید که $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x$ و

$$\sin(\frac{5\pi}{2} + x) = \cos x \quad \text{در نتیجه}$$

$$-\sin x = 2 \cos x \Rightarrow \tan x = -2$$

۴۶۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\cos 51^\circ = \cos(36^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$= \cos(18^\circ - 3^\circ) = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۶۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cos \frac{43\pi}{6} = \cos(7\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۶۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin \frac{23\pi}{6} = \sin(4\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{16\pi}{3} = \cos(5\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{35\pi}{4} = \tan(9\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot(-\frac{43\pi}{4}) = -\cot \frac{43\pi}{4} = -\cot(11\pi - \frac{\pi}{4}) = -(-\cot \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-1)(1) = -\frac{1}{4} \quad \text{بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم عقربه ساعت‌شمار در هر دقیقه 6° یا $\frac{\pi}{30}$ رادیان طی

می‌کند. از طرف دیگر از ساعت ۹ تا ساعت ۱۰:۲۰ برابر ۸۰ دقیقه است، پس

$$\frac{1}{80} = \frac{\frac{\pi}{30}}{x} \Rightarrow x = 80 \times \frac{\pi}{30} = \frac{8\pi}{3} \text{ rad}$$

۴۵۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{25^\circ}{18^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{36} \text{ rad}$$

بنابراین $\widehat{CD} = 9 \times \frac{5\pi}{36}$ و $\widehat{AB} = 6 \times \frac{5\pi}{36}$ پس

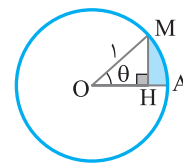
$$\widehat{CD} - \widehat{AB} = \frac{45\pi}{36} - \frac{30\pi}{36} = \frac{15\pi}{36} = \frac{5\pi}{12}$$

۴۵۹- گزینه ۴ راه‌حل اول با توجه به شکل،

$$MH = \sin \theta, \quad \widehat{AM} = r\theta = \theta$$

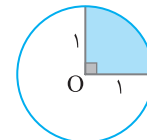
$$OH = \cos \theta \Rightarrow AH = OA - OH = 1 - \cos \theta$$

بنابراین محیط قسمت رنگی برابر است با $P = \sin \theta + \theta + 1 - \cos \theta$



راه‌حل دوم فرض کنید $\theta = \frac{\pi}{2}$. در این صورت ناحیه رنگی مورد نظر $\frac{1}{4}$

دایره‌ای به شعاع ۱ است و محیط آن برابر $2 + \frac{\pi}{2} = 1 + 1 + \frac{\pi}{2}$ است.



اکنون مقدار گزینه‌ها را به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ به دست می‌آوریم:

$$1 + \sin \theta + \cos \theta = 2 \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$1 + \sin \theta - \cos \theta = 2 \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$1 - \theta + \sin \theta + \cos \theta = 2 - \frac{\pi}{2} \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$1 + \theta + \sin \theta - \cos \theta = 2 + \frac{\pi}{2} \quad \text{گزینه (۴)}$$

۴۶۰- گزینه ۴ با جابه‌جایی نقطه A به اندازه 2° یا $\frac{\pi}{9}$ رادیان، ریسمان

به اندازه $l = r\theta = 8 \times \frac{\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$ سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود. در نتیجه اگر فرض

کنیم چرخ کوچک به اندازه α رادیان جابه‌جا شده است، معلوم می‌شود

$$\frac{8\pi}{9} = 6\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{27}$$

بنابراین اندازه‌ای که چرخ کوچک‌تر جابه‌جا شده است برحسب درجه برابر است با

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow D = 180^\circ \times \frac{R}{\pi} = 180^\circ \times \frac{4}{27} = \frac{80}{3}^\circ$$

۴۷۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \cos(2 \times 30^\circ - 120^\circ)$$

$$= \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cot 675^\circ = \cot(2 \times 360^\circ - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$$

$$\tan 945^\circ = \tan(3 \times 360^\circ - 135^\circ) = -\tan 135^\circ = \tan 45^\circ = 1$$

$$\sin(-330^\circ) = -\sin 330^\circ = -\sin(360^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}-1}{\frac{2}{2}} = -3 \quad \text{بنابراین حاصل کسر مورد نظر برابر است با}$$

۴۷۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan 75^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \cot 15^\circ = \frac{1}{a}$$

$$\tan 105^\circ = \tan(90^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\tan 165^\circ = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ = -a$$

$$\tan 255^\circ = \tan(270^\circ - 15^\circ) = \cot 15^\circ = \frac{1}{a}$$

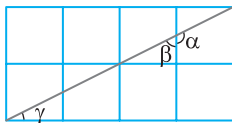
$$A = \frac{2(\frac{1}{a}) - \frac{1}{a}}{3(-a) - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{2}{a} - \frac{1}{a}}{-3a - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{3a^2 + 1}{a}} = \frac{1}{-3a^2 - 1} = \frac{-1}{3a^2 + 1} \quad \text{بنابراین}$$

۴۷۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin \frac{10\pi}{3} = \sin(\frac{10\pi}{3} - \pi) = \sin(\frac{7\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{9\pi}{3} = \cos(\frac{9\pi}{3} - \pi) = \cos(\frac{6\pi}{3}) = \cos 2\pi = 1$$

$$A = 4(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 2(-\frac{1}{2}) = 3 + 1 = 4 \quad \text{بنابراین}$$



۴۷۹- گزینه ۳ از نماد گذاری شکل

روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\tan \alpha = \tan(180^\circ - \beta) = -\tan \beta$$

از طرف دیگر $\beta + \gamma = 90^\circ$. پس $\tan \beta = \cot \gamma$. اکنون توجه کنید که

$$\cot \gamma = \frac{4}{2} = 2. \quad \text{بنابراین } \tan \alpha = -2$$

۴۸۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. آن‌گاه

$$\tan \alpha \tan \beta = \tan \alpha \cot \alpha = 1 \quad \text{و در نتیجه } \tan \beta = \cot \alpha$$

بنابراین

$$\frac{\pi}{14} + \frac{6\pi}{14} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{14} \tan \frac{6\pi}{14} = 1$$

$$\frac{2\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{2\pi}{14} \tan \frac{5\pi}{14} = 1$$

$$\frac{3\pi}{14} + \frac{4\pi}{14} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{14} \tan \frac{4\pi}{14} = 1$$

$$A = 1 \quad \text{پس}$$

۴۶۹- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$. آن‌گاه $\sin \alpha = \sin \beta$.

بنابراین

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}$$

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5}} = -1 \quad \text{در نتیجه}$$

۴۷۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$. آن‌گاه

$$\cos \beta = -\cos \alpha. \quad \text{در نتیجه } \cos \alpha + \cos \beta = 0. \quad \text{اکنون توجه کنید که}$$

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = 0$$

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = 0$$

$$A = 0 \quad \text{پس}$$

۴۷۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sin(3\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$A = 3 \sin \alpha + 4 \sin \alpha - 5 \sin \alpha = 2 \sin \alpha \quad \text{بنابراین}$$

۴۷۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha, \quad \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha, \quad \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$$

$$A = \frac{3 \cot \alpha - \cot \alpha}{2 \tan \alpha - \tan \alpha} = \frac{2 \cot \alpha}{\tan \alpha} = 2 \cot^2 \alpha \quad \text{بنابراین}$$

۴۷۳- گزینه ۴ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi + \alpha)} = 3 \Rightarrow \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{-\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 3$$

$$\cos \alpha - 2 \sin \alpha = -3 \sin \alpha + 6 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = 5 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 5$$

$$\tan(\alpha - \frac{5\pi}{2}) = -\tan(\frac{5\pi}{2} - \alpha) = -\cot \alpha = -\frac{1}{5} \quad \text{بنابراین}$$

۴۷۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + \beta \Rightarrow \cot \alpha = \cot(\frac{3\pi}{2} + \beta) = -\tan \beta$$

بنابراین

$$\frac{1}{1 - \cot \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \beta} = \frac{1}{1 + \tan \beta} + \frac{1}{1 + \cot \beta} = \frac{1 + \cot \beta + 1 + \tan \beta}{(1 + \tan \beta)(1 + \cot \beta)} = \frac{2 + \tan \beta + \cot \beta}{1 + \cot \beta + \tan \beta + \tan \beta \cot \beta} = \frac{2 + \tan \beta + \cot \beta}{2 + \tan \beta + \cot \beta} = 1$$

۴۷۵- گزینه ۴ توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$. در نتیجه

$$\text{از فرض مسئله نتیجه می‌شود } \cos \alpha = -\frac{12}{13}. \quad \text{اکنون توجه کنید که}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{169}{144} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{25}{144}$$

$$\tan \alpha = -\frac{5}{12} \quad \text{چون } \alpha \text{ در ناحیه دوم قرار دارد، پس } \tan \alpha < 0. \quad \text{بنابراین}$$

۴۸۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\cos 115^\circ = \cos(90^\circ + 25^\circ) = -\sin 25^\circ$$

$$\cos 155^\circ = \cos(180^\circ - 25^\circ) = -\cos 25^\circ$$

$$\cos 295^\circ = \cos(270^\circ + 25^\circ) = \sin 25^\circ$$

$$\cos 335^\circ = \cos(360^\circ - 25^\circ) = \cos 25^\circ$$

بنابراین $A = \frac{-\sin 25^\circ + 3 \cos 25^\circ}{3 \sin 25^\circ + \cos 25^\circ}$ صورت و مخرج کسر A را بر $\sin 25^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{\frac{-\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} + \frac{3 \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}{\frac{3 \sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}} = \frac{-1 + 3 \cot 25^\circ}{3 + \cot 25^\circ} = \frac{-1 + 3a}{3 + a} = \frac{3a - 1}{a + 3}$$

۴۸۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cot \frac{9\pi}{4} = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$A = -\frac{1}{2} \times 1 - 1 \times \frac{1}{2} = -1$$

۴۸۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ آن‌گاه

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

$$\frac{\pi}{16} + \frac{7\pi}{16} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{16} = \sin \frac{\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{16} + \frac{5\pi}{16} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{16} = \sin \frac{3\pi}{16}$$

پس

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \sin^2 \frac{3\pi}{16} + \sin^2 \frac{\pi}{16} \\ = (\sin^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{\pi}{16}) + (\sin^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16}) = 1 + 1 = 2$$

۴۹۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = 180^\circ$ آن‌گاه

$$\cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\cos 179^\circ = -\cos 1^\circ, \quad \cos 178^\circ = -\cos 2^\circ, \quad \dots$$

$$\cos 92^\circ = -\cos 88^\circ, \quad \cos 91^\circ = -\cos 89^\circ$$

$$A = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ}{-\cos 1^\circ - \cos 2^\circ - \dots - \cos 89^\circ} = -1$$

۴۹۱- گزینه ۱ توجه کنید که $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ بنابراین

$$\frac{\cos 2x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

۴۸۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$A = \frac{-\tan \alpha + 3 \tan \alpha}{-\tan \alpha - \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{-2 \tan \alpha} = -1$$

۴۸۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \quad \cot(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = \frac{4(\frac{1}{2}) - 2(\frac{1}{2})}{3(\frac{\sqrt{3}}{3}) - 6(-\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

۴۸۳- گزینه ۲ راه حل اول در مثلث قائم الزاویه اندازه یکی از زوایا 90° است.

مثلاً فرض کنید $\hat{A} = 90^\circ$. پس $\sin \hat{A} = 1$ و $\cos \hat{A} = 0$. در این صورت زاویه‌های B و C متمم یکدیگرند. پس $\sin^2 \hat{C} = \cos^2 \hat{B}$ بنابراین ساده شده عبارت به شکل زیر است:

$$\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}} = \frac{0 + \sin^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C}}{1 + \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم مثلث ABC را با زاویه‌های زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{A} = 90^\circ, \quad \hat{B} = 45^\circ, \quad \hat{C} = 45^\circ$$

$$\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}} = \frac{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

۴۸۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin a = \sin(\frac{5\pi}{2} - b) = \cos b, \quad \tan a = \tan(\frac{5\pi}{2} - b) = \cot b$$

بنابراین

$$\frac{\sin a + \tan a \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1} = \frac{\cos b + \cot b \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \sin^2 a + 1} \\ = \frac{\cos b + 1 - 1}{\sin b - 1 + 1} = \frac{\cos b}{\sin b} = \cot b$$

۴۸۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$3a + 2b = \pi \Rightarrow a + 2(a + b) = \pi \Rightarrow \frac{a}{2} + (a + b) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} - (a + b)$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - (a + b)) = \cos(a + b) = \frac{3}{5}$$

۴۸۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin 41^\circ = \sin(36^\circ + 5^\circ) = \sin 5^\circ = \sin(90^\circ - 4^\circ) = \cos 4^\circ$$

$$\sin 40^\circ = \sin(36^\circ + 4^\circ) = \sin 4^\circ$$

بنابراین

$$\sin^2 41^\circ + \sin^2 40^\circ = \cos^2 4^\circ + \sin^2 4^\circ = 1$$

همچنین $\tan 731^\circ = \tan(2 \times 360^\circ + 11^\circ) = \tan 11^\circ$ بنابراین

$$\tan 731^\circ \times \cot 11^\circ = \tan 11^\circ \times \cot 11^\circ = 1$$

بنابراین مقدار کسر مورد نظر برابر است با ۱.

۴۹۲- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8} &= (\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8})(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}) \\ &= 1 \times \cos(\pi/4) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

۴۹۳- گزینه ۲ توجه کنید که $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$ ، بنابراین

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$$

$$\cos 15^\circ \sin 75^\circ = \cos 15^\circ \cos 15^\circ = \cos^2 15^\circ$$

از طرف دیگر، $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، پس

$$\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 15^\circ - 1$$

$$\text{پس } \cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+2}{4}.$$

۴۹۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi} \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

بنابراین

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

۴۹۵- گزینه ۲ راه‌حل اول از اتحادهای $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ و

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = 8$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

۴۹۶- گزینه ۲ توجه کنید که $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$A = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{3}$$

۴۹۷- گزینه ۳ از اتحاد $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم.

توجه کنید که

$$\frac{1 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin^2 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \tan 20^\circ$$

۴۹۸- گزینه ۲ توجه کنید که $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ &= \frac{\cos(2 \times 40^\circ)}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ \\ &= \frac{\cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ = (\cos 40^\circ + \sin 40^\circ) - \sin 40^\circ \\ &= \cos 40^\circ\end{aligned}$$

۴۹۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

۵۰۰- گزینه ۳ توجه کنید که $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\sin^3 x}{2 \sin x - \sin 2x} &= \frac{\sin^3 x}{2 \sin x - 2 \sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{2(1 - \cos x)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{2(1 - \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{2}\end{aligned}$$

$$\text{بنابراین } \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{2}{3} \text{ پس } \cos x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$$

۵۰۱- گزینه ۲ راه‌حل اول از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ نتیجه می‌شود

$$\sin 2\alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

$$= 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$$

$$\text{پس } \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 2$$

۵۰۲- گزینه ۴ توجه کنید که $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$ و

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1) = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۵۰۳- گزینه ۱ توجه کنید که $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \cos \frac{\pi}{8}$

$$\text{بنابراین } \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

$$\text{از طرف دیگر می‌دانیم } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ پس}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos(\pi/4)}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

۵۰۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin 2x + \cos 2x = \frac{2 \tan x + 1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2(\frac{1}{3}) + 1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{5}{5} = 1$$

۵۰۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$9 \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 10 \Rightarrow 9 \cos^2 \theta + 1 = 10 \cos \theta$$

$$9 \cos^2 \theta - 10 \cos \theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \text{ (غ.ق.) یا } \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{بنابراین } \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2\left(\frac{1}{9}\right)^2 - 1 = -\frac{79}{81}$$

۵۱۲- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

۵۱۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$

به این ترتیب

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{7} \quad \text{بنابراین}$$

۵۱۴- گزینه ۳ راهحل اول بنابر فرض $\sin x = \frac{5}{2} \cos x$ دو طرف

این تساوی را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin^2 x = \frac{5}{2} \cos x \sin x \quad (1)$$

همچنین، بنابر فرض، $\cos x = \frac{2}{5} \sin x$ دو طرف این تساوی را در $\cos x$

ضرب می‌کنیم:

$$\cos^2 x = \frac{2}{5} \sin x \cos x \quad (2)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$1 = \frac{5}{2} \sin x \cos x + \frac{2}{5} \sin x \cos x \Rightarrow 1 = \frac{29}{10} \sin x \cos x$$

$$\sin 2x = \frac{20}{29} \quad \text{بنابراین} \quad \sin x \cos x = \frac{10}{29}$$

راهحل دوم دو طرف تساوی $2 \sin x = 5 \cos x$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 \sin^2 x = 25 \cos^2 x$$

با توجه به $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ نتیجه می‌شود

$$4 \sin^2 x = 25(1 - \sin^2 x) \Rightarrow 29 \sin^2 x = 25 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{25}{29}$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{25}{29} = \frac{4}{29} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{100}{29^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{10}{29} \Rightarrow \sin 2x = \frac{20}{29}$$

توجه کنید که با توجه به فرض مسئله $\sin x$ و $\cos x$ هم علامت هستند و $\sin x \cos x$ مقداری مثبت دارد.

راهحل سوم از $2 \sin x = 5 \cos x$ نتیجه می‌شود $\tan x = \frac{5}{2}$ ، پس

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \times \frac{5}{2}}{1 + \frac{25}{4}} = \frac{20}{29}$$

۵۱۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2y} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin y \cos y} = \frac{\sin x}{\sin y} \times \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{4 \sin y}{\sin y} \times \frac{\cos x}{3 \cos x} = \frac{4}{3}$$

۵۰۶- گزینه ۳ توجه کنید که $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ و

$$\sin 84^\circ = \sin(90^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \cos(2 \times 3^\circ) = 2 \cos^2 3^\circ - 1 = 2a^2 - 1$$

۵۰۷- گزینه ۱ تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} \sin^2 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 2\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

با توجه به اینکه $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع چهارم است، پس $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha > 0$ ، در نتیجه $\sin \alpha \cos \alpha < 0$.

یعنی $\sin 2\alpha < 0$ ، پس $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

۵۰۸- گزینه ۱ توجه کنید که $\sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ$

و $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ، بنابراین

$$\frac{\sin 50^\circ \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 40^\circ \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin(90^\circ - 10^\circ)}{\cos 10^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{1}{2}$$

۵۰۹- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $x = \frac{\pi}{24}$ ، آن‌گاه

$$10x + 2x = 12x = \frac{\pi}{2}$$

پس $\cos 10x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x$ ، در نتیجه

$$\cos 10x \cos 2x = \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x = \frac{1}{2} \sin\left(4 \times \frac{\pi}{24}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۵۱۰- گزینه ۱ راهحل اول توجه کنید که

$$\tan 50^\circ = \tan(90^\circ - 40^\circ) = \cot 40^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \tan 50^\circ - \tan 40^\circ &= \cot 40^\circ - \tan 40^\circ = \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \\ &= \frac{\cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\cos(2 \times 40^\circ)}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 40^\circ)} = \frac{2 \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} \\ &= 2 \cot 80^\circ = 2 \cot(90^\circ - 10^\circ) = 2 \tan 10^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{2} = \tan 10^\circ \quad \text{بنابراین}$$

راهحل دوم از اتحاد $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{2} = \frac{\cot 40^\circ - \tan 40^\circ}{2} = 2 \cot 80^\circ = \tan 10^\circ$$

۵۱۱- گزینه ۱ از عبارت $\sin x \cos x$ فاکتور می‌گیریم

$$A = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

۵۲۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos x - 1} - 1$$

بنابراین از اتحاد $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ نتیجه می‌شود

$$A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} - 1 = \frac{(\sqrt{2} \cos x - 1)(\sqrt{2} \cos x + 1)}{\sqrt{2} \cos x - 1} - 1$$

$$= \sqrt{2} \cos x + 1 - 1 = \sqrt{2} \cos x$$

۵۲۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ و

بنابراین $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 2 \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = 2 \Rightarrow \tan^2 x = 2 \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{2}$$

چون $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ، مقدار $\sqrt{2}$ قابل قبول نیست. پس

$$\tan x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cot x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه $\tan x + 2 \cot x = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

۵۲۳- گزینه ۲ اگر در اتحاد $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ قرار دهیم

$\alpha = \frac{x}{2}$ ، اتحاد $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ به دست می‌آید. پس

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{8})}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\pi}{16}}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{16}}$$

$$= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{16}} = \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{16})} = \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{16})}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\pi}{32}} = 2 \cos \frac{\pi}{32}$$

۵۲۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{12}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۵۲۵- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x$$

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 - 2 = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} \right)^2 - 2$$

$$= \left(\frac{1}{\sin 2x} \right)^2 - 2 = \frac{1}{\sin^2 2x} - 2$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x = \frac{\pi}{8}$ ، به دست می‌آید

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} - 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 2 = 2 - 2 = 0$$

۵۱۶- گزینه ۲ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{16}{9}$$

$$-2 \sin x \cos x = \frac{16}{9} - 1 \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{7}{18}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$A = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cos x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{1 - \sin x \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1 + \frac{7}{18}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{25}{24}$$

۵۱۷- گزینه ۲ توجه کنید که $\sin 11^\circ = \sin(9^\circ + 2^\circ) = \cos 2^\circ$

و بنابراین $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$

$$\frac{\sin^2 11^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ} = \frac{\cos^2 2^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ} = \frac{\cos(2 \times 2^\circ)}{\sin 5^\circ} = \frac{\cos 4^\circ}{\sin 5^\circ}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos 4^\circ = \cos(9^\circ - 5^\circ) = \sin 5^\circ$ ، بنابراین

مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۵۱۸- گزینه ۳ توجه کنید که $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ ، بنابراین

$1 + \cos 4^\circ = 2 \cos^2 2^\circ$ ، از طرف دیگر، $55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$ ، پس

$\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$ ، به این ترتیب

$$\frac{1 + \cos 4^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ} = \frac{2 \cos^2 2^\circ}{\sin 35^\circ \cos 35^\circ} = \frac{2 \cos^2 2^\circ}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 35^\circ)} = \frac{4 \cos^2 2^\circ}{\sin 70^\circ}$$

اکنون توجه کنید که $2^\circ + 7^\circ = 9^\circ$ ، پس $\cos 2^\circ = \sin 7^\circ$ ، در نتیجه

$$\frac{4 \cos^2 2^\circ}{\cos 2^\circ} = 4 \cos 2^\circ$$

۵۱۹- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\cos a \cos 2a = \frac{1}{16 \sin a} \Rightarrow 2 \sin a \cos a \cos 2a = \frac{1}{8}$$

$$\sin 2a \cos 2a = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 4a = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin 4a = \frac{1}{4}$$

در نتیجه $\cos 4a = 1 - 2 \sin^2 2a = 1 - 2 \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{7}{8}$

۵۲۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$\frac{4}{5} = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{15}$$

بنابراین $\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$

۵۲۹- گزینه ۲ راه حل اول تساوی داده شده را به شکل زیر ساده می کنیم:

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 5 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x = 5$$

$$(\tan x + \cot x)^2 = 7 \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = 7$$

$$\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 = 7 \Rightarrow \left(\frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} \right)^2 = 7$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x} = 7 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{7}$$

۵۳۰- گزینه ۱ با استفاده از اتحادهای

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 5 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2 = 5$$

$$\left(\frac{2}{\sin 2x} \right)^2 - 2 = 5 \Rightarrow \frac{4}{\sin^2 2x} = 7 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{7}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

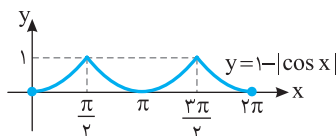
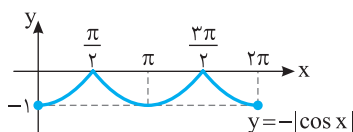
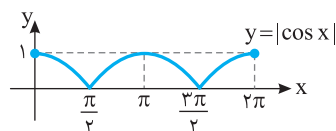
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin 4^\circ - \cos 4^\circ}{1 + \sin 4^\circ + \cos 4^\circ} &= \frac{1 + 2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ - (1 - 2 \sin^2 2^\circ)}{1 + 2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ + 2 \cos^2 2^\circ - 1} \\ &= \frac{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ + 2 \sin^2 2^\circ}{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ + 2 \cos^2 2^\circ} = \frac{2 \sin 2^\circ (\cos 2^\circ + \sin 2^\circ)}{2 \cos 2^\circ (\sin 2^\circ + \cos 2^\circ)} \\ &= \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \tan 2^\circ \end{aligned}$$

۵۳۱- گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم می کنیم و قرینه

قسمت هایی را که پایین محور طول ها قرار دارد نسبت به محور طول ها رسم می کنیم. سپس قسمت هایی را که پایین محور طول ها قرار دارند حذف می کنیم تا نمودار تابع $y = |\cos x|$ به دست آید. نمودار به دست آمده را نسبت به محور طول ها قرینه می کنیم تا نمودار $y = -|\cos x|$ به دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به بالا انتقال می دهیم.



۵۲۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8} = \left(\tan \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{8} \right)^2 - 2 = \left(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}} \right)^2 - 2$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{2}} - 2 = 8 - 2 = 6$$

۵۲۷- گزینه ۳ از اتحاد $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ نتیجه می شود

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha, \quad \cot \alpha + \tan \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین، اگر اتحادهای فوق را برای $\alpha = \frac{x}{2}$ استفاده کنیم، می توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2} = \left(\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} \right) \left(\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{2}{\sin x} \times (-2 \cot x) = -\frac{4 \cot x}{\sin x} \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \xrightarrow{\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{3}{4}} 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25} \xrightarrow{0 < x < \frac{\pi}{2}} \sin x = \frac{4}{5}$$

$$A = \frac{-4 \times \frac{3}{4}}{\frac{4}{5}} = -\frac{15}{4}$$

بنابراین

۵۲۸- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا توجه کنید که حاصل ضرب جواب های

$$\begin{aligned} \frac{\cos 2^\circ}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1 &= \frac{2 \cos^2 1^\circ - 1}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1 \\ &= \frac{(\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1)(\sqrt{2} \cos 1^\circ - 1)}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1 = \sqrt{2} \cos 1^\circ - 1 + 1 \\ &= \sqrt{2} \cos 1^\circ = \sqrt{2} \cos(9^\circ - 8^\circ) = \sqrt{2} \sin 8^\circ \end{aligned}$$

معادله برابر $2m - 1$ است. بنابراین

$$\tan \alpha \cot \alpha = 2m - 1 \Rightarrow 1 = 2m - 1 \Rightarrow m = 1$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب های معادله برابر $m + 3$ است. پس

$$\tan \alpha + \cot \alpha = m + 3 = 4 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 4$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 4 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = 4 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

۵۲۹- گزینه ۲ می توانیم از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین

$$\tan \alpha + \cot \alpha = m + 3 = 4 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2\alpha} = 4 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

۵۳۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $a-2$ است که با توجه به نمودار تابع برابر -1 است. پس

$$a-2=-1 \Rightarrow a=1$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار دوره تناوب تابع برابر $\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ است. پس

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow |b|=2 \Rightarrow b=\pm 2$$

اگر $b=-2$ ، آن گاه $f(x)=1+2\sin(-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4})$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=0$ نزولی باشد که این طور نیست. پس $b=2$ و در نتیجه $b-a=1$.

توجه کنید که اگر $b=-2$ ، آن گاه $f(x)=1+2\sin(-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4})$ و $f(\frac{5}{8})=1$ که با توجه به شکل این طور نیست.

۵۳۸- گزینه ۳ دامنه تابع از نامساوی $\{\frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ به دست می‌آید. پس $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$.

۵۳۹- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ ، آن گاه

$$\tan x \geq \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

$$\frac{2-m}{\sqrt{3}} \geq -\sqrt{3} \Rightarrow 2-m \geq -3 \Rightarrow m \leq 5$$

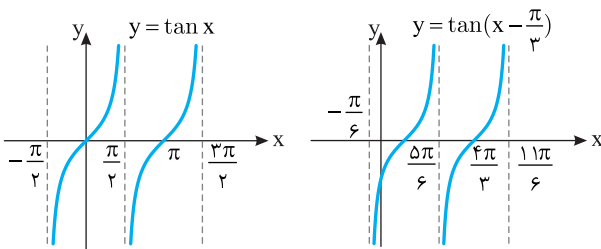
پس حداکثر مقدار m برابر ۵ است.

۵۴۰- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y=\tan x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{3})$ به دست می‌آید که به صورت

زیر است. بنابراین تابع f روی بازه $(\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ اکیداً صعودی است و حداقل

مقدار a برابر $\frac{5\pi}{6}$ است.

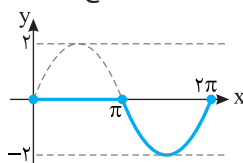


۵۴۱- گزینه ۳ ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x + \sin x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ 2\sin x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. توجه کنید که در بازه $[\pi, 2\pi]$ نمودار تابع

از دو برابر کردن عرض نقاط روی نمودار تابع $y=\sin x$ به دست آمده است.



۵۳۲- گزینه ۴ چون نمودار تابع از نقاط $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}-1)$ و $(\frac{\pi}{3}, 0)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}-1 \Rightarrow a \cos \frac{\pi}{4} - b = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} - b = \sqrt{2}-1$$

$$f(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a \cos \frac{\pi}{3} - b = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = b$$

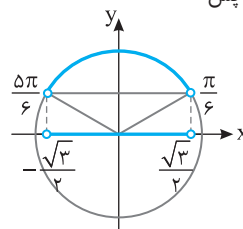
در نتیجه

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} - b = b\sqrt{2} - b = b(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1 \Rightarrow b=1$$

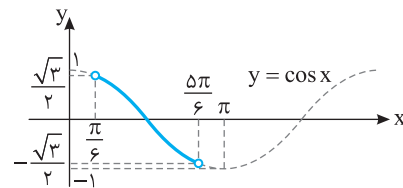
بنابراین $a=2b=2$. پس مقدار ab برابر ۲ است.

۵۳۳- گزینه ۴ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, \text{ آن گاه } \frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}m < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$$



۵۳۴- گزینه ۲ چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 5\sin^2 x \leq 5$$

$$-3 \leq 5\sin^2 x - 3 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq f(x) \leq 2$$

بنابراین کمترین و بیشترین مقدار تابع به ترتیب -3 و 2 هستند که

حاصل ضرب آن‌ها -6 است. توجه کنید که $f(0)=-3$ و $f(\frac{\pi}{2})=2$.

۵۳۵- گزینه ۳ دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|k|}$ ، بنابراین

$$\frac{2\pi}{|k|} = \frac{\pi}{2k+1} \Rightarrow |k| = 4k+2$$

اگر $k > 0$ ، آن گاه

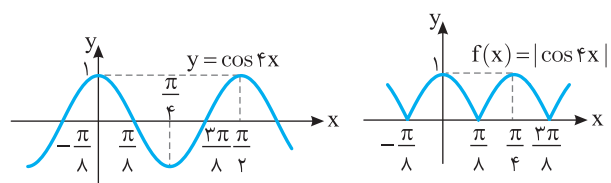
$$k = 4k+2 \Rightarrow k = -\frac{2}{3} \quad (\text{غ.ق.})$$

اگر $k < 0$ ، آن گاه

$$-k = 4k+2 \Rightarrow k = -\frac{2}{5}$$

۵۳۶- گزینه ۳ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم است که دوره

$$\text{تناوب آن برابر است با } \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$

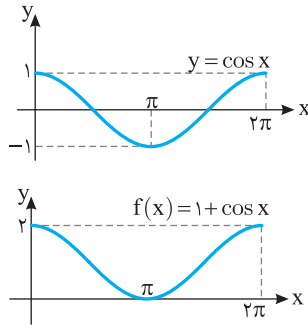


۵۴۷- گزینه ۲ ضابطه تابع به شکل زیر است. توجه کنید که از اتحاد

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ استفاده می‌کنیم.}$$

$$f(x) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) = 1 + \cos x$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ یک واحد به بالا انتقال دهیم.



۵۴۸- گزینه ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است. این

مقدار زمانی به دست می‌آید که $\cos\left(\frac{\pi}{2} - bx\right) = 1$ ، پس

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

در نتیجه

$$f(x) = -1 + 2 \sin bx$$

با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر با $\frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm 3$$

برای $x > 0$ نمودار تابع $f(x) = -1 + 2 \sin bx$ به صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b = 3$ قابل قبول است، یعنی $f(x) = -1 + 2 \sin 3x$ و مقدار $b - a$ برابر است با ۴. توجه کنید که اگر $b = -3$ ، آن‌گاه $f\left(\frac{\pi}{18}\right) = -2$ و $f(x) = -1 + 2 \sin(-3x)$ به شکل این‌طور نیست.

۵۴۹- گزینه ۳ تابع $y = \tan x$ روی بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ اکیداً صعودی است، پس

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 0 \leq \tan x \leq \tan \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\tan x \leq 0 \Rightarrow 1 \leq \frac{3 - \tan x}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{بنابراین } R_f = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

۵۵۰- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه $\tan x > 1$ و اگر

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \text{، آن‌گاه } \tan x < -1 \text{، بنابراین}$$

$$\frac{m-1}{2} > 1 \Rightarrow m-1 > 2 \Rightarrow m > 3$$

$$\frac{m-1}{2} < -1 \Rightarrow m-1 < -2 \Rightarrow m < -1$$

۵۴۲- گزینه ۲ با توجه به شکل $f(0) = 2$ و کمترین مقدار تابع برابر ۱

است. بنابراین $f_{\min} = 2a - b = |a + b|$ و $f(0) = 2a - b = 2$. با توجه به

شکل ضریب $\sin x$ مثبت است، پس مینیمم تابع برابر است با $\begin{cases} 2a - b = 2 \\ 2a - b - a - b = a - 2b \end{cases}$ از حل دستگاه معادله‌های

می‌شود $a = 1$ و $b = 0$. بنابراین $f(x) = \sin x + 2$ که بیشترین مقدار آن برابر ۳ است.

۵۴۳- گزینه ۴ با توجه به شکل‌های زیر، اگر $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ ، آن‌گاه

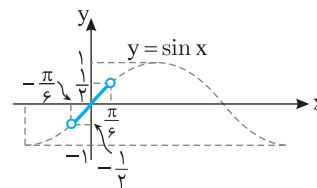
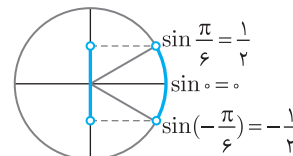
$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2} \text{، بنابراین}$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{m+1}{2m} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < \frac{m+1}{m} < 1 \Rightarrow \left| \frac{m+1}{m} \right| < 1$$

$$|m+1| < |m|, \quad m \neq 0$$

در نتیجه

$$m^2 + 2m + 1 < m^2 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$$



۵۴۴- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cos^2 x = 1 + 2 \cos^2 x$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 1 + 2 \cos^2 x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$$

بنابراین برد تابع بازه $[1, 3]$ است.

۵۴۵- گزینه ۱ کمترین مقدار تابع f برابر $3a - a^2$ است که وقتی

$\cos ax = -1$ اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$3a - a^2 = 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$$

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس اگر $a = 1$ ، آن‌گاه دوره تناوب این تابع

برابر 2π است و اگر $a = 2$ ، آن‌گاه دوره تناوب آن برابر π است.

۵۴۶- گزینه ۱ توجه کنید که از اتحاد $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ استفاده

می‌کنیم. بنابراین

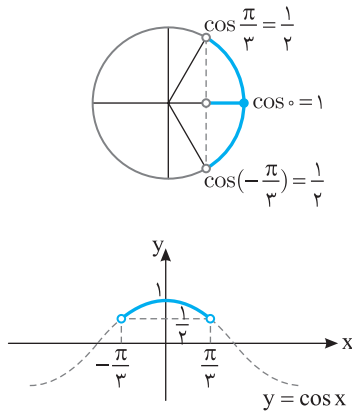
$$f(x) = \cos^4 x + \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{3 \cos 4x + 1}{2}$$

در نتیجه، دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

۵۵۳- گزینه ۲ با توجه به شکل‌های زیر اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ ، آن‌گاه

$$\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m^2+1}{4} \leq 1 \Rightarrow 2 < m^2+1 \leq 4 \Rightarrow 1 < m^2 \leq 3 \Rightarrow 1 < |m| \leq \sqrt{3}$$



۵۵۴- گزینه ۱ ضابطه تابع را به شکل $f(x) = (\sin^2 x + 1)^2 - 1$

می‌نویسیم. چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 \leq 4$$

$$0 \leq (\sin^2 x + 1)^2 - 1 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 3$$

بنابراین برد تابع بازه $[0, 3]$ است.

۵۵۵- گزینه ۴ دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a\pi|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}$$

کمترین مقدار تابع f برابر $|a| - |b|$ است. بنابراین

$$|a| - |b| = -3 \Rightarrow \frac{1}{2} - |b| = -3 \Rightarrow |b| = \frac{7}{2}$$

بیشترین مقدار تابع f برابر $|a| + |b|$ است که برابر است با $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$.

۵۵۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \cos^2 ax (1 - \cos^2 ax) = \cos^2 ax \sin^2 ax = (\cos ax \sin ax)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sin 2ax\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2ax = \frac{1}{4} (1 - \cos 4ax)$$

بنابراین دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|4a|}$ است. پس

$$\frac{2\pi}{|4a|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

۵۵۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 4 |\sin x \cos x| = 4 \left| \frac{1}{2} \sin 2x \right| = 2 |\sin 2x|$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2 \sin 2x$ به دست آید. سپس قرینه قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم.

۵۵۱- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن

را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

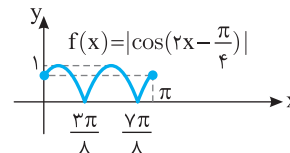
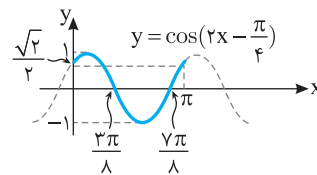
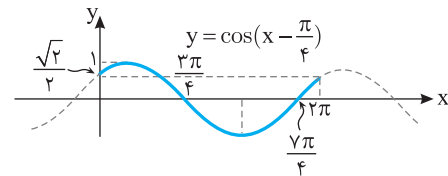
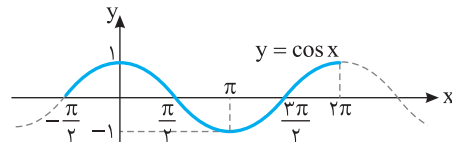
به دست آید. سپس طول نقاط روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع

$y = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ به دست آید. در آخر قرینه قسمت‌هایی از نمودار به دست

آمده را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و

قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع

$f(x) = |\cos(2x - \frac{\pi}{4})|$ به دست آید.



۵۵۲- گزینه ۲ نمودار تابع از نقطه $(0, 2)$ عبور می‌کند، یعنی $f(0) = 2$.

بنابراین

$$f(0) = a - 2b \sin 0 = a \Rightarrow a = 2$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2 - 2b \sin x$ است. بیشترین مقدار تابع

برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x = 1$ به دست می‌آید یا به ازای $\sin x = -1$

(بستگی به علامت b دارد). اگر $b > 0$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای

$\sin x = -1$ به دست می‌آید که برابر است با $2 + 2b$.

بنابراین

$$2 + 2b = 6 \Rightarrow b = 2$$

و در نتیجه $f(x) = 2 - 4 \sin x$. اگر $b < 0$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به

ازای $\sin x = 1$ به دست می‌آید که برابر است با $2 - 2b$.

بنابراین

$$2 - 2b = 6 \Rightarrow b = -2$$

و در نتیجه $f(x) = 2 + 4 \sin x$. با توجه به اینکه برای x هایی که کمی

بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطه $f(x) = 2 + 4 \sin x$

قابل قبول نیست. بنابراین $b = 2$ و در نتیجه $ab = 4$.

۵۶۱- گزینه ۱ جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند

$$3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های به صورت $\frac{2k\pi}{5}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هم هستند (مثلاً)

اگر در $\frac{2k\pi}{5}$ قرار دهید $k=5$ ، آن‌گاه جواب 2π به دست می‌آید که از قرار

دادن $k=1$ در $2k\pi$ حاصل می‌شود. پس جواب‌های کلی معادله به صورت $\frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ هستند.

۵۶۲- گزینه ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 8k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 8k\pi + 3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

۵۶۳- گزینه ۳ اگر نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول x

قطع کند، $f(x)=0$ پس

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$$

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{(2k+1)\pi}{6} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -3 < 2k+1 < 9 \Rightarrow -\frac{4}{2} < k < \frac{8}{2}$$

بنابراین به ازای $k=2, k=1, k=0, k=-1$ چهار مقدار برای x به دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها هستند.

۵۶۴- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{5}) = -\sin x \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x + \frac{\pi}{5} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{3\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{غ.ق.})$$

$$x + \frac{\pi}{5} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = k\pi - \frac{7\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}$$

۵۶۵- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

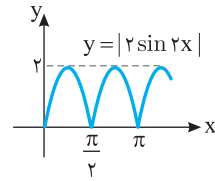
$$\sin 2x (\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \quad \text{یا} \quad \cos 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های معادله دوم جزء جواب‌های معادله اول هستند، بنابراین جواب‌های

معادله اصلی $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ است.



اکنون کافی است نمودار تابع را فقط در یک دوره تناوب مثلاً در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$

رسم کنیم.

۵۵۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $1-|a|$

است که با توجه به نمودار تابع، برابر $1-1$ است:

$$1-|a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار مقدار $f(0)$ مثبت است:

$$f(0) > 0 \Rightarrow 1 + a \sin \frac{\pi}{4} > 0 \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} + 1 > 0 \Rightarrow a > -\sqrt{2}$$

بنابراین فقط $a=2$ قابل قبول است. با توجه به نمودار تابع، دوره تناوب تابع

برابر $\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

با توجه به اینکه تابع $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$ در یک همسایگی صفر

صعودی است، فقط مقدار $b=2$ قابل قبول است. پس $a+b=4$ توجه کنید

که اگر $b=-2$ ، آن‌گاه $f(x) = 1 + 2 \sin(-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4})$ و $f(\frac{1}{2}) = 1$ که با

توجه به شکل این‌طور نیست.

۵۵۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$$

از طرف دیگر تابع $y = \tan x$ روی بازه $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ اکیداً صعودی است، پس

تابع f روی این بازه اکیداً نزولی است. بنابراین

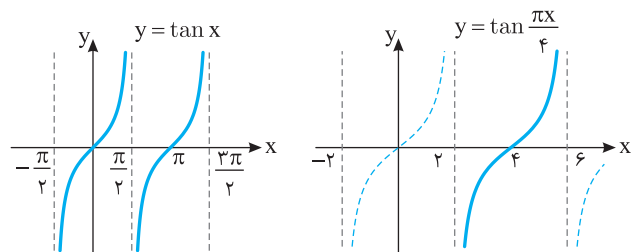
$$-\tan \frac{\pi}{6} \leq -\tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3}) \leq -\tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \sqrt{3}$$

پس $R_f = [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$

۵۶۰- گزینه ۳ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y = \tan x$ را

رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{\pi}{4}$ ضرب می‌کنیم. پس

حداکثر مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازه $(2, a)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۶ است.



جواب‌های به‌صورت $\frac{2k\pi}{9}$ شامل جواب‌های به‌صورت $2k\pi$ هم هستند (مثلاً

اگر در $\frac{2k\pi}{9}$ قرار دهید $k=9$ ، آن‌گاه جواب 2π به‌دست می‌آید که از قرار

دادن $k=1$ در $2k\pi$ حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت $\frac{2k\pi}{9}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ هستند.

راه‌حل دوم $x=0$ جواب معادله است. پس گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند (به ازای هیچ مقدار صحیح k ، $x=0$ به‌دست نمی‌آید). اگر $k=9$ ، آن‌گاه

اما $x=\pi$ جواب معادله نیست، پس گزینه (۳) هم رد می‌شود.

۵۷۲- گزینه ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin x = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

۵۷۳- گزینه ۳ در نقاطی که $\sin 3x = 1$ ، نمودار تابع f حداکثر مقدار خود را دارد. پس

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	-1	0	1	2
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین نمودار تابع در بازه $[-\pi, 2\pi]$ ، چهار بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد. برای پیدا کردن نقاطی که نمودار تابع در آن‌ها حداکثر می‌شود، می‌توانیم به شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi \leq \frac{(4k+1)\pi}{6} \leq 2\pi \Rightarrow -6 \leq 4k+1 \leq 12 \Rightarrow -7 \leq 4k \leq 11$$

$$-\frac{7}{4} \leq k \leq \frac{11}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

۵۷۴- گزینه ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{2x}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{2x}{3} \Rightarrow x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 12k\pi - 3\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را مشخص می‌کنیم. واضح است که هیچ‌یک از جواب‌های به‌صورت $x = 12k\pi - 3\pi$ در بازه $(0, 2\pi)$ قرار ندارند.

پس جواب‌های به‌صورت $x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}$ را بررسی می‌کنیم

k	0	1	-1
x	$\frac{3\pi}{7}$	$-\frac{9\pi}{7}$	$\frac{15\pi}{7}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۵۶۶- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $t = \sin 2x$ ، آن‌گاه معادله به‌صورت

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

درمی‌آید و از حل این معادله درجه دوم نتیجه می‌شود $t=1$ و $t=\frac{5}{2}$. بنابراین

$$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = \frac{5}{2} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

۵۶۷- گزینه ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin 2x \cos 2x = \sqrt{2} \sin 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \left(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$. پس معادله پنج جواب در این بازه دارد.

۵۶۸- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ معادله

به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos x - 1 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

۵۶۹- گزینه ۱ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 2x + 2 \sin^2 x = \sin 2x \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x = \sin 2x$$

$$\sin 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۷۰- گزینه ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x (1 - \sin^2 x) - \cos x (1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x = 0$$

$$\sin x \cos x (\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x (\cos x - \sin x) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، π ، $\frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{7\pi}{4}$.

که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{13\pi}{4}$.

۵۷۱- گزینه ۱ **راه‌حل اول** جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\delta x = 2k\pi + 4x \Rightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\delta x = 2k\pi - 4x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $(0, \pi)$ به صورت زیر هستند:

$$2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \quad 2x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$2x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \quad 2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در بازه $(0, \pi)$ برابر است با 2π .

۵۸۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x + \frac{\pi}{9} - (x - \frac{7\pi}{18}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{7\pi}{18} = (x + \frac{\pi}{9}) - \frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2 \sin^2(-\frac{\pi}{2} + (x + \frac{\pi}{9})) = 2$$

$$\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2 \cos^2(x + \frac{\pi}{9}) = 2$$

$$1 - \cos^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2 \cos^2(x + \frac{\pi}{9}) = 2$$

$$\cos^2(x + \frac{\pi}{9}) = 1 \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{9}) = \pm 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{9}) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر است:

$$x + \frac{\pi}{9} = k\pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۸۱- گزینه ۳ جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\Delta x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta x = 2k\pi + \pi - 3x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۸۲- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 4k\pi \pm \frac{4\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های معادله در بازه $(-\pi, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم:

k	۰	۱	-۱
$x = 4k\pi - \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$4\pi - \frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$-4\pi - \frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)
k	۰	۱	-۱
$x = 4k\pi + \frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$4\pi + \frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$-4\pi + \frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فوق یک جواب در بازه $(-\pi, 2\pi)$ دارد.

۵۸۳- گزینه ۳ در نقاطی که $\cos 4x = 1$ ، تابع f به حداقل مقدار خود می‌رسد. پس

$$4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	-۱	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ نمودار تابع f ۵ بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۵۷۵- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{یا} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $(0, 2\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ که

مجموع آن‌ها برابر 2π است.

۵۷۶- گزینه ۳ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

اگر فرض کنیم $t = \sin x$ ، معادله به صورت $2t^2 + 3t + 1 = 0$ درمی‌آید. از

حل این معادله نتیجه می‌شود $t = -1$ و $t = -\frac{1}{2}$. بنابراین

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, \quad \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$$

توجه کنید که فقط جواب‌های واقع در بازه $(-\pi, 0)$ را مشخص کرده‌ایم که

تعداد آن‌ها سه‌تاست.

۵۷۷- گزینه ۱ چون $\sin 4x \neq 0$ ، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin 4x} \Rightarrow \sin 4x = \cos 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = \cos 2x$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ ، که مجموع آن‌ها برابر

$\frac{\pi}{2}$ است.

۵۷۸- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{3 \sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin 2x \cos x = 3 \sin x \cos 2x$$

اکنون از اتحادهای $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ استفاده می‌کنیم

$$2 \sin x \cos^2 x - 3 \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 6 \cos^2 x + 3) = 0 \Rightarrow \sin x (3 - 4 \cos^2 x) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $(0, 2\pi)$ به صورت زیر هستند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر است با 4π .

۵۷۹- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{16}{3}$$

$$16 \sin^2 x \cos^2 x = 3 \Rightarrow 4(2 \sin x \cos x)^2 = 3$$

$$4 \sin^2 2x = 3 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 4k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

از جواب‌های $x = 4k\pi - \frac{4\pi}{3}$ هیچ یک در بازه $(0, 2\pi)$ قرار ندارند، ولی از

جواب‌های $x = 2k\pi + \pi$ و $x = 4k\pi + \frac{4\pi}{3}$ جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$

به‌ازای $k=0$ به‌دست می‌آیند که π و $\frac{4\pi}{3}$ هستند و مجموع آن‌ها $\frac{7\pi}{3}$ است.

۵۸۹- گزینه ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2} = \sin x \rightarrow 1 - \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $x=0$ ، $x=\pi$ و $x=2\pi$. ولی توجه کنید که جواب $x=0$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند و قابل قبول نیست. این جواب به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده است. بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.

۵۹۰- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که از اتحادهای چاق و لاغر و $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) &= 0 \\ (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x) &= 0 \\ (\cos x - \sin x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۵۹۱- گزینه ۳ جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x - \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x + \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{13\pi}{36}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$0 < k\pi + \frac{\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow -\frac{1}{9} < k < \frac{17}{9} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0, 1\}$$

$$0 < \frac{k\pi}{2} + \frac{13\pi}{36} < 2\pi \Rightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{59}{18} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

بنابراین معادله در بازه $(0, \pi)$ شش جواب دارد.

۵۹۲- گزینه ۲ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{3} + 2x) \quad \text{ابتدا معادله را به صورت}$$

می‌نویسیم. پس جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} + 2x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{4\pi}{9}, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{غ.ق.})$$

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

۵۸۵- گزینه ۲ جواب‌های معادله به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$2 \cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0, \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون جواب‌های معادله را در بازه $(0, 2\pi)$ می‌خواهیم، پس این جواب‌ها به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

بنابراین معادله شش جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۵۸۶- گزینه ۳ با توجه به $\sin(\pi + x) = -\sin x$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \Rightarrow (\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

۵۸۷- گزینه ۳ راه‌حل اول معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x$$

اکنون از اتحاد $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ استفاده می‌کنیم:

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \quad \text{یا} \quad x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، π و 2π .

راه‌حل دوم از اتحاد $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

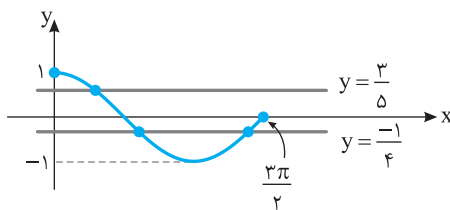
$$1 - \cos 2x = \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, x = \pi, x = 2\pi$$

۵۸۸- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم، سپس از اتحاد $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ استفاده می‌کنیم.

$$1 + \cos \frac{x}{2} = -\cos x \xrightarrow{\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1}$$

$$1 + \cos \frac{x}{2} = -2 \cos^2 \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1) = 0$$



۵۹۶- گزینه ۲ راه حل اول معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = 2 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2$$

$$\frac{1}{\sin 2x} = 2 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر است:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۹۷- گزینه ۳ راه حل دوم معادله را به کمک اتحاد $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ به صورت

زیر می نویسیم:

$$\frac{2}{\sin 2x} = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۹۷- گزینه ۳ با توجه به اتحاد $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha$ معادله را

به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x = 1$$

$$\cos 4x = -\cos 2x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 2x)$$

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر است:

$$4x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4x = 2k\pi - \pi + 2x \Rightarrow x = (2k-1)\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
$x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x = (2k-1)\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

پس جواب های معادله که در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ قرار دارند عبارت اند از $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{3\pi}{6}$.

۵۹۸- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 \Rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$$

$$\cos 2x = 1$$

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب های واقع در بازه $(0, 3\pi)$ به ازای $k=1, 2$ به دست می آیند که

عبارت اند از π و 2π و مجموع آنها برابر 3π است.

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9} = \frac{(6k \pm 1)\pi}{9}$$

اکنون جواب های واقع در بازه $(0, \pi)$ را معین می کنیم

k	۰	۱	۲
$x = (6k+1)\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{9}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x = (6k-1)\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

بنابراین مجموع جواب های واقع در بازه $(0, \pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \frac{13\pi}{9}$$

۵۹۳- گزینه ۱ با استفاده از اتحاد $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$ معادله را

به صورت زیر می نویسیم:

$$\cos(3x - \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0$$

$$3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵۹۴- گزینه ۲ چون $\cos(x - \frac{\pi}{6}) \neq 0$ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = -\sin 3x \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 3x)$$

بنابراین جواب های معادله به صورت زیر هستند:

$$x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{3} \quad x \in (0, \pi) \rightarrow$$

$$0 < -k\pi - \frac{\pi}{3} < \pi \Rightarrow -k < \frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} < k < -\frac{1}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow k \in \{-1\}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad x \in (0, \pi) \rightarrow$$

$$0 < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} < \pi \Rightarrow \frac{2}{3} < k < \frac{14}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow k \in \{2, 3\}$$

پس جواب های واقع در بازه $(0, \pi)$ عبارت اند از $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{11\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ و $\frac{2\pi}{3}$

قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج در معادله اصلی می شود (توجه

کنید که این جواب در اثر ضرب کردن طرفین معادله در $\cos(x - \frac{\pi}{6})$ به

وجود آمده است). بنابراین معادله دو جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد.

۵۹۵- گزینه ۳ جواب های معادله به صورت $\cos x = -\frac{1}{4}$ یا

$\cos x = \frac{3}{5}$ هستند. پس با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ و خطوط

$y = \frac{3}{5}$ و $y = -\frac{1}{4}$ معادله $\cos x = \frac{3}{5}$ در بازه $[0, \frac{3\pi}{2}]$ یک جواب و معادله

$\cos x = -\frac{1}{4}$ در این بازه دو جواب دارد. پس معادله مورد نظر در بازه فوق

سه جواب دارد.

۳-۶۰۳- گزینه

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

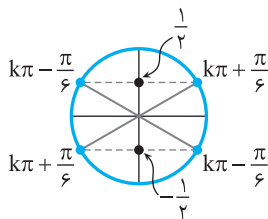
$$\sin^2\left(\Delta x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(\Delta x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm \frac{1}{2}$$

با توجه به شکل زیر جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\Delta x - \frac{\pi}{3} = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta x = k\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{k\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta x = k\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین i می‌تواند مقادیر ۳ و ۱ را

داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر

۴ است.

۱-۶۰۴- گزینه

چون $\cos 2x \neq 0$ ، طرفین معادله را در $\cos 2x$ ضرب

می‌کنیم

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = -\frac{(4k+1)\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, \pi)$ را به دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲
$x = \frac{(4k+1)\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	-۱
$x = -\frac{(4k+1)\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{9\pi}{4}$

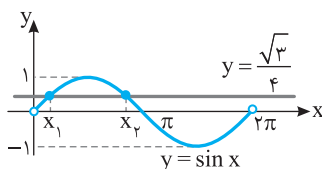
(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

جواب‌های واقع در بازه $(0, \pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ ولی $\frac{3\pi}{4}$ قابل قبول

نیست، زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادله اصلی می‌شود (توجه کنید

که $x = \frac{3\pi}{4}$ در اثر ضرب کردن معادله در $\cos 2x$ به وجود آمده است).پس تعداد جواب‌ها در بازه $(0, \pi)$ برابر یک است.

۲-۶۰۵- گزینه

توجه کنید که $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ یا $\cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$ باتوجه به نمودار تابع $y = \sin x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ، معادله $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ دوجواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۳-۵۹۹- گزینه

اگر فرض کنیم $t = \cos x$ ، آن‌گاه $x = 1 - t^2$ ومعادله به صورت $(2 - \sqrt{2})(1 - t^2) + t - 1 = 0$ در می‌آید. بنابراین

$$(2 - \sqrt{2})(1 - t)(1 + t) - (1 - t) = 0$$

$$(1 - t)((2 - \sqrt{2})(1 + t) - 1) = 0$$

$$(1 - t)(2 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})t - 1) = 0$$

$$t = 1, \quad t = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ سه است.

۲-۶۰۰- گزینه

دو طرف معادله داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از

اتحاد $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ استفاده می‌کنیم.

$$2(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = 3 \Rightarrow 2(1 + \sin 2x) = 3$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازه $(0, \pi)$ به ازای $k=0$ ، $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ است، پسمجموع جواب‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

۱-۶۰۱- گزینه

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند:

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi = -\frac{7\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{13\pi}{24}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(-\pi, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{37\pi}{24}$	$\frac{61\pi}{24}$	$-\frac{11\pi}{24}$	$-\frac{35\pi}{24}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

پس معادله سه جواب در بازه فوق دارد.

۳-۶۰۲- گزینه

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin\left(x + \frac{5\pi}{36}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x + \frac{5\pi}{36} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{7\pi}{36}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{5\pi}{36} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{11\pi}{36}$$

پس i می‌تواند برابر ۱۱ یا ۱۲ باشد.

۶۰۸- گزینه ۳ راه حل اول معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = \sin x$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \sin x$$

$$\sin x - \sin^2 x \cos x + \cos x - \sin x \cos^2 x = \sin x$$

$$\cos x(-\sin^2 x + 1 - \sin x \cos x) = 0$$

$$\cos x(\cos^2 x - \sin x \cos x) = 0 \Rightarrow \cos^2 x(\cos x - \sin x) = 0$$

بنابراین جوابهای معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.

راه حل دوم معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x \Rightarrow \sin x - \sin^3 x - \cos^3 x = 0$$

$$\sin x(1 - \sin^2 x) - \cos^3 x = 0 \Rightarrow \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0$$

$$\cos^2 x(\sin x - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.

۶۰۹- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\tan^2 x = 2 - 2\sin^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cos^2 x \xrightarrow{\cos x \neq 0} \sin^2 x = 2 \cos^4 x$$

$$1 - \cos^2 x = 2 \cos^4 x \Rightarrow 2 \cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

$$(\cos^2 x + 1)(2 \cos^2 x - 1) = 0$$

چون $\cos^2 x + 1 \neq 0$ بنابراین

$$2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۶۱۰- گزینه ۲ از $\cos(2\pi \sin x) = -1$ نتیجه می شود

$$2\pi \sin x = 2k\pi + \pi \Rightarrow \sin x = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

با توجه به $-1 \leq \sin x \leq 1$ نتیجه می شود که k می تواند مقادیر صفر و -1 را داشته باشد. بنابراین جوابهای معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$k = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$$

$$k = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$$

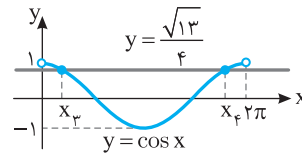
پس مجموع جوابها برابر است با 4π .

۶۱۱- گزینه ۳ در صورت کسر از $\sin 25^\circ$ و در مخرج کسر از

$\cos 25^\circ$ فاکتور می گیریم:

$$A = \frac{\sin 25^\circ (1 - \sin^2 25^\circ)}{\cos 25^\circ (1 - \cos^2 25^\circ)} = \frac{\sin 25^\circ \times \cos^2 25^\circ}{\cos 25^\circ \times \sin^2 25^\circ} = \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = \cot 25^\circ$$

همچنین با توجه به نمودار تابع



$y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{13}}{4}$

معادله $\cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$ دو

جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

ولی توجه کنید که یکی از این جوابها (x_2) همان جواب معادله

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ است (x_1) زیرا $(\frac{\sqrt{3}}{4})^2 + (\frac{\sqrt{13}}{4})^2 = 1$

بنابراین معادله مورد نظر مسئله سه جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۶۰۶- گزینه ۲ راه حل اول معادله را به صورت زیر ساده می کنیم.

توجه کنید که $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$-(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

پس جوابهای کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

واضح است که جوابهای $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جوابهای $2k\pi$ نیز می شوند. پس

جوابهای کلی به صورت $\frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$ هستند.

راه حل دوم $x = 0$ جواب معادله است. پس گزینههای (۳) و (۴) رد می شوند.

به ازای $k = 3$ ، گزینه (۱) برابر π می شود، اما $x = \pi$ جواب معادله نیست:

$$\sin^2 \pi - \cos^2 \pi = -1, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

بنابراین گزینه (۱) هم رد می شود.

۶۰۷- گزینه ۴ از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ کمک

می گیریم و معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$$

طرفین معادله را در $\cos x + \sin x$ ضرب می کنیم

$$\cos x - \sin x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2$$

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ (\cos x + \sin x)^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

از معادله (۱) جوابهای زیر در بازه $[0, \pi]$ به دست می آید:

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

از معادله (۲) جوابهای زیر در بازه $[0, \pi]$ به دست می آید:

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \underbrace{\sin x \cos x}_{\sin 2x} = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$

پس مجموع جوابهای واقع در بازه $[0, \pi]$ برابر $\frac{7\pi}{4}$ است.

۶۱۷- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از اتحادهای

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \text{ و } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \text{ استفاده می‌کنیم:}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{بنابراین } \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}$$

۶۱۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$\text{بنابراین } A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

۶۱۹- گزینه ۱ معادله را به صورت $\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌ها به صورت زیر هستند: $(k \in \mathbb{Z})$

$$2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad 2x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{12}$ که مجموع آن‌ها برابر

$$\frac{5\pi}{6} \text{ است.}$$

۶۲۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$$

بنابراین معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$$

$$(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x - 1) = 0$$

اگر $\cos x + \sin x = 0$ ، آن‌گاه $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$. اگر $\cos x + \sin x = 1$ ، آن‌گاه

$$1 - \cos x = \sin x$$

از اتحادهای $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{x}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \\ \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{5\pi}{4}$.

۶۲۱- گزینه ۴ می‌دانیم $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \tan \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{5} \cot \frac{\pi}{5}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{5} \cot \frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{1 - \tan \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{5} - 1}{1 + \tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5} - 1} = \frac{-\tan \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{5}}{\tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5}} = -1 \end{aligned}$$

۶۱۲- گزینه ۱ دو طرف تساوی $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{8}{9}$$

اگر فرض کنیم $A = \sin \alpha - \cos \alpha$ ، آن‌گاه

$$A^2 = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 1 - \left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{17}{9} \Rightarrow A = \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه چهارم قرار دارد، $\sin \alpha < 0$ و

$\cos \alpha > 0$. پس مقدار $\sin \alpha - \cos \alpha$ منفی است و در نتیجه $A = -\frac{\sqrt{17}}{3}$.

۶۱۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم اندازه این زاویه برحسب درجه برابر D و

برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $D = \frac{200}{\pi} R$. از تساوی

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \text{ به دست می‌آید}$$

$$\frac{\frac{200}{\pi} R - 5}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180^\circ R = 200^\circ R - 5\pi \Rightarrow 20^\circ R = 5\pi \Rightarrow R = \frac{\pi}{4}$$

۶۱۴- گزینه ۳ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دوره تناوب

برابر ۶ است، پس دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin(b\pi x)$ برابر ۲ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است. پس $|a| = 4$. در نتیجه $a = \pm 4$.

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 4 \sin(-\pi x), \quad \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -4 \sin(\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر -4 است.

۶۱۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cot 38^\circ = \cot(27^\circ + 11^\circ) = -\tan 11^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \cot 38^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ} &= \frac{1}{1 + \tan 11^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ} \\ &= \frac{1 + \cot 11^\circ + 1 + \tan 11^\circ}{(1 + \tan 11^\circ)(1 + \cot 11^\circ)} \\ &= \frac{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ}{1 + \cot 11^\circ + \tan 11^\circ + \tan 11^\circ \cot 11^\circ} \\ &= \frac{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ}{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ} = 1 \end{aligned}$$

۶۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$va + 9a = \frac{7\pi}{32} + \frac{9\pi}{32} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 9a = \frac{\pi}{2} - va \Rightarrow \cos 9a = \sin va$$

به همین ترتیب

$$21a + 27a = \frac{21\pi}{32} + \frac{27\pi}{32} = \frac{48\pi}{32} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 27a = \frac{3\pi}{2} - 21a$$

$$\cos 27a = -\sin 21a$$

$$\frac{\sin va \cos 27a}{\sin 21a \cos 9a} = \frac{-\sin va \sin 21a}{\sin 21a \sin va} = -1 \text{ بنابراین}$$

۶۲۶- گزینه ۴ بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب برابر ۲ و -۲

هستند. پس $|a|=2$. نمودار تابع از نقطه $(\frac{\pi}{3}, 0)$ عبور می کند، بنابراین

$$f(\frac{\pi}{3})=0 \Rightarrow a \sin(\pi(b-\frac{\pi}{3}))=0 \Rightarrow \sin(\pi(b-\frac{\pi}{3}))=0$$

$$\pi(b-\frac{\pi}{3})=k\pi \Rightarrow b=k+\frac{\pi}{3}$$

چون $2 < b < 3$ ، پس $b=\frac{\pi}{3}$. بنابراین ضابطه تابع به صورت

$$f(x)=-2 \sin(\frac{\pi}{3}-\pi x) \text{ یا } f(x)=2 \sin(\frac{\pi}{3}-\pi x) \text{ است. چون}$$

$f(0)>0$ ، پس ضابطه تابع به صورت $f(x)=2 \sin(\frac{\pi}{3}-\pi x)$ است. در

$$\text{نتیجه } a=2, b=\frac{\pi}{3} \text{ و } a+b=\frac{13\pi}{3}$$

۶۲۷- گزینه ۲ از اتحادهای $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ و

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \text{ استفاده می کنیم. ابتدا توجه کنید که}$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} &= \frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos 2x \end{aligned}$$

بنابراین $A = \left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)^2 = \cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$ اکنون به ازای

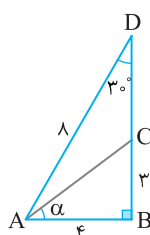
$$x = \frac{\pi}{16} \text{ مقدار عبارت } A \text{ را به دست می آوریم:}$$

$$\frac{1+\cos 2(\frac{\pi}{16})}{2} = \frac{1+\cos \frac{\pi}{8}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

۶۲۸- گزینه ۲ چون $\sin \hat{D} = \sin 30^\circ = \frac{AB}{8} = \frac{1}{2}$ ، پس $AB=4$.

بنابراین با استفاده از قضیه فیثاغورس، $AC=5$. در نتیجه $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$$



۶۲۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\cot x = \frac{1}{\tan x}$. بنابراین از فرض

مسئله نتیجه می شود

$$\frac{\tan x - \frac{1}{\tan x}}{\tan x + \frac{1}{\tan x}} = \frac{y}{25} \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1} = \frac{y}{25}$$

$$25 \tan^2 x - 25 = y \tan^2 x + y \Rightarrow \tan^2 x = \frac{16}{9}$$

از اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ استفاده می کنیم. بنابراین

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\frac{16}{9}} = \frac{9}{25}$$

چون x زاویه ای حاده است، پس $\cos x > 0$ ، در نتیجه $\cos x = \frac{3}{5}$.

۶۲۳- گزینه ۳ فرض می کنیم $\sin x + \cos x = y$. در نتیجه

$$y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{y^2 - 1}{2} = y \Rightarrow y^2 - 2y - 1 = 0$$

پس $y = 1 \pm \sqrt{2}$. ولی چون $1 + \sqrt{2} > 2$ ، پس $\sin x + \cos x$ نمی تواند با

این عدد برابر باشد و در نتیجه $\sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$.

۶۲۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\cos^2 179^\circ = \cos^2 (180^\circ - 1^\circ) = \cos^2 1^\circ$$

$$\cos^2 178^\circ = \cos^2 (180^\circ - 2^\circ) = \cos^2 2^\circ$$

:

$$\cos^2 91^\circ = \cos^2 (180^\circ - 89^\circ) = \cos^2 89^\circ$$

بنابراین

$$A = 2(\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ) + \cos^2 90^\circ + \cos^2 180^\circ$$

از طرف دیگر $\cos^2 90^\circ = 0$ و همچنین

$$\cos^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ, \cos^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ, \dots, \cos^2 46^\circ = \sin^2 44^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A &= 2(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots \\ &\quad + \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ + \cos^2 45^\circ) + \cos^2 180^\circ \\ &= \frac{\cos^2 45^\circ = 1}{\cos^2 180^\circ = 1} \rightarrow A = 2\left(\frac{1+1+\dots+1}{44} + \frac{1}{2}\right) + 1 = 90 \end{aligned}$$

۶۲۵- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ ، آن گاه

$$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ روی } y = \tan x \text{ زیرا تابع } \tan x \geq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

اکیداً صعودی است و در نتیجه $\tan x \geq -\sqrt{3}$. بنابراین

$$m + 2\sqrt{3} \geq -\sqrt{3} \Rightarrow m \geq -3\sqrt{3}$$

پس حداقل مقدار m برابر $-3\sqrt{3}$ است.

۶۳۳- گزینه ۱ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دوره

تناوب، برابر ۳ است، پس دوره تناوب تابع $y = a \sin(b\pi x)$ برابر ۱ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 1 \Rightarrow b = \pm 2$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس

$$|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \sin(-2\pi x)$$

$$\begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow y = -3 \sin(2\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر ۶- است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۳۴- گزینه ۲ از اتحاد $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ استفاده

می‌کنیم. اگر $\alpha = \frac{x}{2}$ ، آن‌گاه

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2 \cot x = -\frac{2}{\tan x} = -\frac{2}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2}$$

تجربی - ۹۶

۶۳۵- گزینه ۴ کافی است صورت و مخرج برابر باشند به شرطی که

مخرج صفر نباشد:

$$\sin 3x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \sin 3x = \sin x$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi & (\text{غ.ق.ق.}) \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

به‌ازای $x = k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس این جواب غیرقابل قبول است

و جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۶۳۶- گزینه ۱ معادله را به صورت $\cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x)$

نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با توجه به $\cos x \neq 0$ ، جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ غیرقابل قبول است. پس جواب

کلی $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۲۹- گزینه ۴ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم می‌شود که وقتی

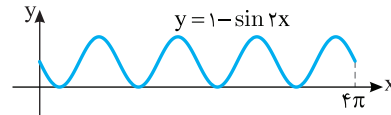
نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس می‌شود، $f(x) = 0$ ، پس

$$1 - \sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) = 1$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < 4\pi \Rightarrow 0 < k\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi \Rightarrow 0 < k + \frac{1}{4} < 4 \Rightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{15}{4}$$

پس به‌ازای $k=0, k=1, k=2, k=3$ چهار مقدار برای x به‌دست می‌آید که طول نقاط تماس نمودار تابع با محور طول‌هاست.



۶۳۰- گزینه ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. در ادامه معادله را

به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = -1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right) = -1$$

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = -1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{7\pi}{24} \\ x = 2k\pi + \frac{25\pi}{24} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{4\pi}{24}$ و $\frac{25\pi}{24}$ که

مجموع آن‌ها برابر $\frac{11\pi}{4}$ است.

۶۳۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta$$

بنابراین $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \tan \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 3$.

۶۳۲- گزینه ۴ از اتحادهای $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ و

$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ استفاده می‌کنیم و عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}$$

اکنون از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sin^4 \theta \cos^4 \theta} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\theta} = \frac{16}{\sin^4 2\theta}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۶۴۱- گزینه ۱ از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم. ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

چون $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha) = -\frac{3}{4}$ ، بنابراین $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha$

تجربی - ۹۵

۶۴۲- گزینه ۳ عبارت را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2° می‌نویسیم:

$$A = \frac{\sin(27^\circ - 2^\circ) + \sin(72^\circ - 2^\circ)}{\cos(54^\circ + 2^\circ) - \cos(90^\circ + 2^\circ)} = \frac{-\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ + \sin 2^\circ}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos 2^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{-\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \frac{-1 - \tan 2^\circ}{1 + \tan 2^\circ} = \frac{-1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{-\frac{6}{5}}{\frac{6}{5}} = -1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۴۳- گزینه ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است. این

مقدار زمانی به دست می‌آید که $\cos(bx + \frac{\pi}{2}) = -1$ ، پس

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

در نتیجه $y = -1 - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{2}) = -1 + 2 \sin(bx)$ با توجه به شکل

دوره تناوب تابع برابر با $\frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm 3$$

برای $x > \frac{\pi}{18}$ نمودار تابع $y = -1 + 2 \sin(bx)$ به صورت صعودی شروع

می‌شود، پس $b = 3$ قابل قبول است، یعنی $y = -1 + 2 \sin(3x)$ و مقدار

ریاضی - ۹۵

$$a + b \text{ برابر است با } -1 + 3 = 2$$

۶۴۴- گزینه ۴ با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2(\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

تجربی - ۹۲

۶۳۷- گزینه ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. در ادامه معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{8})) = 1$$

$$2 \sin(x + \frac{\pi}{8}) = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند که مجموع آن‌ها

برابر $\frac{3\pi}{4}$ است:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \Rightarrow x_1 + x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۶۳۸- گزینه ۴ زاویه $\frac{\pi}{2} - x$ ، متمم زاویه x است. پس

$$\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x = -\sin x \Rightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \quad 2x = 2k\pi + \pi + x \Rightarrow x = (2k+1)\pi$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۶

مجموع این جواب‌ها برابر 5π است.

۶۳۹- گزینه ۱ معادله داده شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$$

$$-2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-4}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 2 \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

تجربی - ۹۵

۶۴۰- گزینه ۳ **راه حل اول** با توجه به اتحاد $2 \cos^2 x = \cos 2x + 1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \cos 2x + 1 = 0$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

راه حل دوم با توجه به اتحاد $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 4 \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

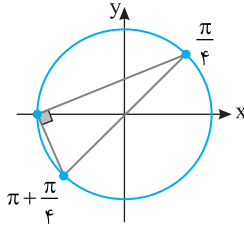
این جواب‌ها همان $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ هستند.

تجربی - ۹۶

دقت کنید که به ازای $x = 2k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود. پس جواب‌های معادله $x = (2k+1)\pi$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ هستند که روی دایره مثلثاتی مطابق

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.



۶۴۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که برای تعریف شدن عبارت سمت

چپ معادله لازم است که

$$1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq 2k\pi + \pi$$

با شرط فوق معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi + \pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases} \quad (\text{غ.ق.})$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۶۵۰- گزینه ۳ از اتحادهای

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

و اتحاد مزدوج برای ساده کردن معادله استفاده می‌کنیم:

$$2 \sin 2x \cos 2x = (\sin^2 x - \cos^2 x) (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{7\pi}{12}$ و $\frac{11\pi}{12}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$

ریاضی - ۹۵

که مجموعشان برابر $\frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$ است.

۶۴۵- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$2 \cos 2x = \frac{\cos x}{\sin x} (4 \sin x + \frac{\sin x}{\cos x}) = 4 \cos x + 1$$

$$2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$$

$$(2 \cos x + 1)(2 \cos x - 3) = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\cos x = \frac{3}{2} \quad (\text{غ.ق.}), \quad \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۴۶- گزینه ۲ با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$-(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب $2k\pi$ نیز می‌شود، پس جواب‌های

کلی به صورت $\frac{2k\pi}{3}$ هستند.

تجربی - ۹۱

۶۴۷- گزینه ۱ از اتحادهای $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ و

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2 \cos^2 x - 1) + 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow k = -\frac{1}{4} \quad (\text{غ.ق.}) \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

راه‌حل دوم برای به دست آوردن جواب‌های کلی معادله $\cos 2x = -\sin 2x$

به کمک دایره مثلثاتی متوجه می‌شویم:

$$2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

تجربی - ۹۴

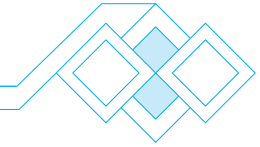
۶۴۸- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin x \cos x = \sin^2 x \Rightarrow \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \quad \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$



۶۵۹- گزینه ۱ توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ وجود دارد.

از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x+4)}{\lim_{x \rightarrow 3} f(x)} = \frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$. همچنین $\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = 6$. بنابرین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)}{x+2} = \frac{6}{1+2} = 2$$

۶۶۰- گزینه ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (6x^2 - x^3) = 24 - 8 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2 - x^3) = 12 - 8 = 4$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ برابر ۲۰ است.

۶۶۱- گزینه ۴ ابتدا نامعادله را حل می‌کنیم

$$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس بازه $(-1, 3)$ مجموعه جواب‌های نامعادله است که همسایگی نقطه $x=-2$ نیست.

۶۶۲- گزینه ۲ با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2a, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a-2, \quad f(a) = a$$

بنابراین

$$2a - (a-2) = 2a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۶۶۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه $(1-x^2) \rightarrow 0^-$

و اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه $(1-x^2) \rightarrow 0^+$. بنابرین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^2) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 3 - 1 = 2$$

۶۶۴- گزینه ۳ در سمت راست نقطه -1 ، -1 و $[x] = -1$ و $|x| = -x$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{|x|}{[x]}\right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{-x}{-1}\right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1$$

۶۶۵- گزینه ۴ چون

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow (-1)^+, \quad x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 1^-$$

می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) = \lim_{t \rightarrow (-1)^+} f(t) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (f \circ f)(x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (f \circ f)(x) = -1 - 1 = -2$$

۶۵۱- گزینه ۴ کافی است $x=2$ عضو بازه $(a-2, 2a)$ باشد. یعنی

$$a-2 < 2 \Rightarrow a < 4, \quad 2a > 2 \Rightarrow a > 1$$

بنابراین $1 < a < 4$.

۶۵۲- گزینه ۳ دامنه تابع از شرط $[x] \neq 2$ به دست می‌آید که به صورت

زیر است:

$$D_f = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$$

بنابراین تابع در همسایگی چپ نقطه $x=3$ تعریف نشده است.

۶۵۳- گزینه ۴ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 3$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۶۵۴- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 0$$

از طرف دیگر، اگر $x \rightarrow 9^+$ ، آن‌گاه $\frac{x}{3} \rightarrow 3^+$. بنابرین

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} f\left(\frac{x}{3}\right) = \lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) = 1$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۱ است.

۶۵۵- گزینه ۲ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه 0 ، $[x] = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x[x]) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2$$

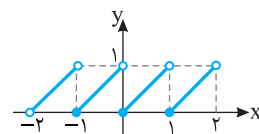
۶۵۶- گزینه ۴ با توجه به نمودار،

$$x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -2$$

۶۵۷- گزینه ۳ نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که تابع در

نقطه‌های $x=-1$ ، $x=0$ و $x=1$ از بازه $(-2, 2)$ حد ندارد.



۶۵۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 2a(5) - 3 = 10a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 5^2 - a(5) + b = 25 - 5a + b$$

اکنون توجه کنید که چون $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 17$ ، پس هر یک از حدهای بالا برابر

۱۷ است:

$$\begin{cases} 10a - 3 = 17 \\ 25 - 5a + b = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow ab = 4$$

۶۷۱- گزینه ۳ دامنه تابع را پیدا می‌کنیم:

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$x - [x] \neq 0 \Rightarrow x \neq [x] \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

بنابراین دامنه تابع به صورت $D_f = (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ است. پس نقاط $x = \pm 1$ و $x = 0$ در دامنه تابع قرار ندارند ولی همسایگی محذوف آن‌ها در دامنه تابع قرار دارد.

۶۷۲- گزینه ۱ توجه کنید اگر $x \rightarrow 3^-$ ، آن‌گاه $t = (x-1) \rightarrow 2^-$.

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = -1$. همچنین اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن‌گاه

$t = (x+1) \rightarrow 1^+$ ، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -2$.

مقدار مورد نظر برابر ۳- است.

۶۷۳- گزینه ۴ در یک همسایگی راست $x = 0$ مقادیر تابع f نزدیک

۲ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x) \rightarrow 2^-$ و $[f(x)] = 1$. بنابراین

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = 1$. همچنین در یک همسایگی چپ $x = 0$ مقادیر تابع f

نزدیک ۱- و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x) \rightarrow (-1)^-$ و $[f(x)] = -2$.

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = -2$ ، در نتیجه

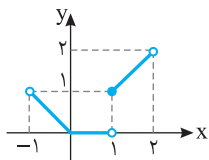
$$2 \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = 2 - (-2) = 4$$

۶۷۴- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x$$



پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است و تابع فقط در نقطه $x = 1$ از بازه $(-1, 2)$ حد

ندارد.

۶۷۵- گزینه ۴ اگر x در یک همسایگی راست ۱ باشد، $x > 1$ ، پس

$2-x < 1$. در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) = \lim_{y \rightarrow 1^-} f(y) = 2a$. همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(2-x)}{f(x)} = \frac{2a}{a} = 2 \text{ در نتیجه } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$$

۶۷۶- گزینه ۱ چون تابع‌های f و g در $x = a$ حد دارند، پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 2g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 2g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (2f(x) - 3g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 3g(x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 6 \end{aligned}$$

بنابراین اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} L_1 - 2L_2 = 2 \\ 2L_1 - 3L_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow L_1 = 6, L_2 = 2$$

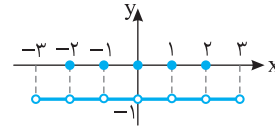
بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \times L_2 = 12$

۶۶۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1 \Rightarrow f(x) = -1$$

بنابراین نمودار تابع f در بازه $(-3, 3)$ به شکل زیر است. با توجه به نمودار، تابع f در تمام نقاط این بازه حد دارد و حد آن برابر ۱- است.



۶۶۷- گزینه ۱ این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد، پس در $x = 2$ و

$x = -2$ نیز حد دارد. بنابراین باید حد چپ و حد راست تابع در هر یک از این نقاط برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^3 + x^2) = 8a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+b) = 2+b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax^3 + x^2) = -8a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x+b) = -2+b$$

بنابراین

$$\begin{cases} 8a + 4 = 2 + b \\ -8a + 4 = -2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8a + 2 \\ b = -8a + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow ab = 1$$

۶۶۸- گزینه ۴ اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ ، طبق قضایای حد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)}{f(x)+1} = 3 \Rightarrow \frac{2L}{L+1} = 3 \Rightarrow 2L = 3L + 3 \Rightarrow L = -3$$

$$\text{در نتیجه } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-1}{f(x)} = \frac{2 \times (-3) - 1}{-3} = \frac{7}{3}$$

۶۶۹- گزینه ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x = -2$ را

حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (ax[3x] + x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-7ax + x) \\ &= 14a - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax[3x] + x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-6ax + x) \\ &= 12a - 2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$14a - 2 + 12a - 2 = 1 \Rightarrow 26a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{26}$$

۶۷۰- گزینه ۲ ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطه $x = 1$ حساب

می‌کنیم. اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه $-x \rightarrow (-1)^-$ و $2x \rightarrow 2^+$ و اگر $x \rightarrow 1^-$ ،

آن‌گاه $-x \rightarrow (-1)^+$ و $2x \rightarrow 2^-$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] + (m+1) \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] = 1 + (m+1)(-1) = -m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [2x] + (m+1) \lim_{x \rightarrow 1^+} [-x] = 2 + (m+1)(-2) = -2m$$

در نتیجه

$$-2m = -m \Rightarrow m = 0$$

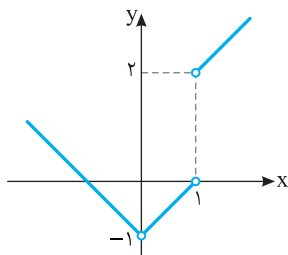
۶۸۳- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم:

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{-x} + \frac{-(x-1)}{x-1} = -x-1$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{-(x-1)}{x-1} = x-1$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{x-1}{x-1} = x+1$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. پس تابع فقط در نقطه $x=1$ حد ندارد.



۶۸۴- گزینه ۱ تابع f فقط در $x=2$ و $x=-2$ ممکن است حد

نداشته باشد. حد چپ و حد راست تابع را در این نقاط حساب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - 2x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x^3 - 2x) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} x^2 = 4$$

پس تابع در $x=2$ حد دارد ولی در $x=-2$ حد ندارد.

۶۸۵- گزینه ۱ توجه کنید که $x^3 - x = x(x^2 - 1)$. در نتیجه اگر x از

سمت چپ به صفر نزدیک شود، آن گاه $x^3 - x > 0$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{t+9}) = 3$$

۶۸۶- گزینه ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را حساب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3) = 4a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3a) = 4 + 3a$$

باید حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ برابر باشند، یعنی

$$4 + 3a = 4a + 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3a) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = 12 \quad \text{بنابراین}$$

۶۸۷- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{3f(x)}{4f(x)+2} = 1 \Rightarrow \frac{3 \lim_{x \rightarrow a} f(x)}{4 \lim_{x \rightarrow a} f(x)+2} = 1 \Rightarrow \frac{3L}{4L+2} = 1 \Rightarrow 3L = 4L+2 \Rightarrow L = -2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f(x)-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)-3} = \frac{L}{L-3} = \frac{-2}{-2-3} = \frac{2}{5}$$

۶۷۷- گزینه ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطه $x=2$ را

به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x[x] + 2a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 2a) = 4 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (b[-x] + 3x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2b + 3x) = -2b + 6$$

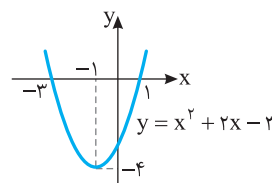
چون تابع f در نقطه $x=2$ حد دارد، در نتیجه حد چپ و حد راست تابع f در این نقطه برابرند:

$$4 + 2a = -2b + 6 \Rightarrow 2a + 2b = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

۶۷۸- گزینه ۱ در شکل زیر نمودار تابع $y = x^2 + 2x - 3$ رسم شده

است. توجه کنید $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 2x - 3) = 0$. اما در سمت چپ $x = -3$ ،

مقدارهای تابع مثبت هستند. در نتیجه در سمت چپ $x = -3$ ، $[x^2 + 2x - 3] = 0$. در نتیجه حاصل حد نیز صفر می شود.



۶۷۹- گزینه ۳ مطابق قضیه های محاسبه حد، اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1 + f^2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{1 + (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^2} = \frac{L}{1 + L^2} \quad \text{آن گاه}$$

در بقیه گزینه ها ممکن است حد مخرج کسر تابع برابر صفر و حد صورت کسر برابر صفر نباشد و در نتیجه تابع حد نداشته باشد.

۶۸۰- گزینه ۳ در نقطه هایی که مقدار $2x$ عددی صحیح نشود، تابع

$y = [2x]$ حد دارد. در نقطه هایی که مقدار $2x$ عددی صحیح شود، تابع

$y = [2x]$ حد ندارد. این نقطه ها را به دست می آوریم

$$2x = k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k}{2}$$

$$0 < \frac{k}{2} < 3 \Rightarrow 0 < k < 6 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

پس تابع در پنج نقطه از بازه $(0, 3)$ حد ندارد.

۶۸۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن گاه $(1-x^3) \rightarrow 0^-$

و اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن گاه $(1-x^3) \rightarrow 0^+$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^3) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^3) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 4 + 2 = 6$$

۶۸۲- گزینه ۱ با توجه به نمودار واضح است که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

بنابراین $[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)] = [3] = 3$. از طرف دیگر در یک همسایگی محذوف

$x=1$ مقادیر تابع f نزدیک ۳ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x) \rightarrow 3^-$

بنابراین در این بازه $[f(x)] = 2$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$. بنابراین

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]}{[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)]} = \frac{2}{3}$$

۶۹۴- گزینه ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - 64}{f(x) - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - 4^3}{f(x) - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(f(x) - 4)(f^2(x) + 4f(x) + 16)}{f(x) - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (f^2(x) + 4f(x) + 16) = 4^2 + 4 \times 4 + 16 = 48 \end{aligned}$$

۶۹۵- گزینه ۳ یک عامل $x-1$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 - 3x + 3}{x^3 - 1 + 3x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) - 3(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^2 + x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 4} = \frac{0}{6} = 0 \end{aligned}$$

۶۹۶- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x-1} = -1 \end{aligned}$$

۶۹۷- گزینه ۳ چون حد صورت کسر صفر است، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. که این طور نیست ($b \neq 0$). پس

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax + 3) = 9 + 3a + 3 = 12 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + ax + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-1} = \frac{3+3}{3-1} = 3 \\ a+b &= -4+3 = -1 \end{aligned}$$

۶۹۸- گزینه ۲ از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - 2x})(1 + \sqrt{1 - 2x})}{x^2(1 + \sqrt{1 - 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2x)}{x^2(1 + \sqrt{1 - 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2(1 + \sqrt{1 - 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x(1 + \sqrt{1 - 2x})} = \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

۶۹۹- گزینه ۴ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-4}}{x^2 - 6x + 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-4})(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})}{(x^2 - 6x + 5)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4(x-4)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3(x-5)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3}{(x-1)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} = \frac{-3}{4(2+2)} = \frac{-3}{16} \end{aligned}$$

۶۸۸- گزینه ۲ تابع $y=x$ در تمام نقاط حد دارد. تابع $y=x-[x]$

در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. پس ضرب این دو تابع یعنی $f(x) = x(x-[x])$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد.

در نقاط صحیح غیر صفر حد چپ و حد راست تابع $y=x-[x]$ یکسان نیستند پس تابع f نیز در این نقاط حد ندارد. ولی در $x=0$ چون حد تابع $y=x$ برابر صفر است، پس حد تابع f هم برابر صفر است. بنابراین تابع f در نقاط $x=1$ و $x=-1$ از بازه $(-2, 2)$ حد ندارد.

۶۸۹- گزینه ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{fa}{x^2} + x^2 \right) = \frac{fa}{4} + 4 = a + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3a}{x^2} + x^2 \right) = \frac{3a}{4} + 4 \end{aligned}$$

بنابراین

$$a + 4 + \frac{3a}{4} + 4 = 10 \Rightarrow \frac{7a}{4} = 2 \Rightarrow a = \frac{8}{7}$$

۶۹۰- گزینه ۴ اگر تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد،

آن‌گاه تفاضل این تابع و تابع $y=|x|$ باید در $x=a$ حد داشته باشد. تفاضل این دو تابع همان تابع $y=f(x)$ است که باید در $x=a$ حد داشته باشد و این خلاف فرض مسئله است. پس تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۳)، تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

این تابع در $x=0$ حد ندارد، ولی

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{f(x)} = 0$$

برای رد گزینه (۲)، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید که در

$x=0$ حد ندارد ولی $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3$.

۶۹۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$$

۶۹۲- گزینه ۲ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4x + 4) = x^2(x+2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x+2)^2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$$

۶۹۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4), \quad x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{4+4+4}{2+2} = 3 \end{aligned}$$

۷۰۷- گزینه ۲ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می شود که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - \sqrt{x+2}}{3x - \sqrt{15x+6}} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{3x + \sqrt{15x+6}} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - x - 2}{9x^2 - 15x - 6} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(9x+3)} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{9x+3} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right) = \frac{3}{21} \times \frac{6+6}{2+2} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

۷۰۸- گزینه ۴ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. فرض می کنیم $\sqrt{x} = t$.

در این صورت، اگر $x \rightarrow 64$ ، آن گاه $t \rightarrow 8$. بنابراین $t > 0$. اکنون می توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} &= \lim_{t \rightarrow 8} \frac{t^2 - 8}{t^3 - 4} = \lim_{t \rightarrow 8} \frac{(t-2)(t^2 + 2t + 4)}{(t-2)(t+2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 8} \frac{t^2 + 2t + 4}{t+2} = \frac{64 + 16 + 4}{10} = 8\end{aligned}$$

۷۰۹- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t = \sqrt{x}$ ، آن گاه $x = t^2$ و $t \rightarrow 1$.

بنابراین $t > 0$ و می توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - t^4}{\sqrt[3]{t^2} - \sqrt{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - t^4}{t^{\frac{2}{3}} - t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^2(t^2 - 1)}{t^{\frac{2}{3}}(t^{\frac{2}{3}} - 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^2(t-1)(t^2 + t + 1)}{t^{\frac{2}{3}}(t^{\frac{2}{3}} - 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^2(t^2 + t + 1)}{t^{\frac{2}{3}}(t^{\frac{2}{3}} - 1)} = -6\end{aligned}$$

۷۱۰- گزینه ۳ چون حد صورت کسر برابر صفر است و حد مورد نظر صفر

نیست، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b} - 3) = 0 \Rightarrow \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، مقدار حد را به دست می آوریم

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{ax+9} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{ax+9} - 3} \times \frac{\sqrt{ax+9} + 3}{\sqrt{ax+9} + 3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{ax+9-9} \times \frac{\sqrt{ax+9} + 3}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+9} + 3}{a} = \frac{6}{a}\end{aligned}$$

بنابراین $\frac{6}{a} = \frac{1}{2}$ و در نتیجه $a = 12$. پس $a+b = 21$.

۷۱۱- گزینه ۱ دامنه تابع f به صورت $(-2, 0) \cup (0, 2]$ است. بنابراین

این تابع در نقطه $x=2$ فقط پیوستگی چپ دارد، در نقطه $x=-2$ فقط پیوستگی راست دارد و در نقطه $x=0$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی

راست. تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته است: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{3} = f(1)$.

۷۱۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(2) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x) = 4 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x) = 4 - 2 = 2$$

بنابراین مقدار تابع f در نقطه $x=2$ نه با حد چپ آن در این نقطه برابر است

نه با حد راست آن. پس این تابع در نقطه $x=2$ نه پیوستگی چپ دارد، نه پیوستگی راست.

۷۰۰- گزینه ۱ به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر می توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x+1} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x+1} - 3} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} \times \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt{x+1} + 3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x-8}{x+1-9} \times \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{3+3}{4+4+4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

۷۰۱- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که

$$\begin{aligned}(2x+1)^3 + (2x-1)^3 &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \\ &= 16x^3 + 12x = 4x(4x^2 + 3)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^3 + (2x-1)^3}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(4x^2 + 3)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 + 3) = 3$$

۷۰۲- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. می توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^4 - 9x^2}{x - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^2(x^2 - 3)}{x - \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (3x^2(x + \sqrt{3})) \\ &= 3(\sqrt{3})^2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 18\sqrt{3}\end{aligned}$$

۷۰۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^4 - 27x = x(x^3 - 27) = x(x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 + 3x + 9)}{x+2} = \frac{3(9+9+9)}{5} = \frac{81}{5}\end{aligned}$$

۷۰۴- گزینه ۳ می توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = 3$$

۷۰۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $[x]$ در سمت چپ ۳ مساوی ۲

است. پس

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x[x] - 3}{x[x] - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{2} = 2\end{aligned}$$

۷۰۶- گزینه ۱ بنابر اتحاد چاق و لاغر، $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \times \frac{1}{x^2 + 2x + 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \right) \times \frac{1}{12} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \right) \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{48}\end{aligned}$$

۷۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (v - m^2 x^2) = v - 9m^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 6) = 3$$

همچنین $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 6) = 3$ در نتیجه

$$v - 9m^2 = 3 \Rightarrow 9m^2 = v - 3 \Rightarrow m = \pm \frac{\sqrt{v-3}}{3}$$

بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن m برابر $-\frac{4}{9}$ است.

۷۱۴- گزینه ۱

چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در $x = -1$ هم پیوسته است. بنابراین حدهای چپ و راست تابع و مقدار تابع در این نقطه برابرند:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{a}{x-2} = \frac{a}{-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2a}{x+2} = \frac{-1+2a}{-1+2}$$

بنابراین

$$2a-1 = -\frac{a}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۷۱۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(2) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2b) = 2 + 2b$$

بنابراین $a = 5$ و $2 + 2b = 5$ پس $b = \frac{3}{2}$ و در نتیجه $ab = \frac{15}{2}$

۷۱۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - a + 4) = a - a + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}} = 4$$

بنابراین به ازای هر مقدار a تابع f در $x = 1$ پیوسته است. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 4$$

۷۱۷- گزینه ۳

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x-1)(x-2)} \geq 0$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	0	1	2	4	$+\infty$
$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$		+	-	+	-	+

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $(1, 2)$ و $[4, +\infty)$ پیوسته است و

حداکثر مقدار a برابر صفر است.

۷۱۸- گزینه ۱

توجه کنید که اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $[x] \geq 0$ و $f(x) = 0$

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $[x] < 0$ و $f(x) = 2[x]$. بنابراین تابع f در نقاط صحیح مثبت

پیوسته است ولی در نقاط صحیح نامثبت، یعنی در نقاط $x = -1$ ، $x = 0$ ،

$x = -2$ و $x = -3$ از بازه $(-4, 4)$ ناپیوسته است.

۷۱۹- گزینه ۲ راه حل اول در نقطه‌هایی که مقدار $\frac{x+1}{4}$ عددی صحیح

شود، تابع $y = [\frac{x+1}{4}]$ ناپیوسته است:

$$\frac{x+1}{4} = k \Rightarrow x = 4k - 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

یعنی در نقطه‌هایی به صورت $4k - 1$ تابع ناپیوسته است. پس تابع روی بازه

$(-1, 3)$ پیوسته است و در $x = 3$ ناپیوسته است. سپس روی بازه $(3, 7)$

پیوسته است، یعنی حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

راه حل دوم

$$-1 < x < k \xrightarrow{+1} 0 < x+1 < k+1 \xrightarrow{\div 4} 0 < \frac{x+1}{4} < \frac{k+1}{4}$$

برای اینکه $[\frac{x+1}{4}]$ در این بازه پیوسته باشد، باید $\frac{k+1}{4} = 1$ ، پس $k = 3$.

۷۲۰- گزینه ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $\sqrt{x}$ عددی صحیح شود تابع

$y = [\sqrt{x}]$ ناپیوسته است.

$$\sqrt{x} = k \in \mathbb{R} \Rightarrow x = k^2$$

پس تابع در نقطه‌های $x = 0$ ، $x = 1$ ، $x = 4$ ، $x = 9$ و ... ناپیوسته است،

یعنی تابع روی بازه $(1, 4)$ پیوسته است، در $x = 4$ ناپیوسته است سپس روی

بازه $(4, 9)$ پیوسته است. پس حداکثر مقدار k برابر ۹ است.

۷۲۱- گزینه ۴ توجه کنید که $f(4) = [\frac{4}{4}] + [-\frac{4}{4}] = 2 - 2 = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2 - 3 = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین تابع در $x = 4$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع در این

نقطه حد دارد ولی پیوسته نیست.

۷۲۲- گزینه ۲ در $x = 4$ ، $x = 16$ و $x = 64$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{2}$

عدد صحیح می‌شود. پس تابع $f(x) = [\frac{\sqrt{x}}{2}]$ در این نقطه‌ها پیوسته نیست.

در نقطه $x = 9$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{2}$ عدد صحیح نیست، پس تابع $y = [\frac{\sqrt{x}}{2}]$

در این نقطه پیوسته است.

۷۲۳- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2 - 3x) = 5$

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = | -3 - a | = | 3 + a |$$

$$| 3 + a | = 5 \Rightarrow 3 + a = 5 \text{ یا } 3 + a = -5 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -8$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن a برابر -6 است.

۷۲۴- گزینه ۲ توجه کنید که $f(\frac{\pi}{4}) = 1 + ab$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (\sin 2x - a) = \sin \frac{\pi}{2} - a = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} (-2 - \sin 2x) = -2 - \sin \frac{\pi}{2} = -3$$

برای اینکه تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، باید $-3 = 1 - a = 1 + ab$ در

نتیجه $a = 4$ و $a + ab = 1 + 4b = -3$ ، بنابراین $b = -1$ پس $a + b = 3$.

۷۳۲- گزینه ۴ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 3} |x-3| = 0$ و چون مقادیر $|x-3|$

در یک همسایگی محذوف ۳ مثبت‌اند، پس $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{|x-3|} = +\infty$

۷۳۳- گزینه ۳ اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه $x \rightarrow (-1)^+$ و در نتیجه

$$[-x] = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[-x]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$$

۷۳۴- گزینه ۳ توجه کنید که مخرج کسر تابع f سه ریشه دارد:

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$$

این اعداد ریشه‌های صورت کسر تابع نیستند. از طرف دیگر، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ پس تابع f در نقطه $x = 0$ حد چپ نامتناهی دارد.

همین‌طور در نقطه‌های $x = -2$ و $x = 2$ حد چپ تابع نامتناهی است.

۷۳۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x-1)}$$

از طرف دیگر، $\lim_{x \rightarrow 0^-} x(x-1) = 0$ و اگر $x \rightarrow 0^-$ ، مقادیر $x(x-1)$ مثبت

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x-1)} = +\infty$$

۷۳۶- گزینه ۴ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin x = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0$

اگر $x \rightarrow \pi^+$ ، مقادیر $\sin x$ منفی‌اند و اگر $x \rightarrow \pi^-$ ، مقادیر $\sin x$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = -\infty$$

۷۳۷- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow \pi^+$ ، آن‌گاه $\cos x \rightarrow (-1)^+$ بنابرین

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\cos x]}{\cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-1}{\cos \frac{x}{2}} = +\infty$$

۷۳۸- گزینه ۲ حد مخرج $f(x)$ در $x = 2$ و $x = -3$ باید برابر صفر

باشد، یعنی $x = 2$ و $x = -3$ جواب‌های معادله $ax^2 + bx + 2 = 0$ هستند. با توجه به مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها معلوم می‌شود:

$$\begin{cases} 2 \times (-3) = \frac{2}{a} \\ 2 + (-3) = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

بنابرین $a = -\frac{1}{3}$ و $b = -\frac{1}{3}$ پس

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1+1}{-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$$

۷۳۹- گزینه ۴ چون حد مخرج وقتی $x \rightarrow 2$ صفر است و حد مورد نظر

وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید.

بنابرین $x = 2$ یکی از عامل‌های صورت است و صورت را می‌توان این‌طور نوشت $2x^2 + mx + n = (x-2)(2x+k)$ به این ترتیب، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+k)}{(x-2)(x+2)} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{2 \times 2 + k}{2+2} = \frac{5}{2} \Rightarrow k = 6$$

اکنون می‌توان نوشت $2x^2 + mx + n = (x-2)(2x+6) = 2x^2 + 2x - 12$ پس $m = 2$ و $n = -12$ و در نتیجه $m - n = 14$

۷۲۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (3x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (ax-b)$$

$$-3 = -a - b \quad (1)$$

همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-b) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1)$$

$$2a - b = 3 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $a = 2$ و $b = 1$ پس $\frac{a}{b} = 2$

۷۲۶- گزینه ۳ مخرج نباید هیچ‌جا صفر شود، در نتیجه باید دلتای

معادله $x^2 - 6x + m + 1 = 0$ منفی باشد:

$$\Delta = 36 - 4(m+1) < 0 \Rightarrow m > 8$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۷۲۷- گزینه ۱ مجموعه نقطه‌های ناپیوستگی تابع f مقدارهایی از x

است که مخرج، یعنی $x^2 - ax + b$ ، به ازای آن‌ها صفر است. بنابرین -3 و 4 ریشه‌های مخرج هستند. به این ترتیب

$$a = 3 - 4 = -1$$

$$b = 4 - (-3) = -12$$

بنابرین $a + b = -11$

۷۲۸- گزینه ۲ این تابع در تمام نقاطی که $2x + \frac{1}{y}$ مقداری صحیح

داشته باشد، ناپیوسته است:

$$2x + \frac{1}{y} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x = k - \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{2ky - 1}{2y}$$

پس در تمام نقاطی که به‌صورت $\frac{2ky-1}{2}$ باشند و k عددی صحیح باشد، این

تابع ناپیوسته است. برای اینکه معلوم شود در بازه $(-1, 2)$ چند نقطه به این صورت است، کافی است نامعادله $-1 < x < 2$ را حل کنیم:

$$-1 < \frac{2ky-1}{2} < 2 \Rightarrow -4 < 2ky-1 < 4 \Rightarrow -\frac{3}{2} < k < \frac{9}{2}$$

$$k \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

بنابرین تابع f در شش نقطه از بازه $(-1, 2)$ ناپیوسته است که این نقاط

به‌صورت زیر هستند:

k	-1	0	1	2	3	4
x	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$

۷۲۹- گزینه ۳ باید $x^2 + kx + 4 \geq 0$ در نتیجه $\Delta \leq 0$ ، یعنی

$$k^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq k \leq 4$$

بنابرین اگر k یکی از عددهای صحیح زیر باشد، تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

۷۳۰- گزینه ۲ باید

$$7 - |x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-2| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x-2 \leq 7 \Rightarrow -5 \leq x \leq 9$$

بنابرین تابع f روی بازه $[-5, 9]$ پیوسته است.

۷۳۱- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 0$ و در یک همسایگی

چپ نقطه -2 مقادیر تابع f منفی هستند. بنابرین $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f}{f(x)} = -\infty$

بنابراین علامت عبارت $2x - \sqrt{x+3}$ را می‌توانیم با عددگذاری مشخص کنیم. مثلاً اگر $x=2$ ، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $4 - \sqrt{5}$ است که عددی مثبت است و اگر $x=0$ ، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $-\sqrt{3}$ است که عددی منفی است.

x	-3	1	$+\infty$
$2x - \sqrt{x+3}$	$-$	0	$+$

در یک همسایگی چپ $x=1$ مقدار عبارت منفی است، پس $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

در یک همسایگی راست $x=1$ مقدار عبارت مثبت است، پس $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

۷۴۸-گزینه ۳ چون $\lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1$ ، پس باید $ax^2 + 6x + b$ در

$x=2$ برابر صفر شود و مقدار این عبارت در دو طرف $x=2$ عددی منفی باشد. بنابراین باید $x=2$ ریشه مضاعف معادله $ax^2 + 6x + b = 0$ باشد، یعنی این عبارت باید به صورت $a(x-2)^2$ باشد. چون $a < 0$ ، پس

$$ax^2 - 4ax + 4a = ax^2 + 6x + b, \quad -4a = 6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, \quad b = 4a = -6$$

پس $ab = 9$.

۷۴۹-گزینه ۳ چون حد مخرج وقتی $x \rightarrow 1$ برابر صفر است و حد

مورد نظر وجود دارد، باید حد صورت هم صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$

دریابد. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+b}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2+a} = \sqrt{1+b} \Rightarrow b = a+1$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج مقدار حد را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+a+1}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+a+1}}{x-1} \times \frac{\sqrt{2x+a} + \sqrt{x+a+1}}{\sqrt{2x+a} + \sqrt{x+a+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+a-x-a-1}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{2x+a} + \sqrt{x+a+1}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{a+2}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\sqrt{a+2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sqrt{a+2} = 3 \Rightarrow a = 7$$

پس $b = 8$ و در نتیجه $ab = 56$.

۷۵۰-گزینه ۴ ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}, \quad x \neq 2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به صورت مقابل است:

۷۵۱-گزینه ۲ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2) = 0$ و مقادیر $f(x) - 2$

در یک همسایگی محذوف نقطه صفر منفی هستند. زیرا در این همسایگی مقادیر

$$f(x) \text{ کمتر از } 2 \text{ هستند. بنابراین } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 2} = -\infty$$

۷۴۰-گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4-3}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0-3}{x-1} = +\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به صورت زیر است:



۷۴۱-گزینه ۳ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$ و مقادیر f در یک

همسایگی چپ نقطه ۴، منفی هستند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-2}{f(x)} = +\infty$ بقیه

گزینه‌ها نادرست هستند.

۷۴۲-گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (2x+1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2+x) = 0$$

از طرف دیگر، وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ ، مقادیر x^2+x منفی هستند

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x+1}{x^2+x} = +\infty \text{ پس } (x^2+x = \frac{x}{x+1}) \text{ مثبت منفی}$$

۷۴۳-گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه $[x] = 2$ و $f(x) = \frac{2}{x-2}$ در

نتیجه $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ اگر $x \rightarrow 2^-$ ، آن‌گاه $[x] = 1$ و $f(x) = \frac{-1}{x-2}$

و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$.

۷۴۴-گزینه ۱ در ریشه‌های مخرج ممکن است تابع حد چپ نامتناهی

داشته باشد. ریشه‌های مخرج $x=1$ و $x=2$ هستند. از طرف دیگر،

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2}{x-2}, \quad x \neq 1$$

پس $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$ بنابراین تابع فقط در $x=2$ حد

چپ نامتناهی دارد.

۷۴۵-گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \neq 1$ ، آن‌گاه

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{-2x^2 + 4x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{-2(x-1)^2} = \frac{x-2}{-2(x-1)}$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{-2x^2 + 4x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{-2(x-1)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

۷۴۶-گزینه ۲ اگر $x \rightarrow (\frac{1}{3})^+$ ، آن‌گاه

$$\pi x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+ \Rightarrow \cos(\pi x) \rightarrow (\frac{1}{2})^-$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3})^+} \frac{3x+1}{2 \cos(\pi x) - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

۷۴۷-گزینه ۳ باید علامت عبارت $2x - \sqrt{x+3}$ را در اطراف نقطه

$x=1$ مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که $x=1$ تنها جواب معادله

$$2x - \sqrt{x+3} = 0 \text{ است.}$$

$$2x = \sqrt{x+3} \Rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -\frac{3}{4} \text{ (غ.ق.)}$$

۷۵۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 2x^2) = 0$$

از طرف دیگر، چون $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، مقادیر

$$x^3 - 2x^2 \text{ منفی هستند. پس } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^3 - 2x^2} = +\infty$$

۷۵۳- گزینه ۴ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 5^-} ([x]^2 - 25) = 16 - 25 = -9$ و

$\lim_{x \rightarrow 5^+} (x-5) = 0$ و مقادیر $x-5$ در یک همسایگی چپ ۵ منفی اند.

$$\text{بنابراین } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{[x]^2 - 25}{x-5} = +\infty$$

۷۵۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اعداد صحیح، ریشهٔ مخرج کسر

ضابطهٔ تابع f هستند:

$$x - [x] = 0 \Rightarrow x = [x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

اکنون دقت کنید که از اعداد صحیح فقط $x=0$ و $x=1$ ریشهٔ صورت $f(x)$

هستند. حد چپ و حد راست تابع در این نقاط را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$$

بنابراین تابع در نقطه های $x=0$ و $x=1$ حد چپ متناهی و حد راست متناهی

دارد. در بقیهٔ اعداد صحیح حد صورت کسر صفر نیست، درحالی که حد راست

مخرج کسر صفر است، پس تابع f در این نقاط حد راست نامتناهی دارد.

۷۵۵- گزینه ۲ فرض می کنیم $\sqrt{x} = t$. در این صورت اگر $x \rightarrow 0^+$

آن گاه $t \rightarrow 0^+$ و

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 - t^{\frac{2}{3}}}{t^2 - t^{\frac{2}{3}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t-1}{t(t^{\frac{2}{3}}-1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t(t^{\frac{2}{3}}+t+1)} = +\infty \end{aligned}$$

۷۵۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1}{2 \sin x \cos x - 2 \sin x} = \frac{1}{2 \sin x (\cos x - 1)}$$

عبارت $\cos x - 1$ همواره نامثبت است. یعنی $\cos x - 1 \leq 0$. از طرف دیگر اگر

$x \rightarrow 0^-$ ، آن گاه $\sin x \rightarrow 0^-$ و اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن گاه $\sin x \rightarrow 0^+$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2 \sin x (\cos x - 1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \sin x (\cos x - 1)} = -\infty$$

۷۵۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$$

$$= (x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x-2)$$

بنابراین در هر دو حالت $x \rightarrow 1^+$ و $x \rightarrow 1^-$:

$$(x-1)^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow (x-1)^2(x-2) \rightarrow 0^-$$

پس $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

۷۵۸- گزینه ۱ در یک همسایگی راست $x=2$ تساوی $[x]=2$ برقرار

$$\text{است. پس } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2[x]+k}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6+k}{x-2} = +\infty$$

چون $(x-2) \rightarrow 0^+$ ، پس $6+k > 0$ و در نتیجه $k > -6$.

در یک همسایگی چپ $x=2$ تساوی $[x]=1$ برقرار است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[x]+k}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2+k}{x-2} = +\infty$$

چون $(x-2) \rightarrow 0^-$ ، پس $2+k < 0$ و در نتیجه $k < -2$ ، بنابراین $-6 < k < -2$.

۷۵۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (x) = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (\sin x - \cos x) = 0$$

از طرف دیگر، وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-$ مقادیر $\sin x$ از مقادیر $\cos x$

کوچک ترند، پس مقادیر $\sin x - \cos x$ منفی اند. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{x}{\sin x - \cos x} = -\infty$$

۷۶۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \frac{f}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \frac{f}{0^-} = -\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=-2$ به صورت مقابل است.

۷۶۱- گزینه ۳ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۲ است.

۷۶۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -2$$

۷۶۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \frac{1}{x} + x^2}{2x - \frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2(x-1) + x - 1 + x^3}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{2x^3 - 2x^2 - x + 1} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$f(x) > 1$ پس در $+\infty$ نمودار تابع f پایین‌تر از خط $y=1$ قرار دارد و در $-\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط $y=1$ قرار دارد.



گزینه ۳ - ۷۷۱ فرض می‌کنیم $t=1-x$. در این صورت اگر $x \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(1-x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -2$$

گزینه ۲ - ۷۷۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. از طرف دیگر

اگر $x \rightarrow +\infty$, آن‌گاه $f(x) > 2$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty$$

گزینه ۲ - ۷۷۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. همچنین اگر $x \rightarrow +\infty$, آن‌گاه $f(x) > 1$ و

$[f(x)] = 1$ و اگر $x \rightarrow -\infty$, آن‌گاه $f(x) < -2$ و $[f(x)] = -3$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -3 - 1 = -4$$

گزینه ۲ - ۷۷۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow +\infty$, آن‌گاه $\frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left[\frac{1}{x}\right]\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

در واقع در $+\infty$ تابع $f(x) = x \left[\frac{1}{x}\right]$ و تابع $g(x) = 0$ مساوی‌اند و حد آن‌ها برابر صفر است.

گزینه ۳ - ۷۷۵ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow -\infty$, مقادیر $2x$ و x

همگی منفی‌اند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x| + |x|}{|3x - 1| - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - x}{1 - 3x - (-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{-x + 1} = 3$$

گزینه ۴ - ۷۷۶ توجه کنید که اگر $n=1$, آن‌گاه مقدار حد برابر صفر است که وجود دارد. اگر $n > 1$, آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{n-1} - 2x}{x^4 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^{n-1-4})}{1} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-5}$$

برای اینکه این حد وجود نداشته باشد، باید $n-5 \geq 1$, یعنی $n \geq 6$. بنابراین کوچک‌ترین عددی که ویژگی مورد نظر را دارد، ۶ است.

گزینه ۳ - ۷۷۷ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|mx| - 2x + 1}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|m||x| - 2x}{|x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-|m| - 2)x}{-x} = |m| + 2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$|m| + 2 = 6 \Rightarrow |m| = 4 \Rightarrow m = \pm 4$$

به این ترتیب، عددهای ۴ و -۴ ویژگی مورد نظر را دارند و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱۶ است.

گزینه ۴ - ۷۶۴ ابتدا توجه کنید که وقتی $x \rightarrow -\infty$, مقادیر $1-3x$ مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |1-3x|}{\Delta x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (1-3x)}{\Delta x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\Delta x - 1}{\Delta x - 3} = 1$$

گزینه ۲ - ۷۶۵ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x-2)^4 (4x^2+1)^2}{(6x^4-2x^3+1)^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3^4 x^4 + \dots)(4^2 x^4 + \dots)}{6^2 x^8 + \dots} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^4 \times 4^2 x^8 + \dots}{6^2 x^8 + \dots} = \frac{3^4 \times 4^2}{6^2} = 36 \end{aligned}$$

گزینه ۱ - ۷۶۶ توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $3n+4$ و

$2n+6$ از ۱ بیشترند، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3n+4} + x + 1}{x^{2n+6} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3n+4-(2n+6)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-2}$$

اگر این حد صفر باشد، باید $n-2 < 0$, یعنی $n < 2$. بنابراین فقط $n=1$ ویژگی مورد نظر را دارد.

گزینه ۲ - ۷۶۷ اگر m عددی مثبت باشد، وقتی $x \rightarrow +\infty$, مقادیر $1-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(mx-1)+2x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+2)x-2}{3x+1} = \frac{m+2}{3}$$

بنابراین $\frac{m+2}{3} = 3$, پس $m=7$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی

$x \rightarrow +\infty$, مقادیر $1-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-mx)+2x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-m)x}{3x+1} = \frac{2-m}{3}$$

بنابراین $\frac{2-m}{3} = 3$, پس $m=-7$. اگر $m=0$, حد مورد نظر برابر $\frac{2}{3}$

می‌شود که درست نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۷ و -۷ هستند و حاصل ضرب آن‌ها -۴۹ است.

گزینه ۴ - ۷۶۸ چون حد مورد نظر برابر $-\infty$ شده است، پس باید

درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشد و ضریب بزرگ‌ترین جمله در صورت باید منفی باشد. برای اینکه درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشد، باید $a=5$, یعنی $5-a=0$. توجه کنید که اگر $a=5$, بزرگ‌ترین جملهٔ صورت $-x^2$ می‌شود، بنابراین حد مورد نظر برابر $-\infty$ است.

گزینه ۳ - ۷۶۹ چون درجهٔ مخرج کسر داده شده برابر ۲ است، اگر در صورت

این کسر جملهٔ شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، یعنی $a=3$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b+2)x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 1} = \frac{b+2}{3}$$

بنابراین $\frac{b+2}{3} = 5$, پس $b=13$. به این ترتیب $a+b=16$.

گزینه ۴ - ۷۷۰ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

از طرف دیگر $f(x) = \frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}$. اگر $x \rightarrow +\infty$, آن‌گاه

$$\frac{4}{x+3} \rightarrow 0^+, \quad \text{پس } f(x) < 1. \quad \text{اگر } x \rightarrow -\infty, \text{ آن‌گاه } \frac{4}{x+3} \rightarrow 0^-, \text{ پس}$$

گزینه ۷۸۴-۴ توجه کنید که جمله دارای بزرگترین توان در صورت کسر برابر $3x^2 - (3x^2)^3 = -23x^6$ است و جمله دارای بزرگترین توان در مخرج کسر برابر $9x^6 = (3x^2)^2$ است. پس حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-23x^6}{9x^6} = -\frac{23}{9}$

گزینه ۷۸۵-۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر $3x^2 - 1$ و $2x^2 - 3$ مثبت اند، پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x^2 - 1| - |2x^2 - 3|}{|5x^2 - x| - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 1 - 2x^2 + 3}{5x^2 - x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۷۸۶-۴ توجه کنید که باید $m \neq 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^5 (mx+2)^7}{(2mx-1)^6 (6x-1)^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3^5 x^5 + \dots)(m^7 x^7 + \dots)}{(2^6 m^6 x^6 - \dots)(6^8 x^8 - \dots)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^5 m^7 x^{12} + \dots}{2^6 \times 6^8 m^6 x^{12} + \dots} = \frac{3^5 m^7}{2^6 \times 6^8 m^6} = \frac{m^3}{2^{12} \times 3^3}$$

بنابراین $\frac{m^3}{2^{12} \times 3^3} = -1$ ، پس $m = -48$

گزینه ۷۸۷-۲ توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $3n+2$ و $2n+5$ از ۲ بیشتر هستند، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3n+2} + x^2 + 1}{x^{2n+5} - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3n+2-(2n+5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-3}$$

اگر این حد صفر باشد، باید $n-3 < 0$ ، یعنی $n < 3$ ، بنابراین فقط $n=1$ و $n=2$ ویژگی مورد نظر را دارند.

گزینه ۷۸۸-۲ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $2a-1=0$ ، پس $a=\frac{1}{2}$ به

این ترتیب حد مسئله می شود $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-1}{3x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = 1$

نتیجه $a+b=\frac{3}{2}$ و $b=1$

گزینه ۷۸۹-۳ اگر $n > 3$ ، آن گاه $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^n} = 1$ ، اگر $n=3$ ،

آن گاه $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x^3 - 1}{x^3 - 2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{-x^3} = -5$ ، اگر $n < 3$ ،

آن گاه $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{-2x^3} = -2$ ، پس سه مقدار مختلف برای L وجود دارد.

گزینه ۷۹۰-۴ توجه کنید که اگر $f(x) = ax+b$ ، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$$

بنابراین $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{4}$ ، چون a منفی است، پس $a = -\frac{1}{2}$ ، به این ترتیب

بنابراین $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{4}$ ، چون a منفی است، پس $a = -\frac{1}{2}$ ، به این ترتیب $b = \frac{15}{4}$

بنابراین $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$ ، پس $f(-1) = 4$

گزینه ۷۷۸-۲ اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل x^2 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می شود. بنابراین ضریب x^2 باید صفر باشد، یعنی $a+1=0$ ، پس $a=-1$. در این صورت، حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x+4}{(b-2)x-1} = \frac{-5}{b-2}$ ، بنابراین $\frac{-5}{b-2} = \frac{1}{2}$ ، در نتیجه $b=-8$ ، به این ترتیب، $ab=8$

گزینه ۷۷۹-۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $2a-1=0$ ، پس $a=\frac{1}{2}$ ، به این ترتیب حد مسئله می شود $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-1}{2x^2+x+1} = \frac{4}{2} = 2$

در نتیجه $a+b=\frac{5}{2}$ و $b=2$

گزینه ۷۸۰-۲ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ همچنین اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن گاه $f(x) > 0$ و اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن گاه $f(x) < 0$ ، بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ بالای خط $y=0$ و در $-\infty$ پایین خط $y=0$ قرار دارد.

گزینه ۷۸۱-۴ **گزینه ۱۱** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-f(x)) = 0$

و اگر $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر $1-f(x)$ مثبت اند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1-f(x)} = +\infty$

گزینه (۲) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

گزینه (۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+2)f(x)) = -\infty$

گزینه (۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-f(x)) = 0$

و اگر $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $1-f(x)$ منفی اند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{1-f(x)} = +\infty$

پس گزینه (۴) درست نیست.

گزینه ۷۸۲-۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن گاه $f(x) < -2$ ، بنابراین $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-2)^-} f(t) = -\infty$

از طرف دیگر اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن گاه $f(x) > 2$ ، بنابراین $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$

گزینه ۷۸۳-۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن گاه $-\frac{1}{x} \rightarrow 0^-$

و در نتیجه $[-\frac{1}{x}] = -1$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[-\frac{1}{x}] - 1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

اگر $a = -2$ ، حد مورد نظر می‌شود

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 4}{(x-2)} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2 + x - 2} + 2} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)} \times \frac{1}{16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = \frac{5}{16} \\&\text{در نتیجه } b = \frac{5}{16}.\end{aligned}$$

راه‌حل دوم چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حدصورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 + x + a - 2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 2 + a - 2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

اکنون برای به‌دست آوردن مقدار حد می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 2}} = \frac{5}{4} = \frac{5}{16}$$

۷۹۷- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ ، بنابراین تابع f فقط در نقطه $x=1$ ممکن است ناپیوسته باشد. در این نقطه حد چپ، حد راست و مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{2x^2+1} = \frac{4}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

بنابراین تابع f در $x=1$ پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.**۷۹۸- گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)] = 3. \text{ از طرف دیگر اگر } x \rightarrow -\infty, \text{ آن‌گاه } f(x) < 3$$

بنابراین $[f(x)] = 2$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 - 2 \times 3 = -4$$

۷۹۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned}2x^2 - 5 &= 2(x^2 - 2.5) = 2(x-5)(x+5) \\ x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)(x-5)(x+5)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(x-5)(x+5)}{x(x-5)^2} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(x+5)}{x(x-5)} = -\infty$$

۸۰۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(2x) - 1 = 2(2x)^2 - 2x - 1 = 4x^2 - 2x - 1$$

$$f(x) + 3x^2 - 1 = 3x^2 - x + 3x^2 - 1 = 6x^2 - x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{6x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{6x^2} = \frac{2}{3}$$

۷۹۱- گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه $f(x) \rightarrow (-1)^-$ و در نتیجه

$$f(f(x)) \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [(f \circ f)(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(f(x))] = \lim_{t \rightarrow 2^-} [t] = 1$$

۷۹۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) - c, \quad f(3x) = 9ax^2 + 3bx - c$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = a(0+1)^2 + b(0+1) - c = a + b - c$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(3x) = 9a \times 1^2 + 3b \times 1 - c = 9a + 3b - c$$

بنابراین از شرط مسئله نتیجه می‌شود $a + b - c = 9a + 3b - c$ ، یعنی

$$8a = -2b, \text{ پس } \frac{a}{b} = -\frac{1}{4}$$

۷۹۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 3^-$ ، آن‌گاه

$$-x \rightarrow (-3)^+, \text{ و در نتیجه } [x] = 2 \text{ و } [-x] = -3. \text{ پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{[x]} - \frac{[-x]}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{-3}{x} \right) = \frac{9}{2} + \frac{3}{3} = \frac{11}{2} = 5.5$$

۷۹۴- گزینه ۳ حد چپ و حد راست تابع در $x=1$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 - 1} \\&= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4) = -3\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a}{x - 2} = -a$$

چون حد تابع در $x=1$ وجود دارد، پس حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابرند:

$$-a = -3 \Rightarrow a = 3$$

۷۹۵- گزینه ۳ چون حد صورت کسر وقتی $x \rightarrow 3$ صفر است، باید حد

مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax + 3) = 9 + 3a + 3 = 12 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax - 3a}{x^2 + ax + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4x + 12}{x^2 - 4x + 3} \\&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4}{x-1} = -2\end{aligned}$$

بنابراین $a + b = -6$.**۷۹۶- گزینه ۴** **راه‌حل اول** چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجوددارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید.

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 + x + a - 2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 2 + a - 2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

۸۰۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=ab-1, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (a \sin x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\cos 2x + b) = -1 + b$$

بنابراین $\begin{cases} ab-1=a \\ a=b-1 \end{cases}$ برای اینکه تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد باید

$$ab-1=a \xrightarrow{b=a+1} a(a+1)-1=a$$

$$a^2+a-1=a \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

اگر $a=1$ ، آن گاه $b=2$ و $a+b=3$.

اگر $a=-1$ ، آن گاه $b=0$ و $a+b=-1$.

۸۰۵- گزینه ۴ توجه کنید که $(f+2g)-(f-g)=3g$ ، پس تابع g

در نقطه $x=a$ پیوسته است. به این ترتیب چون $(f-g)+g=f$ ، پس تابع f هم در نقطه $x=a$ پیوسته است. چون برد تابع‌های f و g مجموعه اعداد

حقیقی مثبت است، پس مخرج کسره‌های $\frac{1}{f}$ ، $\frac{1}{g}$ و $\frac{1}{f+g}$ هیچ گاه صفر

نمی‌شود و دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی است و چون f و g در $x=a$

پیوسته‌اند، این توابع هم در $x=a$ پیوسته‌اند. ولی دامنه تابع $\frac{1}{f-g}$ ممکن

است $\mathbb{R}$ نباشد و این تابع ممکن است در $x=a$ تعریف نشود. (کافی است

$(f(a)=g(a))$ ، پس تابع $\frac{1}{f-g}$ ممکن است در $x=a$ پیوسته نباشد.

۸۰۶- گزینه ۴ ابتدا حد تابع در $x=0$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt[3]{x+27}-3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x+27}=t$ ، پس $x+27=t^3$ ، در نتیجه $x=t^3-27$

همچنین اگر $x \rightarrow 0$ ، آن گاه $t \rightarrow 3$. بنابراین حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{t^3-27} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{(t-3)(t^2+3t+9)} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{1}{t^2+3t+9} = \frac{1}{27}$$

در نتیجه $a=27$.

۸۰۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$$

همچنین مقادیر $f(x)$ در مثبت بی‌نهایت بزرگ‌تر از یک هستند. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1-(f \circ f)(x)} = -\infty \text{، در نتیجه } (f \circ f)(x) \rightarrow 1^+$$

۸۰۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به صورت مقابل است.

۸۰۱- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}\right)^+$ ، آن گاه $\sin x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}\right)^+} [\sqrt{2} \sin x] = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} [t] = -2 \text{ پس } \sqrt{2} \sin x \rightarrow (-1)^-$$

۸۰۲- گزینه ۴ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{x^2-25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25} - \frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25} \end{aligned}$$

اکنون از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25} \times \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25} \times \frac{\sqrt{x-4}+1}{\sqrt{x-4}+1} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+4-9}{(x-5)(x+5)} \times \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-4-1}{(x-5)(x+5)} \times \frac{1}{\sqrt{x-4}+1} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x+4}+3)(x+5)} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x-4}+1)(x+5)} = \frac{1}{60} - \frac{1}{20} = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2x} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{10} = -\frac{1}{30}$$

۸۰۳- گزینه ۳ راه حل اول فرض می‌کنیم $\sqrt{x}=t$. در این صورت وقتی $x \rightarrow 8$ ، $t \rightarrow 2$. بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt{t^2+1}-t-1}{t^2-8} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{t^2+1}-(t+1)}{t^2-8} \times \frac{\sqrt{t^2+1}+(t+1)}{\sqrt{t^2+1}+(t+1)} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t^2+1-t^2-2t-1}{t^2-8} \times \frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t+1} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t(t-2)(t+1)}{(t-2)(t^2+2t+4)} \times \frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t+1} \right) = \frac{2 \times (2+1)}{4+4+4} \times \frac{1}{3+2+1} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

راه حل دوم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8} &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} - \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} \times \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x+1-9}{x-8} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x-8}{x-8} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} - \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} \\ &= \frac{1}{3+3} - \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

راه حل سوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1} = \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

۸۱۲- گزینه ۱ چون حد مخرج کسر صفر است و حد مورد نظر وجود

دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{ax+b}-2) = 0 \Rightarrow \sqrt{a+b}=2 \Rightarrow a+b=4 \Rightarrow b=4-a$$

اکنون با استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax-a}{(x-1)(x+1)} \times \frac{1}{2+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{x+1} \times \frac{1}{4} = \frac{a}{4} \end{aligned}$$

بنابراین $\frac{a}{4} = \frac{3}{2}$ و در نتیجه $a=12$ ، پس $b=-8$. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۸۱۳- گزینه ۳ چون $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$ بنابراین باید مخرج

کسر به صفر میل کند. همچنین چون حد چپ و راست برابر $-\infty$ است، پس $x=3$ باید ریشه مضاعف مخرج کسر باشد. بنابراین

$$2x^2+ax+b=2(x-3)^2 \Rightarrow 2x^2+ax+b=2x^2-12x+18$$

$$a=-12, b=18 \Rightarrow a+b=6$$

ریاضی - ۹۳

۸۱۴- گزینه ۱ باید تعداد نقاطی را پیدا کنیم که به‌ازای آن‌ها

$$\left(\frac{1}{3}x-1\right) \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < 9 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3}x < 3 \Rightarrow -1 < \frac{1}{3}x - 1 < 2$$

$$\frac{(\frac{1}{3}x-1) \in \mathbb{Z}}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{3}x-1\right) \in \{0, 1\}$$

ولی در نقطه $x=3$ که به‌ازای آن $\frac{1}{3}x-1=0$ ، عامل صفر کننده $x-3$

موجب پیوستگی می‌شود. پس تابع f فقط در یک نقطه از بازه $(0, 9)$ ناپیوسته است. ریاضی - ۸۵

۸۱۵- گزینه ۲ برای آنکه تابع روی دامنه‌اش پیوسته باشد، باید در

$x=a$ پیوسته باشد. پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a} - 1 = \frac{a}{4} \Rightarrow 4 = 4a - a^2 \\ a^2 - 4a + 4 &= 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a=2 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۸۱۶- گزینه ۳ حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=2$ باید برابر

مقدار تابع در این نقطه باشند، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + bx - 1) = 5 \Rightarrow 4 + 2b - 1 = 5 \Rightarrow b=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$$

چون $b=1$ ، در نتیجه $2a+1=5$ ، یعنی $a=2$.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۸۰۹- گزینه ۲ اگر m عددی مثبت باشد، وقتی که $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر

$3-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(mx-3)+x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)x-4}{3x+1} = \frac{m+1}{3}$$

بنابراین $\frac{m+1}{3} = \frac{2}{3}$ ، پس $m=1$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی که

$x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $3-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-mx)+x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-m)x+2}{3x+1} = \frac{1-m}{3}$$

بنابراین $\frac{1-m}{3} = \frac{2}{3}$ ، پس $m=-1$. اگر $m=0$ ، حد مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$

می‌شود و قابل قبول نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۱ و -1 هستند. پس m دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۸۱۰- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $f(x)=ax+b$ ، آن‌گاه

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}} = \frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2$$

بنابراین $a^2=9$ ، و چون شیب خط مثبت است، بنابراین a مثبت است، پس $a=3$. به این ترتیب $f(x)=3x+b$ و

$$f(3)=10 \Rightarrow 9+b=10 \Rightarrow b=1$$

بنابراین $f(x)=3x+1$ ، پس $f(1)=4$.

۸۱۱- گزینه ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=\pi$ را پیدا

می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x \rightarrow \pi^-$ ، آن‌گاه $\frac{x}{2} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ ، بنابراین

$$\cos \frac{x}{2} \rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)^- = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow \pi^-} [\cos \frac{x}{2}] = 0^+ \text{ و } 2x \rightarrow (2\pi)^-$$

$$\sin 2x \rightarrow \sin (2\pi)^- = 0^- \text{ پس } \lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin 2x] = -1 \text{ در نتیجه}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sin \frac{x}{2} \times 0 - \cos x \times (-1)) = \cos \pi = -1$$

از طرف دیگر، اگر $x \rightarrow \pi^+$ ، آن‌گاه $\frac{x}{2} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ ، بنابراین $\cos \frac{x}{2} \rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)^+ = 0^-$ و

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\cos \frac{x}{2}] = -1 \text{ و } 2x \rightarrow (2\pi)^+ \text{ بنابرین } \sin 2x \rightarrow \sin (2\pi)^+ = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin 2x] = 0^+$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\sin \frac{x}{2} \times (-1) - \cos x \times 0) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

پس $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -1$

۸۲۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2||x+1|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \\&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{|x-2||x+1|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2||x+1|(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x^2 - 4)} \\&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x-2)(x+2)} \\&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x+2)} = \frac{-(3) \times 8}{3 \times 4} = -2\end{aligned}$$

ریاضی - ۹۰

۸۲۳- گزینه ۴ از فرض سؤال نتیجه می‌شود $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x^2|}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1$

پس $a = -1$. برای محاسبه حد راست عبارت در $x = -2$ دقت کنید که به ازای $-2 < x < 2$ ، عبارت $x^2 - 4$ منفی است، بنابراین باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4 - x^2}{-x^2 - x + 2} &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(-x+1)} \\&= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2-x}{-x+1} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۸۲۴- گزینه ۱ وقتی $x \rightarrow (\frac{1}{6})^+$ ، $\cos \pi x$ با مقادیرهای کوچک‌تر از

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نزدیک می‌شود، پس

$$\cos \pi x \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^- \Rightarrow 4 \cos^2 \pi x \rightarrow 3^- \Rightarrow [4 \cos^2 \pi x] = 2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} \frac{[4 \cos^2 \pi x] - 12x}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} \frac{2 - 12x}{ax + b} = \frac{1}{2}$$

چون حد صورت برابر صفر است، حد مخرج کسر نیز باید صفر شود تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید، زیرا در غیر این صورت حاصل حد برابر صفر می‌شود.

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} (ax + b) = 0 \Rightarrow \frac{a}{6} + b = 0 \Rightarrow a = -6b$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} \frac{2 - 12x}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} \frac{2 - 12x}{-6bx + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} \frac{2(1 - 6x)}{b(1 - 6x)} = \frac{2}{b}$$

بنابراین $\frac{2}{b} = \frac{1}{2}$ ، یعنی $b = 4$. چون $a = -6b$ ، پس $a = -24$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

در نتیجه $a + b = -20$.

۸۱۷- گزینه ۲ برای برقراری شرط پیوستگی تابع روی $\mathbb{R}$ ، پیوستگی آن

در نقاط $x = \pm 1$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1 \times [1^-] = 0 \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= (-1) \times [(-1)^+] = 1\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

بنابراین $a = -\frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$. در نتیجه به ازای $|x| \geq 1$ ، $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

ریاضی - ۹۰

۸۱۸- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $[x] + [-x] = -1$.

بنابراین تابع به صورت $f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ است و به ازای $a = -1$

ریاضی - ۹۶

روی مجموعه عددهای حقیقی پیوسته است.

۸۱۹- گزینه ۲ در نقطه $x = -1$ ، باید حد چپ و حد راست تابع با هم

برابر باشند:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{\frac{2\sqrt{3-x}}{1} - 1} = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= -a + 1\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{4} = -a + 1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۸۲۰- گزینه ۴ در نقطه $x = 0$ ، باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1-x}) = 2\end{aligned}$$

بنابراین اگر $f(0) = a = 2$ ، تابع در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

۸۲۱- گزینه ۲ چون حد مورد نظر برابر عددی غیر صفر و حد صورت

برابر صفر است، باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax + b) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، حد مورد نظر می‌شود

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax - 2a} \times \frac{x + \sqrt{3x-2}}{x + \sqrt{3x-2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{a(x-2)(x + \sqrt{3x-2})} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{a(x-2)(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{a(2+2)} = \frac{1}{4a}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

چون $b = -2a$ ، پس $b = -1$.

۸۲۵- گزینه ۴

ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=3$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax - 3a - \frac{3}{a}) = 3a - 3a - \frac{3}{a} = -\frac{3}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} \times \frac{1 + \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{1 + \sqrt{x - \sqrt{x+1}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - x + \sqrt{x+1}}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{1 + \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1 - x + \sqrt{x+1}}{x - 3} \times \frac{1 - x - \sqrt{x+1}}{1 - x - \sqrt{x+1}} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1-x)^2 - (x+1)}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{1 - x - \sqrt{x+1}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x(x-3)}{x - 3} \times \frac{1}{-4} \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{-4} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

از طرف دیگر $f(3) = -\frac{3}{a}$. بنابراین تابع به‌ازای هر مقدار a در نقطه $x=3$ پیوسته است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۸۲۶- گزینه ۴

برای اینکه تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1} \times \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{2}(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(1-x)^2}} = -\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطه $x=1$ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۸۲۷- گزینه ۳

ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - a = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} \times \frac{1 - \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{1 - \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1+1-x)}{x(x-2)(1 - \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} = \frac{-a}{6}$$

برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=2$ برابر باشند، بنابراین

$$\frac{-a}{6} = 2 - a \Rightarrow 12 - 6a = -a \Rightarrow 12 = 5a \Rightarrow a = \frac{12}{5}$$

ریاضی - ۹۴

۸۲۸- گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

پیوستگی تابع در نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ را بررسی می‌کنیم تا گزینه درست مشخص شود:

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$$

$$f(1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) = -1$$

پس تابع در $x=0$ پیوسته و در $x=1$ ناپیوسته است. به همین ترتیب این تابع در تمام نقطه‌های زوج پیوسته و در تمام نقطه‌های فرد ناپیوسته است.

ریاضی - ۹۳

۸۲۹- گزینه ۳

نشان می‌دهیم تابع $g \circ f$ در $x=0$ پیوسته است. حد چپ و حد راست تابع $g \circ f$ در نقطه $x=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 0^- : f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-\frac{1}{2})} g(t) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$$

$$x \rightarrow 0^+ : f(x) = 2x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 1$$

با توجه به اینکه $g(f(0)) = 1$ ، تابع $g \circ f$ در نقطه $x=0$ پیوسته است. ناپیوستگی توابع دیگر نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. (بررسی سایر گزینه‌ها بر عهده خواننده)

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۸۳۰- گزینه ۲

با توجه به آنکه $f(x) = [x^2 - 3] = [x^2] - 3$ ، باید $y = [x^2]$ روی این بازه پیوسته باشد. تابع مورد نظر در نقاط $x = \pm\sqrt{n}$ (که $n \in \mathbb{N}$) ناپیوسته است. پس در نقاط $x=2$ و $x=\sqrt{5}$ ناپیوسته است و در نتیجه بازه مورد نظر $[2, \sqrt{5})$ است، بنابراین $k = \sqrt{5} - 2$. ریاضی - ۸۸

فصل چهارم

۸۳۶- گزینه ۲ اگر $-h^2 = k$ و $h \rightarrow 0$ ، آن گاه $k \rightarrow 0^-$ و در نتیجه

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-h^2) - f(1)}{h^2} = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{f(1+k) - f(1)}{-k} \\ = - \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} = -f'(1) = -2$$

۸۳۷- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} ((x+1)^2(x^2+1)^2) = (1+1)^2(1+1)^2 = 16$$

۸۳۸- گزینه ۱ مشتق تابع f در نقطه $x=0$ را به کمک تعریف به دست

می‌آوریم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{|x|+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|+1} = 1$$

بنابراین تابع f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است.

۸۳۹- گزینه ۴ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع در

$x=2$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^2} - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = +\infty$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^2} - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = -\infty$$

۸۴۰- گزینه ۱ مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=0$ را به دست

می‌آوریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt[3]{x}) = 0$$

بنابراین $f'(0) = 0$ و نمودار تابع در این نقطه، خط مماس موازی محور طول‌ها دارد.

۸۴۱- گزینه ۲ شیب خطی که از نقطه‌های $A(-1, 3)$ و $B(4, 4)$

می‌گذرد، برابر است با $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{5}$. از طرف دیگر، مشتق تابع f در نقطه $1-$

با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه A برابر است. بنابراین $f'(-1) = \frac{1}{5}$.

۸۴۲- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow 3$ ، آن گاه شیب خطی که نقطه‌های A و B را

به هم وصل می‌کند، به شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=3$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین

$$2 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{k}{x} \Rightarrow 2 = \frac{k}{3} \Rightarrow k = 6$$

۸۳۱- گزینه ۱ در نقاط $x=b$ و $x=c$ شیب خط مماس بر نمودار

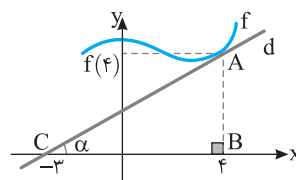
تابع f صفر است. در نقطه $x=d$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f مثبت و در نقطه $x=a$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f منفی است. بنابراین مشتق تابع f در $x=a$ از بقیه کوچک‌تر است.

۸۳۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با $f'(4)$. از

طرف دیگر، شیب خط d برابر با $\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{f(4)}{4}$ است. به این ترتیب

$$f'(4) = \frac{f(4)}{4}$$

$$f(4) + f'(4) = 2 \Rightarrow f(4) + \frac{f(4)}{4} = 2 \Rightarrow f(4) = \frac{8}{5}$$



۸۳۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - f(2))}{x-2} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ = 2f'(2) = 6$$

۸۳۴- گزینه ۱ راه‌حل اول اگر به جای ۲ در صورت کسر داده شده،

$\sqrt{f(2)}$ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x(x-2)} \times \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(2)}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(2)})x} \\ = f'(2) \times \frac{1}{2(\sqrt{f(2)} + \sqrt{f(2)})} = f'(2) \times \frac{1}{4\sqrt{f(2)}} = \frac{2 \times 2}{2-1} \times \frac{1}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را

ببینید.)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}{2x-2} = \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}(4-2)} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

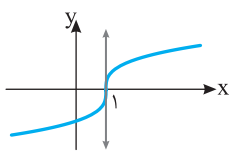
۸۳۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{2h^2 + 3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3+h) - f(3)}{h} \times \frac{1}{3+h} \right) \\ = f'(3) \times \frac{1}{3+0} = \frac{6}{3} = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + |x| \sqrt[3]{x+8}}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - x \sqrt[3]{x+8}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \sqrt[3]{x+8}) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین $f'_+(0) - f'_-(0) = 4$

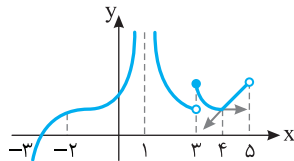
۸۴۹- گزینه ۴ تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ در نقطه $x=1$ مشتق ندارد، زیرا



$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 0}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

ولی خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه وجود دارد و موازی محور عرض‌ها است.

۸۵۰- گزینه ۳ تابع f در نقطه ۳ پیوسته نیست، پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. تابع در نقطه ۴ نیز مشتق‌پذیر نیست، زیرا مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابر نیستند. در بقیه نقاط، دامنه تابع مشتق وجود دارد. بنابراین مجموع مورد نظر برابر ۷ است. توجه کنید که نقطه $x=1$ در دامنه تابع قرار ندارد.



۸۵۱- گزینه ۱ نمودار تابع f روی بازه $[0, 2]$ پاره‌خطی است که نقطه‌های $(0, 0)$ و $(2, 1)$ را به هم وصل می‌کند. پس شیب آن برابر $\frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$ است. در نتیجه $f'(1) = \frac{1}{2}$. نمودار تابع f روی بازه $[2, 4]$ پاره‌خطی است که شیب آن صفر است. پس $f'(3) = 0$. نمودار تابع f روی بازه $[4, +\infty)$ نیم‌خطی است که از نقطه‌های $(4, 1)$ و $(6, 5)$ می‌گذرد. پس شیب آن برابر $\frac{5-1}{6-4} = 2$ است. در نتیجه $f'(5) = 2$. بنابراین $\frac{f'(1) + f'(3)}{f'(5)} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4}$

۸۵۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 3$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - 3)(f(x) + 3)}{(x - 2)(x + 2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 3}{x + 2} = f'(2) \times \frac{f(2) + 3}{2 + 2} \\ = 3 \times \frac{3 + 3}{4} = \frac{9}{2}$$

۸۵۳- گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 6$$

۸۴۳- گزینه ۳ اگر به جای ۴ مقدار $f(1)$ را قرار دهیم، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{f(x) - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)}{f(x) - f(1)} = \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = \frac{2}{f'(1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۸۴۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - 3f(3)}{x^2 - 9} = 3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x - 3)(x + 3)} \\ = 3 \left(\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x + 3} \right) = 3 \times f'(3) \times \frac{1}{3 + 3} = 3 \times 4 \times \frac{1}{6} = 2$$

۸۴۵- گزینه ۴ اگر فرض کنیم $x = 2 - h$ ، آن‌گاه $h \rightarrow 0$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - h - 2}{f(2 - h) - f(2)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(2 - h) - f(2)} \\ = - \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 - h) - f(2)}{h}} = - \frac{1}{4}$$

۸۴۶- گزینه ۴ راه‌حل اول به جای ۸ قرار می‌دهیم $f'(1)$ و از تعریف

مشتق در نقطه $x=1$ استفاده کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - f^3(1)}{h}$$

توجه کنید که به کمک اتحاد جاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - f^3(1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(1+h) - f(1))(f^2(1+h) + f(1)f(1+h) + f^2(1))}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} (f^2(1+h) + 2f(1) + 4) \\ = f'(1) \times (f^2(1) + 2f(1) + 4) = (\sqrt[3]{1} + 1)(4 + 4 + 4) = 24$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f^2(1+h)f'(1+h)}{1} = 3f'(1)f^2(1) \\ = 3 \times (\sqrt[3]{1} + 1) \times 2^2 = 24$$

۸۴۷- گزینه ۳ توجه کنید که $f(2) = 0$. اکنون با استفاده از تعریف

مشتق در نقطه $x=2$ مقدار $f'(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{\frac{x+2}{x+7}}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} ((x - 1)\sqrt{\frac{x+2}{x+7}}) \\ = (2 - 1)\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

۸۴۸- گزینه ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x=0$

را به کمک تعریف به دست می‌آوریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + |x| \sqrt[3]{x+8}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x \sqrt[3]{x+8}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sqrt[3]{x+8}) = 1 + 2 = 3$$

۸۵۹- گزینه ۲ برای تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ تساوی های داده شده برقرار هستند:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

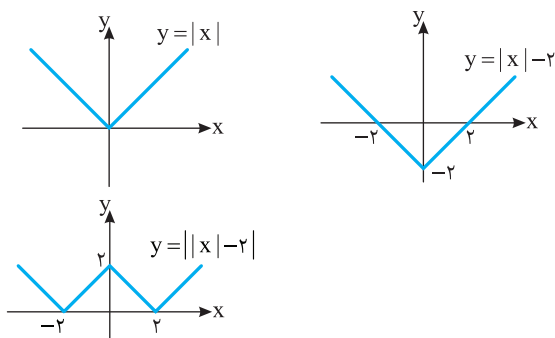
برای توابع دیگر توجه کنید که

(۱) $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$: گزینه (۱)

(۳) $f(x) = -\sqrt[3]{|x|} \Rightarrow f'_+(0) = -\infty, f'_-(0) = +\infty$: گزینه (۳)

(۴) $f(x) = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = -\infty$: گزینه (۴)

۸۶۰- گزینه ۳ نمودار تابع به شکل زیر است.



بنابراین تابع در نقاط $x = -2$ و $x = 2$ ، $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

۸۶۱- گزینه ۲ توجه کنید که $f'(x) = 3x^2 - 3$ پس

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{9} - 3 = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

۸۶۲- گزینه ۲ بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = a(x-3) + ax + 1 = 2ax - 3a + 1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} f'(1) = -a + 1 \\ f'(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow a = -4$$

۸۶۳- گزینه ۳ بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{(x-4+x-2)x^2 - 2x(x-2)(x-4)}{x^4} = \frac{(2x-6)x^2 - 2x(x-2)(x-4)}{x^4}$$

$$f'(-2) = \frac{(-10)4 + 4(-4)(-6)}{16} = \frac{7}{2}$$

در نتیجه

۸۶۴- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+k) - (2x)(x^3)}{(x^2+k)^2}$

در نتیجه

$$f'(-1) = \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{3(1+k)-2}{(1+k)^2} = \frac{5}{1} \Rightarrow k=3, k=-\frac{1}{5} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

۸۶۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(2^{-6}) = \frac{1}{\sqrt{2^{-6}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^{-12}}} = 2^3 + 2^4 = 2^4$$

در نتیجه

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 27}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x)-3)(f^2(x)+3f(x)+9)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} ((f^2(x)+3f(x)+9)(\sqrt{x}+1)) = f'(1) \times (f^2(1)+3f(1)+9)(1+1) = 3\sqrt{1+3}(3^2+3 \times 3+9) \times 2 = 324$$

۸۵۴- گزینه ۴ راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 27}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f'(x)f^2(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{3 \times 3\sqrt{1+3} \times 3^2}{\frac{1}{2 \times 1}} = 324$$

۸۵۴- گزینه ۴ راه حل اول اگر فرض کنیم $x = 2-h$ ، آن گاه $h \rightarrow 0$ و

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{f(x) - f(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-h)^3 - 8}{f(2-h) - f(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-12+6h-h^2)}{f(2-h) - f(2)} = \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h}} \times \lim_{h \rightarrow 0} (-12+6h-h^2) = \frac{1}{f'(2)} \times (-12) = -3$$

۸۵۴- گزینه ۴ راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f'(2-h)}{1} = -f'(2) = 4 \Rightarrow f'(2) = -4$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{f'(x)} = \frac{12}{f'(2)} = \frac{12}{-4} = -3$$

۸۵۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3-h)}{h} = (2-(-1))f'(3)$$

بنابراین $3f'(3) = 12$ ، در نتیجه $f'(3) = 4$.

۸۵۶- گزینه ۴ توجه کنید که حد خواسته شده برابر مشتق چپ تابع در

نقطه $x=1$ است. ولی چون تابع در این نقطه پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد و این حد وجود ندارد. به صورت مستقیم هم می توان حاصل این حد را به دست آورد:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2(1+h)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h-3}{h} = +\infty$$

۸۵۷- گزینه ۳ توجه کنید که $g(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$ پس

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - 2f(x)} = \frac{1}{4}$$

۸۵۸- گزینه ۳ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه $x=2$ را به

کمک تعریف به دست می آوریم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2||x|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2||x|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

بنابراین $f'_+(2) - f'_-(2) = 3$

۸۷۴- گزینه ۳

بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{(1)(x+a) - (1)(x)}{(x+a)^2} = \frac{a}{(x+a)^2}$$

در نتیجه

$$f'(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3$$

۸۷۵- گزینه ۴

بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) + (\sqrt{x}-1)(2x)$$

بنابراین $f'(4) = \frac{1}{2 \times 2}(17) + (2-1)(8) = \frac{49}{4}$

۸۷۶- گزینه ۴

بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - (-\frac{1}{2\sqrt{x}})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2}$$

$$f'(\frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2})^2} = 8$$

در نتیجه

۸۷۷- گزینه ۱

ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = xx^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2) = x^{\frac{11}{6}} + 2x^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{11}{6} + 3 = \frac{29}{6}$$

۸۷۸- گزینه ۲

چون $x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$ ، در یک همسایگی نقطه ۲

علامت عبارت $x^3 - 2x$ مثبت است، بنابراین

$$f(x) = x^2 + (x^3 - 2x) = x^3 + x^2 - 2x$$

در نتیجه $f'(2) = 14$ و $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$

۸۷۹- گزینه ۳

توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $\frac{3}{2}$ مقدار $[x]$

برابر ۱ است و در نتیجه

$$f(x) = \frac{x^3}{x+5} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x+5) - x^3}{(x+5)^2} = \frac{2x^3 + 15x^2}{(x+5)^2} \Rightarrow f'(\frac{3}{2}) = \frac{162}{169}$$

۸۸۰- گزینه ۲

در نزدیکی نقطه $\frac{4}{5}$ ، علامت عبارت $x^2 - 1$ منفی است و $1 < 2x < 2$ ، پس در نزدیکی نقطه $\frac{4}{5}$ ، $[2x] = 1$ ، بنابراین

$$f(x) = \frac{-(x^2-1)}{x+1} = -(x-1)$$

در نتیجه $f'(\frac{4}{5}) = -1$ و $f'(x) = -1$

۸۸۱- گزینه ۱

توجه کنید که $f'(x) = 3ax^2 - 2ax + 4$ ، بنابراین

$$f'(-2) = 12 \Rightarrow 12a + 4a + 4 = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

در نتیجه $f'(1) = \frac{9}{2}$ ، پس $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 4$

۸۶۶- گزینه ۴ بنابر قاعده تقسیم، $(\frac{f}{g})'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$

از طرف دیگر، $f(1) = 1$ ، $g(1) = -\frac{1}{2}$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}, \quad g'(x) = \frac{1}{2}(2x) = x \Rightarrow g'(1) = 1$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(1) = \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) - 1 \times 1}{\frac{1}{4}} = -5$

۸۶۷- گزینه ۳

توجه کنید که

$$f(x) = \frac{6\sqrt{x}-24}{2\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{24}{2\sqrt{x}} = 3x^{\frac{1}{2}} - 12x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 6x^{\frac{1}{2}} - 24x^{-\frac{1}{2}}$$

بنابراین $f'(1) = 1 + 8 = 9$ ، پس $f'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{24}{3}x^{-\frac{3}{2}}$

۸۶۸- گزینه ۱

توجه کنید که در یک همسایگی نقطه ۳ علامت عبارت $x-4$

منفی است، بنابراین در یک همسایگی نقطه ۳، $f(x) = -(x-4) + 2x = x+4$ ،

در نتیجه $f'(3) = 1$ و $f'(x) = 1$

۸۶۹- گزینه ۳

توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $\frac{1}{2}$ ، مقدار $[\frac{x}{2}+1]$ برابر ۱ است، و در نتیجه

$$f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = 2$$

۸۷۰- گزینه ۲

توجه کنید که $\sqrt{x}-8$ به ازای $x=64$ برابر با صفر است. پس عامل صفر کننده است و مشتق آن به ازای $x=64$ برابر $\frac{1}{16}$ است:

$$y = \sqrt{x} - 8 \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(64) = \frac{1}{16}$$

بنابراین مشتق تابع f در نقطه $x=64$ برابر است با

$$\frac{1}{16} \times (\sqrt[3]{64} + 4)(\sqrt[3]{64}) = \frac{1}{16} \times 8 \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

۸۷۱- گزینه ۲

توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})(2x) + 2 = x^2 + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})x + 2$$

بنابراین $f'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2} + 2 = 2 + 2\sqrt{6} - 4 + 2 = 2\sqrt{6}$

۸۷۲- گزینه ۲

توجه کنید که $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ ، در نتیجه

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - (2x)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

در نتیجه، $f'(-1) = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2}$

۸۷۳- گزینه ۳

ابتدا مشتق تابع g را به دست می‌آوریم:

$$g'(x) = \frac{2xf(x) - x^2f'(x)}{f^2(x)}$$

بنابراین $g'(2) = \frac{4f(2) - 4f'(2)}{f^2(2)} = \frac{12 - (-8)}{9} = \frac{20}{9}$

۸۸۹- گزینه ۳ در یک همسایگی $x=2$ مقدار عبارت x^2-3x منفی

است و مقدار عبارت x^2+3x مثبت است. بنابراین ضابطه تابع در این همسایگی به صورت $f(x)=-x^2+3x-x^2-3x=-2x^2$ است. بنابراین

$$f'(x)=-4x \Rightarrow f'(2)=-8$$

۸۹۰- گزینه ۳ اگر ضابطه تابع را به صورت

$$f(x)=(x^2-49)(x^2-50)(x^2-20)(x^2-21)\dots(x^2-48)$$

$$g(x)$$

بنویسیم، در این صورت

$$f(x)=(x^2-49)g(x) \Rightarrow f'(x)=2xg(x)+(x^2-49)g'(x)$$

واضح است که اگر $f'(x)$ را حساب کنیم، مقدار عبارت $(x^2-49)g'(x)$ صفر می شود و کافی است مقدار عبارت $2xg(x)$ را حساب کنیم:

$$f'(x)=2xg(x)=2x \times (49-50)(49-20)(49-21)\dots(49-48)$$

$$=-14 \times 29!$$

۸۹۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=1-2x+3x^2-4x^3+\dots+49x^{48}-50x^{49}$$

بنابراین $f'(-1)=1+2+3+4+\dots+49+50=1275$.

۸۹۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که چون مقدار $x+1$ به ازای $x=-1$

صفر است، پس مشتق عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ به ازای $x=-1$ برابر است با $8-2a$. بنابراین

$$8-2a=2 \Rightarrow a=3$$

۸۹۳- گزینه ۳ فرض می کنیم $f(x)=ax+b$ در این صورت

$$f'(x)=a \Rightarrow f'(x)f(x)=a^2x+ab=4x-8$$

بنابراین $a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$, $f'(x)=a \Rightarrow f'(x)=\pm 2$

۸۹۴- گزینه ۳ ابتدا مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+mx+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+mx+1)-(2x+m)(x^2-x+1)}{(x^2+mx+1)^2}$$

بنابراین $f'(0)=\frac{(-1)(1)-(m)(1)}{1^2}=-1-m$ در نتیجه

$$-1-m=2m \Rightarrow m=-\frac{1}{3}$$

۸۹۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{g(x)-1}{x^2+1} \Rightarrow (x^2+1)f(x)=g(x)-1$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=1$ ، به دست می آید

$$(2x)f(x)+(x^2+1)f'(x)=g'(x) \Rightarrow 2f(1)+2f'(1)=g'(1) \Rightarrow g'(1)=12$$

۸۹۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{3h} = \frac{2}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{2h} = \frac{2}{3} f'(2)$$

از طرف دیگر، $f(x)=2x^2+8x^{-2}$ ، پس

$$f'(x)=4x+8(-2)x^{-3}=4x-\frac{16}{x^3}$$

بنابراین $f'(2)=8-2=6$ و مقدار حد مورد نظر برابر است با $\frac{2}{3} \times 6=4$.

۸۸۲- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم و مشتق آن را

به دست می آوریم:

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2-2)=x^5-3x^3+2x \Rightarrow f'(x)=5x^4-9x^2+2$$

بنابراین

$$f'(x)=0 \Rightarrow 5x^4-9x^2+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{9+\sqrt{41}}{10} \\ x^2=\frac{9-\sqrt{41}}{10} \end{cases}$$

پس در نقاط $x=\pm\sqrt{\frac{9-\sqrt{41}}{10}}$ و $x=\pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{41}}{10}}$ مشتق تابع f برابر صفر

است. حاصل ضرب این اعداد برابر است با $-\frac{2}{5}$.

۸۸۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^{-10}+x^{-9}+\dots+x^{-1}+1+x+x^2+\dots+x^{10}$$

بنابراین $f'(x)=-10x^{-11}-9x^{-10}-\dots-x^{-2}+1+2x+\dots+10x^9$

در نتیجه $f'(1)=-10-9-\dots-1+1+2+\dots+10=0$.

۸۸۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^5+x^2)-(x^3+1)}{x^3+1}=\frac{x^2(x^3+1)-(x^3+1)}{x^3+1}=x^2-1 \quad (x \neq -1)$$

در نتیجه برای هر $x \neq -1$ مشتق تابع f برابر $2x$ است و $f'(\frac{\sqrt{2}-1}{2})=\sqrt{2}-1$

۸۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x-m)(x^2+5x+3)-(2x+5)(x^2-mx+4)}{(x^2+5x+3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(-1)=0 \Rightarrow (-2-m)(1-5+3)-(-2+5)(1+m+4)=0 \Rightarrow m=-\frac{13}{2}$$

۸۸۶- گزینه ۴ توجه کنید که $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$ به ازای $x=1$ برابر صفر

است، پس عامل صفر کننده است. از طرف دیگر،

$$y=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y'(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

در نتیجه $f'(1)=\frac{1}{6} \times \frac{1}{1+1}=\frac{1}{12}$.

۸۸۷- گزینه ۱ ضابطه تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{1}{3}}(xx^{\frac{1}{3}}+1)=x^{\frac{17}{6}}+x^{\frac{4}{3}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{17}{6}x^{\frac{11}{6}}+\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(1)=\frac{17}{6}+\frac{4}{3}=\frac{25}{6}$$

۸۸۸- گزینه ۲ اگر در تساوی $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-1}{2x}$ قرار دهیم $x=-1$ ،

چون $f(-1)=1$ ، به دست می آید $g(-1)=0$. اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می آید

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=\frac{(2x)(2x)-2(x^2-1)}{4x^2}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$ ، به دست می آید $\frac{g'(-1)-0}{1}=1$ ، بنابراین

$$g'(-1)=1$$

۸۹۷- گزینه ۲ ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + \sqrt{x})'(x^3 + \sqrt[3]{x}) - (x^3 + \sqrt[3]{x})'(x^2 + \sqrt{x})}{(x^3 + \sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^3 + \sqrt[3]{x}) - (3x^2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(x^2 + \sqrt{x})}{(x^3 + \sqrt[3]{x})^2}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$ ، نتیجه می‌شود

$$f'(1) = \frac{(2 + \frac{1}{2})(1+1) - (3 + \frac{1}{3})(1+1)}{(1+1)^2} = -\frac{5}{12}$$

۸۹۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$(f \times g)'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1)$$

ابتدا ضابطه تابع $f \times g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \times g)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + \sqrt{x^4 + x^2})^9 (x^2 - \sqrt{x^4 + x^2})^9$$

$$= ((x^2 + \sqrt{x^4 + x^2})(x^2 - \sqrt{x^4 + x^2}))^9 = (x^4 - x^4 - x^2)^9 = -x^{18}$$

بنابراین

$$(f \times g)'(x) = (-x^{18})' = -18x^{17} \Rightarrow (f \times g)'(1) = -18 \times 1^{17} = -18$$

۸۹۹- گزینه ۴ در یک همسایگی نقطه $x=1$ علامت عبارت $2x - x^2\sqrt{x}$

مثبت است و در یک همسایگی نقطه $x=4$ علامت این عبارت منفی است.

بنابراین در یک همسایگی نقطه ۱،

$$f(x) = 2x - x^2\sqrt{x} = 2x - x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(1) = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

و در یک همسایگی نقطه ۴،

$$f(x) = -2x + x^2\sqrt{x} = -2x + x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = -2 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(4) = -2 + \frac{5}{2} \times 8 = 18$$

بنابراین $f'(1)f'(4) = -9$.

۹۰۰- گزینه ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $\frac{21}{2}$ مقدار

عبارت‌های x ، $x-1$ ، $x-2$ و ... و $x-10$ مثبت و مقدار عبارت‌های $x-11$ ، $x-12$ ، $x-13$ و ... و $x-20$ منفی است. بنابراین ضابطه تابع در همسایگی

این نقطه به شکل زیر است:

$$f(x) = x + (x-1) + (x-2) + \dots + (x-10) - (x-11) - (x-12) - \dots - (x-20)$$

در نتیجه $f(x) = x + k$ ، که k مقداری ثابت است. بنابراین $f'(\frac{21}{2}) = 1$.

۹۰۱- گزینه ۲ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 3(3x-2)'(3x-2)^{3-1} - 4(2x-3)'(2x-3)^{4-1}$$

$$= 3(3)(3x-2)^2 - 4(2)(2x-3)^3$$

در نتیجه $f'(-1) = 9(-3-2)^2 - 8(-2-3)^3 = 9 \times 5^2 + 8 \times 5^3 = 49 \times 5^2$

۹۰۲- گزینه ۱ بنابر قاعده ضرب و اینکه $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ،

$$f'(x) = ((x^2-1)^2)'(x+2)^4 + (x^2-1)^2((x+2)^4)'$$

$$= (2(2x)(x^2-1)^{2-1})(x+2)^4 + (x^2-1)^2(4(x+2)^{4-1})$$

$$= 4x(x^2-1)(x+2)^4 + 4(x^2-1)^2(x+2)^3$$

بنابراین $f'(0) = 0 + 4(1)(2)^3 = 32$.

۹۰۳- گزینه ۳ بنابر قاعده زنجیری، $(g \circ f)'(1) = f'(1)g'(f(1))$ ، از

طرف دیگر، $f(x) = x^3 - x + 1$ ، در نتیجه $f'(x) = 3x^2 - 1$ ، بنابراین

$$f(1) = 1 \text{ و } f'(1) = 2.$$

$$g(x) = 2 - x^2 \Rightarrow g'(x) = -2x \Rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2$$

$$(g \circ f)'(1) = 2 \times (-2) = -4.$$

۹۰۴- گزینه ۱ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = (-3)(3 - \frac{1}{x^2})(3x + \frac{1}{x})^{-4}$$

در نتیجه، $128f'(1) = -3$ ، بنابراین $f'(1) = (-3)(2)(4)^{-4} = \frac{-3}{128}$.

۹۰۵- گزینه ۴ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})' = \frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}} \Rightarrow f'(5) = \frac{10}{27}$$

۹۰۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{4}{\sqrt{9}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{13}{12}$$

۹۰۷- گزینه ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(2x) = -x^2 + 3x + 4$ طبق

قاعده زنجیری مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$(2x)'f'(2x) = -2x + 3 \Rightarrow 2f'(2x) = -2x + 3$$

$$\xrightarrow{x=2} 2f'(4) = -4 + 3 \Rightarrow f'(4) = -\frac{1}{2}$$

۹۰۸- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$(\frac{1}{3x-1})'f'(\frac{1}{3x-1}) = 6x \Rightarrow \frac{-3}{(3x-1)^2}f'(\frac{1}{3x-1}) = 6x$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ ، به دست می‌آید $-\frac{3}{4}f'(\frac{1}{2}) = 6$.

$$\text{پس } f'(\frac{1}{2}) = -8.$$

۹۰۹- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$ ، از طرف

دیگر، اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$-f'(1-x) = 6x + 1 \xrightarrow{x=-1} -f'(2) = -5 \Rightarrow f'(2) = 5$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر ۵ است.

۹۱۰- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی $g(x) = f^2(x^3)$ مشتق

بگیریم، به دست می‌آید

$$g'(x) = 2(f(x^3))'(f(x^3)) = 2(3x^2)f'(x^3)f(x^3) = 6x^2f'(x^3)f(x^3)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=2$ ، به دست می‌آید

$$g'(2) = 6 \times 4 \times f'(8)f(8) = 6 \times 4 \times \frac{1}{6} = 4$$

۹۱۱- گزینه ۱ بنابر قاعده زنجیری،

$$(fog)'(-1) = g'(-1)f'(g(-1))$$

از طرف دیگر،

$$g(x) = x^3 - 3x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow g'(-1) = 0$$

بنابراین $(fog)'(-1) = 0$.

۹۱۲- گزینه ۳ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1+(2+x^2)^2)'(1+(2+x^2)^2)^{3-1} \\ &= 3(2(2x)(2+x^2)^{2-1})(1+(2+x^2)^2)^2 = 12x(2+x^2)(1+(2+x^2)^2)^2 \\ \text{بنابراین } f'(1) &= 12 \times 1 \times 3 \times 10^2 = 3600. \end{aligned}$$

۹۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + x\right)^2 \\ \text{در نتیجه } f'(1) &= 9. \end{aligned}$$

۹۱۴- گزینه ۴ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})' = \frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{3(1)} = -\frac{1}{3}$$

۹۱۵- گزینه ۲ بنابر قاعده ضرب،

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)\sqrt{x^2+3} + (x^2+3x) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} \\ \text{بنابراین } f'(1) &= 5 \times 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 12. \end{aligned}$$

۹۱۶- گزینه ۴ توجه کنید که $f^2(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ، اگر از دو طرف این

تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=1$ ، به دست می‌آید

$$2f'(x)f(x) = \frac{(2)(x+2)-(1)(2x+1)}{(x+2)^2} \Rightarrow 2f'(1)f(1) = \frac{6-3}{9} = \frac{1}{3}$$

بنابراین $f(1)f'(1) = \frac{1}{6}$.

۹۱۷- گزینه ۱ توجه کنید که $g(4) = \frac{2+1}{3} = 1$ و

$$(fog)'(4) = g'(4)f'(g(4)) = g'(4)f'(1)$$

از طرف دیگر

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}, \quad f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x^2-7} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}} (\sqrt{x}+1)}{x^2-7}$$

$$g'(4) = \frac{\frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times 3}{9} = -\frac{13}{36}$$

بنابراین $(fog)'(4) = \frac{1}{2} \times -\frac{13}{36} = -\frac{13}{72}$.

۹۱۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2ax)\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(ax^2+a)}{3x+1}$$

بنابراین

$$f'(1) = \frac{2(1)(2) - \frac{3}{2 \times 2}(a+a)}{4} = \frac{2(1)}{4} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

۹۱۹- گزینه ۱ اگر از دو طرف تساوی $f(x) = g(x^2+2x)$ مشتق

بگیریم، به دست می‌آید $f'(x) = (2x+2)g'(x^2+2x)$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$ ، به دست می‌آید $f'(3) = 8g'(15)$ ، پس $g'(15) = 9$.

۹۲۰- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده طبق قاعده زنجیری

مشتق بگیریم، به دست می‌آید $4xf'(2x^2-4) = 3f'(x-3) + 5$. این تساوی قرار دهیم $x=1$ ، به دست می‌آید

$$4f'(-2) = 3f'(-2) + 5 \Rightarrow f'(-2) = 5$$

۹۲۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2\left(\frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^3-1)}{(x^2-1)^2}\right)\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right) \Rightarrow f'(-2) = 0$$

۹۲۲- گزینه ۱ چون نقطه $(2, 3)$ روی نمودار تابع f است، پس

$f(2) = 3$. چون خط d از نقطه‌های $(2, 3)$ و $(5, 0)$ گذشته است، شیب آن

برابر است با -1 ، بنابراین $f'(2) = -1$. اکنون توجه کنید که

$$g'(x) = f(3x-4) + x(3f'(3x-4))$$

$$g'(2) = f(2) + 6f'(2) = 3 - 6 = -3$$

۹۲۳- گزینه ۱ بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}(\sqrt{x+4-1}) + (\sqrt{x-1}+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

در نتیجه $f'(5) = \frac{1}{2 \times 2}(2) + 4 \times \frac{1}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$.

۹۲۴- گزینه ۴ توجه کنید که $f(x) = ((x^3+2)(\sqrt{x+2x}))^2$ و

$(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 2((3x^2)(\sqrt{x+2x}) + (x^3+2)(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2))(x^3+2)(\sqrt{x+2x})$$

در نتیجه $f'(1) = 2(3(3) + 3(\frac{1}{2}+2))(3)(3) = 297$.

۹۲۵- گزینه ۲ توجه کنید که $f'(x) = \frac{3x^2+3a}{3\sqrt[3]{(x^3+3ax)^2}}$ ، بنابراین

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \times 2^2 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

۹۲۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} (fog)(x) &= f(g(x)) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2-1}+1} \\ &= \sqrt{x^2-1+1} = \sqrt{x^2} = |x| \end{aligned}$$

بنابراین

$$g'(x)f'(g(x)) = (fog)'(x) = (|x|)' = \frac{x}{|x|}$$

۹۲۷- گزینه ۲ طبق قاعده مشتق تابع مرکب:

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = (x + \sqrt{1+x^2})' f'(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۹۲۸- گزینه ۲ توجه کنید که چون $g(-1) = 2$ ، پس $f(2) = f(g(-1))$.

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(g(x)) - f(2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(g(x)) - f(g(-1))}{x - (-1)}$$

$$= (f \circ g)'(-1) = g'(-1) f'(g(-1)) = 5 \times f'(2) = 5 \times (-3) = -15$$

۹۲۹- گزینه ۱ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(x^3) = \frac{x}{f(x^2)} \Rightarrow 3x^2 g'(x^3) = \frac{f(x^2) - 2x^2 f'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

$$g'(x^3) = \frac{f(x^2) - 2x^2 f'(x^2)}{3x^2 f^2(x^2)}$$

اکنون در تساوی فوق قرار می‌دهیم $x = 2$ و نتیجه می‌شود

$$g'(8) = \frac{f(4) - 8f'(4)}{12f^2(4)} = \frac{1 - 8 \times \frac{13}{8}}{12 \times 1} = -1$$

۹۳۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x+k}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2-k}{(x+2)^2}$$

بنابراین

$$g(x) = (f \circ f)(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) f'(f(x))$$

$$g'(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2}) f'(f(\frac{1}{2})) = f'(\frac{1}{2}) f'(\frac{k}{2})$$

در نتیجه

$$\frac{2-k}{\frac{1}{2}} \times \frac{2-k}{(\frac{k}{2} + \frac{1}{2})^2} = 4 \Rightarrow (2-k)^2 = 16 \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

$$\begin{cases} 2-k = 4\left(\frac{k+1}{2}\right) \\ 2-k = -4\left(\frac{k+1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -10 \end{cases}$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای k برابر ۲۰ است.۹۳۱- گزینه ۴ توابع گزینه‌های (۱) و (۳) در نقطه $x=1$ پیوسته

نیستند، پس مشتق‌پذیر نیستند.

در گزینه (۲)، ابتدا توجه کنید که تابع در $x=1$ پیوسته است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x^3 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 3x^2 & x < 1 \end{cases}$$

همچنین $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3$ و $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2$ چون $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ، پس این تابع هم در نقطه $x=1$ مشتق ندارد.در گزینه (۴) تابع در نقطه $x=1$ پیوسته است و

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 2x^3 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 6x & x > 1 \\ 6x^2 & x < 1 \end{cases}$$

همچنین، $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6x^2) = 6$ و $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x) = 6$ چون $f'_+(1) = f'_-(1)$ ، پس تابع گزینه (۴) در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر است.

۹۳۲- گزینه ۴ توجه کنید

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'_+(-1)$$

چون تابع f در نقطه $x=-1$ پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست هم ندارد. بنابراین حد فوق وجود ندارد. دقت کنید که می‌توانیم بدون استفاده از مفهوم مشتق هم نشان دهیم این حد وجود ندارد:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(-1+h)^3 - 3}{h} = -\infty$$

۹۳۳- گزینه ۳ چون تابع در نقطه $x=-1$ مشتق‌پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

$$-a+2 = -a+2 = 1-b \Rightarrow a-b=1$$

$$\text{از طرف دیگر، } f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 & x > -1 \\ 2x+b & x < -1 \end{cases} \text{ بنابراین}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (3ax^2) = 3a, f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x+b) = -2+b$$

$$f'_+(-1) = f'_-(-1) \Rightarrow 3a = b-2$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات } \begin{cases} a-b=1 \\ 3a-b=-2 \end{cases} \text{ نتیجه می‌شود } a = -\frac{3}{2} \text{ و } b = -\frac{5}{2}$$

و در نتیجه $a+b=-4$.۹۳۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطه $x=1$ پیوسته و

مشتق‌پذیر است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 1 \\ 2x+1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2) = 3 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3 \end{cases}$$

بنابراین $f'(1) = 3$ از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = f'(1) \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۹۳۵- گزینه ۲ توجه کنید که $f(1) = 2$ و

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x = 4$$

پس تابع در $x=1$ پیوستگی چپ ندارد و $f'_-(1)$ وجود ندارد، از طرف دیگر

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x > 1 \\ 4 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + 1) = 4 \text{ بنابراین}$$

۹۴۳- گزینه ۴ توجه کنید که $f(2)=3$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 7$$

پس تابع f در نقطه $x=2$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه وجود ندارند.

۹۴۴- گزینه ۴ چون تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 + ax) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (cx^2 + c) \Rightarrow b = 8 + 2a = 5c \quad (I)$$

از طرف دیگر

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & x > 2 \\ 2cx & x < 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x^2 + a) = 12 + a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2cx) = 4c$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 12 + a = 4c \Rightarrow a = 4c - 12$$

$$\xrightarrow{(I)} 8 + 2(4c - 12) = 5c \Rightarrow c = \frac{16}{3}$$

$$f(2) = 5c = \frac{80}{3}$$

۹۴۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4a & x > 2 \\ 3ax^2 + 2 & x < 2 \end{cases}$$

پس

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 4a) = 4 + 4a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3ax^2 + 2) = 12a + 2$$

چون تابع در $x=2$ مشتق پذیر است، پس

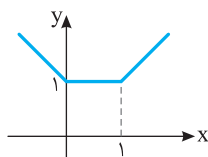
$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 4 + 4a = 12a + 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\text{بنابراین } f'(4a) = f'(1) = 3a + 2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

۹۴۶- گزینه ۴ نمودار تابع به شکل زیر است و در نقاط $x=0$ و $x=1$

نقطه گوشه‌ای دارد. پس $D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. توجه کنید که $x=0$ و $x=1$

ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند.



۹۳۶- گزینه ۳ توجه کنید که تابع f در $x=2$ پیوستگی چپ ندارد،

پس مشتق چپ هم ندارد. از طرف دیگر

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x+2) = 8$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 8$$

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 4$$

۹۳۷- گزینه ۴ اگر $g(x) = (x+1)(x-2)^2$ ، آنگاه $g(2) = g'(2) = 0$.

بنابراین تابع $f(x) = |g(x)|$ در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است.

۹۳۸- گزینه ۲ چندجمله‌ای داخل قدرمطلق یعنی $x^2 + 4x + m^2$ باید

دو ریشه متمایز داشته باشد. پس

$$\Delta = 16 - 4m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 2$$

۹۳۹- گزینه ۲ تابع را به صورت $f(x) = (x-2)|x(x-3)|$

می‌نویسیم. تابع $y = |(x-2)(x-3)|$ در نقاط $x=2$ و $x=3$ مشتق ندارد،

ولی عامل صفر کننده $(x-2)$ در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع f در

نقطه $x=2$ مشتق پذیر باشد. پس تابع f فقط در نقطه $x=3$ مشتق ندارد.

۹۴۰- گزینه ۱ عبارت داخل قدرمطلق $(x^2 - 4 = (x-2)(x+2))$ دو

ریشه ساده ۲ و -۲ دارد. برای آنکه تابع مورد نظر مشتق پذیر باشد، باید

$$x^2 + ax + b \text{ به ازای } x=2 \text{ و } x=-2 \text{ برابر صفر شود:}$$

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow 2^2 + a \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -4 \\ x=-2 \Rightarrow (-2)^2 + a(-2) + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -4 \end{cases}$$

پس $a=0$ و $b=-4$ ، بنابراین $3a + b = -4$.

۹۴۱- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = \begin{cases} 4x-3 & x < 3 \\ 9 & x > 3 \end{cases}$ چون

تابع f روی بازه $(-\infty, 3]$ پیوسته و روی بازه $(-\infty, 3)$ مشتق پذیر است،

همین‌طور روی بازه $[3, +\infty)$ پیوسته و روی بازه $(3, +\infty)$ مشتق پذیر است و

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4x - 3) = 9 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (9) = 9 \quad (2)$$

پس مقدار حد (۱) برابر $f'_-(3)$ و مقدار حد (۲) برابر $f'_+(3)$ است، و چون

این دو مقدار برابرند، پس $f'(3) = 9$.

۹۴۲- گزینه ۱ توجه کنید که $f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases}$ بنابراین

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 2) = 4 + 2 = 6$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2) = 3 \times 4 = 12$$

$$\text{در نتیجه } f'_+(2) - f'_-(2) = 6 - 12 = -6$$

۹۵۳- گزینه ۲ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

بنابراین معادله فوق دو جواب دارد و در دو نقطه، خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.

۹۵۴- گزینه ۴ شیب خط $y = 9x - 1$ برابر ۹ است، پس مشتق تابع f در نقطه مورد نظر باید برابر ۹ باشد:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 15 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (غ.ق.)}, x = 3$$

مقدار تابع در نقطه‌ای با طول مثبت مد نظر است، پس

$$f(3) = 27 - 27 + 15 = 15$$

۹۵۵- گزینه ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق آن صفر است. بنابراین:

$$f'(x) = 3x^2 + m = 0 \Rightarrow m = -3x^2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + (-3x^2)x - 54 = 0 \Rightarrow x^3 = -27 \Rightarrow x = -3$$

بنابراین $m = -27$.

۹۵۶- گزینه ۲ شیب خط $y = -x + b$ برابر -1 است، بنابراین مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x = 2$ برابر -1 است:

$$f'(x) = \frac{a(x+1) - (ax+2)}{(x+1)^2} = \frac{a-3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{a-3}{(2+1)^2} = -1 \Rightarrow a = -6$$

۹۵۷- گزینه ۱ شیب خط $y = \frac{2}{9}x + 1$ برابر $\frac{2}{9}$ است. بنابراین مقدار

مشتق تابع f به‌ازای $x = 1$ برابر $\frac{2}{9}$ است.

$$f'(x) = \frac{(2x-m)(x+2) - (x^2 - mx + 1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(2-m)(3) - (1-m)}{(1+2)^2} = \frac{2(2-m)}{9}$$

بنابراین

$$\frac{2(2-m)}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow 2-m=1 \Rightarrow m=1$$

۹۵۸- گزینه ۳ ابتدا نقطه‌ای با طول منفی روی نمودار تابع

$f(x) = x^3 - x^2$ پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه

برابر شیب خط $y = x + k$ یعنی ۱ باشد:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (غ.ق.)} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین خط $y = x + k$ در نقطه $A(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{27})$ بر نمودار تابع مماس

می‌شود و نقطه A روی این خط قرار دارد. یعنی

$$-\frac{4}{27} = -\frac{1}{3} + k \Rightarrow k = \frac{5}{27}$$

۹۴۷- گزینه ۳ تابع در نقطه $x = 1$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد:

$$x \geq 1 \Rightarrow f(x) = x(x^2 - x) = x^3 - x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'_+(1) = 3 - 2 = 1$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x(x - x^2) = x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 2x - 3x^2 \Rightarrow f'_-(1) = 2 - 3 = -1$$

ولی در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x^2 - x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x^2 - x| = 0$$

توجه کنید که تابع $y = |g(x)|$ در ریشه‌های ساده $g(x) = 0$ مشتق ندارد.

پس $y = |x^2 - x|$ در $x = 0$ و $x = 1$ مشتق ندارد ولی تابع $y = x|x^2 - x|$

به دلیل وجود عامل صفرکننده x که در قدرمطلق ضرب شده است در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

۹۴۸- گزینه ۱ توجه کنید که ضابطه تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x) = |x^3 - x^2| = |x^2(x-1)| = x^2|x-1|$$

بنابراین تابع فقط در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا عبارت داخل قدرمطلق فقط یک ریشه ساده $x = 1$ دارد.

۹۴۹- گزینه ۱ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید

چندجمله‌ای $y = x^2 - 2x + m$ ریشه نداشته باشد یا ریشه مضاعف داشته باشد. زیرا اگر این تابع دو ریشه متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4 - 4m \leq 0 \Rightarrow m \geq 1$$

۹۵۰- گزینه ۲ برای اینکه تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، باید

دو عامل $x - 1$ در آن وجود داشته باشد. یعنی باید

$$x^2 + ax + b = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a = -2$$

۹۵۱- گزینه ۱ شیب خط مماس برابر $f'(2)$ است.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

خط مورد نظر از نقطه $(2, f(2))$ می‌گذرد. پس معادله خطی را می‌خواهیم که

از نقطه $(2, \frac{5}{4})$ عبور کرده و شیب آن برابر $\frac{5}{4}$ باشد، یعنی

$$y - \frac{5}{4} = \frac{5}{4}(x - 2) \Rightarrow 5x - 4y - 4 = 0$$

۹۵۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x = 5$$

بنابراین معادله خط مماس در نقطه $(5, 2)$ را می‌خواهیم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(5) = \frac{1}{4}$$

بنابراین شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{1}{4}$ است و معادله آن به‌صورت زیر است:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 5) \Rightarrow 4y - x = 3$$

۹۶۴- گزینه ۱ چون A نقطه‌ای به طول صفر روی سهمی به معادله

$y = -x^2 + bx + 2$ است، پس عرض آن برابر است با $y = 2$. چون خط d از نقطه‌های $(0, 2)$ و $(3, 0)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با

$\frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$ چون خط d در نقطه‌ای به طول صفر بر سهمی مماس است،

مقدار y' به ازای $x = 0$ برابر با شیب خط d است:

$$y = -x^2 + bx + 2 \Rightarrow y' = -2x + b \xrightarrow{x=0} b = -\frac{2}{3}$$

۹۶۵- گزینه ۴ فرض کنید نقطه تماس (x_0, y_0) باشد. در این صورت

مقدار $f'(x_0)$ برابر با شیب خط $y = x + 2$ است، یعنی $f'(x_0) = 1$. اکنون

توجه کنید که

$$f'(x) = x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x_0) = 1 \Rightarrow x_0^2 + x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -2, x_0 = 1$$

اگر $x_0 = -2$ ، چون نقطه (x_0, y_0) روی خط $y = x + 2$ است، پس

$y_0 = 0$ و چون نقطه $(-2, 0)$ روی نمودار تابع f است، پس

$$0 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{2} + 2 + k \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$$

اگر $x_0 = 1$ ، آن گاه $y_0 = 3$ و نتیجه می‌شود $k = \frac{19}{6}$ که قابل قبول نیست زیرا

طبق فرض سؤال باید $k < 0$.

۹۶۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

بنابراین

$$f(-1) = -2 \Rightarrow -a + b = -2 \quad (1)$$

از طرف دیگر، شیب خط $y = 3x + 1$ برابر ۳ است و چون نمودار تابع f در

نقطه $x = -1$ بر این خط مماس است، پس $f'(-1) = 3$. در نتیجه

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2 \Rightarrow f'(-1) = 3a - 2b + 2 = 3 \Rightarrow 3a - 2b = 1 \quad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = -3$ و $b = -5$.

بنابراین $a + b = -8$.

۹۶۷- گزینه ۳ شیب خط $2x + y = 3$ برابر ۲- است. پس شیب خط

مماس بر نمودار تابع f برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین باید نقاطی را پیدا کنیم که مقدار

مشتق تابع در آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است. پس

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+2)}{(x+2)^2} = \frac{8}{(x+2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$(x+2)^2 = 16 \Rightarrow x = 2, x = -6$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{5 \times 2 + 2}{2 + 2} = 3$$

$$x = -6 \Rightarrow f(-6) = \frac{5 \times (-6) + 2}{-6 + 2} = 7$$

پس نقاط مورد نظر $A(2, 3)$ و $B(-6, 7)$ هستند که فاصله آن‌ها برابر است

$$\text{با } AB = \sqrt{(-6-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{80}.$$

۹۵۹- گزینه ۳ باید شیب خط یعنی a بتواند با مشتق تابع برابر شود.

بنابراین $f'(x) = 3x^2 - 1 = a$ واضح است که $-1 \geq 3x^2 - 1 \geq -1$ بنابراین $a \geq -1$.

۹۶۰- گزینه ۳ اگر نمودار تابع $y = -x^2$ را k واحد به بالا انتقال دهیم، به

نمودار تابع $f(x) = -x^2 + k$ تبدیل می‌شود ($k > 0$). می‌خواهیم خط

$y = 2x + 3$ بر نمودار تابع f مماس شود. ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا

می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب این خط یعنی ۲ باشد:

$$f'(x) = -2x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1$$

پس نقطه $A(-1, 1)$ نقطه مورد نظر است که باید روی نمودار تابع

$f(x) = -x^2 + k$ باشد. پس

$$-1 + k = 1 \Rightarrow k = 2$$

۹۶۱- گزینه ۲ نقطه برخورد نمودار تابع f با محور عرض‌ها $(0, 3)$ و

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر $f'(0)$ است.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{4}$$

بنابراین معادله خطی با شیب $\frac{1}{4}$ را که از نقطه $(0, 3)$ عبور می‌کند، می‌نویسیم.

$$y - 3 = \frac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 3$$

۹۶۲- گزینه ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که $f(2) = \frac{3}{2}$ و $f'(2) = \frac{3}{4}$

برابر است با شیب خطی که از نقاط $(0, 3)$ و $(4, 0)$ می‌گذرد، پس

$$f'(2) = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$$

به طول ۲ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g(x) = 4f^2(x) + x \Rightarrow g'(x) = 8f'(x)f(x) + 1 \Rightarrow g'(2) = 8f'(2)f(2) + 1$$

$$= 8 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{2} + 1 = -8$$

همچنین $11 = 4f^2(2) + 2 = 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 11$ بنابراین می‌خواهیم معادله

خطی با شیب ۸- را بنویسیم که از نقطه $(2, 11)$ می‌گذرد:

$$y - 11 = -8(x - 2) \Rightarrow y = -8x + 27$$

۹۶۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f(1) = 3$ و $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$

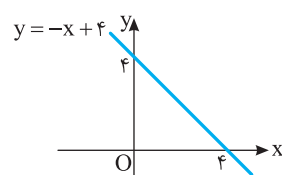
بنابراین $f'(1) = -1$ و در نتیجه معادله خط مماس در نقطه $(1, 3)$ به صورت

زیر است:

$$y - 3 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 4$$

این خط محورهای مختصات را در نقاط $A(0, 4)$ و $B(4, 0)$ قطع می‌کند.

بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{4 \times 4}{2} = 8$.



راه‌حل دوم فرض کنید این خط‌ها در نقطه $B(\alpha, f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شوند. در این صورت شیب این خط‌ها برابر $f'(\alpha)$ خواهد بود. بنابراین

$$f(x) = \frac{5x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

از طرف دیگر، شیب این خط‌ها که از دو نقطه $A(0, 2)$ و $B(\alpha, f(\alpha))$ می‌گذرند برابر است با $\frac{f(\alpha)-2}{\alpha-0}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha)-2}{\alpha} &= \frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow \frac{\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}-2}{\alpha} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2} \\ \frac{3\alpha+3}{\alpha(\alpha-1)} &= \frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow 3(\alpha+1)(\alpha-1) = -6\alpha \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \end{aligned}$$

مقادیر α که از معادله فوق به دست می‌آیند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها ۲- است.

۹۷۱- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-1, 2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{0 - (-\frac{3}{2})}{3} = \frac{1}{2}$$

۹۷۲- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[1, a]$ برابر

$$\begin{aligned} \frac{f(a)-f(1)}{a-1} &= \frac{\frac{1}{a}-1}{a-1} = \frac{1-a}{a(a-1)} = -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} &= -\frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

۹۷۳- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[4, a]$ برابر

$$\frac{f(a)-f(4)}{a-4} = \frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a}-2}{a-4} &= \frac{1}{6} \Rightarrow \sqrt{a}-2 = \frac{a-4}{6} \Rightarrow 6\sqrt{a}-12 = a-4 \Rightarrow 6\sqrt{a} = a+8 \Rightarrow 36a = a^2+16a+64 \\ a^2-20a+64 &= 0 \Rightarrow (a-16)(a-4) = 0 \Rightarrow a=16, \quad a=4 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{aligned}$$

۹۷۴- گزینه ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \frac{1}{x-4}$ در بازه

$$[-a, a] \text{ برابر } \frac{f(a)-f(-a)}{2a} \text{ است:}$$

$$\frac{f(a)-f(-a)}{2a} = \frac{\frac{1}{a-4} - \frac{1}{-a-4}}{2a} = \frac{-a-4-a+4}{2a(16-a^2)} = -\frac{1}{a^2-16}$$

بنابراین

$$\frac{1}{a^2-16} = -\frac{1}{16} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a=3, \quad a=-3 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

۹۷۵- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a-1, a]$ برابر

$$\frac{f(a)-f(a-1)}{a-a+1} \text{ است:}$$

$$\frac{f(a)-f(a-1)}{1} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a-1}}{1} = \frac{a-1-(a-1)}{a(a-1)} = -\frac{1}{a(a-1)} = -\frac{1}{a^2-a}$$

$$1 + \frac{1}{a^2-a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^2-a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2-a = 2 \Rightarrow a^2-a-2 = 0$$

$$(a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1, 2$$

۹۶۸- گزینه ۴ معادله خطی که نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ را به هم وصل می‌کند، به صورت $y=0$ است. یعنی می‌خواهیم بدانیم تابع در چه نقطه‌ای بر محور طول‌ها مماس است. بنابراین

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x=0, \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

اگر $x=0$ ، آن‌گاه $f(x)=0$ ، پس نمودار تابع در $(0, 0)$ بر محور طول‌ها مماس است. اگر $x^2 = \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه $f(x) = -\frac{1}{4}$ ، پس نمودار تابع در این نقاط

بر محور طول‌ها مماس نیست. توجه کنید که شرط‌های $f'(x)=0$ و $f(x)=0$ برای نقاطی که در آن‌ها نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس است، برقرار است.

۹۶۹- گزینه ۴ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطه تماس را $(\alpha, 2\alpha - \alpha^2)$ در نظر بگیریم، معادله خط مماس به صورت $y - (2\alpha - \alpha^2) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ است. چون $f'(\alpha) = 2 - 2\alpha$ ، پس $y - (2\alpha - \alpha^2) = (2 - 2\alpha)(x - \alpha)$ نقطه $(4, 1)$ در معادله فوق صدق می‌کند. پس

$$\begin{aligned} 1 - (2\alpha - \alpha^2) &= (2 - 2\alpha)(4 - \alpha) \Rightarrow 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 8 - 2\alpha - 8\alpha + 2\alpha^2 \\ \alpha^2 - 8\alpha + 7 &= 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 7) = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \quad \alpha = 7 \end{aligned}$$

اگر $\alpha = 1$ ، آن‌گاه $f'(\alpha) = 0$ و اگر $\alpha = 7$ ، آن‌گاه $f'(\alpha) = -12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

راه‌حل دوم فرض کنید خطی که از نقطه $A(4, 1)$ می‌گذرد در نقطه $B(\alpha, f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر با $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}$ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس مقدار $f'(\alpha)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 2x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x \Rightarrow f'(\alpha) = 2 - 2\alpha$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4} &= 2 - 2\alpha \Rightarrow \frac{2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha - 4} = 2 - 2\alpha \\ 2\alpha - \alpha^2 - 1 &= 2\alpha - 8 - 2\alpha^2 + 8\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \\ (\alpha - 1)(\alpha - 7) &= 0 \Rightarrow \alpha = 1, \quad \alpha = 7 \end{aligned}$$

اگر $\alpha = 1$ ، آن‌گاه $f'(\alpha) = 0$ و اگر $\alpha = 7$ ، آن‌گاه $f'(\alpha) = -12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

۹۷۰- گزینه ۳ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطه تماس را $(\alpha, \frac{5\alpha+1}{\alpha-1})$ در نظر بگیریم، معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$y - \frac{5\alpha+1}{\alpha-1} = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$\text{چون } f'(\alpha) = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}, \text{ پس } y - \frac{5\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}(x - \alpha)$$

نقطه $(0, 2)$ در معادله فوق صدق می‌کند. پس

$$2 - \frac{5\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}(\alpha - \alpha) \Rightarrow \frac{2(\alpha-1) - (5\alpha+1)}{\alpha-1} = \frac{-6(-\alpha)}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{2\alpha - 2 - 5\alpha - 1}{\alpha - 1} = \frac{6\alpha}{(\alpha - 1)^2} \Rightarrow \frac{-3\alpha - 3}{\alpha - 1} = \frac{6\alpha}{(\alpha - 1)^2} \Rightarrow -3\alpha^2 - 6\alpha + 3 = 0$$

مقادیر α که از معادله فوق حاصل می‌شوند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -2 است.

۹۸۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \xrightarrow{x=1} 14 = 4 + 2a + b \\ f''(x) = 12x^2 + 2a \xrightarrow{x=1} 16 = 12 + 2a \end{cases}$$

از این دستگاه معادلات نتیجه می‌شود $a=2$ و $b=6$ پس $a+b=8$.

۹۸۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = (x+k)^2(x-1)$$

$$f'(x) = 2(x+k)(x-1) + (x+k)^2$$

$$f''(x) = 2(x-1) + 2(x+k) + 2(x+k)$$

$$f''(2) = 2 + 4(2+k) \xrightarrow{f''(2)=2} 2 + 4(2+k) = 2 \Rightarrow k = -2$$

۹۸۴- گزینه ۳ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 4)^2 - 4x(x^2 + 4)(-x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^4} = \frac{-2x(x^2 + 4) - 4x(-x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^3} = \frac{-2x^3 - 24x}{(x^2 + 4)^3}$$

بنابراین

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2x^3 - 24x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{12}$$

پس در سه نقطه مشتق دوم تابع f برابر صفر است.

۹۸۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^6}{x^2} + \frac{x^4}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^4 + x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

بنابراین

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 2 + \frac{6}{x^4}$$

$$f''(1) = 12 + 2 + 6 = 20$$

۹۸۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = (x^{\frac{1}{2}} - 1)(x^{\frac{1}{2}} + 1) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

۹۸۷- گزینه ۴ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{1}{(3+1)\sqrt{3+1}} = \frac{1}{8}$$

بنابراین

۹۷۶- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-3, 0]$ برابر است با

$$\frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \frac{0 - (-3^0)}{3} = 1$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با $f'(a)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 + 1$$

بنابراین

$$3a^2 + 1 = 10 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3} \text{ (غ.ق.ق.)}, a = -\sqrt{3}$$

۹۷۷- گزینه ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 1]$ برابر است با

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 - k$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x=1$ برابر است با

$$f'(x) = 3x^2 - 2kx \xrightarrow{x=1} f'(1) = 3 - 2k$$

بنابراین

$$3 - 2k = 1 - k \Rightarrow k = 2$$

۹۷۸- گزینه ۱ اگر S مساحت و P محیط دایره‌ای به شعاع r باشد، آن‌گاه

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, P = 2\pi r = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi S}$$

بنابراین

$$P(S) = 2\sqrt{\pi S} \Rightarrow P'(S) = 2\sqrt{\pi} \times \frac{1}{2\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

مقدار $P'(4\pi)$ خواسته شده که برابر $\frac{1}{2}$ است.

۹۷۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$S = x(6-x) \Rightarrow S(x) = 6x - x^2 \Rightarrow S'(x) = 6 - 2x$$

مقدار $S'(2)$ خواسته شده که برابر ۲ است.

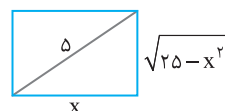
۹۸۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که با استفاده از قضیه فیثاغورس عرض

مستطیل برابر است با $\sqrt{25-x^2}$ پس

$$P(x) = 2(x + \sqrt{25-x^2})$$

$$P'(x) = 2(1 - \frac{2x}{2\sqrt{25-x^2}}) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{25-x^2}}$$

مقدار $P'(4) = 2 - \frac{8}{\sqrt{25-16}} = -\frac{2}{3}$ خواسته شده که برابر است با $-\frac{2}{3}$.



۹۸۱- گزینه ۲ ابتدا مشتق اول و دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 2$$

بنابراین باید تعداد جواب‌های معادله $3x^2 - 2x + 1 = 6x - 2$ را مشخص

کنیم:

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس در دو نقطه تساوی $f'(x) = xf''(x)$ برقرار است.

۹۹۸- گزینه ۱ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست

می آید $2f'(2x-3) = 3x^2 + 2ax + b$. اگر باز هم از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم، به دست می آید $4f''(2x-3) = 6x + 2a$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ ، به دست می آید

$$4f''(-1) = 6 + 2a \Rightarrow 4 \times 4 = 6 + 2a \Rightarrow a = 5$$

۹۹۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

چون تابع در نقطه $x=0$ مشتق اول ندارد، پس مشتق دوم هم ندارد.

۹۹۰- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12ax + 12 = 12(x^2 + ax + 1)$$

پس معادله $x^2 + ax + 1 = 0$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta = a^2 - 4 < 0 \Rightarrow |a| < 2$$

۹۹۱- گزینه ۴ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^7 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^4}{7x^6} = \frac{5}{7}$$

۹۹۲- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^4 + x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^3 + 3x^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

توجه کنید که این حد هم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابراین باز هم از قاعده

هوییتال نتیجه می شود

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^3 + 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x + 2}{12x^2 + 6x} = \frac{-6 + 2}{12 - 6} = -\frac{2}{3}$$

۹۹۳- گزینه ۳ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^4 - (2x-3)^4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-1)^3 - 8(2x-3)^3}{2x} = \frac{4 - 8}{4} = -1$$

۹۹۴- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n-1}}{2x} = \frac{n}{2} = 1 \Rightarrow n = 2$$

۹۹۵- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-8} - 2}{\sqrt{5x+1} - 5} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{4}{2\sqrt{4x-8}}}{\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}} = \frac{4}{5}$$

۹۹۶- گزینه ۱ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{2x} = \frac{1}{12}$$

۹۹۷- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+14} - 2x}{\sqrt[3]{x+25} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-2}{2\sqrt{x+14}} - 2}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+25)^2}} - 3} = -\frac{40}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

۹۹۹- گزینه ۴ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 6$$

۱۰۰۰- گزینه ۴ با استفاده از قاعده هوییتال مقدار حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+9} - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+9}}}{1} = \frac{a}{2\sqrt{9}} = \frac{a}{6}$$

پس $\frac{a}{6} = 4$ و در نتیجه $a = 24$.

۱۰۰۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f(x) - 6}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(f(x) - 3)}{x+2} = 2 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = 2f'(-2)$$

از طرف دیگر، مقدار $f'(-2)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(-2, 3)$ ، یعنی شیب خط d است. اکنون توجه کنید که چون خط d از

نقطه های $A(-2, 3)$ و $(1, 0)$ می گذرد، شیب آن برابر است با $\frac{0-3}{1-(-2)} = -1$.

بنابراین $f'(-2) = -1$ و حد مورد نظر برابر است با $2f'(-2) = -2$.

۱۰۰۲- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - f^3(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - f^3(-2)}{x - (-2)} = (f^3)'(-2) = 3f^2(-2)f'(-2)$$

از طرف دیگر، $f(-2) = 3$ و $f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2-x+3}}$ ، پس

$$f'(-2) = \frac{-5}{\sqrt[3]{9}} = -\frac{5}{6}$$

به این ترتیب، مقدار حد مورد نظر برابر است با $3 \times (-\frac{5}{6}) \times 3^2 = -\frac{45}{2}$.

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - f^3(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3f^2(x)f'(x)}{1}$$

از طرف دیگر، $f(-2) = 3$ و $f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2-x+3}}$ ، پس

$$f'(-2) = \frac{-5}{\sqrt[3]{9}} = -\frac{5}{6}$$

پس $\lim_{x \rightarrow -2} (3f^2(x)f'(x)) = 3f^2(-2)f'(-2) = -\frac{45}{2}$.

۱۰۰۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x^3+x) = g\left(\frac{f}{x}\right) \Rightarrow (3x^2+1)f'(x^3+x) = -\frac{f}{x^2} g'\left(\frac{f}{x}\right)$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$ ، نتیجه می‌شود

$$4f'(2) = -4g'(4) \Rightarrow f'(2) = -g'(4) = 4$$

۱۰۰۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2+2x+a}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2ax+2)(x^2+1)^2 - 2x(ax-1)(-2x(ax-1))}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(-2ax+2)(x^2+1) - 4x(-ax^2+2x+a)}{(x^2+1)^3}$$

$$\text{بنابراین } f''(1) = \frac{(-2a+2)(2) - 4(-a+2+a)}{2^3} = \frac{-a-1}{2} = 4$$

$$a = -9$$

۱۰۱۰- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, 0]$ برابر است با

$$\frac{f(0)-f(a)}{0-a} = \frac{a^2-2a}{-a} = -a+2$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, a+1]$ برابر است با

$$\frac{f(a+1)-f(0)}{a+1-0} = \frac{-(a+1)^2+2(a+1)}{a+1} = \frac{-a^2+1}{a+1} = -a+1$$

$$(-a+2)+(-a+1)=4 \Rightarrow -2a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

بنابراین

۱۰۱۱- گزینه ۳ راهحل اول توجه کنید که $f(1)=0$ ، پس

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(2x-1)(2x-2) \cdots (2x-12)-0}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (2x(2x-1)(2x-3)(2x-4) \cdots (2x-12))$$

$$= 4 \times 1(1)(-1)(-2)(-3) \cdots (-10) = 4 \times 10!$$

راهحل دوم با توجه به اینکه مقدار $2x-2$ به ازای $x=1$ برابر صفر است، کافی است مشتق این عبارت یعنی ۲ را در مقدار عبارت $2x(2x-1)(2x-3)(2x-4) \cdots (2x-12)$ به ازای $x=1$ ضرب کنیم.

$$f'(1) = 2 \times 2 \times 1 \times (-1)(-2) \cdots (-10) = 4 \times 10!$$

۱۰۱۲- گزینه ۳ ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{(x^3 + \sqrt{x})'(x^2 + \sqrt[3]{x}) - (x^2 + \sqrt[3]{x})'(x^3 + \sqrt{x})}{(x^2 + \sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{(3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2 + \sqrt[3]{x}) - (2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(x^3 + \sqrt{x})}{(x^2 + \sqrt[3]{x})^2}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$ ، نتیجه می‌شود:

$$f'(1) = \frac{(3 + \frac{1}{2})(1+1) - (2 + \frac{1}{3})(1+1)}{(1+1)^2} = \frac{1}{12}$$

۱۰۰۳- گزینه ۴ راهحل اول اگر فرض کنیم $H \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه $H = -h^2$ و در نتیجه

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-h^2) - f(2)}{-h^2 - h^2} = \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(2+H) - f(2)}{-H - H^2}$$

$$= \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(2+H) - f(2)}{H} \times \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1+H} = -f'_-(2) = 6$$

راهحل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h^2) - f(2)}{h^2 - h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hf'(2-h^2)}{2h - 4h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-f'(2-h^2))}{1-2h^2}$$

$$= \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{(-f'(2-H))}{1-2H} = -f'_-(2) = 6$$

توجه کنید که $H = h^2$.

۱۰۰۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & x > 2 \\ 3x^2+2x & x < 2 \end{cases}$$

بنابراین

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+4) = 4+4=8$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2+2x) = 12+4=16$$

$$\text{و در نتیجه } f'_+(2) - f'_-(2) = 8 - 16 = -8$$

۱۰۰۵- گزینه ۱ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$f(x) = \frac{x^5+1}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x^4-x^3+x^2-x+1} = x+1$$

بنابراین $f'(x)=1$ و $f'(1000)=1$

۱۰۰۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2ax)\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(ax^2+2)}{3x+1}$$

بنابراین

$$f'(1) = \frac{(2a)(1) - \frac{3}{2\sqrt{2}}(a+2)}{4} = \frac{1}{16}$$

$$16a - 3(a+2) = 1 \Rightarrow 13a = 13 \Rightarrow a = 1$$

۱۰۰۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}x}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{g^3(x)}$$

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -f(x)$$

بنابراین

$$f'(x)g'(x) = \left(\frac{1}{g^3(x)}\right)(-f(x)) = -\frac{f(x)}{g^3(x)}$$

۱۰۱۸- گزینه ۴ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه a همان $f'(a)$ است:

$$f'(x) = -\frac{k}{x^2} \Rightarrow f'(a) = -\frac{k}{a^2}$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[3, 6]$ برابر است با

$$\frac{f(6)-f(3)}{6-3} = \frac{\frac{k}{6}-\frac{k}{3}}{3} = -\frac{k}{18}$$

بنابراین $-\frac{k}{a^2} = -\frac{k}{18}$ پس $a^2 = 18$ و با توجه به اینکه $a \in [3, 6]$ ، در

نتیجه $a = \sqrt{18}$.

۱۰۱۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $y = 4x + 2$ در نقطه $A(1, 6)$ بر

نمودار تابع f مماس است. از طرف دیگر $f'(x) = 3x^2 - 3a$ ، بنابراین $f'(1) = 4$ و $f(1) = 6$ پس

$$\begin{cases} 1-3a+b=6 \\ 3-3a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=4 \end{cases}$$

۱۰۲۰- گزینه ۳ خط d از نقطه‌های $(0, 4)$ و $(2, 0)$ گذشته است، پس

معادله آن به صورت $y = -2x + 4$ است. چون خط d در نقطه‌ای به طول ۱ بر سهمی مماس است، پس مقدار $f'(x)$ به ازای $x=1$ برابر با شیب خط d است:

$$f(x) = ax^2 + c \Rightarrow f'(x) = 2ax \Rightarrow f'(1) = 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

چون نقطه A روی خط $y = -2x + 4$ است، پس عرض آن برابر است با $y = 2$. چون نقطه $A(1, 2)$ روی سهمی $f(x) = -x^2 + c$ است، پس $f(1) = 2$ ، بنابراین $2 = -1 + c$ ، یعنی $c = 3$.

۱۰۲۱- گزینه ۱ مقدار حد خواسته شده، همان $f'(2)$ است. پس ابتدا $f'(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2 \times \frac{-3-4}{(2x-3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{3}{2} \times \sqrt{4} \times (-7) = -21 \quad \text{بنابراین}$$

تجربی - ۹۵

۱۰۲۲- گزینه ۲ تابع f باید در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2) \\ 4a - 2b + 4 = -8 + 2 \Rightarrow 2a - b = -5$$

از طرف دیگر چون تابع f در نقطه $x = -2$ مشتق‌پذیر است، پس مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابرند:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq -2 \\ 3x^2 - 1 & x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(-2) = f'_-(-2) \Rightarrow -4a + b = 11$$

بنابراین از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} 2a - b = -5 \\ -4a + b = 11 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a = -3$ و

$$f(1) = a + b + 4 = 0 \quad \text{و در نتیجه} \quad b = -1$$

تجربی - ۹۷

۱۰۱۳- گزینه ۲ در نزدیکی نقطه $\frac{1}{2}$ ، علامت عبارت $x^2 - x$ منفی

است و $1 < 3x < 2$ ، پس در نزدیکی نقطه $\frac{1}{2}$ تساوی‌های $|x^2 - x| = x - x^2$

و $[3x] = 1$ برقرارند و

$$f(x) = \frac{x-x^2}{x^3-1} = \frac{-x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-x}{x^2+x+1} \quad (x \neq 1)$$

در نتیجه

$$f'(x) = -\frac{x^2+x+1-(x^2+1)x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}-1}{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)^2} = -\frac{12}{49}$$

۱۰۱۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطه $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & x > 1 \\ 6x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 + 3) = 6 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6x) = 6 \end{cases}$$

بنابراین $f'(1) = 6$ ، از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4}{x^3-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(x+1)} = f'(1) \times \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

۱۰۱۵- گزینه ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4)$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)+5}{x-4} = 5 \Rightarrow f(4) = -5, f'(4) = 5$$

از طرف دیگر،

$$g(x) = \frac{x}{f(2x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{f(2x) - 2xf'(2x)}{f^2(2x)}$$

$$g'(2) = \frac{f(4) - 4f'(4)}{f^2(4)} = \frac{-5 - 4 \times 5}{(-5)^2} = -1 \quad \text{بنابراین}$$

۱۰۱۶- گزینه ۳ ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم. اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = 4x + x = 5x$$

$$(g \circ f)(x) = g(5x) = 4(5x) - |5x| = 20x - 5x = 15x$$

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $f(x) = 4x - x = 3x$ و

$$(g \circ f)(x) = g(3x) = 4(3x) - |3x| = 12x - 3x = 9x$$

بنابراین $(g \circ f)(x) = 15x$ و در نتیجه $(g \circ f)'(x) = 15$ و $(g \circ f)'(0) = 15$.

۱۰۱۷- گزینه ۳ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید تابع

$y = x^2 - 6x + m$ ریشه نداشته باشد یا ریشه مضاعف داشته باشد، زیرا اگر

این تابع دو ریشه متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق‌پذیر

نیست. بنابراین

$$\Delta = 36 - 4m \leq 0 \Rightarrow m \geq 9$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۱۰۲۸- گزینه ۲ به جای اینکه حاصل $f'(x) \times g'(f(x))$ را بیابیم، مشتق تابع $g \circ f$ را به دست می آوریم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

بنابراین $(g \circ f)'(x) = 1$.

۱۰۲۹- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[4, 6/25]$ برابر است با

$$\frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{6/25 - 4} = \frac{2/5 - 2}{2/25 - 4} = \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$$

اما آهنگ تغییر لحظه ای تابع در نقطه $x=4$ برابر $f'(4)$ است:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}, \quad \text{مقدار مورد نظر} = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۰۳۰- گزینه ۲ باید معادله برخورد خط و نمودار ریشه مضاعف داشته باشد:

$$(m+3)x^2 + mx = 2x - 4 \Rightarrow (m+3)x^2 + (m-2)x + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 16(m+3) = 0$$

$$m^2 - 20m - 44 = 0 \Rightarrow (m-22)(m+2) = 0 \Rightarrow m_1 = 22, m_2 = -2$$

ریاضی - ۹۰

۱۰۳۱- گزینه ۳ به کمک تعریف مشتق می دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(4) = -7, f'(4) = -\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$y = \frac{1}{x} f(2x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} f(2x) + 2f'(2x) \times \frac{1}{x}$$

$$y'(2) = -\frac{1}{4} f(4) + 2f'(4) \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

ریاضی - ۹۶

۱۰۳۲- گزینه ۳ تابع f در نقطه $x=1$ باید پیوسته باشد و مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b + 1 \end{cases} \Rightarrow a + b + 1 = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 2x + a & x < 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \Rightarrow 2 = 2 + a$$

از دو شرط $a + b + 1 = 0$ و $2 = 2 + a$ نتیجه می شود $a = 0$ و $b = -1$ ، پس

$$f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 + a(1 - \sqrt{2}) + b = 3 - 2\sqrt{2} - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۰۲۳- گزینه ۴ تابع باید در $x=1$ پیوسته باشد، بنابراین $a+b=2$. از طرف دیگر مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه باید برابر باشند:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^{\frac{-1}{2}} & x \geq 1 \\ ax^2 + bx & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{3}{2}} & x > 1 \\ 2ax + b & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = -1 \\ f'_-(1) = 2a + b \end{cases} \Rightarrow 2a + b = -1$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$ نتیجه می شود $a = -3$ و $b = 5$.

خارج از کشور ریاضی - ۸۹

۱۰۲۴- گزینه ۲ ابتدا مقدار جزء صحیح و علامت تابع قدرمطلق را در یک همسایگی راست نقطه $x = -3$ مشخص می کنیم:

$$x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow [x] = -3, \quad |x| = -x \Rightarrow f(x) = (x-3)\sqrt[3]{9x}$$

$$\text{بنابراین } f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(x-3) \text{ پس}$$

$$f'_+(-3) = -3 + \frac{9}{3 \times 9}(-6) = -5$$

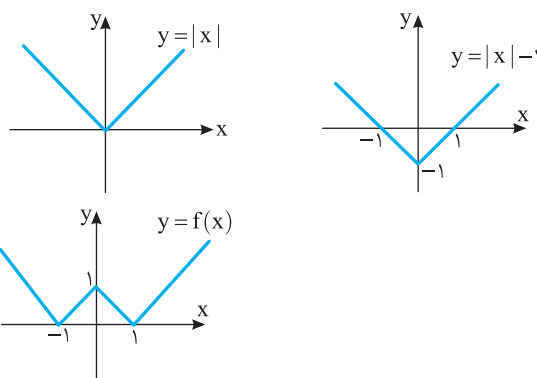
ریاضی - ۹۳

۱۰۲۵- گزینه ۱ صابطه تابع را می توانیم به صورت $f(x) = x|x|$ نشان دهیم که به وضوح در $x=0$ پیوسته است. همچنین تابع در این نقطه مشتق پذیر است، زیرا

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = 0$$

ریاضی - ۸۷

۱۰۲۶- گزینه ۴ نمودار تابع را رسم می کنیم:



از نمودار تابع مشخص است که سه نقطه گوشه ای (و بنابراین مشتق ناپذیر) وجود دارد.

ریاضی - ۸۶

۱۰۲۷- گزینه ۱ از قاعده زنجیری استفاده می کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)\left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$f'(-8) = 2(-2-4)\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\right) = -1$$

ریاضی - ۸۸

۱۰۳۳- گزینه ۳ چون $f(0)=0$ ، پس

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{-\sqrt{x^2}}$$

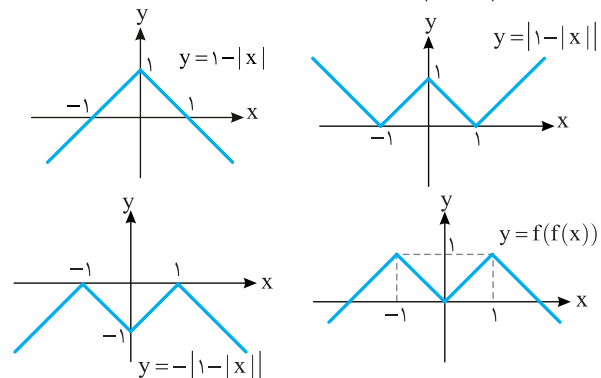
دقت کنید که چون $x < 0$ ، به جای x می‌توانیم $-\sqrt{x^2}$ قرار دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ریاضی - ۸۹

۱۰۳۴- گزینه ۴ به دلیل حضور جزء صحیح‌ها در هر نقطه‌ای که تابع ناپیوسته باشد، مشتق ناپذیر است. یعنی باید نقاطی را بیابیم که $x \in \mathbb{Z}$ یا $x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$. در هر یک از این نقاط یکی از دو تابع $[x]$ و $[x + \frac{1}{3}]$ پیوسته و

دیگری ناپیوسته است، بنابراین مجموع آن دو نیز ناپیوسته است. در بازه

 $(0, 3)$ این نقاط عبارت‌اند از: $\{\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}, 2, \frac{8}{3}\}$ خارج از کشور ریاضی - ۸۶۱۰۳۵- گزینه ۳ توجه کنید که $f(f(x)) = 1 - |1 - |x||$. اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:با توجه به نمودار، $y = 1 - |1 - |x||$ در سه نقطه $x = 0$ و $x = \pm 1$ مشتق ناپذیر است.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱۰۳۶- گزینه ۲ ابتدا تابع‌های f و g را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x & x \geq 0 \\ 5 & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 5x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(5x) & x \geq 0 \\ f(3x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$ نتیجه $(f \circ g)'(x) = 3$.

تجربی - ۹۴

۱۰۳۷- گزینه ۲ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = x + 1 + (g(x))^5 \Rightarrow f'(x) = 1 + 5g'(x)g^4(x) \quad (1)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = 1 + 5g'(0)g^4(0) \Rightarrow 1 = 1 + 5g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$$

اکنون از دو طرف تساوی (۱) مشتق می‌گیریم:

$$f''(x) = 0 + 5g''(x)g^4(x) + 20g'(x)g^3(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} f''(0) = 5g''(0) \times 1^4 + 20 \times 0 \times 1^3 = 5g''(0)$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۰۳۸- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[1, 1/44]$ برابر استبا $\frac{f(1/44) - f(1)}{1/44 - 1} = \frac{1/2 - 0}{0/44 - 1} = \frac{5}{6}$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=1$ نیز این گونه به دست می‌آید:

$$f'(x) = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اختلاف این دو مقدار $\frac{1}{6}$ است. خارج از کشور تجربی - ۹۴ با کمی تغییر۱۰۳۹- گزینه ۴ معادله خط مماس گذرنده از $(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1})$ را می‌نویسیم و مختصات $A(-1, 0)$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2+1}{(x+1)^2} \Rightarrow m = \frac{3}{(\alpha+1)^2} \\ \xrightarrow{\text{معادله مماس}} y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} &= \frac{3}{(\alpha+1)^2}(x - \alpha) \\ \xrightarrow{A(-1, 0)} -\frac{2\alpha-1}{\alpha+1} &= \frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1 - \alpha) \Rightarrow 2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 2 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۰۴۰- گزینه ۱ شیب خط $(m+2)y = mx$ برابر $\frac{m}{m+2}$ است. پسباید مشتق تابع $y = \sqrt{1+x^2}$ در نقطه x_0 واقع بر منحنی برابر $\frac{m}{m+2}$ باشد. یعنی

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{m}{m+2} \Rightarrow \frac{x_0^2}{1+x_0^2} = \frac{m^2}{(m+2)^2} \\ m^2 x_0^2 + m^2 &= (m+2)^2 x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = \frac{m^2}{4(m+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین $m+1 > 0$ پس $m > -1$. ریاضی - ۹۵۱۰۴۱- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ همان تعریفمشتق تابع f در نقطه‌ای به طول یک است. پس ابتدا $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \times \frac{4x+5 - (x+3)}{(x+3)^2}$$

بنابراین $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$ خارج از کشور تجربی - ۹۵۱۰۴۲- گزینه ۲ برای آنکه تابع f در نقطه $x=1$ مشتق پذیر باشد، ابتدا

لازم است در این نقطه پیوسته باشد و همچنین، مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه برابر باشند:

$$\text{شرط پیوستگی: } 3-5=1+a+b \Rightarrow a+b=-3$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x^2} & x > 1 \\ 2x+a & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = -3 \\ f'_-(1) = 2+a \end{cases}$$

$$2+a = -3 \Rightarrow a = -5, b = 2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x) - 1}{x - 3} \times \frac{f(x) + 5}{-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} (-f(x) - 5) \\ &= f'(3) \times (-f(3) - 5) = -\frac{1}{2}(-1 - 5) = 3 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۰۴۹ - گزینه ۲) شیب خط $y = 5x + a$ برابر ۵ است. پس ابتدا نقطه‌ای

از تابع $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ را مشخص می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه (یعنی مشتق تابع) برابر ۵ باشد:

$$f'(x) = 4x - 3 = 5 \Rightarrow x = 2$$

پس خط در نقطه $(2, f(2))$ بر نمودار تابع مماس است. این نقطه متعلق به خط هم هست، پس در معادله خط صدق می‌کند:

$$f(2) = 5 \times 2 + a \Rightarrow 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 6 = 10 + a \Rightarrow 8 = 10 + a \Rightarrow a = -2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۰۵۰ - گزینه ۱) دو نقطه عبارت‌اند از $A(1, 3+a)$ و $B(-1, -3+a)$. معادله خط گذرنده از A و B را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{3+a - (-3+a)}{1 - (-1)} = 3$$

$$AB \text{ معادله: } y - (3+a) = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x + a$$

فرض کنید $f(x) = 3x + a$ و $g(x) = x^2 + ax^2 + 2x$. برای آنکه خط بر منحنی مماس باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$g'(x) = f'(x) \Rightarrow 3x^2 + 2ax + 2 = 3$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow x^3 + ax^2 + 2x = 3x + a$$

$$x^2(x+a) - (x+a) = 0 \Rightarrow (x+a)(x^2-1) = 0$$

از شرط دوم نتیجه می‌گیریم $x = -a$ یا $x = \pm 1$ که با جای گذاری این نتایج در معادله اول مقدار a به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = \pm 1 \Rightarrow 3 \pm 2a = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ x = -a \Rightarrow 3a^2 - 2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1$$

ریاضی - ۹۰

۱۰۵۱ - گزینه ۱) با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع f در $x = -1$ مورد نظر است. برای به دست آوردن مشتق تابع f در نقطه $x = -1$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)\sqrt{x^2-7x}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} ((x-2)\sqrt{x^2-7x}) = -6 \end{aligned}$$

ریاضی - ۹۲

۱۰۵۲ - گزینه ۲) تابع f در نقطه $x = 1$ پیوسته و مشتق پذیر است. پس می‌توان نوشت:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + b = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & x \leq 1 \\ \frac{4}{\sqrt{4x-3}} & x \geq 1 \end{cases}, \quad f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 4 = 3a + b$$

ریاضی - ۹۲

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a = 1$ و $b = 1$.

۱۰۴۳ - گزینه ۴) در یک همسایگی راست $\sqrt{2}$ ، $f(x) = x^3 - 4x$ ، پس در این همسایگی،

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = 3 \times 2 - 4 = 2$$

خارج از کشور تجربی با کمی تغییر - ۹۴

۱۰۴۴ - گزینه ۳) با فرض $g(x) = f(x + \sqrt{1+x^2})$ طبق قاعده زنجیری نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x + \sqrt{1+x^2}) \times (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \times \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۰۴۵ - گزینه ۲) حاصل مورد نظر همان مشتق تابع $y = f(g(x))$ است. پس،

$$y = f(g(x)) = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x} \Rightarrow y' = \frac{3}{x^2}$$

ریاضی - ۹۲

۱۰۴۶ - گزینه ۱) ابتدا ضابطه تابع‌های f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} (a + \frac{3}{4})x & x \geq 0 \\ (\frac{3}{4} - a)x & x \leq 0 \end{cases}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (a + \frac{3}{4}) \times 4x & x \geq 0 \\ (\frac{3}{4} - a) \times 2x & x \leq 0 \end{cases}$$

در نهایت از تابع به دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$(g \circ f)'(x) = \begin{cases} 4a + 3 & x \geq 0 \\ \frac{3}{2} - 2a & x \leq 0 \end{cases}$$

از برابری مشتق چپ و مشتق راست تابع $g \circ f$ در نقطه $x = 0$ نتیجه می‌شود:

$$4a + 3 = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۰۴۷ - گزینه ۲) ابتدا آهنگ تغییر متوسط در بازه $[4, 12]$ و سپس آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه $x = 4$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{4}}{8} = \frac{-\frac{1}{6}}{8} = -\frac{1}{48} \\ f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow \frac{-\frac{1}{48}}{-\frac{1}{32}} = \frac{2}{3}$$

تجربی - ۹۳

۱۰۴۸ - گزینه ۲) ابتدا معادله خط گذرنده از دو نقطه $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ را می‌نویسیم:

$$y - 2 = \frac{3-2}{-1-1}(x-1) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

این خط در نقطه $x = 3$ بر نمودار تابع f مماس است، پس در این نقطه با تابع مشترک است و شیب این خط، همان مشتق تابع در این نقطه است:

$$f(3) = -\frac{1}{2} \times 3 + \frac{5}{2} = \frac{-3}{2} + \frac{5}{2} = 1, \quad f'(3) = \frac{-1}{2}$$

۱۰۵۸- گزینه ۲ اگر $g(x) = f(xf(x))$ ، آن‌گاه طبق قاعده زنجیری،

$$g'(x) = f'(xf(x)) \times (f(x) + xf'(x))$$

$$\xrightarrow{x=2} g'(2) = f'(2f(2)) \times (f(2) + 2f'(2))$$

چون $f(2) = -\frac{1}{2}$ و $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ ، پس $f'(2) = -\frac{1}{4}$ پس

$$f'(2f(2)) = f'(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{-1+2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow g'(2) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} + 2 \times -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

ریاضی - ۸۹

۱۰۵۹- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه

$$[1, 1/21] \text{ محاسبه می‌کنیم: } \frac{\sqrt{1/21} - \sqrt{1}}{1/21 - 1} = \frac{1/21 - 1}{0/21 - 1} = \frac{1}{21} = \frac{1}{21}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای f را در نقطه $x=1$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{2}$$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{21} = \frac{21-2}{42} = \frac{1}{42}$$

تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۱۰۶۰- گزینه ۱ راه‌حل اول شیب نیمساز ناحیه اول برابر ۱ است. پس

ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع $f(x) = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ را پیدا می‌کنیم

که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه (مشتق) برابر یک باشد:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow 4x + m + 1 = 1 \Rightarrow x = -\frac{m}{4}$$

بنابراین خط $y=x$ در نقطه $(-\frac{m}{4}, -\frac{m}{4})$ بر نمودار تابع f مماس شده است.

این نقطه روی نمودار تابع f است. پس مختصات آن در معادله تابع صدق می‌کند:

$$-\frac{m}{4} = 2\left(-\frac{m}{4}\right)^2 + (m+1)\left(-\frac{m}{4}\right) + m + 6$$

$$m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

$m = 12$ قابل قبول نیست، چون در این صورت نقطه تماس $(-3, -3)$

می‌شود که در ناحیه اول قرار ندارد.

راه‌حل دوم شرط آنکه یک تابع بر یک خط مماس باشد آن است که معادله

حاصل از تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف داشته باشد. پس

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 8(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

$$\begin{cases} m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

چون نمودار تابع بر نیمساز ناحیه اول مماس است، پس باید طول نقطه تماس مثبت

باشد. پس $x=1$ و در نتیجه $m=-4$ قابل قبول است. خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۰۵۳- گزینه ۳ با توجه به ضابطه، نقطه مشتق‌ناپذیری تابع $x=0$

است. توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & x > 0 \\ \sqrt{1-x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} & x > 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(0) = \frac{1}{2} \\ f'_-(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow[\text{مشتق‌پذیر}]{x=0 \text{ در } f} f'_+(0) - f'_-(0) = 1$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۰۵۴- گزینه ۴ اگر $x < -1$ ، آن‌گاه $\frac{1}{x} > -1$ ، بنابراین $[\frac{1}{x}] = -1$.

پس تابع f روی بازه $(-\infty, -1)$ تابعی ثابت و مشتق‌پذیر است. گزینه‌های (۱) و (۲)

به راحتی رد می‌شوند، زیرا $\frac{1}{x}$ در نامتناهی نقطه از آن‌ها مقدار صحیح می‌شود.

همچنین در گزینه (۳)، $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x - 1} = -\infty$ ، پس تابع f

روی بازه $[1, +\infty)$ مشتق‌پذیر نیست.

ریاضی - ۹۱

۱۰۵۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{4\} \mid \frac{x+2}{x-4} \in \mathbb{R} - \{-3\}\}$$

$$\frac{x+2}{x-4} = -3 \Rightarrow x+2 = -3x+12 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

بنابراین $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{4, \frac{5}{2}\}$. پس تابع $f \circ g$ در نقاط $x=4$ و $x=\frac{5}{2}$

ریاضی - ۸۴

مشتق‌پذیر نیست.

۱۰۵۶- گزینه ۴ چون حد مخرج کسر صفر است، حد صورت نیز باید

صفر باشد تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. یعنی باید

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(-2+h) + 3) = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(-2+h) = -3 \Rightarrow f(-2) = -3$$

پس حد داده شده همان تعریف مشتق تابع f در نقطه $x=-2$ است:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = f'(-2) = \frac{1}{2}$$

پس

$$g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow g'(x) = (x^2 f(x))' = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$g'(-2) = -4f(-2) + 4f'(-2) = 12 + 2 = 14$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۰۵۷- گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال $f'(2) = -\frac{1}{3}$ ، همچنین اگر

فرض کنیم $g(x) = f(\sqrt{|x|+3})$ ، در یک همسایگی $x=-1$ ،

$$g(x) = f(\sqrt{3-x}) \Rightarrow g'(x) = f'(\sqrt{3-x}) \times \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$\xrightarrow{x=-1} g'(-1) = -\frac{1}{4} f'(2) = \frac{1}{12}$$

ریاضی - ۸۷

۱۰۶۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x-2)(x+1)$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

بنابراین تابع f روی بازه $(3, 4)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۰۶۲- گزینه ۱ تابع مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = -9x^2 + 9x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-

بنابراین تابع f روی بازه $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ صعودی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{3}$ است.

۱۰۶۳- گزینه ۴ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد باید $f'(x) \geq 0$.

مشتق توابع گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

گزینه (۱) $y = x^3 - x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 1 \Rightarrow \Delta = 1 > 0$

گزینه (۲) $y = x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x \Rightarrow \Delta = 4 > 0$

گزینه (۳) $y = x^3 + x^2 - x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow \Delta = 16 > 0$

گزینه (۴) $y = x^3 + x^2 + x - 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \Delta = -8 < 0$

واضح است که مشتق تابع گزینه (۴) یعنی عبارت $3x^2 + 2x + 1$ همواره مثبت است و تابع صعودی است.

۱۰۶۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f''(x) = 2x - 4$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

بنابراین تابع f' روی بازه $(3, 5)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۰۶۵- گزینه ۲ توجه کنید که همواره $3x^2 - x + 1 > 0$ پس $D_f = \mathbb{R}$.

از طرف دیگر، $f'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

پس تابع f روی بازه $(-\infty, \frac{1}{6})$ اکیداً نزولی است.

۱۰۶۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

یعنی تابع f روی بازه $[4, +\infty)$ نزولی است و حداقل مقدار a برابر ۴ است.

۱۰۶۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f = (0, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2\sqrt{2x}}{2x^2\sqrt{2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 2\sqrt{2x} \Rightarrow x^4 = 8x \Rightarrow x = 0, x = 2$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

بنابراین تابع f روی بازه $(0, 2]$ نزولی و روی بازه $[2, +\infty)$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۱۰۶۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-1, 2]$ و

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{x+1} \Rightarrow 2-x = x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$		+	-

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(0) > 0$)

پس تابع f روی بازه $[-1, \frac{1}{2}]$ صعودی و روی بازه $[\frac{1}{2}, 2]$ نزولی است. در

نتیجه حداکثر مقدار $b-a$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۰۶۹- گزینه ۱ مشتق تابع به صورت زیر است:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

پس $f'(x) > 0$ و در نتیجه تابع همواره صعودی است.

۱۰۷۰- گزینه ۲ مشتق تابع به صورت $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3$ است.

برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن همواره نامنفی باشد. پس

$$\Delta = 4a^2 - 36 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq a \leq 3$$

۱۰۷۵- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و برای هر $x > 0$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$3^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است.

x	۰	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

(برای تعیین علامت می‌توانید عددگذاری کنید، مثلاً $(f'(1)) > 0$) بنابراین تابع

روی بازه $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^6, +\infty\right)$ اکیداً نزولی است و حداکثر مقدار a برابر $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ است.

۱۰۷۶- گزینه ۲ مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-1	۰	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+		-

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید، مثلاً $(f'(\sqrt{8})) = -\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$)

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[1, +\infty)$ نزولی و روی بازه $[-1, 1]$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۱۰۷۷- گزینه ۳ تابع مشتق تابع f را به دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

با توجه به مثبت بودن مخرج کسر فوق، جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	۰	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

بنابراین ابتدا تابع در بازه $[0, 1]$ صعودی، سپس در بازه $[1, +\infty)$ نزولی است.

۱۰۷۸- گزینه ۴ از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازه $(1, 3)$

مشتق پذیر و اکیداً صعودی است، بنابراین $f'(x) > 0$. همچنین، مقادیر تابع f منفی‌اند، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. در مورد گزینه (۴) توجه

کنید که $(f^2)'(x) = 2f'(x)f(x) < 0$ پس گزینه (۴) درست نیست.

۱۰۷۱- گزینه ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	

بنابراین تابع f روی بازه $[-1, 1]$ صعودی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

۱۰۷۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = x^2(x-1) - 3x^2 + 5x - 2 = x^2(x-1) - (3x-2)(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2 - 3x + 2) = (x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x-2)$$

بنابراین $D_f = [2, +\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 8x + 5}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}} = \frac{(3x-5)(x-1)}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}}$$

بنابراین f' ریشه‌ای در بازه $[2, +\infty)$ ندارد و روی این بازه همواره مثبت است. بنابراین f روی بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۱۰۷۳- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - 3}{3x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = 3 \Rightarrow x^4 = 27 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{27}$$

پس جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{27}$	۰	$\sqrt[4]{27}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-		+

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -\sqrt[4]{27}]$ و $[\sqrt[4]{27}, +\infty)$ صعودی است و روی بازه‌های $(-\sqrt[4]{27}, 0)$ و $(0, \sqrt[4]{27})$ نزولی است. بنابراین کمترین مقدار a برابر $\sqrt[4]{27}$ است.

۱۰۷۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-3, +\infty)$ و

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2x\sqrt{x+3} - 4}{\sqrt{x+3}}$$

مخرج کسر فوق مثبت است، پس باید صورت آن را تعیین علامت کنیم تا علامت $f'(x)$ معلوم شود. بدین منظور ابتدا ریشه‌های صورت کسر فوق را به دست می‌آوریم:

$$2x\sqrt{x+3} - 4 = 0 \Rightarrow x\sqrt{x+3} = 2 \xrightarrow{x>0} x^2(x+3) = 4$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 + 3x^2 - 3 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)(x+1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

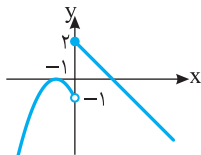
x	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

پس تابع f روی بازه $[1, +\infty)$ صعودی است و کمترین مقدار a برابر ۱ است.

۱۰۸۴-گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. تابع f در $x=0$

پیوسته نیست، پس مشتق پذیر نیست و $f'(-1)=0$. بنابراین $(0, 2)$ و $(-1, 0)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصله آنها برابر است با

$$\sqrt{(-1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$$



۱۰۸۵-گزینه ۳ تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست (نقطه گوشه ای دارد).

عرض نقطه بحرانی برابر است با $f(0)=3$.

۱۰۸۶-گزینه ۲ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ -x & 0 < x < 1 \\ x^2+2x & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & 0 < x < 1 \\ 2x+2 & x < 0 \end{cases}$$

تابع f در نقاط $x=0$ و $x=1$ مشتق پذیر نیست. زیرا

$$\begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) = -1 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+2) = 2 \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \\ f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1 \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \end{cases}$$

از طرف دیگر

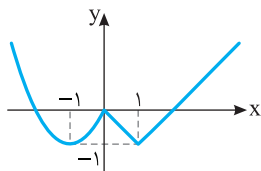
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

بنابراین نقطه های $(1, -1)$ ، $(0, 0)$ و $(-1, -1)$ نقطه های بحرانی تابع f

هستند که مجموع عرض هایشان برابر -2 است.

راه حل دوم نمودار تابع f به صورت زیر است و این تابع در نقطه های $x=0$ و $x=1$ مشتق پذیر نیست و $f'(-1)=0$. پس $(0, 0)$ ، $(1, -1)$ و $(-1, -1)$

نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض های آنها برابر -2 است.



۱۰۸۷-گزینه ۴ تابع f در تمام نقاط دامنه اش مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x+1}-2=0 \Rightarrow x+1=4 \Rightarrow x=3$$

پس $x=3$ طول تنها نقطه بحرانی تابع است که عرض آن برابر است با -5 .

۱۰۸۸-گزینه ۳ توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt{(x^2-1)^2}}$

تابع f در $x=1$ و $x=-1$ مشتق پذیر نیست و $f'(0)=0$. پس تابع سه نقطه بحرانی دارد.

۱۰۷۹-گزینه ۳ به جز در ریشه های مخرج ضابطه تابع f ،

$$f'(x) = \frac{(2ax+2)(3x^2+bx+2b)-(6x+b)(ax^2+2x+b)}{(3x^2+bx+2b)^2} \\ = \frac{(ab-6)x^2+2b(2a-3)x+4b-b^2}{(3x^2+bx+2b)^2}$$

اگر f تابعی ثابت باشد، مشتق آن صفر است. بنابراین چند جمله ای صورت ضابطه f' باید چند جمله ای ثابت صفر باشد. در نتیجه ضریب های این چند جمله ای صفرند:

$$ab-6=0, \quad 2b(2a-3)=0, \quad 4b-b^2=0.$$

توجه کنید که $b \neq 0$ ، زیرا اگر $b=0$ ، تساوی $ab-6=0$ درست نیست.

بنابراین از معادله دوم نتیجه می شود $2a-3=0$ ، یعنی $a=\frac{3}{2}$. بنابراین

$$b-6=0, \quad \text{یعنی } b=6. \quad a+b=\frac{11}{2}.$$

۱۰۸۰-گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{x^2+a^2-2x(x+a)}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-x^2-2ax+a^2}{(x^2+a^2)^2}$$

اگر مشتق تابع f نامنفی باشد، آن گاه تابع f اکیداً صعودی است. پس باید عبارت $-x^2-2ax+a^2$ نامنفی باشد:

$$-x^2-2ax+a^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+2ax-a^2 \leq 0 \Rightarrow (x+a)^2 \leq 2a^2$$

$$-\sqrt{2}a \leq x+a \leq \sqrt{2}a \Rightarrow -(\sqrt{2}+1)a \leq x \leq (\sqrt{2}-1)a$$

پس باید $a \leq 0$ و $-(\sqrt{2}+1)a \geq 1$ تا تابع f روی بازه $[0, 1]$

اکیداً صعودی باشد که چون a عددی مثبت است، پس $-(\sqrt{2}+1)a \leq 0$

برقرار است و در نتیجه

$$(\sqrt{2}-1)a \geq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow a \geq \sqrt{2}+1$$

۱۰۸۱-گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 4x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=0, x=3$$

بنابراین تابع f در $x=0$ و $x=3$ نقطه بحرانی دارد و مجموع مقادیر تابع f در

این نقاط را باید حساب کنیم:

$$f(0)=1, \quad f(3)=-26, \quad f(0)+f(3)=-25$$

۱۰۸۲-گزینه ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و

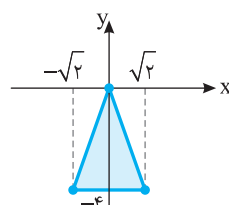
$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین $(0, 0)$ ، $(\sqrt{2}, -4)$ و $(-\sqrt{2}, -4)$

نقاط بحرانی تابع هستند و مساحت مثلثی

که تشکیل می دهند برابر است با

$$\frac{2\sqrt{2} \times 4}{2} = 4\sqrt{2}$$

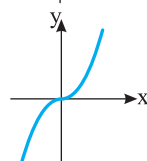


۱۰۸۳-گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت مقابل است و تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق پذیر

است و $f'(0)=0$. پس $x=0$ طول تنها نقطه بحرانی تابع است.



۱۰۸۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = |x^2(x-3)| = |x^2||x-3| = x^2|x-3|$$

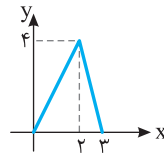
$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > 3 \\ -3x^2 + 6x & x < 3 \end{cases}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

همچنین تابع f در $x=3$ مشتق‌پذیر نیست. پس
 $(0,0)$ ، $(2,4)$ و $(3,0)$ نقاط بحرانی تابع‌اند و

مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با

$$\frac{3 \times 4}{2} = 6$$

۱۰۹۰- گزینه ۳ تابع f در نقطه‌های $x=0$ ، $x=-1$ و $x=1$ مشتق‌پذیر

نیست. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} -x + x^2 - 1 & x \leq -1 \\ -x - x^2 + 1 & -1 < x \leq 0 \\ x - x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ x + x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + 2x & x < -1 \\ -1 - 2x & -1 < x < 0 \\ 1 - 2x & 0 < x < 1 \\ 1 + 2x & x > 1 \end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع f پنج نقطه بحرانی دارد.

۱۰۹۱- گزینه ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس نقاط بحرانی تابع نقاط $(1, -1)$ و $(-1, 3)$ هستند که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر ۲ است.

۱۰۹۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است،

طول نقاط بحرانی آن ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ هستند. از طرف دیگر

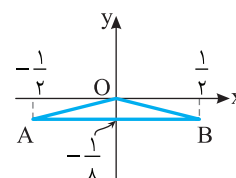
$$f'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$$

بنابراین نقطه‌های بحرانی تابع f نقطه‌های $O(0,0)$ ، $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ و $B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$

هستند. از روی شکل زیر معلوم است که

$$AB=1, \quad OA=OB=\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{17}}{8}$$

بنابراین محیط مثلث OAB برابر است با $1 + 2 \times \frac{\sqrt{17}}{8} = 1 + \frac{\sqrt{17}}{4}$.

۱۰۹۳- گزینه ۲ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین تابع دو نقطه بحرانی به طول‌های $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ دارد.

۱۰۹۴- گزینه ۴ توجه کنید $D_f = (2, +\infty)$ و اگر $x \in D_f$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{-(2x-3)}{2\sqrt{x^2-3x+2}} = -\frac{2x-3}{2(x^2-3x+2)^{3/2}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

و چون $\frac{3}{2}$ در دامنه تابع f نیست و تابع f در همه نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر

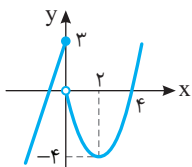
است، پس تابع f نقطه بحرانی ندارد.

۱۰۹۵- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = \frac{4-2x}{3\sqrt{(4x-x^2)^2}}$ تابع f در

$x=0$ و $x=4$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(2)=0$. پس این تابع سه نقطه بحرانی دارد.

۱۰۹۶- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = 2x + \frac{2x}{3\sqrt{(x^2-1)^2}}$ تابع f در

نقطه‌های $x=-1$ و $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(0)=0$. پس تابع f سه نقطه بحرانی دارد.

۱۰۹۷- گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت

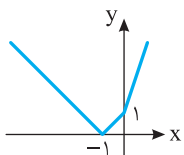
مقابل است و این تابع در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(2)=0$. پس $(0,3)$ و $(2,-4)$

نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر -۱ است.

۱۰۹۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = |2x + x + 1| = 3x + 1$$

$$x \leq 0 \Rightarrow f(x) = |2x - x + 1| = |x + 1|$$

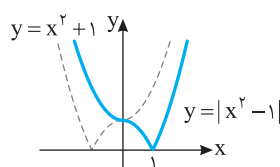


پس نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است و این تابع در نقطه‌های $x=0$ و $x=-1$ مشتق ندارد (نقطه گوشه‌ای) و هیچ‌جا مشتق آن صفر نیست. پس تابع f دو نقطه بحرانی دارد.

۱۰۹۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $f(x) = |x^2 - 1|$ و

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $f(x) = |-x^2 - 1| = x^2 + 1$ بنابراین نمودار تابع f به صورت

زیر است. پس تابع f در نقطه $x=1$ مشتق ندارد (نقطه گوشه‌ای) و در نقطه $x=0$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع دو نقطه بحرانی دارد.



۱۱۰۷- گزینه ۳ توجه کنید که $D_f = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^2 - 3}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & (\text{غ.ق.}) \\ x=-1 \end{cases}$$

پس $x=-1$ طول اکسترم نسبی تابع f است که با توجه به صورت مسئله طول ماکزیم نسبی است. بنابراین $f(-1) = \sqrt{2}$ مقدار ماکزیم نسبی تابع است.

۱۱۰۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

پس $x=4$ طول اکسترم (مینیم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(4) = -4$.

۱۱۰۹- گزینه ۲ چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، پس نقاط

اکسترم نسبی تابع f جوابهای معادله $f'(x) = 0$ هستند. توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'(x)		+	-	+

بنابراین تابع f در نقطه ۱ ماکزیم نسبی و در نقطه ۳ مینیم نسبی دارد. یعنی $a=3$ و $b=1$ پس $a-b=2$.

۱۱۱۰- گزینه ۱ چون تابع f روی دامنه اش مشتق پذیر است، پس

نقطه های اکسترم نسبی آن جوابهای معادله $f'(x) = 0$ هستند. بنابراین $f'(1) = 0$ اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x-a)(x+1) - (1)(x^2 - ax)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - a}{(x+1)^2}$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{1+2-a}{4} = 0 \Rightarrow a = 3$$

۱۱۱۱- گزینه ۴ توجه کنید که

x	$-\infty$	-2	-1	0	3	$+\infty$
f'(x)		-	+	-	+	+

تابع f' در نقطه های -2، -1 و صفر برابر صفر است و در این نقطه ها تغییر علامت می دهد. بنابراین تابع f در نقطه های -2، -1 و صفر اکسترم نسبی دارد. مجموع طول این نقطه ها -3 است.

۱۱۱۲- گزینه ۱ ابتدا طول نقاط ماکزیم نسبی تابع را پیدا می کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2)$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'(x)		-	+	-	+

پس تابع f در نقطه های $x=0$ و $x=2$ مینیم نسبی و در نقطه $x=1$ ماکزیم نسبی دارد. مقدار ماکزیم نسبی تابع برابر است با $f(1) = -1$.

۱۱۱۳- گزینه ۴ ابتدا طول نقاط اکسترم نسبی تابع f را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 3 - 2x(x+1)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3, \quad x = 1$$

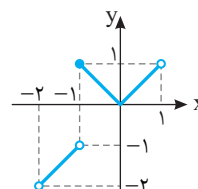
پس تابع f در نقاط $x = -3$ و $x = 1$ اکسترم نسبی دارد.

$$f(-3)f(1) = -\frac{2}{12} \times \frac{2}{4} = -\frac{1}{12}$$

۱۱۰۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x & -2 < x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و تابع f در $x=0$ و $x=-1$ نقطه بحرانی دارد، زیرا در نقطه $x=-1$ پیوسته نیست و مشتق پذیر هم نیست و در نقطه $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد، پس مشتق پذیر نیست.



۱۱۰۱- گزینه ۱ تابع f در نقطه های $x=0$ و $x=2$ به ترتیب

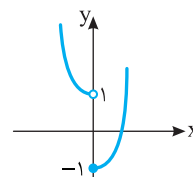
ماکزیم نسبی و مینیم نسبی دارد. بنابراین f دو نقطه اکسترم نسبی دارد.

۱۱۰۲- گزینه ۳ تابع f' در نقطه های -4، -1، 2 و 5 برابر صفر است

و در نقطه های -4، -1، 2 تغییر علامت می دهد. در نتیجه، این نقطه ها، نقطه های اکسترم نسبی تابع f هستند و حاصل ضرب آنها برابر 8 است.

۱۱۰۳- گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که تابع

فقط در نقطه $x=0$ مینیم نسبی دارد و در هیچ نقطه ای ماکزیم نسبی ندارد.



۱۱۰۴- گزینه ۱ توجه کنید که

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
f'(x)		+	-	-	+	+

چون $f'(3) = 0$ و تغییر علامت تابع f' در نقطه $x=3$ از منفی به مثبت است، پس تابع f در نقطه $x=3$ مینیم نسبی دارد.

۱۱۰۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

عبارت $f'(x)$ در $x=0$ تغییر علامت نمی دهد ولی در $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ تغییر علامت می دهد. پس تابع f دو نقطه اکسترم نسبی به طول های $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ دارد و حاصل ضرب طول آنها برابر -3 است.

۱۱۰۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		+	-

پس تابع f در $x=0$ ماکزیم نسبی دارد و این ماکزیم برابر $f(0) = -1$ است.

۱۱۱۴- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x)=0 \Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطه اکسترم (مینیم) نسبی تابع f است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(1)=-2$.

۱۱۱۵- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطه اکسترم نسبی تابع f است.

۱۱۱۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = [\frac{1}{2}, +\infty)$ و

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{2x-1}=1 \Rightarrow 2x-1=1 \Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطه اکسترم (مینیم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(1)=0$.

x	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$
		نسبی	

۱۱۱۷- گزینه ۱ توجه کنید که $f'(x) = x^2 + 2ax + 1$. ضریب x^2 در

$f'(x)$ مثبت است، پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد، بنابراین برای اینکه تابع f اکسترم نسبی نداشته باشد، باید $f'(x) \geq 0$ یعنی

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4a^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

۱۱۱۸- گزینه ۴ توجه کنید که تابع f در نقطه $x=7$ مشتق‌پذیر است و

برای اینکه تابع در این نقطه اکسترم نسبی داشته باشد باید $f'(7)=0$. پس

$$f'(x) = a - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}} \Rightarrow f'(7)=0 \Rightarrow a - \frac{1}{3\sqrt[3]{8^4}} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{48}$$

۱۱۱۹- گزینه ۲ چون $(-1, -1)$ نقطه اکسترم نسبی تابع f است و تابع f

در نقطه -1 مشتق‌پذیر است، پس $f'(-1)=-1$ و $f(-1)=-1$. از طرف

$$\text{دیگر، } f'(x) = \frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}.$$

بنابراین

$$\begin{cases} f(-1)=-1 \\ f'(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-a+b}{2}=-1 \\ \frac{2a+2(-a+b)}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=0.$$

پس $a+b=2$.

۱۱۲۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = (0, +\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{k\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(kx+1)}{x} = \frac{2kx - (kx+1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{kx-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow kx=1 \Rightarrow x=\frac{1}{k}$$

پس طول نقطه مینیم نسبی تابع f برابر $\frac{1}{k}$ است.

اکنون توجه کنید که

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = 4 \Rightarrow \frac{k \times \frac{1}{k} + 1}{\sqrt{\frac{1}{k}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{k}}} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{k} = 4 \Rightarrow k=4$$

۱۱۲۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2), \quad f'(x)=0 \Rightarrow x=-1, x=2$$

چون f' در نقطه‌های $x=2$ و $x=-1$ تغییر علامت می‌دهد، پس نقاط $(-1, -1)$ و $(2, -28)$ نقاط اکسترم نسبی تابع f هستند و فاصله آن‌ها برابر است با $\sqrt{(2+1)^2 + (-28+1)^2} = \sqrt{728}$.

۱۱۲۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ اکسترم نسبی دارد. حاصل جمع مقادیر

$$f(1) \text{ و } f(-1) \text{ را می‌خواهیم: } f(1)+f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow f(1)+f(-1) = \frac{1}{3}$$

۱۱۲۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)+a}{4\left(\frac{1}{2}\right)+a+1} = \frac{2+a}{2+a} = 1, \quad a \neq -2$$

از طرف دیگر تابع در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. پس مشتق آن در

$$x=\frac{1}{2} \text{ باید صفر باشد:}$$

$$f'(x) = \frac{4(4x^2+a+1) - 8x(4x+a)}{(4x^2+a+1)^2} = \frac{-16x^2 - 8ax + 4a + 4}{(4x^2+a+1)^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-4 - 4a + 4a + 4}{(2+a)^2} = 0, \quad a \neq -2$$

پس اگر $a \neq -2$ ، آن‌گاه $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ و $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ و در نتیجه $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ نقطه

اکسترم نسبی تابع f است.

۱۱۲۴- گزینه ۳ ابتدا طول نقاط اکسترم‌های نسبی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+k^2}$$

$$f'(x) = \frac{5(x^2+k^2-2x^2)}{(x^2+k^2)^2} = \frac{5(k^2-x^2)}{(x^2+k^2)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm k$$

پس نقاط $A(k, \frac{5}{2k})$ و $B(-k, \frac{-5}{2k})$ نقاط اکسترم نسبی تابع هستند.

اختلاف مقدار ماکزیم و مینیم نسبی تابع برابر است با $|\frac{5}{2k} - \frac{-5}{2k}|$. بنابراین

$$|\frac{5}{k}| = 1 \Rightarrow |k| = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{2}$$

۱۱۲۵- گزینه ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطه

اکسترم نسبی‌اش برابر صفر است: $f'(x) = 3ax^2 - b \Rightarrow f'(-1) = 3a - b = 0$

از طرف دیگر مختصات نقطه اکسترم نسبی در معادله تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1) = 4 \Rightarrow -a + b + 2 = 4 \Rightarrow -a + b = 2$$

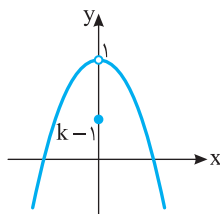
بنابراین $a=1$ و $b=3$ ، در نتیجه $ab=3$.

۱۱۳۰- گزینه ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است که نقطه $(0, k-1)$

هرجایی روی محور y می تواند باشد. چون تابع مینیمم نسبی دارد، پس این نقطه باید پایین تر از نقطه $(0, 1)$ باشد چون در غیر این صورت تابع در نقطه

$x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد. بنابراین

$$k-1 < 1 \Rightarrow k < 2$$



۱۱۳۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x=0, x=4 \text{ (غ.ق.)}$$

پس برای مشخص کردن مقدار مینیمم مطلق باید مقادیر $f(0)$ ، $f(4)$ و

$f(-1)$ را مقایسه کنیم: $f(0)=0$ ، $f(-1)=-7$ و $f(4)=-27$. پس

مقدار مینیمم مطلق تابع برابر -27 است.

۱۱۳۲- گزینه ۲ توجه کنید که تابع f همه جا مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

بنابراین باید مقادیر $f(1)$ ، $f(-1)$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمهای مطلق

تابع مشخص شوند: $f(1)=k-2$ ، $f(-1)=k+2$ و $f(2)=k+2$.

پس $k+2$ ماکزیمم مطلق و $k-2$ مینیمم مطلق تابع f در بازه $[-1, 2]$

هستند. بنابراین

$$k+2+k-2=4 \Rightarrow k=2$$

۱۱۳۳- گزینه ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{4(x^2+1-2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس باید مقادیر $f(1)$ ، $f(-1)$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمهای مطلق تابع

مشخص شوند: $f(1)=2$ ، $f(-1)=-2$ و $f(2)=\frac{1}{5}$. پس ماکزیمم مطلق تابع

برابر $\frac{1}{5}$ و مینیمم مطلق آن برابر -2 است و حاصل ضرب آنها برابر -4 است.

۱۱۳۴- گزینه ۴ تابع f مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 9x^2 = x^2(5x^2 - 4x - 9)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0, \quad x=-1, \quad x=\frac{9}{5} \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین باید مقادیر $f(-2)$ ، $f(-1)$ و $f(1)$ را مقایسه کنیم تا مقدار

ماکزیمم مطلق تابع معلوم شود (توجه کنید که چون f' در نقطه $x=0$ تغییر

علامت نمی دهد، مقدار $f(0)$ را حساب نمی کنیم):

$$f(-2)=-15, \quad f(-1)=10, \quad f(1)=6$$

بنابراین $(-1, 10)$ نقطه ماکزیمم مطلق تابع f روی بازه $[-2, 1]$ است.

بنابراین $a=-1$ و $b=10$ و $a+b=9$.

۱۱۲۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 3a^2x^2 + 4ax + 1$ و چون

تابع f در نقطه ای به طول $x=-1$ ماکزیمم نسبی دارد و در این نقطه مشتق پذیر است، پس $f'(-1)=0$. در نتیجه

$$3a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow a=1, \quad a=\frac{1}{3}$$

اگر $a=1$ ، آن گاه $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ و

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

پس تابع f در نقطه ای به طول $x=-1$ ماکزیمم نسبی دارد. اگر $a=\frac{1}{3}$ ، آن گاه

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

پس تابع f در نقطه ای به طول $x=-1$ مینیمم نسبی دارد. بنابراین $a=1$ تنها

مقدار ممکن برای a است.

۱۱۲۷- گزینه ۲ توجه کنید که $D_f = [3, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\sqrt{x-3} = \sqrt{x} \Rightarrow 4(x-3) = x \Rightarrow x=4$$

پس $x=4$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر

است با $f(4)=3$.

۱۱۲۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} - 1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow x=-1, \quad x=-3$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل زیر است.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+	+

بنابراین $x=-3$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است و مقدار ماکزیمم نسبی

تابع برابر $f(-3)=0$ است.

۱۱۲۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 36x = x(4x^2 + 3ax + 36)$$

برای اینکه تابع f سه نقطه اکسترم نسبی داشته باشد باید علامت $f'(x)$ در

سه نقطه تغییر کند. بنابراین باید معادله $f'(x)=0$ سه جواب داشته باشد.

چون $x=0$ یک جواب این معادله است، پس باید معادله $4x^2 + 3ax + 36=0$

دو جواب غیر صفر داشته باشد. پس

$$\Delta = 9a^2 - 16 \times 36 > 0 \Rightarrow a^2 > \frac{36 \times 16}{9} \Rightarrow |a| > 8$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} -(2x+4) & -1 < x < 0 \\ -(2x-4) & 0 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

اکنون توجه کنید که $f(-1)=3$ ، $f(0)=0$ ، $f(2)=4$ و $f(3)=3$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۴ است.

۱۱۳۹-گزینه ۳ توجه کنید که $D_f = [0, 8]$ و تابع f روی بازه $(0, 8)$

مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{8-x} = \sqrt{x} \Rightarrow 8-x = x \Rightarrow x = 4$$

پس باید مقادیر $f(0)$ ، $f(4)$ و $f(8)$ را مقایسه کنیم تا کمترین و بیشترین مقدار تابع معین شوند:

$$f(0) = \sqrt{8}, \quad f(4) = \sqrt{8}, \quad f(8) = 4$$

بنابراین ۴ و $\sqrt{8}$ به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع هستند و حاصل ضرب آن‌ها برابر $8\sqrt{2}$ است.

۱۱۴۰-گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-2, 2]$ و تابع f روی بازه

 $(-2, 2)$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} + x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = -x$$

$$\xrightarrow{x \leq 0} 4-x^2 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ (غ.ق.)} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین باید $f(-2)$ ، $f(-\sqrt{2})$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع در بازه $[-2, 2]$ مشخص شوند: $f(-2) = -2$ ، $f(2) = 2$ و $f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$. بنابراین کمترین مقدار و بیشترین مقدار تابع است و نسبت آن‌ها برابر $-\sqrt{2}$ است.

۱۱۴۱-گزینه ۴ تابعی است که در تمام نقاط مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 3, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{3} \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

پس باید مقادیر $f(1)$ ، $f(3)$ و $f(4)$ را مقایسه کنیم تا ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f روی بازه $[1, 4]$ مشخص شوند:

$$f(1) = -5, \quad f(3) = -17, \quad f(4) = -11$$

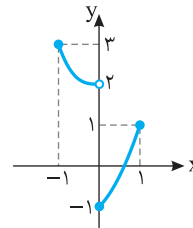
بنابراین در بازه داده شده ماکزیمم مطلق تابع ۵- و مینیمم مطلق آن ۱۷- است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۲ است.

۱۱۴۲-گزینه ۲ تابع f در تمام نقاط مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 4x^2 + 22x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 8) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس باید مقادیر $f(1)$ ، $f(-1)$ و $f(0)$ را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق تابع را معین کنیم: $f(0) = 1$ ، $f(1) = 18$ و $f(-1) = 18$. پس ماکزیمم مطلق تابع ۱۸ و مینیمم مطلق آن ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۷ است.

۱۱۳۵-گزینه ۲ راه حل اول نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این شکل معلوم است که ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق تابع f برابر ۱- است، پس مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



راه حل دوم تابع $y = 2 - x^3$ روی بازه $[-1, 0]$ اکیداً نزولی است.

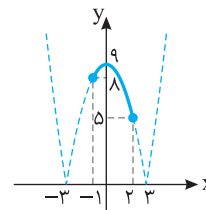
($y' = -3x^2 < 0$) و مقادیرش در بازه $[f(0), f(-1)]$ یعنی $[2, 3]$ هستند.

تابع $y = x^2 + x - 1$ روی بازه $[0, 1]$ اکیداً صعودی است ($y' = 2x + 1 > 0$) و

مقادیرش در بازه $[f(0), f(1)]$ یعنی $[-1, 1]$ هستند. بنابراین ماکزیمم مطلق

تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق آن برابر ۱- است، که مجموعشان می‌شود ۲.

۱۱۳۶-گزینه ۳ راه حل اول نمودار تابع به صورت زیر است.



راه حل دوم با توجه به اینکه در بازه $[-1, 2]$ مقدار $x^2 - 9$ منفی است، پس

$$f(x) = |x^2 - 9| = 9 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس باید مقادیر $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا کمترین مقدار تابع معین شود:

$$f(0) = 9, \quad f(-1) = 8, \quad f(2) = 5$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع در بازه $[-1, 2]$ برابر ۵ است.

۱۱۳۷-گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 + 3x & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & 0 < x < 1 \\ 3x^2 + 3 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

پس تابع f در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. بنابراین باید مقادیر $f(1)$ ، $f(-1)$

و $f(0)$ را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق تابع مشخص شوند:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -2, \quad f(-1) = -4$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر صفر و مینیمم مطلق آن برابر ۴- است و مجموع این دو مقدار برابر ۴- است.

۱۱۳۸-گزینه ۲ توجه کنید که تابع f در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر

نیست. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + 4x) & -1 \leq x < 0 \\ -(x^2 - 4x) & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

۱۱۴۸- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = [0, 5]$ و تابع f روی بازه $(0, 5)$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x} \Rightarrow 4(5-x) = x \Rightarrow x = 4$$

پس باید مقادیر $f(0), f(4), f(5)$ را با هم مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به دست آیند:

$$f(0) = \sqrt{5}, \quad f(4) = 5, \quad f(5) = 2\sqrt{5}$$

پس بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به ترتیب برابر است با 5 و $\sqrt{5}$. بنابراین حاصل ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f برابر $5\sqrt{5}$ است.

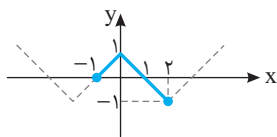
۱۱۴۹- گزینه ۲ توجه کنید که $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$ پس

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

پس کمترین مقدار تابع f روی بازه $(0, +\infty)$ به ازای $x = 2$ به دست می آید و برابر است با $f(2) = 12$.

۱۱۵۰- گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است و حداکثر مقدار تابع در بازه $[-1, 2]$ برابر ۱ است.



۱۱۵۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $y = 4 - x$ و در نتیجه

$xy = x(4 - x)$. بنابراین بیشترین مقدار تابع $f(x) = 4x - x^2$ روی بازه $[0, 1]$ را می خواهیم:

$$f'(x) = 4 - 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 3 = f_{\max}$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن xy برابر ۳ است.

۱۱۵۲- گزینه ۲ فرض کنید طول ضلع های باغچه x و y باشند (شکل را

بینید). در این صورت، طبق فرض $x + y + \frac{x}{2} = 120$ ، یعنی $\frac{3}{2}x + y = 120$.

بنابراین

$$xy = x(120 - \frac{3}{2}x) = \text{مساحت باغچه}$$

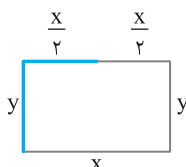
بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = x(120 - \frac{3}{2}x)$ را پیدا کنیم. توجه

کنید که

$$f'(x) = 120 - 3x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت باغچه به ازای $x = 40$ به دست می آید و برابر است با

$$40 \times 60 = 2400 = \text{مساحت باغچه}$$



۱۱۴۳- گزینه ۴ توجه کنید که $f(x) = 2 + \frac{x^2}{x+1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -2 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین باید مقادیر $f(-\frac{1}{2}), f(0), f(2)$ را حساب کنیم:

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}, \quad f(0) = 2, \quad f(2) = \frac{10}{3}$$

در نتیجه، کمترین مقدار تابع f روی بازه $[-\frac{1}{2}, 2]$ برابر ۲ است.

۱۱۴۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 3x^2 - 6x$ پس

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2$$

پس برای پیدا کردن مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازه $[-1, 2]$ باید مقادیر

$f(0), f(2), f(-1)$ را مقایسه کنیم. چون $f(0) = a$ و $f(-1) = a - 4$

$f(2) = a - 4$ ، بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازه $[-1, 2]$ برابر

$a - 4$ است. پس

$$a - 4 = 4 \Rightarrow a = 8$$

۱۱۴۵- گزینه ۲ تابع f مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 10x^9 - 10 = 10(x^9 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین باید مقادیر $f(1), f(-1), f(2)$ را مقایسه کنیم تا مقدار مینیمم

مطلق تابع معلوم شود: $f(1) = -8, f(-1) = 12, f(2) = 1005$ پس

$(1, -8)$ نقطه مینیمم مطلق تابع f روی بازه $[-1, 2]$ است. بنابراین $a = 1$,

$$a + b = -7 \quad \text{و} \quad b = -8$$

۱۱۴۶- گزینه ۲ توجه کنید که $f'(x) = 3mx^2 + 6mx$ چون

$$f''(x) = 6mx + 6m, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

پس تنها نقطه بحرانی تابع f' نقطه $x = -1$ است و بیشترین مقدار تابع f'

به ازای $x = -1$ به دست می آید:

$$f'(-1) = 12 \Rightarrow 3m - 6m = 12 \Rightarrow m = -4$$

۱۱۴۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & 2 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 3x - 2 & 0 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & 2 < x < 3 \\ -2x + 3 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

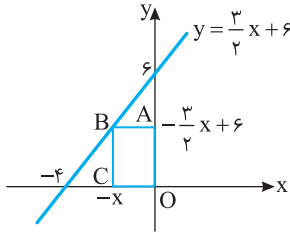
بنابراین تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر نیست و $f'(\frac{3}{2}) = 0$ پس باید

مقادیر $f(0), f(2), f(3), f(\frac{3}{2})$ را مقایسه کنیم تا مقادیر اکسترم های مطلق

تابع به دست آیند: $f(0) = -2, f(2) = 0, f(3) = 2, f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$ بنابراین

مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر -۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۴ است.

پس باید بیشترین مقدار تابع $y = x(-\frac{3}{4}x + 6)$ را پیدا کنیم. چون $y' = -3x + 6$ ، اگر $y' = 0$ ، آن‌گاه $x = 2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع y ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $OABC$ به ازای $x = 2$ به دست می‌آید و برابر است با $2 \times 3 = 6$.



۱۱۵۸- گزینه ۴ تابع هزینه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$C = 100(xl) + 60(2xh + 2lh) = 100xl + 120h(x+l)$$

$$= 100x(2x) + 120h(x+2x) = 200x^2 + 360xh \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که

$$100 = x \times l \times h \Rightarrow x(2x)h = 100 \Rightarrow h = \frac{50}{x^2} \quad (2)$$

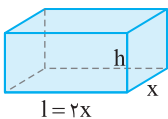
با جای گذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) به دست می‌آید

$$C(x) = 200x^2 + 360x \left(\frac{50}{x^2} \right) = 200x^2 + \frac{18000}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

نقطه بحرانی تابع C را به دست می‌آوریم:

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 400x - \frac{18000}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{400x^3 - 18000}{x^2} = 0$$

$$400x^3 - 18000 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$



$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

به دست می‌آید.

۱۱۵۹- گزینه ۴ اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، آن‌گاه

$$C = 2000t + (4v^2)t$$

$$C = 2000 \left(\frac{x}{v} \right) + 4v^2 \left(\frac{x}{v} \right)$$

$$C(v) = \frac{2000}{v} + 4v$$

بنابراین

$$C'(v) = -\frac{2000}{v^2} + 4, \quad C'(v) = 0 \Rightarrow v^2 = 500 \Rightarrow v = 10\sqrt{5}$$

۱۱۶۰- گزینه ۴ باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

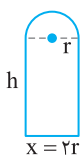
$$\text{محیط} = 9 \Rightarrow 2h + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = 9 \Rightarrow 2h + 2r + \pi r = 9$$

$$h = \frac{9}{2} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت نیم دایره + مساحت مستطیل S : مساحت پنجره

$$S(r) = 2r \left(\frac{9}{2} - r - \frac{\pi r}{2} \right) + \frac{1}{2} \pi r^2 = -\left(\frac{\pi+4}{2} \right) r^2 + 9r$$

$$S'(r) = -(\pi+4)r + 9, \quad S'(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{9}{\pi+4}$$



۱۱۵۳- گزینه ۳ فرض کنید شعاع‌های دایره‌ها r_1 و r_2 باشد. در این صورت

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 10\pi \Rightarrow r_1 + r_2 = 5$$

از طرف دیگر،

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 + (5-r_1)^2) = \pi(2r_1^2 - 10r_1 + 25)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(r_1) = 2r_1^2 - 10r_1 + 25$ را پیدا کنیم. چون

$$f'(r_1) = 4r_1 - 10, \quad f'(r_1) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{5}{2}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f وقتی به دست می‌آید که $r_1 = \frac{5}{2}$ و برابر است با

$$\frac{25}{2}. \text{ در نتیجه مجموع مساحت‌های دایره‌ها حداقل } \frac{25\pi}{2} \text{ است.}$$

۱۱۵۴- گزینه ۳ فاصله نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3-x)^2 + (x+6-3)^2} = \sqrt{5x^2 + 6x + 9}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{5x^2 + 6x + 9}$ را پیدا کنیم. توجه

کنید که همواره $5x^2 + 6x + 9 > 0$

$$f'(x) = \frac{10x+6}{2\sqrt{5x^2+6x+9}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{3}{5}$

به دست می‌آید.

۱۱۵۵- گزینه ۲ مختصات نقطه B به صورت (x, x^2) است. بنابراین

$$AB = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-0)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$$

اگر $y = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$ ، آن‌گاه $y' = \frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}$ و در نتیجه

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Rightarrow 2(x^3 - 1) + (x - 1) = 0$$

$$(x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع y به ازای $x = 1$ به دست می‌آید. به این ترتیب،

B نقطه $(1, 1)$ است.

۱۱۵۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که خط d از نقطه‌های $(4, 0)$ و $(0, 4)$

گذشته است، پس معادله‌اش به صورت $y = 4 - x$ است. در نتیجه

$$x^2 + y^2 = x^2 + (4-x)^2 = 2(x^2 - 4x + 8)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = 2(x^2 - 4x + 8)$ را پیدا کنیم. توجه

کنید که

$$f'(x) = 4x - 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x = 2$ به دست می‌آید و برابر است با ۸.

۱۱۵۷- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه C برابر $-x$ باشد. در این

صورت طول نقطه B هم برابر $-x$ است. نقطه B روی خطی است که از

نقطه‌های $(-4, 0)$ و $(0, 6)$ می‌گذرد. معادله این خط $y = \frac{3}{2}x + 6$ است.

بنابراین عرض نقطه B برابر $-\frac{3}{2}x + 6$ است. به این ترتیب،

$$OABC \text{ مساحت مستطیل } = x \left(-\frac{3}{2}x + 6 \right)$$

۱۱۶۵- گزینه ۴ فرض کنید B نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=x^2$

باشد. در این صورت مختصات نقطه B به صورت $(x, \frac{x^2}{2})$ است. بنابراین

$$AB = \sqrt{(x-4)^2 + (\frac{x^2}{2}-1)^2}$$

اگر $y = \sqrt{(x-4)^2 + (\frac{x^2}{2}-1)^2}$ آن گاه

$$y' = \frac{x-4 + x(\frac{x^2}{2}-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (\frac{x^2}{2}-1)^2}} = \frac{\frac{x^3}{2} - 4}{\sqrt{(x-4)^2 + (\frac{x^2}{2}-1)^2}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x=2$ به دست می‌آید. به این ترتیب، B نقطه $(2, 2)$ است.

۱۱۶۶- گزینه ۱ با نمادگذاری شکل زیر معلوم می‌شود که بنابر قضیه

فیثاغورس $y^2 + x^2 = 1$ پس $y = \sqrt{1-x^2}$ در نتیجه مساحت ذوزنقه مورد نظر

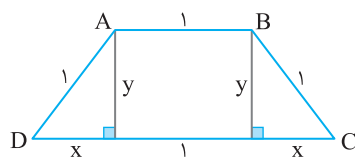
برابر است با $\frac{1}{2}y(1+1+2x) = y(1+x) = \sqrt{1-x^2}(1+x)$ بنابراین باید

بیشترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}(1+x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{-x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f به ازای $x = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید و در این صورت



. $CD=2$

۱۱۶۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\text{حجم استوانه} = 2 \text{ lit} = 2000 \text{ cm}^3 \Rightarrow \pi r^2 h = 2000 \Rightarrow h = \frac{2000}{\pi r^2}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده = $S =$ مساحت کل استوانه

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{2000}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{4000}{r}$$

پس

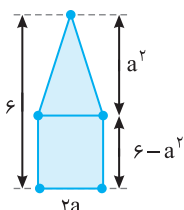
$$S'(r) = 2\pi r - \frac{4000}{r^2}, \quad S'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2000}{\pi}}$$

۱۱۶۸- گزینه ۳ این پنج ضلعی از یک مستطیل به ابعاد $2a$ و $6-a^2$ و

یک مثلث به ارتفاع a^2 و قاعده $2a$ تشکیل شده است. بنابراین مساحت آن

برابر است با $S(a) = 2a(6-a^2) + \frac{1}{2}a^2(2a) = 12a - a^3$ بنابراین

(غ.ق.ق.) $a = -2$ ، $a = 2$ ، $a = 4$ ، $a = 12$ ، $S'(a) = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ ، $S'(a) = 12 - 3a^2$



پس نقطه $(2, 16)$ ، نقطه ماکزیمم تابع S

است و در نتیجه بیشترین مقدار مساحت

پنج ضلعی برابر ۱۶ است.

۱۱۶۱- گزینه ۴ توجه کنید که $y = \frac{f}{x}$ و در نتیجه $x + y = x + \frac{f}{x}$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{f}{x}$ با دامنه $[\frac{1}{2}, 3]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x) = 1 - \frac{f}{x^2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = f \Rightarrow x = 2, \quad x = -2 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس برای پیدا کردن مینیمم مطلق تابع f روی بازه $[\frac{1}{2}, 3]$ باید مقادیر $f(\frac{1}{2})$ ،

$$f(2) \text{ و } f(3) \text{ را مقایسه کنیم: } f(2) = 4 = f_{\min}, \quad f(3) = \frac{13}{3}, \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{17}{2}$$

پس کمترین مقدار $x+y$ برابر ۴ است.

۱۱۶۲- گزینه ۲ چون $x-y=2$ ، پس $y=x-2$ ، در نتیجه

$$x^3 - y^3 = x^3 - (x-2)^3 \Rightarrow f(x) = 6x^2 - 12x + 8 \Rightarrow f'(x) = 12x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $x=1$ به دست می‌آید و برابر است با

$$f(1) = 2$$

۱۱۶۳- گزینه ۱ فرض می‌کنیم طول ضلع زمین در امتداد شمال- جنوب

برابر X و در امتداد شرق- غرب برابر Y باشد. در این صورت، $XY = 10000$

و هزینه نرده کشی برابر است با

$$S = 15000(2x) + 6000(2y) = 30000x + 12000y = 3 \times 10^4 x + \frac{12 \times 10^4}{x}$$

بنابراین $S' = 3 \times 10^4 - \frac{12 \times 10^4}{x^2}$ و اگر $S' = 0$ ، $x = 200$ ، بنابراین کمترین

مقدار تابع S به ازای $x = 200$ به دست می‌آید. در این حالت، طول یک ضلع

زمین برابر ۲۰۰ است و طول ضلع دیگر زمین برابر است با $\frac{10000}{200} = 50$

بنابراین محیط زمین برابر است با $2(200+50) = 500$

۱۱۶۴- گزینه ۱ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -1$ و

$$x_1 x_2 = -(m^2 + m + 1)$$

بنابراین

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2)$$

$$= -(1 + 3(m^2 + m + 1)) = -3m^2 - 3m - 4$$

بنابراین باید بیشترین مقدار ممکن تابع $f(m) = -3m^2 - 3m - 4$ را پیدا

کنیم. توجه کنید که

$$f'(m) = -6m - 3, \quad f'(m) = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} f(m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(m) = -\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به ازای $m = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آید و برابر است با

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{13}{4}$$

چون تابع f' در $x=4$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس تابع f فقط در نقطه $x=1$ اکسترمم نسبی دارد. همچنین،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به ازای $x=1$ به دست می‌آید و برابر است با

$$f(1) = 216$$

۱۱۷۳- گزینه ۳ فرض کنید P نقطه (x, y)

باشد. چون نقطه P روی سهمی به معادله $y = x^2 - 5x$ است، پس P نقطه $(x, x^2 - 5x)$ است و مجموع

مختصات P برابر است با $x + x^2 - 5x = x^2 - 4x$.

البته چون P نقطه‌ای زیر محور x است، پس $0 < x < 5$.

به این ترتیب، باید کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 - 4x$ را روی بازه $(0, 5)$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 2x - 4, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای $x=2$ به دست می‌آید و برابر است با $-4 = -8 + 4$.

۱۱۷۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{2}(\Delta - x)(12 + x^2 + 8x + 4) = \frac{1}{2}(\Delta - x)(x^2 + 8x + 16)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{2}(\Delta - x)(x^2 + 8x + 16)$ را پیدا

کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 8x + 16) + (\Delta - x)(x + 4) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -4 \text{ (غ.ق.)}$$

توجه کنید که به ازای $x = -4$ ، طول قاعده بزرگ دوزنقه عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت دوزنقه

مورد نظر به ازای $x=2$ به دست می‌آید و برابر است با $54 = \frac{1}{2}(3)(36)$.

۱۱۷۵- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه C برابر x باشد. در این صورت،

طول نقطه A هم برابر x است و چون نقطه A روی نمودار تابع $y = \sqrt{6-x}$

است، پس عرض نقطه A برابر با $\sqrt{6-x}$ است. بنابراین $AC = \sqrt{6-x}$.

از طرف دیگر، $BC = x + 2$. به این ترتیب

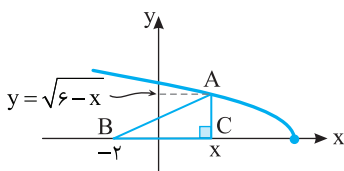
$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{6-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{6-x}$ به ازای آن

بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{6-x} + \frac{1}{2}(x+2) \frac{-1}{2\sqrt{6-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6-x} = \frac{x+2}{4\sqrt{6-x}} \Rightarrow 6-x = \frac{x+2}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$



۱۱۶۹- گزینه ۱ فرض کنید طول نقطه D برابر x باشد. در این

صورت، چون نقطه D روی نمودار تابع $y = x^2$ است، پس عرض آن برابر

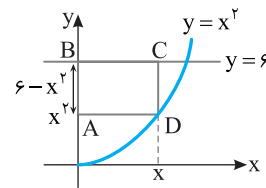
x^2 است. به این ترتیب عرض نقطه A هم برابر x^2 است و در نتیجه

$AB = 6 - x^2$. بنابراین $2(x + 6 - x^2)$ محیط مستطیل $ABCD$. اگر

$y = 2(x + 6 - x^2)$ ، آن‌گاه $y' = 2 - 4x$ و در نتیجه $y' = 0$ پس $x = \frac{1}{2}$.

بنابراین بیشترین مقدار تابع y ، یعنی بیشترین مقدار محیط مستطیل $ABCD$

به ازای $x = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید و برابر است با $\frac{25}{2} = 2(\frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{4})$.



۱۱۷۰- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه D برابر x باشد. در این صورت

طول نقطه C هم برابر x است و چون نقطه C روی خط $y = -x + 3$ است،

پس عرض آن برابر $-x + 3$ است. بنابراین عرض نقطه B هم برابر $-x + 3$

است و چون این نقطه روی خط $y = x + 5$ است، پس طول نقطه B برابر است

با $5 - (-x + 3) = -x + 2$. به این ترتیب،

$$BC = x - (-x - 2) = 2x + 2$$

در نتیجه

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD = BC \times CD = (2x+2)(-x+3)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $y = (2x+2)(-x+3)$ را پیدا کنیم. توجه

کنید که

$$y' = 2(-x+3) + (-1)(2x+2) = -4x+4, \quad y' = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن تابع y ، یعنی بیشترین مقدار ممکن مساحت

مستطیل $ABCD$ به ازای $x=1$ به دست می‌آید و برابر است با $4 \times 2 = 8$.

۱۱۷۱- گزینه ۳ توجه کنید که $y = 4 - x$ و چون $y < 0$ ، پس $x > 4$ و

باید بیشترین مقدار تابع

$$f(x) = x^2 + (4-x)^3, \quad x \in (4, +\infty)$$

را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(x) = 2x - 3(4-x)^2 = -3x^2 + 26x - 48$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 6, x = \frac{8}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و چون

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 16, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad f(6) = 28$$

پس بیشترین مقدار ممکن تابع f برابر ۲۸ است.

۱۱۷۲- گزینه ۳ چون $2x + y = 8$ ، پس $y = 8 - 2x$ و

$$xy^3 = x(8-2x)^3 = 8x(4-x)^3$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = 8x(4-x)^3$ را پیدا کنیم. توجه

کنید که

$$f'(x) = 8(4-x)^3 - 24x(4-x)^2 = 32(4-x)^2(1-x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1$$

۱۱۷۹- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه B برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطه A هم برابر $-x$ است و چون نقطه A روی نمودار تابع $y = x^3 + 8$ است، پس عرض نقطه A برابر است با $8 - x^3$. بنابراین

$$OAB \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2}x(8 - x^3)$$

اگر $f(x) = \frac{1}{2}x(8 - x^3)$ ، آن گاه $f(x) = 4x - \frac{x^4}{2}$ ، پس $f'(x) = 4 - 2x^3$.

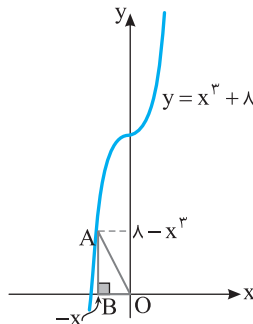
در نتیجه

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث OAB

وقتی به دست می آید که $x = \sqrt[3]{2}$ و برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(6) = 3\sqrt[3]{2}$$



۱۱۸۰- گزینه ۳ فرض کنید طول نقطه A برابر $-x$ باشد. چون نقطه A روی نمودار تابع $y = x^2 + 1$ است، پس عرض نقطه A برابر $x^2 + 1$ است. به

این ترتیب، عرض نقطه D هم برابر $x^2 + 1$ است و در نتیجه

$$CD = 7 - (x^2 + 1) = 6 - x^2$$

بنابراین $ABCD$ مساحت مستطیل $x(6 - x^2)$.

اگر $f(x) = x(6 - x^2)$ ، آن گاه $f(x) = 6x - x^3$ ، در نتیجه

$$f'(x) = 6 - 3x^2$$

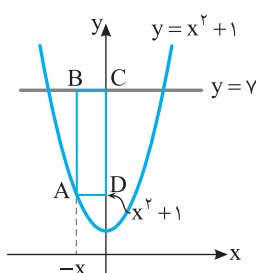
پس

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad (x > 0 \text{ توجه کنید که})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD

به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست می آید و برابر است با

$$\sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$$



۱۱۷۶- گزینه ۳ فرض کنید طول نقطه D برابر x باشد. چون نقطه D روی نمودار تابع $y = x^2$ است، پس عرض نقطه D برابر x^2 است. در نتیجه، عرض نقطه A نیز برابر x^2 است. از طرف دیگر عرض نقطه B برابر عرض نقطه C است، پس عرض نقطه B برابر ۹ است. به این ترتیب، $BA = 9 - x^2$ بنابراین

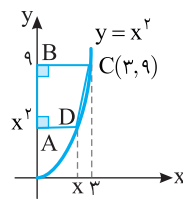
$$ABCD \text{ مساحت ذوزنقه} = \frac{1}{2}AB(BC + AD) = \frac{1}{2}(9 - x^2)(3 + x)$$

اگر $f(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)(3 + x)$ ، آن گاه $f'(x) = \frac{3}{2}(3 + x)(1 - x)$ ، پس

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (x > 0 \text{ توجه کنید که})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقه ABCD به ازای $x = 1$ به دست می آید و برابر است با

$$\frac{1}{2}(9 - 1)(3 + 1) = 16$$



۱۱۷۷- گزینه ۱ فرض کنید طول ضلع های نظیر رأس قائمه در این مثلث

x و y باشند. در این صورت $x^2 + y^2 = 4$ ، از طرف دیگر،

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}$ را پیدا کنیم

$(0 < x < 2)$. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ ، پس بیشترین مقدار تابع f ، یعنی

بیشترین مقدار مساحت مثلث مورد نظر به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست می آید و

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 \text{ برابر است با}$$

۱۱۷۸- گزینه ۲ فرض کنید (x, y) نقطه ای روی خط $y = 4x + 2$

باشد. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4x + 2)^2} = \sqrt{17x^2 + 16x + 4}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{17x^2 + 16x + 4}$ را پیدا کنیم.

$$f'(x) = \frac{34x + 16}{2\sqrt{17x^2 + 16x + 4}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{17}$$

پس $y = 4x + 2 = \frac{2}{17}$ ، یعنی نقطه مورد نظر $(-\frac{8}{17}, \frac{2}{17})$ است.

۱۱۸۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = 3(x-2)^2(x+2) + (x-2)^3 = (x-2)^2(4x+4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, \quad x = -1$$

اکنون مقادیر $f(-1)$ ، $f(2)$ و $f(-2)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$f(-1) = -27, \quad f(2) = 0, \quad f(-2) = 0$$

بنابراین -27 مقدار مینیمم مطلق تابع f در بازه $[-2, 2]$ است.

۱۱۸۸- گزینه ۳ توجه کنید که $x = 4 - 2y$ باید کمترین مقدار ممکن

تابع $f(y) = 4 - 2y + y^2$ را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(y) = -2 + 2y, \quad f'(y) = 0 \Rightarrow y = 1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $y = 1$ به دست می‌آید و برابر است با $f(1) = 3$.

۱۱۸۹- گزینه ۳ فاصله نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x-x)^2 + (x+6-4)^2} = \sqrt{4x^2 + 4x + 4}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 4}$ را پیدا کنیم.

توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x + 4}{2\sqrt{4x^2 + 4x + 4}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{2}{5}$

به دست می‌آید که برابر است با

$$f\left(-\frac{2}{5}\right) = \sqrt{4\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{5}\right) + 4} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

۱۱۹۰- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه C برابر x باشد. در این صورت،

طول نقطه A هم برابر x است و چون نقطه A روی نمودار تابع $y = \sqrt{5-x}$

است، پس عرض نقطه A برابر با $\sqrt{5-x}$ است. بنابراین $AC = \sqrt{5-x}$.

از طرف دیگر $BC = x + 4$. به این ترتیب

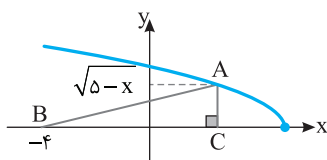
$$ABC \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$ به ازای آن

بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-x} + \frac{1}{2}(x+4) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5-x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x+4}{\sqrt{5-x}} \Rightarrow 10 - 2x = x + 4 \Rightarrow x = 2$$

۱۱۸۱- گزینه ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و صعودی است، پس مشتق

آن همه‌جا نامنفی است. بنابراین $f'(x) = 3ax^2 - 18x + 3a \geq 0$. در نتیجه

$$ax^2 - 6x + a \geq 0 \Rightarrow a > 0, \quad \Delta = 6^2 - 4a^2 \leq 0 \Rightarrow a \geq 3 \text{ یا } a \leq -3$$

پس $a \geq 3$.

۱۱۸۲- گزینه ۴ از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه

$(-3, -1)$ مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی است. بنابراین $f'(x) < 0$. اکنون توجه

کنید که چون مقادیر تابع f منفی‌اند، پس

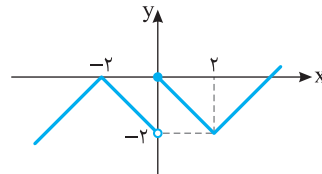
$$y = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0, \quad x \in (-3, -1)$$

بنابراین تابع گزینه (۴) اکیداً صعودی است.

مثال نقض برای گزینه‌های دیگر تابع $f(x) = -x^3 - 100$ است.

۱۱۸۳- گزینه ۳ نمودار تابع f به شکل زیر است. این تابع در نقطه‌های

$x = -2$ و $x = 0$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطه $x = 2$ مینیمم نسبی دارد.



۱۱۸۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = x(x^2 + 5x + 4) = x(x+1)(x+4)$$

x	$-\infty$	-4	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		min	max	min	

پس تابع f در نقطه‌های $x = -4$ و $x = 0$ مینیمم نسبی دارد و در نقطه

$x = -1$ ماکزیمم نسبی دارد.

۱۱۸۵- گزینه ۱ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط

اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادله $f'(x) = 0$ هستند. از طرف دیگر،

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

چون $f'(1) = 0$ و $f'(3) = 0$ از نقطه $x = 1$ مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد،

پس تابع f در نقطه $x = 1$ ماکزیمم نسبی دارد. طبق فرض $f(1) = -4$ ، پس

$$1 - 6 + 9 + a = -4 \Rightarrow a = -8$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max	min	

۱۱۸۶- گزینه ۲ توجه کنید که $D_f = (-5, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+5} - \frac{x^2-17}{2\sqrt{x+5}}}{x+5} = \frac{3x^2 + 20x + 17}{2(x+5)\sqrt{x+5}}$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. پس نقاط اکسترمم نسبی آن

جواب‌های معادله $f'(x) = 0$ است. پس

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 20x + 17 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x = -\frac{17}{3} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس $x = -1$ طول تنها نقطه بحرانی تابع f است و عرض این نقطه برابر است

با $f(-1) = -8$.

۱۱۹۵- گزینه ۴ توجه کنید که $f'(x) = \frac{3-3x^2}{3\sqrt{(3x-x^3)^2}}$ تابع f در

نقطه‌های $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق ندارد و در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ مشتق آن صفر است. جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	+	+	0	-
$f(x)$		↘	↘	↗	↗	↘	↘

پس $x=1$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع است و عرض این نقطه برابر $\sqrt[3]{2}$ است.

۱۱۹۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x^2-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{8x^2-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

تابع f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست و $f'(-\frac{1}{2})=0$ و $f'(\frac{1}{2})=0$ پس تابع f سه نقطه بحرانی دارد.

۱۱۹۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{x-a}{2x\sqrt{x}}, f'(x)=0 \Rightarrow x=a \notin [1, 4] \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس باید بین مقادیر $f(1)$ و $f(4)$ دنبال ماکزیمم مطلق تابع بگردیم:

$f(1)=1+a$ و $f(4)=2+\frac{a}{2}$ چون a عددی از بازه $(0, 1)$ است، مقدار

$2+\frac{a}{2}$ از مقدار $1+a$ بزرگتر است، پس مقدار ماکزیمم مطلق تابع $2+\frac{a}{2}$

است. بنابراین $2+\frac{a}{2}=\frac{9}{4}$ ، در نتیجه $a=\frac{1}{2}$.

۱۱۹۸- گزینه ۴ ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض

قاعده آن را با l نمایش می‌دهیم. در این صورت $2x+l=3x \Rightarrow l=x$ حجم. توجه کنید که

$$2x+l=3x \Rightarrow l=3x-2x \Rightarrow \text{حجم} = x(3x-2x)^2$$

بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x(3x-2x)^2$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

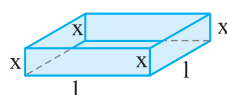
$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^2 - 24x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$(x-5)(x-15)=0 \Rightarrow x=5, x=15$$

توجه کنید که به ازای $x=15$ حجم جعبه برابر صفر می‌شود، در نتیجه

بیشترین مقدار تابع f به ازای $x=5$ به دست می‌آید.



۱۱۹۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ و

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x(x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	↘	↘	↘	↘

همچنین

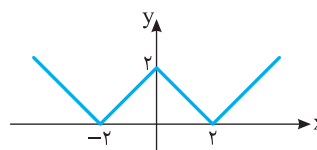
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

بنابراین جدول تعیین جدول تغییرات تابع f به شکل بالاست و این تابع روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ ، $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$ نزولی است ولی روی دامنه‌اش غیر یکنواست.

۱۱۹۲- گزینه ۲ نمودار تابع f به شکل زیر است. از روی این شکل معلوم

است که تابع f دو نقطه مینیمم نسبی و یک نقطه ماکزیمم نسبی دارد.



۱۱۹۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x-4)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0, x=4$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	↗	max	min	↗

بنابراین تابع f در نقطه $x=0$ ماکزیمم نسبی و در نقطه $x=4$ مینیمم نسبی دارد.

۱۱۹۴- گزینه ۳ چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، پس مشتق آن در

نقطه اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 + 2bx^2 + 4x - \frac{4}{3} \Rightarrow f'(x) = ax^2 + 4bx + 4$$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow a-4b+4=0$$

از طرف دیگر، مختصات نقطه اکسترمم نسبی در معادله تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1)=2 \Rightarrow -\frac{a}{3} + 2b - 4 - \frac{4}{3} = 2 \Rightarrow -a + 6b = 22$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} a-4b=-4 \\ -a+6b=22 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=32$ و $b=9$ و

در نتیجه $a-b=23$.

۱۲۰۲- گزینه ۲ نقطه $(1, -2)$ روی نمودار تابع است، پس $f(1) = -2$.

در نتیجه $a + b = -2$. همچنین

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} -a + 2b = 0 \xrightarrow{a+b=-2} \rightarrow$$

$$3b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}, a = -\frac{4}{3}$$

بنابراین $f'(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{1-x^3}{x^2} \right)$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f'(x)$	+	۰	-
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

ریاضی - ۸۹

پس نقطه $(1, -2)$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

۱۲۰۳- گزینه ۱ ابتدا مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2 + 2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}} + 2(x-1)\sqrt[3]{x} = \frac{2(x-1)^2 + 6x(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

اکنون معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x=1, x=\frac{1}{4}$$

تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	۰	$\frac{1}{4}$	۱	$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$	+	+	۰	-	+
$\sqrt[3]{x}$	-	۰	+	+	+
$f'(x)$	-	۰	+	-	+
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

با توجه به جدول، $x = \frac{1}{4}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۲۰۴- گزینه ۲ با توجه به نمودار تابع f مشخص است که تابع فقط یک

نقطه اکسترمم نسبی به طول ۳ دارد. بنابراین $x=3$ جواب معادله $f'(x)=0$ است و $f'(x)$ در این نقطه تغییر علامت می‌دهد:

$$f(x) = ax^4 + 2x^3 + bx^2$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 6x^2 + 2bx = 2x(2ax^2 + 3x + b)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x=0, \quad 2ax^2 + 3x + b = 0$$

پس $x=3$ باید جواب معادله $2ax^2 + 3x + b = 0$ باشد و این معادله نباید

جواب دیگری غیر از $x=0$ داشته باشد. بنابراین

$$x=0 \Rightarrow 0+0+b=0 \Rightarrow b=0, \quad x=3 \Rightarrow 18a+9+0=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

تجربی - ۹۲

۱۱۹۹- گزینه ۳ فرض کنید طول نقطه A برابر $-x$ باشد. چون نقطه A

روی نمودار تابع $y = x^2 + 1$ است، پس عرض نقطه A برابر $x^2 + 1$ است. به

این ترتیب، عرض نقطه D هم برابر $x^2 + 1$ است و در نتیجه

$$CD = y - (x^2 + 1) = 6 - x^2$$

بنابراین $\text{مساحت مستطیل } ABCD = x(6 - x^2)$.

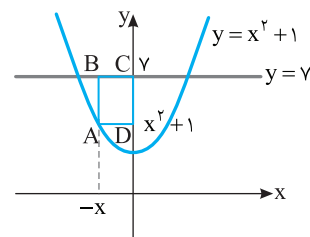
اگر $f(x) = x(6 - x^2)$ ، آنگاه $f(x) = 6x - x^3$ ، در نتیجه

$$f'(x) = 6 - 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad (x > 0 \text{ توجه کنید که})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $ABCD$

به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست می‌آید و برابر است با $\sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$.



۱۲۰۰- گزینه ۱ فرض کنید (x, x^3) نقطه‌ای روی نمودار تابع

$y = x^3$ باشد. فاصله این نقطه تا خط $y - 3x + 6 = 0$ برابر است با

$$\frac{|x^3 - 3x + 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|x^3 - 3x + 6|}{\sqrt{10}} = \frac{x^3 - 3x + 6}{\sqrt{10}}$$

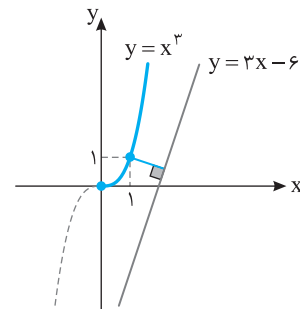
بنابراین طول نقطه مورد نظر جایی است که کمترین مقدار تابع

$d = x^3 - 3x + 6$ به دست می‌آید. توجه کنید که

$$d' = 3x^2 - 3, \quad d' = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

پس باید مقادیر $d(0)$ و $d(1)$ را مقایسه کنیم: $d(0) = 6$ و $d(1) = 4$.

بنابراین طول نزدیک‌ترین نقطه برابر ۱ است.



۱۲۰۱- گزینه ۱ از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x-1)(x^2 + x - 2) = 4(x-1)(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -2$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	۰	+	+
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$

با توجه به جدول بالا تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد. خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۲۰۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2 - 28}{3\sqrt{x^2}} = \frac{6x^2 + x^2 - 28}{3\sqrt{x^2}} = \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt{x^2}}$$

تابع f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست و در نقطه های $x=2$ و $x=-2$ مشتق آن صفر است. پس مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع f به صورت $\{-2, 0, 2\}$ است.

تجربی - ۸۳

۱۲۰۶- گزینه ۴ توجه کنید که تابع f در ابتدا و انتهای بازه $[-1, 2]$ مشتق پذیر نیست، پس این نقطه ها، نقطه های بحرانی هستند. همچنین،

$f(x) = |x||x^2 - 1|$ بنابراین نقطه های $x=1$ و $x=0$ نیز نقطه های بحرانی

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & -1 \leq x \leq 0 \\ -x^3 + x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & -1 < x < 0 \\ -3x^2 + 1 & 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

پس تابع f شش نقطه بحرانی دارد.

ریاضی - ۹۰

۱۲۰۷- گزینه ۴ تابع f در ابتدا و انتهای بازه $[-2, 2]$ مشتق پذیر نیست، پس این نقطه ها، نقطه های بحرانی هستند. همچنین تابع f در نقطه های

$x=1$ و $x=-1$ مشتق پذیر نیست، پس این نقطه ها نیز نقطه های بحرانی

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & -2 \leq x \leq -1 \\ -x^3 + x & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & -2 < x < -1 \\ -3x^2 + 1 & -1 < x < 1 \\ 3x^2 - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

پس تابع f شش نقطه بحرانی دارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۲۰۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1, x = 3 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

اکنون مقادیر $f(-2)$ ، $f(-1)$ و $f(2)$ را پیدا می کنیم تا بیشترین مقدار تابع f در بازه $[-2, 2]$ مشخص شود: $f(-2) = 3$ ، $f(-1) = 10$ و $f(2) = -17$.

تجربی - ۹۲

پس بیشترین مقدار تابع f در این بازه برابر ۱۰ است.

۱۲۰۹- گزینه ۲ طول نقاط بحرانی تابع روی بازه $(-4, 3)$ را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 15$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 5$$

$x=5$ در بازه مورد نظر نیست. برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم، مقدار تابع را در نقاط زیر با هم مقایسه می کنیم:

$$f(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = -\frac{64}{3} + 44 = \frac{68}{3} = 22\frac{2}{3}$$

$$f(-3) = -\frac{27}{3} - 9 + 45 = -18 + 45 = 27$$

$$f(3) = \frac{27}{3} - 9 - 45 = -45$$

پس $f(-3) = 27$ مقدار ماکزیمم مطلق و $f(3) = -45$ مینیمم مطلق تابع داده شده در بازه مورد نظر است.

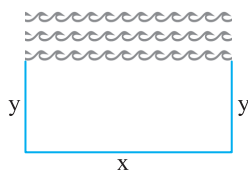
تجربی - ۹۰

۱۲۱۰- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر، $x+2y=88 \Rightarrow x=88-2y$

می خواهیم مساحت مستطیل یعنی $S=xy$ ماکزیمم باشد:

$$S(y) = (88-2y)y = -2y^2 + 88y$$

$$S'(y) = -4y + 88 = 0 \Rightarrow y = 22 \Rightarrow S_{\max} = 968 \text{ m}^2$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۲۱۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = \frac{2x^3 - a}{x^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

$x=0$ جزء دامنه تابع نیست و تنها باید $x=x_0$ را بررسی کنیم. در همسایگی این نقطه، علامت f' از منفی به مثبت تغییر می کند (به ازای همه مقادیر a)، بنابراین همواره $x=x_0$ نقطه مینیمم نسبی تابع است و تابع ماکزیمم نسبی ندارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۹

۱۲۱۲- گزینه ۲ چون $0 \leq x - [x] < 1$ پس $-1 < f(x) \leq 0$ ، بنابراین از

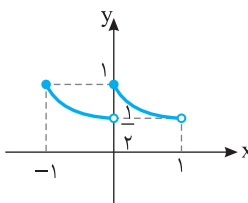
اینکه تابع $g(x) = 2^x$ اکیداً صعودی است، نتیجه می شود

$$g(-1) < g(f(x)) \leq g(0) \Rightarrow \frac{1}{2} < (g \circ f)(x) \leq 1$$

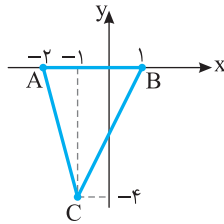
پس تابع $g \circ f$ مقدار ماکزیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی ندارد. به نمودار تابع در بازه $[-1, 1]$ توجه کنید.

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -1 - x \Rightarrow (g \circ f)(x) = 2^{-x-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = -x \Rightarrow (g \circ f)(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

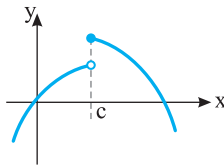


ریاضی - ۹۱



خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۲۱۸- گزینه ۴ با توجه به شکل زیر هر سه گزینه (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند. گزینه (۴) درست است، زیرا با توجه به اینکه تابع f در همسایگی نقطه $x=c$ تعریف شده است، در این نقطه مقدار تابع f در تعریف اکسترمم نسبی صدق می‌کند.



ریاضی - ۸۸

۱۲۱۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - x^3} = \sqrt{x^3} - \sqrt{x^3 - x^2}$$

واضح است که برای هر x حقیقی $x^3 - x^2 \leq x^3$ ، پس $\sqrt{x^3 - x^2} \leq \sqrt{x^3}$ و در نتیجه $f(x) \geq 0$. از طرف دیگر $f(0) = 0$. پس کمترین مقدار تابع برابر صفر است.

ریاضی - ۹۲

۱۲۲۰- گزینه ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه به طول x برابر با $f'(x)$ است. بنابراین $m = f'(x) = -x^2 + 4x - 1$. بیشترین مقدار $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$m' = -2x + 4 \xrightarrow{m'=0} x=2 \Rightarrow m=3$$

بنابراین خطی با شیب ۳ مورد نظر است که در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار تابع f مماس شده است. معادله این خط را می‌نویسیم:

$$y - f(2) = 3(x - 2) \Rightarrow y - \frac{10}{3} = 3x - 6$$

این خط محور y را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند:

$$x=0 \Rightarrow y - \frac{10}{3} = -6 \Rightarrow y = -\frac{8}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۷

۱۲۱۳- گزینه ۴ توجه کنید که تابع f در نقطه‌های $x = \pm\sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست، بنابراین این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & x \leq -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x & -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x^3 - 3x & x \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{پس } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 3x^2 - 3 & x > \sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	۰	-	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↘	↗	

پس تابع f در چهار نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۱۲۱۴- گزینه ۳ اگر تابع f در نقطه C مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در این نقطه برابر صفر است، پس مشتق راست تابع نیز در این نقطه برابر صفر است. اگر تابع f در نقطه C مشتق‌پذیر نباشد، مشتق راست آن در این نقطه مثبت است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۲۱۵- گزینه ۳ عبارات گزینه‌های (۲) و (۴) درست هستند. همچنین می‌دانیم اگر f' در نقطه اکسترمم نسبی C موجود باشد، آن‌گاه $f'(C) = 0$. پس گزینه (۱) نیز عبارتی درست است. گزینه (۳) نادرست است، زیرا هر نقطه بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست، مانند $x=0$ در $f(x) = x^3$. **ریاضی - ۹۰**

۱۲۱۶- گزینه ۱ مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \times x - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

پس تابع f' ریشه ندارد و در همه نقاط دامنه f ، تابع مشتق‌پذیر است، بنابراین تابع f نقطه بحرانی ندارد.

۱۲۱۷- گزینه ۳ در تابع $f(x) = (x-1)|(x-1)(x+2)|$ ، $x=-2$ ریشه ساده عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع f در نقطه $x=-2$ مشتق‌پذیر نیست.

در $x=1$ نیز مشتق تابع برابر صفر است و به همین دلیل این نقطه نیز جزء نقاط بحرانی تابع است. اکنون توجه کنید که

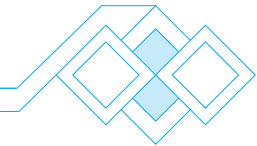
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2) \geq 0 \\ -(x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2) < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow ((x-1)^2(x+2))' = 0$$

$$2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = (x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow x=1, -1$$

پس نقطه بحرانی سوم، نقطه‌ای به طول $x=-1$ است. بنابراین
نقاط بحرانی: $A(-2, 0)$ ، $B(1, 0)$ ، $C(-1, -4)$

$$\text{در نتیجه } S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$



$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{(4m+3)^2 + (2m-1-10)^2} = \sqrt{(4m+9)^2 + (2m-1+2)^2}$$

$$(4m+3)^2 + (2m-11)^2 = (4m+9)^2 + (2m+1)^2$$

$$16m^2 + 244m + 9 + 4m^2 - 44m + 121 = 16m^2 + 72m + 81 + 4m^2 + 4m + 1$$

$$96m = 48 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۱۲۲۷- گزینه ۲ شیب خط $2y+x=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. شیب خط

عمود بر این خط ۲ است. پس معادله خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $(-1, 2)$ بگذرد می‌نویسیم:

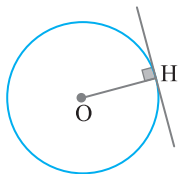
$$y-2=2(x+1) \Rightarrow y=2x+4 \Rightarrow 2x-y+4=0$$

فاصله مبدأ مختصات از این خط، مطلوب مسئله است که برابر است با

$$\frac{|0-0+4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

۱۲۲۸- گزینه ۴ شعاع دایره برابر فاصله نقطه O از خط $6x+8y+1=0$

است: $R = \frac{|6-8+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{1}{10}$. بنابراین مساحت دایره برابر است با



$$S = \pi R^2 = \frac{\pi}{100}$$

۱۲۲۹- گزینه ۲ چون مختصات نقطه A در معادله خط داده شده صدق

نمی‌کنند، پس $y=2x-1$ معادله AD و AB نیست. پس یا معادله BC

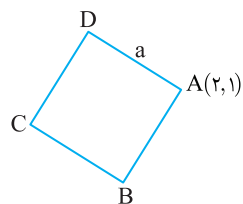
است یا DC. هر کدام که باشد، اگر فاصله نقطه $A(2, 1)$ تا خط $y=2x-1$

را حساب کنیم، طول ضلع مربع به دست می‌آید:

$$2x-y-1=0, \quad a = \frac{|4-1-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت مربع ABCD برابر

$$S = a^2 = \frac{4}{5}$$



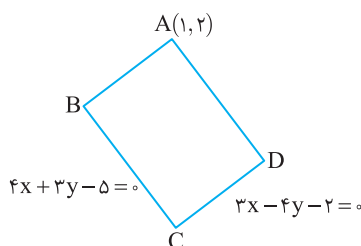
۱۲۳۰- گزینه ۳ رأس A روی هیچ کدام از خط‌های داده شده قرار ندارد، زیرا

مختصات آن در معادله‌های داده شده صدق نمی‌کنند. پس برای محاسبه طول و

عرض مستطیل کافی است فاصله A از دو خط داده شده را به دست آوریم:

$$AB = \frac{|4+6-5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{5}{5} = 1, \quad AD = \frac{|3-8-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{5}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با $S = 1 \times \frac{7}{5} = \frac{7}{5}$



۱۲۲۱- گزینه ۲ طول پاره خط AB برابر است با $(2a+1)-(a-1)$. بنابراین

$$AB = 2a+1-a+1=5 \Rightarrow a=3$$

پس طول پاره خط BC برابر است با

$$BC = (5a-2)-(2a+1) = 3a-3=6$$

۱۲۲۲- گزینه ۲ فاصله نقطه $(a, a\sqrt{3})$ از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a| = 6$$

بنابراین $a = \pm 3$.

۱۲۲۳- گزینه ۲ مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+m}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3m+1}{2}$$

چون M روی خط $2y+3x-1=0$ است، پس

$$2\left(\frac{-3m+1}{2}\right) + 3\left(\frac{2+m}{2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow -3m+1+3+\frac{3m}{2}-1=0$$

$$-\frac{3m}{2} = -3 \Rightarrow m=2$$

بنابراین M نقطه $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{-3 \times 2 + 1}{2}\right)$ ، یعنی $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$ است.

۱۲۲۴- گزینه ۴ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -۱

است. در نتیجه

$$\frac{3}{k} \times \frac{-(k-5)}{2} = -1 \Rightarrow 3(k-5) = 2k \Rightarrow k=15$$

۱۲۲۵- گزینه ۳ اگر رأس B قائمه باشد، آن‌گاه AB بر BC عمود است،

یعنی حاصل ضرب شیب‌های خط‌های AB و BC برابر -۱ است:

$$m_{AB} = \frac{6-4}{7-4} = \frac{2}{3}, \quad m_{BC} = \frac{4-a}{4-2a}$$

توجه کنید که اگر $a=2$ ، نقطه‌های B و C بر هم منطبق می‌شوند که درست

نیست. بنابراین $a \neq 2$ و در نتیجه $m_{BC} = \frac{2+a}{2}$. به این ترتیب

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \left(\frac{2+a}{2}\right) = -1 \Rightarrow a = -5$$

۱۲۲۶- گزینه ۴ راه حل اول وسط پاره خط واصل نقطه‌های $(-3, 10)$ و

$(-9, -2)$ نقطه $\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{10-2}{2}\right)$ ، یعنی $(-6, 4)$ است. چون نقطه

$(4m, 2m-1)$ روی عمود منصف پاره خط مورد نظر است، پس حاصل ضرب

شیب خطی که از نقطه‌های $(4m, 2m-1)$ و $(-6, 4)$ می‌گذرد و شیب خطی

که از نقطه‌های $(-3, 10)$ و $(-9, -2)$ می‌گذرد برابر -۱ است:

$$\frac{2m-1-4}{4m+6} \times \frac{10+2}{-3+9} = -1 \Rightarrow \frac{2m-5}{4m+6} \times 2 = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم چون نقطه $P(4m, 2m-1)$ روی عمود منصف پاره خط واصل

نقاط $A(-3, 10)$ و $B(-9, -2)$ است، پس

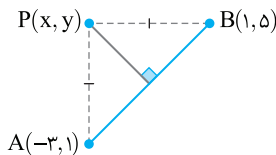
۱۲۳۶- گزینه ۲ راه حل اول می‌دانیم عمودمنصف AB از وسط این

پاره‌خط یعنی نقطه $M(-1, 3)$ می‌گذرد. شیب خط گذرنده از A و B برابر ۱ است، بنابراین شیب عمودمنصف برابر ۱- است. در نتیجه معادله این خط به صورت $y - 3 = -1(x + 1)$ یا به طور ساده‌تر $x + y = 2$ است.

راه حل دوم می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است. فرض می‌کنیم نقطه $P(x, y)$ روی عمودمنصف پاره‌خط AB

باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} PA = PB &\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 &= (x-1)^2 + (y-5)^2 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 \\ 8x + 8y &= 16 \Rightarrow x + y = 2 \end{aligned}$$



۱۲۳۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید شیب خطی که BC روی آن قرار دارد،

برابر $\frac{1}{2}$ است. پس شیب خطی که AH روی آن قرار دارد برابر ۲- است.

بنابراین معادله این خط به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} y - y_A &= m_{AH}(x - x_A) \\ y - 2 &= -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4 \end{aligned}$$

بنابراین برای پیدا کردن مختصات نقطه H کافی است محل تقاطع دو خط

$$y = -2x + 4 \text{ و } 2x - 4y + 1 = 0 \text{ را پیدا کنیم:}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{y = -2x + 4} 2x - 4(-2x + 4) + 1 = 0$$

$$10x = 15 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -2\left(\frac{3}{2}\right) + 4 \Rightarrow y = 1$$

پس H نقطه $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ است.

۱۲۳۸- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر، اندازه AH را حساب می‌کنیم:

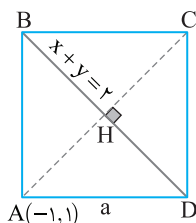
$$AH = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

بنابراین طول قطر مربع برابر $2\sqrt{2}$ است. طول ضلع مربع را حساب می‌کنیم:

$$a^2 + a^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2a^2 = 8$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین محیط مربع برابر ۸ است.



۱۲۳۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$AB = |x_B - x_A| = |2m - (m-1)| = |m+1|$$

$$BC = |x_C - x_B| = |3m+1-2m| = |m+1|$$

بنابراین

$$2|m+1| - |m+1| = 3 \Rightarrow |m+1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m+1=3 \Rightarrow m=2 \\ m+1=-3 \Rightarrow m=-4 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با ۲-.

۱۲۳۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$AB = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (2a+3)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (2a+3)^2 = \frac{13}{4}$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} + 4a^2 + 12a + 9 = \frac{13}{4} \Rightarrow 5a^2 + 11a + 6 = 0$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن a برابر است با مجموع جواب‌های این معادله،

یعنی $-\frac{11}{5}$. توجه کنید که این معادله دو جواب دارد.

۱۲۳۳- گزینه ۴ راه حل اول در متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف

می‌کنند. بنابراین نقطه وسط پاره‌خط AC همان نقطه وسط پاره‌خط BD است.

$$\text{بنابراین } \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{-3+y}{2}\right) = \left(\frac{y-x-1}{2}, \frac{2-y+3}{2}\right) \text{ در نتیجه}$$

$$-2+x = y-x-1 \Rightarrow x = y, \quad -3+y = 2-y+3 \Rightarrow y = 4$$

یعنی C نقطه (۴، ۴) است.

راه حل دوم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. پس

$$\begin{aligned} AB \parallel CD &\Rightarrow m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{-3-2+y}{-2-y+x} = \frac{y-3}{x+1} \Rightarrow \frac{-5+y}{-9+x} = \frac{y-3}{x+1} \\ -5x - 5 + yx + y &= -9y + 27 + xy - 3x \Rightarrow -x + 5y = 16 \end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$AD \parallel BC \Rightarrow m_{AD} = m_{BC} \Rightarrow \frac{-3-3}{-2+1} = \frac{2-y-y}{y-x-x}$$

$$6 = \frac{2-2y}{y-2x} \Rightarrow 42 - 12x = 2 - 2y \Rightarrow 6x - y = 20$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات } \begin{cases} -x + 5y = 16 \\ 6x - y = 20 \end{cases} \text{ به دست می‌آید } x = 4 \text{ و } y = 4.$$

بنابراین C نقطه (۴، ۴) است.

۱۲۳۴- گزینه ۱ شیب خط راستی که از نقطه‌های (۱، ۶) و (۲، ۳)

می‌گذرد برابر است با $\frac{6+3}{-1+2} = 9$. بنابراین شیب خط راستی که بر این خط

عمود است برابر است با $-\frac{1}{9}$. معادله خط راستی که شیب آن $-\frac{1}{9}$ است و از

نقطه (۰، -۵) می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - (-5) = -\frac{1}{9}(x - 0) \Rightarrow x + 9y + 45 = 0$$

۱۲۳۵- گزینه ۳ شیب خطی را که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حساب

می‌کنیم $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{-1-1} = 1$. پس شیب ارتفاع CH برابر ۱-

است. زیرا $CH \perp AB$. اکنون معادله خطی را که از رأس C با شیب ۱-

می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y - y_C = m_{CH}(x - x_C) \Rightarrow y + 1 = -(x - 3) \Rightarrow y = -x + 2$$

۱۲۴۳- گزینه ۳ مختصات نقطه M وسط ضلع AC را حساب می کنیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

بنابراین طول میانه BM برابر است با

$$BM = \sqrt{(m-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(m-3)^2 + 4}$$

چون $BM=2$ پس

$$\sqrt{(m-3)^2 + 4} = 2 \Rightarrow (m-3)^2 + 4 = 4 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m=3$$

۱۲۴۴- گزینه ۲ خط $3x+y=4$ بر خط $x-ay=7$ عمود است، پس

حاصل ضرب شیب این خطها -1 است:

$$-3 \times \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a=3$$

خط $x-3y=7$ بر خط $bx+2y=-5$ عمود است، پس حاصل ضرب

شیب این خطها نیز -1 است:

$$\frac{1}{3} \times \left(-\frac{b}{2}\right) = -1 \Rightarrow b=6$$

بنابراین $a+b=9$.

۱۲۴۵- گزینه ۱ اگر نقطه H وسط پاره خط AA' باشد، آن گاه

$$x_H = \frac{1-3}{2} = -1, \quad y_H = \frac{2+4}{2} = 3$$

با توجه به شکل زیر مختصات نقطه H در معادله خط $y=ax+b$ صدق

می کنند. پس

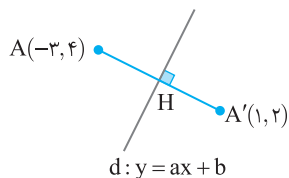
$$3 = a(-1) + b \Rightarrow b = a + 3$$

از طرف دیگر عکس و قرینه شیب خطی که از A و A' می گذرد، برابر a،

شیب خط $y=ax+b$ است، پس

$$m_{AA'} = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{2-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a=2$$

بنابراین $b=5$ و در نتیجه $ab=10$.



۱۲۴۶- گزینه ۲ ابتدا طول ضلع های مثلث ABC را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{80}, \quad AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-1-5)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{85}$$

واضح است که تساوی $BC^2 = AB^2 + AC^2$ بین طول ضلع های مثلث

برقرار است، پس مثلث قائم الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$\frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \sqrt{80} \times \sqrt{5} = 10.$$

۱۲۴۷- گزینه ۳ ابتدا خطها را به صورت $2x-y+k=0$ و $x-2y-1=0$

می نویسیم. اکنون اگر فاصله A از دو خط به ترتیب برابر AH' و AH باشد، آن گاه

$$AH = \frac{|2k+1+k|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|3k+1|}{\sqrt{5}}, \quad AH' = \frac{|k+2-1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|k+1|}{\sqrt{5}}$$

$$AH = 2AH' \Rightarrow |3k+1| = 2|k+1| \Rightarrow \begin{cases} 3k+1 = 2k+2 \Rightarrow k=1 \\ 3k+1 = -2k-2 \Rightarrow k = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

۱۲۳۹- گزینه ۴ چون خطهای داده شده موازی اند، پس شیبهای آنها

برابر است، در نتیجه $-\frac{a}{2} = -3$ ، پس $a=6$. اگر دو طرف معادله خط دوم

را در ۲ ضرب کنیم، به شکل $6x+2y+2k=0$ درمی آید. چون فاصله این دو

خط $\sqrt{10}$ است، پس

$$\frac{|2k+6|}{\sqrt{6^2+2^2}} = \sqrt{10} \xrightarrow{k>0} \frac{2k+6}{\sqrt{40}} = \sqrt{10} \Rightarrow k=7$$

بنابراین $a+k=13$.

۱۲۴۰- گزینه ۱ ابتدا معادله خط دوم را به صورت $2x-y-\frac{3}{2}=0$

می نویسیم. اکنون فرض می کنیم نقطه (x_0, y_0) روی خط مورد نظر باشد.

فاصله این نقطه از دو خط باید برابر باشد

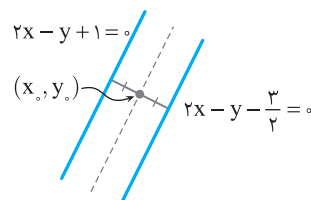
$$\frac{|2x_0 - y_0 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2x_0 - y_0 - \frac{3}{2}|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow |2x_0 - y_0 + 1| = |2x_0 - y_0 - \frac{3}{2}|$$

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 + 1 = 2x_0 - y_0 - \frac{3}{2} \Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} \text{ (غ.ق.ق.)} \\ 2x_0 - y_0 + 1 = -2x_0 + y_0 + \frac{3}{2} \Rightarrow 4x_0 - 2y_0 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

پس مختصات تمام نقطه هایی که از دو خط داده شده به یک فاصله باشند، در

معادله $4x-2y-\frac{1}{2}=0$ صدق می کنند، یعنی معادله خط مورد نظر

$$4x-2y-\frac{1}{2}=0 \text{ است.}$$



۱۲۴۱- گزینه ۴ با توجه به شکل مقابل واضح

است که $\hat{A} = 90^\circ$ و $AB=AC=3$. بنابراین

مثلث ABC قائم الزاویه متساوی الساقین است.

۱۲۴۲- گزینه ۱ چون خطهای MN و BC موازی هستند، پس شیب

آنها برابر است. شیب خط MN را به دست می آوریم:

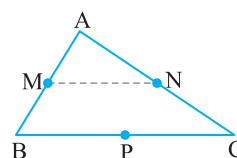
$$m_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-1-4}{-2-5} = \frac{5}{7}$$

معادله خطی را که از نقطه $P(-3, -4)$ با شیب $\frac{5}{7}$ می گذرد می نویسیم:

$$y+4 = \frac{5}{7}(x+3) \Rightarrow 7y = 5x-13$$

پس معادله خطی که BC روی آن قرار

دارد، $7y=5x-13$ است.

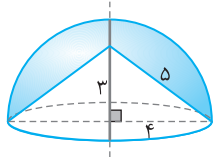


۱۲۵۶- گزینه ۲ ابتدا به کمک قضیه فیثاغورس شعاع ربع دایره را تعیین می‌کنیم:

$$\delta^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r = 4$$

جسم حاصل نیم کره‌ای به شعاع ۴ است که مخروطی به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم این جسم برابر است با

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \times 4^3 \right) - \frac{\pi \times 4^2 \times 3}{3} = \frac{80\pi}{3}$$



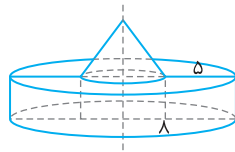
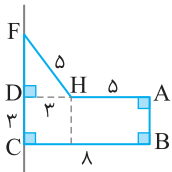
۱۲۵۷- گزینه ۳ به شکل زیر توجه کنید. برای به دست آوردن FD از

قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$FD^2 = FH^2 - DH^2 \Rightarrow FD = \sqrt{25 - 9} = 4$$

بنابراین جسم مورد نظر از یک استوانه به شعاع قاعده ۸ و ارتفاع ۳ و از یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ درست شده است. بنابراین حجم مورد نظر

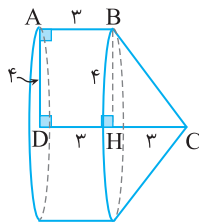
$$\text{برابر است با } \pi \times 8^2 \times 3 + \frac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 204\pi$$



۱۲۵۸- گزینه ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳

است که مخروطی به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ به آن اضافه شده است. بنابراین

$$\text{حجم جسم حاصل برابر است با } \pi \times 4^2 \times 3 + \frac{\pi \times 4^2 \times 3}{3} = 64\pi$$



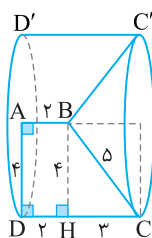
۱۲۵۹- گزینه ۲ به شکل زیر توجه کنید. برای به دست آوردن HC از

قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$HC^2 = BC^2 - BH^2 \Rightarrow HC = \sqrt{25 - 16} = 3$$

بنابراین جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ است که مخروطی به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم حاصل برابر

$$\text{است با } \pi \times 4^2 \times 5 - \frac{\pi \times 4^2 \times 3}{3} = 64\pi$$



۱۲۴۸- گزینه ۲ خط راست گذرنده از B و C از نقاط (۰, ۱) و (۲, ۰) نیز

می‌گذرد. بنابراین معادله آن $y - 0 = \frac{0-1}{2-0}(x-2)$ یا $y - 0 = -\frac{1}{2}(x-2)$ است. طول

ارتفاع وارد بر BC برابر با فاصله A از BC است: $\frac{|2 \times 4 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

۱۲۴۹- گزینه ۲ طول ضلع BC برابر است با

$$BC = \sqrt{(5-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$$

معادله خط گذرنده از نقاط B و C به صورت $y - 3 = \frac{4-3}{5-3}(x-3)$ یا $y - 3 = \frac{1}{2}(x-3)$

است. بنابراین طول ارتفاع وارد بر BC یا همان فاصله A از

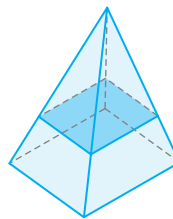
خط گذرنده از نقاط B و C برابر است با $\frac{|2(1) - (-7) - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. بنابراین

مساحت متوازی الاضلاع برابر است با $\frac{6}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 6$

۱۲۵۰- گزینه ۴ فاصله خط‌های موازی $3x + 4y + 6 = 0$ و

$3x + 4y - 6 = 0$ برابر است با $\frac{|6+6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12}{5}$. در نتیجه، چون مساحت

مستطیل ۱۲ است، پس طول ضلع دیگرش برابر با ۵ است. بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل برابر ۵ است.



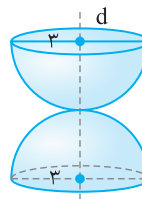
۱۲۵۱- گزینه ۳ همان‌گونه که در شکل مقابل

دید می‌شود، سطح مقطع حاصل یک مربع است.

۱۲۵۲- گزینه ۳ جسم حاصل از دو نیم کره

هر یک به شعاع ۳ درست شده است. بنابراین حجم

$$\text{آن برابر است با } 2 \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \times 3^3 \right) \right) = 36\pi$$



۱۲۵۳- گزینه ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱۲ و ارتفاع ۴

است که استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۴ از آن حذف شده است.

بنابراین حجم آن برابر است با $\pi \times 12^2 \times 4 - \pi \times 2^2 \times 4 = 560\pi$

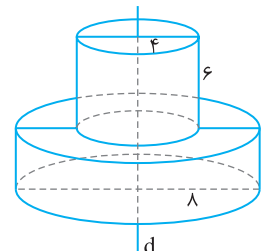
۱۲۵۴- گزینه ۳ از دوران هر نیم دایره حول خط d یک کره ایجاد می‌شود.

پس شکل ایجاد شده فضای بین دو کره است.

۱۲۵۵- گزینه ۴ جسم مورد نظر از دو استوانه درست شده است. یکی به

شعاع قاعده ۸ و ارتفاع ۴ و دیگری به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۶. بنابراین حجم

$$\text{مورد نظر برابر است با } \pi \times 8^2 \times 4 + \pi \times 4^2 \times 6 = 352\pi$$



۱۲۶۶- گزینه ۳ محل برخورد خط $y=2x+4$ با محور x نقطه $(-2, 0)$ است. پس F نقطه $(-2, 0)$ است. در نتیجه $c=OF=2$. محل برخورد خط $y=2x+4$ با محور y نقطه $(0, 4)$ است، پس $b=OB=4$. اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی برابر است با $2a = 4\sqrt{5}$.

۱۲۶۷- گزینه ۳ توجه کنید که $c=FO=F'O=2$ و در نتیجه $\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$. بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $a=AO=3+2=5$.

۱۲۶۸- گزینه ۲ راه حل اول طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است. بنابراین $2a=16$ پس $a=8$. از طرف دیگر، خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{c}{a}$ است. بنابراین

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow c=4$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 48 \Rightarrow b = 4\sqrt{3}$$

طول قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است، پس برابر است با $8\sqrt{3}$.

راه حل دوم چون $a=8$ و $e=\frac{1}{2}$ پس

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{64}} \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{b^2}{64} \Rightarrow b^2 = 48 \Rightarrow b = 4\sqrt{3}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b = 8\sqrt{3}$.

۱۲۶۹- گزینه ۳ توجه کنید که $c=OF=12$ و چون $2b=18$ پس $b=9$. بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow a = 15$$

در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

۱۲۷۰- گزینه ۱ نقطه‌های B و F' به ترتیب محل برخورد خط $y=-2x+1$ با محور x و محور y هستند. بنابراین F' نقطه $(\frac{1}{2}, 0)$ و B

نقطه $(0, 1)$ است. در نتیجه $b=OB=1$ و $c=OF'=\frac{1}{2}$. بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

۱۲۷۱- گزینه ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. بنابراین $2a=PF+PF'=10$ پس $a=5$. فاصله هر سر قطر کوچک بیضی تا هر یک از کانون‌های بیضی برابر a است. پس $B'F'=a=5$.

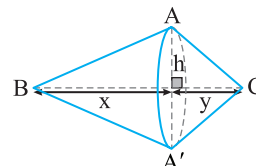
۱۲۷۲- گزینه ۳ طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است، پس $2a=AA'=8$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. در نتیجه $MF+MF'=NF+NF'=2a=8$. بنابراین محیط چهارضلعی $FMF'N$ برابر است با $8+8=16$.

۱۲۶۰- گزینه ۳ جسم حاصل از دو مخروط به هم چسبیده درست شده است. شعاع قاعده هر دو مخروط برابر ارتفاع وارد بر ضلع BC مثلث ABC است. اگر ارتفاع‌های آن‌ها برابر x و y باشد، آنگاه $x+y=BC=6$. اکنون توجه کنید که

$$S_{ABC} = 12 \Rightarrow \frac{1}{2}h \times BC = 12 \Rightarrow \frac{1}{2}h \times 6 = 12 \Rightarrow h=4$$

بنابراین حجم مورد نظر برابر است با

$$\frac{\pi h^2 x}{3} + \frac{\pi h^2 y}{3} = \frac{\pi h^2}{3}(x+y) = \frac{\pi \times 4^2 \times 6}{3} = 32\pi$$



۱۲۶۱- گزینه ۲ مرکز بیضی وسط پاره‌خط FF' ، یعنی نقطه $(\frac{6+6}{2}, \frac{4-2}{2})$ است، که می‌شود نقطه $(6, 1)$.

۱۲۶۲- گزینه ۴ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. بنابراین

$$2a = PF + PF' = \sqrt{(-6+6)^2 + (5-0)^2} + \sqrt{(-6-6)^2 + (5-0)^2} = 5 + 13 = 18$$

پس طول قطر بزرگ بیضی برابر 18 است.

۱۲۶۳- گزینه ۲ راه حل اول طبق فرض،

$$2a=6 \Rightarrow a=3, \quad 2b=3 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = \frac{9}{4} + c^2 \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

به این ترتیب، فاصله کانونی بیضی برابر است با $2c = 3\sqrt{3}$.

راه حل دوم چون $a^2 = b^2 + c^2$ پس $4a^2 = 4b^2 + 4c^2$. در نتیجه $(2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2$ پس

$$6^2 = 3^2 + (2c)^2 \Rightarrow (2c)^2 = 27 \Rightarrow 2c = 3\sqrt{3}$$

۱۲۶۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $2c=FF'=6$ پس $c=3$. طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است، پس $2a=10$ یعنی $a=5$. بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b=4$$

در نتیجه، طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b=8$.

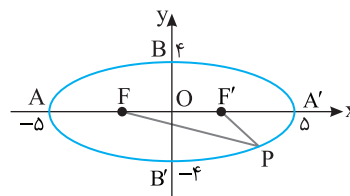
۱۲۶۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$PFF' = (PF+PF') + FF' = 2a + 2c$$

از طرف دیگر $a=OA'=5$ و $b=OB=4$. اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c=3$$

بنابراین محیط مثلث PFF' برابر است با $2a+2c=16$.



گزینه ۱-۱۲۷۹ توجه کنید که $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ، پس $c = \frac{a}{2}$ و $2b = 12$ ، پس

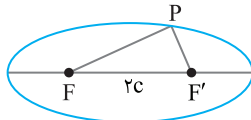
بنابراین $b = 6$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 36 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

بنابراین $c = \frac{a}{2} = 2\sqrt{3}$. مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های

بیضی برابر $2a$ است. بنابراین

$$PFF' = PF + PF' + FF' = 2a + 2c = 12\sqrt{3}$$



گزینه ۳-۱۲۸۰ توجه کنید که $c = OF = 5$ ، پس $FF' = 2c = 10$. از

طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر است

با $2a$. در نتیجه $PF + PF' = 2a$. اکنون توجه کنید که

$$PFF' = (PF + PF') + FF' \Rightarrow 24 = 2a + 10 \Rightarrow a = 7$$

در نتیجه، خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a} = \frac{5}{7}$.

گزینه ۱-۱۲۸۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر $2a$ است. بنابراین

$$2a = KF + KF' = 13 + 7 = 20 \Rightarrow a = 10$$

از طرف دیگر، فاصله هر یک از دو سر قطر کوچک بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر a است، پس $BF' = 10$.

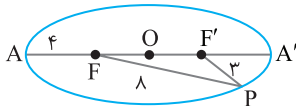
گزینه ۱-۱۲۸۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر $2a$ است. بنابراین

$$2a = PF + PF' = 8 + 3 = 11$$

از طرف دیگر $AA' = 2a$ و $AF' = AF = 4$ ، پس

$$FF' = AA' - AF - AF' = 11 - 4 - 4 = 3$$



گزینه ۲-۱۲۸۳ توجه کنید که $2a = AA' = 10$ ، پس $a = 5$. از طرف

دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. بنابراین

$$PF + PF' = 2a \Rightarrow 4 + PF' = 10 \Rightarrow PF' = 6$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه PFF'

$$PF'^2 + FF'^2 = PF^2 \Rightarrow 16 + FF'^2 = 36 \Rightarrow FF' = 2\sqrt{5}$$

گزینه ۲-۱۲۸۴ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر $2a$ است. بنابراین $2a = PF + PF' = 11 + 5 = 16$ ، پس $a = 8$.

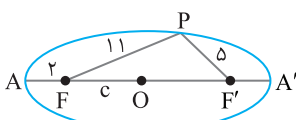
اگر O مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$AO = AF + FO \Rightarrow a = 2 + c \Rightarrow 8 = 2 + c \Rightarrow c = 6$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 36 \Rightarrow b = 2\sqrt{7}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $2b = 4\sqrt{7}$.



گزینه ۳-۱۲۷۳ فاصله کانونی بیضی برابر است با $2c$. بنابراین $2c = 8$ ،

یعنی $c = 4$. طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b$. بنابراین $2b = 4$ ،

یعنی $b = 2$. اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $4\sqrt{5}$.

گزینه ۳-۱۲۷۴ طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک بیضی به ترتیب برابر

$2a$ و $2b$ هستند. بنابراین

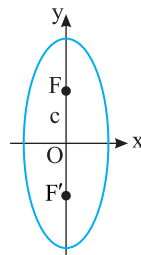
$$2a = 12 \Rightarrow a = 6, \quad 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6^2 = 5^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{11}$$

بنابراین $OF' = c = \sqrt{11}$. در نتیجه کانون‌های بیضی

نقطه‌های $(0, \sqrt{11})$ و $(0, -\sqrt{11})$ هستند.



گزینه ۱-۱۲۷۵ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی

برابر $2a$ است. بنابراین $2a = PF + PF' = 26$ ، $a = 13$.

همین‌طور، $2b = BB' = 24$ ، پس $b = 12$. اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = 12^2 + c^2 \Rightarrow c = 5$$

در نتیجه $AF = a - c = 13 - 5 = 8$.

گزینه ۳-۱۲۷۶ توجه کنید که محور x از وسط پاره‌خط FF' می‌گذرد و

بر آن عمود است. بنابراین BB' قطر کوچک بیضی مورد نظر است. در نتیجه

$BF = BF' = a$. اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویه BFF' بنابر

قضیه فیثاغورس،

$$BF^2 + BF'^2 = FF'^2 \Rightarrow a^2 + a^2 = 8^2 \Rightarrow 2a^2 = 64 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $2a = 8\sqrt{2}$.

گزینه ۳-۱۲۷۷ از شرط‌های مسئله نتیجه می‌شود که قطر بزرگ و

قطر کوچک بیضی روی محورهای مختصات هستند. بنابراین $b = \sqrt{13}$. از

طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$

است. بنابراین $2a = PF + PF' = 14$ ، پس $a = 7$.

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 49 = 13 + c^2 \Rightarrow c = 6$$

بنابراین، خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a} = \frac{6}{7}$.

گزینه ۱-۱۲۷۸ چون محور y عمودمنصف FF' است، پس قطر کوچک

بیضی روی محور y است. در نتیجه $b = OB = 3$. مجموع فاصله‌های هر

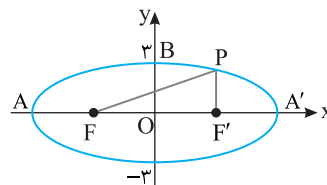
نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر با $2a$ است. بنابراین

$$2a = PF + PF' = 18 \Rightarrow a = 9$$

در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = 6\sqrt{2}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.



۱۲۹۰- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ ، پس $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ و

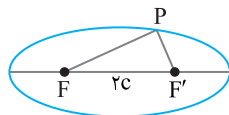
$2b=8$ ، پس $b=4$ ، بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + \frac{a^2}{9} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

بنابراین $c = \frac{a}{3} = \sqrt{2}$ ، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های

بیضی برابر $2a$ است. بنابراین

$$PFF' = PF + PF' + FF' = 2a + 2c = 8\sqrt{2}$$



راه حل دوم برای به دست آوردن a و c از $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{16}{a^2}} \Rightarrow \frac{1}{9} = 1 - \frac{16}{a^2} \Rightarrow \frac{16}{a^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

از طرفی $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ ، پس $c = \sqrt{2}$.

۱۲۹۱- گزینه ۲ معادله دایره‌ای که مرکزش نقطه (α, β) و شعاعش r

است به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ است. بنابراین معادله دایره

مورد نظر $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$ است.

۱۲۹۲- گزینه ۳ اندازه شعاع دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ برابر

است با $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$. بنابراین $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{5}{2}$.

۱۲۹۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(2x-1)^2 + (2y+3)^2 = k+1 \Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = k+1$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{k+1}{4}$$

بنابراین شعاع دایره برابر $\sqrt{\frac{k+1}{4}}$ است. پس

$$\sqrt{\frac{k+1}{4}} = 5 \Rightarrow \frac{k+1}{4} = 25 \Rightarrow k+1 = 100 \Rightarrow k = 99$$

۱۲۹۴- گزینه ۴ شعاع دایره مورد نظر برابر فاصله نقطه‌های $(-1, 3)$ و

$(2, 5)$ است، پس $r = \sqrt{(2+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$. به این ترتیب، چون

مرکز دایره مورد نظر نقطه $(-1, 3)$ است، معادله‌اش به صورت زیر است:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y - 3 = 0$$

۱۲۹۵- گزینه ۳ برای اینکه $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک

دایره باشد باید $a^2 + b^2 - 4c > 0$ ، در نتیجه باید $4 \times 3 > k^2 + 2^2$ ، بنابراین

$$k^2 > 8 \text{ و در نتیجه } |k| > 2\sqrt{2}.$$

۱۲۹۶- گزینه ۳ مختصات نقاط داده شده را در معادله دایره قرار می‌دهیم:

$$A(2, -2): 4 + 4 - 8 - 12 = -12 < 0, \quad B(4, 0): 16 + 0 - 16 + 0 = 0$$

$$C(3, 1): 9 + 1 - 12 + 6 = 4 > 0, \quad D(1, -2): 1 + 4 - 4 - 12 = -11 < 0$$

بنابراین A و D درون دایره، B روی دایره و C بیرون دایره است.

۱۲۸۵- گزینه ۱ توجه کنید که $BF = BF' = a$ ، پس $2a = 20$ ، یعنی

$a = 10$. از طرف دیگر، $c = OF' = OA' - F'A' = 10 - 4 = 6$. اکنون توجه

کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 36 \Rightarrow b = 8$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b = 16$.

۱۲۸۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2a = AA' = 8 \Rightarrow a = 4, \quad 2b = BB' = 6 \Rightarrow b = 3$$

از طرف دیگر،

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 9 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویه BOF' ، $\cos \alpha = \frac{OF'}{BF'} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

۱۲۸۷- گزینه ۳ راه حل اول مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا

کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. همچنین، $FF' = 2c$ ، بنابراین

$$PFF' = (PF + PF') + FF' = 2a + 2c$$

$$18 = 2(a + c) \Rightarrow a + c = 9$$

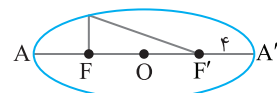
از طرف دیگر، اگر O مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$A'O = A'F' + F'O \Rightarrow a = 4 + c \Rightarrow a - c = 4$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = (a - c)(a + c) = 4 \times 9 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $2b = 12$.



راه حل دوم برای به دست آوردن b ، از رابطه $AF' = a + c$ استفاده می‌کنیم.

توجه کنید که

$$2a = AA' = AF' + F'A' \Rightarrow 2a = 9 + 4 = 13$$

$$a = \frac{13}{2} \xrightarrow{a+c=9} c = \frac{5}{2}$$

بنابراین $b = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 6$ ، پس $2b = 12$.

۱۲۸۸- گزینه ۲ راه حل اول بنابر فرض مسئله $\frac{2a}{2b} = \frac{13}{12}$ ، پس $\frac{a}{b} = \frac{13}{12}$ ،

یعنی $b = \frac{12}{13}a$ ، بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 = \left(\frac{12}{13}a\right)^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - \frac{144}{169}a^2 = c^2$$

$$\frac{25}{169}a^2 = c^2 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$$

راه حل دوم می‌دانیم $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ ، پس $\frac{b}{a} = \frac{12}{13}$ ، $\frac{2a}{2b} = \frac{13}{12}$ و چون

بنابراین

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169 - 144}{169}} = \frac{5}{13}$$

۱۲۸۹- گزینه ۴ نقطه‌های A و B به ترتیب محل برخورد خط

$2x - 3y + 6 = 0$ با محور x و محور y هستند. بنابراین A نقطه $(-3, 0)$

و B نقطه $(0, 2)$ است. بنابراین $a = OA = 3$ و $b = OB = 2$. در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

۱۳۰۱- گزینه ۱ معادله دایره مورد نظر به صورت $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

است که به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

۱۳۰۲- گزینه ۱ ابتدا دو طرف معادله دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا

به صورت $x^2 + y^2 + 2x - 3y - \frac{3}{4} = 0$ نوشته شود. بنابراین مرکز این دایره

نقطه $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ یعنی $(-\frac{2}{4}, \frac{3}{4})$ است و شعاعش برابر است با

$$\frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-3)^2 - 4(-\frac{3}{4})} = 2$$

۱۳۰۳- گزینه ۴ مرکز دایره نقطه $(-\frac{a}{2}, -b)$ است. بنابراین

$$-\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4, \quad -b = -4 \Rightarrow b = 4$$

پس معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 5$ است و شعاع آن برابر

$$\text{است با } r = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 8^2 - 4(-5)} = 5$$

۱۳۰۴- گزینه ۴ در معادله دایره جمله شامل xy وجود ندارد. بنابراین

ضرب xy باید صفر باشد، پس $a+b=0$. از طرف دیگر، در معادله دایره

ضرب جمله‌های شامل x^2 و y^2 برابر ۱ است. اگر طرفین معادله داده شده

را بر ۶ تقسیم کنیم، معادله $x^2 + \frac{2a-b}{6}y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 0$ به دست می‌آید.

بنابراین $\frac{2a-b}{6} = 1$ ، یعنی $2a-b=6$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=-2 \Rightarrow a-b=4$$

۱۳۰۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر معادله

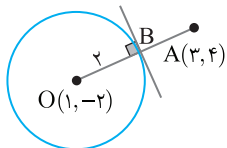
$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + a = 0$$

مربوط به یک دایره باشد، باید $4a > (-2)^2 + 4^2$ ، پس $a < 5$. اکنون اگر مختصات نقطه $A(-1, 2)$ را در

عبارت سمت چپ معادله دایره قرار دهیم، باید حاصل، عددی مثبت شود:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + a > 0 \xrightarrow{x=-1, y=2} 1 + 4 - 4 - 4 + a > 0 \Rightarrow a > 3$$

بنابراین $3 < a < 5$.



۱۳۰۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

نقطه A بیرون دایره قرار دارد. مطابق

شکل، کمترین فاصله نقطه A از دایره

مربوط به پاره خط AB است. بنابراین

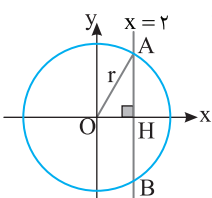
$$OA = \sqrt{(3-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}, \quad OB = r = 2 \rightarrow AB = 2\sqrt{10} - 2$$

۱۳۰۷- گزینه ۳ با نمادگذاری شکل زیر $AB = 4\sqrt{3}$ ، پس

$$AH = 2\sqrt{3} \text{ و در نتیجه } r = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

طرف دیگر شعاع دایره برابر $\sqrt{3k+1}$ است. پس

$$r = \sqrt{3k+1} = 4 \Rightarrow k = 5$$



۱۲۹۷- گزینه ۲ شعاع دایره برابر فاصله نقطه $O(1, -2)$ از نقطه

$A(3, -2)$ است، در نتیجه $r = OA = \sqrt{(3-1)^2 + (-2+2)^2} = 2$

معادله دایره به صورت $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ است. مختصات نقاط

مشترک این دایره با محورهای مختصات به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x=0 \Rightarrow 1+(y+2)^2=4 \Rightarrow (y+2)^2=3 \Rightarrow y=-2 \pm \sqrt{3}$$

$$y=0 \Rightarrow (x-1)^2+4=4 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

سه نقطه مشترک عبارت‌اند از:

$$(0, -2+\sqrt{3}), (0, -2-\sqrt{3}), (1, 0)$$

۱۲۹۸- گزینه ۱ راه حل اول مرکز دایره مورد نظر نقطه $O(-\frac{4}{2}, -\frac{2}{2})$ ،

یعنی $O(-2, -1)$ است. اگر دایره بر خطی مماس باشد، شعاعش برابر با

فاصله مرکز دایره از این خط است. فاصله نقطه $(-2, -1)$ از خط $y-1=0$

برابر $\frac{|-1-1|}{1} = 2$ است. شعاع دایره مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2} - 4k &= \frac{1}{2} \sqrt{20 - 4k} \\ \frac{1}{2} \sqrt{20 - 4k} &= 2 \Rightarrow \sqrt{20 - 4k} = 4 \Rightarrow k = 1 \end{aligned}$$

راه حل دوم چون خط $y=1$ بر دایره مماس است، اگر در معادله دایره قرار دهیم

$y=1$ ، باید معادله ریشه مضاعف داشته باشد، پس

$$3+k=4 \Rightarrow k=1$$

۱۲۹۹- گزینه ۴ مرکز دایره مورد نظر نقطه $(1, 2)$ است. بنابراین شیب

خطی که از مرکز و نقطه $(3, 5)$ می‌گذرد (یعنی خطی که شعاع نظیر نقطه

$(3, 5)$ روی آن قرار دارد) برابر است با $\frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$. چون خط مماس بر دایره،

در نقطه تماس بر شعاع عمود است، پس اگر شیب خط مماس m باشد،

$$m \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

بنابراین خط مماس خطی است که شیب آن $-\frac{2}{3}$ است، از نقطه $(3, 5)$

می‌گذرد و معادله آن به صورت زیر است:

$$y-5 = -\frac{2}{3}(x-3) \Rightarrow 2x+3y=21$$

۱۳۰۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که در دایره $x^2 + y^2 + 4y = 5$ مرکز

نقطه $O(0, -2)$ ، یعنی $O(0, -\frac{4}{2})$ و شعاع برابر است با

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4^2 - 4(-5)} = \frac{1}{2} \sqrt{16+20} = 3$$

همچنین در دایره $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ مرکز نقطه $O'(2, -1)$ و شعاع برابر

$r' = 3$ است. بنابراین $OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

پس $r-r' = 0$ و $r+r' = 3+3 = 6$

دایره متقاطع‌اند.

۱۳۱۴- گزینه ۴ مرکز دایره وسط پاره خط بین دو سر قطر است. مرکز

دایره مورد نظر نقطه $(-\frac{8}{2}, -\frac{4}{2})$ ، یعنی $(-4, 2)$ است. اگر سر دیگر قطر

مورد نظر نقطه (x, y) باشد، وسط این قطر نقطه $(\frac{x-3}{2}, \frac{y+2}{2})$ است. بنابراین

$$(\frac{x-3}{2}, \frac{y+2}{2}) = (4, 2) \Rightarrow \frac{x-3}{2} = 4, \quad \frac{y+2}{2} = 2$$

بنابراین $x=11$ و $y=2$. پس نقطه مورد نظر $(11, 2)$ است.

۱۳۱۵- گزینه ۴ فرض می‌کنیم معادله دایره مورد نظر به صورت

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد. چون مختصات نقطه‌های داده شده در این

معادله صدق می‌کنند، پس $9 + 3b + c = 0$ ، $49 + 7b + c = 0$ و $1 - a + c = 0$.

از معادله‌های اول و دوم $b = -10$ و $c = 21$ به دست می‌آید. بنابراین از

معادله سوم $a = 22$ به دست می‌آید. اکنون توجه کنید که مرکز دایره

مورد نظر نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ یعنی نقطه $(-11, 5)$ است.

۱۳۱۶- گزینه ۳ اگر مختصات نقطه A را در عبارت سمت چپ معادله

دایره قرار دهیم، باید حاصل مقداری منفی شود:

$$x^2 + y^2 + ax + y - 1 < 0 \xrightarrow{x=2, y=-1} 4 + 1 + 2a - 1 - 1 < 0$$

$$2a < -3 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$$

۱۳۱۷- گزینه ۱ توجه کنید که نقطه $(1, -1)$ مرکز دایره است و شعاع

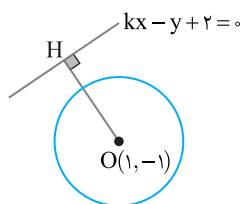
دایره برابر ۳ است. چون دایره و خط متقاطع نیستند، پس یا خط بر دایره مماس

است یا خارج آن قرار دارد. بنابراین فاصله مرکز دایره از خط کمتر از شعاع دایره

نیست. مطابق شکل زیر $\frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} \geq 3$ OH =

$$(k+3)^2 \geq 9(k^2+1) \Rightarrow k^2+6k+9-9k^2-9 \geq 0$$

$$-8k^2+6k \geq 0 \Rightarrow k(4k-3) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{3}{4}$$



۱۳۱۸- گزینه ۳ فرض می‌کنیم مرکز دایره مورد نظر نقطه $(5, b)$ باشد.

در این صورت از روی شکل زیر معلوم است که شعاع این دایره برابر b است.

از طرف دیگر، فاصله مرکز دایره از خط مماس $4x - 3y + 12 = 0$ برابر شعاع

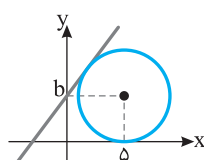
دایره است. پس

$$\frac{|4 \times 5 - 3b + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = b \Rightarrow |32 - 3b| = 5b$$

$$32 - 3b = 5b \Rightarrow b = 4, \quad 32 - 3b = -5b \Rightarrow b = -16 \text{ (غ.ق.ی.)}$$

بنابراین مرکز دایره مورد نظر نقطه $(5, 4)$ و شعاع آن ۴ است، پس

معادله اش $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 16$ است.



۱۳۰۸- گزینه ۱ راه حل اول مرکز دایره مورد نظر نقطه $(-\frac{4}{2}, -\frac{2}{2})$ ،

یعنی $(-2, -1)$ است. اگر دایره بر خطی مماس باشد، شعاعش برابر با فاصله

مرکز دایره از این خط است. فاصله نقطه $(-2, -1)$ از خط $x = -4$ برابر ۲

است و شعاع دایره مورد نظر برابر است با $\frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2 - 4k} = \frac{1}{2}\sqrt{20 - 4k}$

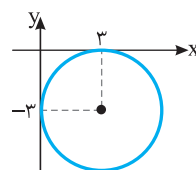
در نتیجه

$$\frac{1}{2}\sqrt{20 - 4k} = 2 \Rightarrow \sqrt{20 - 4k} = 4 \Rightarrow k = 1$$

راه حل دوم اگر در معادله دایره قرار دهیم $x = -4$ ، معادله باید ریشه

مضاعف داشته باشد، پس معادله $y^2 + 2y + k = 0$ ریشه مضاعف دارد. در

نتیجه $k = 1$.



۱۳۰۹- گزینه ۱ از روی شکل روبه‌رو

معلوم است که مرکز دایره مورد نظر نقطه

$(3, -3)$ است.

۱۳۱۰- گزینه ۳ اگر دو دایره مماس بیرونی باشند، طول خط‌المركزین آن‌ها

برابر مجموع شعاع‌های آن‌هاست. مرکز دایره‌ها نقطه‌های $(3, -5)$ و $(-2, 7)$

و شعاع آن‌ها r و R است. بنابراین $13 = \sqrt{(3+2)^2 + (-5-7)^2}$

پس $r = 6$.

۱۳۱۱- گزینه ۱ مرکز دایره مورد نظر نقطه $(-\frac{6}{2}, -\frac{2}{2})$ ، یعنی نقطه

$(-3, -1)$ است. قطر مورد نظر از مبدأ می‌گذرد، پس معادله‌اش به صورت

$y = mx$ است و چون مرکز دایره، یعنی نقطه $(-3, -1)$ روی این قطر است،

پس $-1 = m(-3)$ ، یعنی $m = \frac{1}{3}$. بنابراین معادله این قطر به صورت

$y = -\frac{1}{3}x$ ، یعنی $3y + x = 0$ است.

۱۳۱۲- گزینه ۴ شعاع دایره مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2 - 4(-9)} = \frac{1}{2}\sqrt{5a^2 + 36}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2}\sqrt{5a^2 + 36} = \frac{9}{2} \Rightarrow \sqrt{5a^2 + 36} = 9 \Rightarrow 5a^2 + 36 = 81 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 + 3x + 6y - 9 = 0$ است که مرکز آن

نقطه $(-\frac{3}{2}, -\frac{6}{2})$ ، یعنی نقطه $(-\frac{3}{2}, -3)$ است.

۱۳۱۳- گزینه ۳ در معادله گسترده دایره باید ضرایب x^2 و y^2 برابر

باشند. پس

$$a = 2a + 1 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$-x^2 - y^2 - x + y = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - y = 1$$

پس شعاع دایره برابر است با

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 - 4(-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 1 + 4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۱۳۲۵- گزینه ۱ راه حل اول اگر خط بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز

دایره، یعنی نقطه $(3, 4)$ از خط $mx - y = 0$ برابر شعاع دایره، یعنی $\sqrt{5}$

است. بنابراین

$$\frac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow (3m-4)^2 = 5(m^2+1)$$

$$9m^2 - 24m + 16 = 5m^2 + 5$$

$$4m^2 - 24m + 11 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}, m = \frac{11}{2}$$

۱۳۲۶- راه حل دوم برای اینکه خط $y = mx$ بر دایره $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$

مماس باشد، باید معادله زیر ریشه مضاعف داشته باشد:

$$(x-3)^2 + (mx-4)^2 = 5 \Rightarrow (1+m^2)x^2 - 2(3+4m)x + 20 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4(3+4m)^2 - 80(1+m^2) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 24m + 11 = 0$$

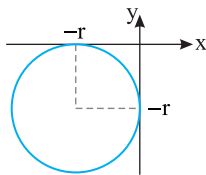
$$m = \frac{1}{2}, m = \frac{11}{2}$$

۱۳۲۷- گزینه ۴ اگر شعاع دایره مورد نظر برابر r باشد، از روی شکل

زیر معلوم است که مرکز دایره مورد نظر نقطه $(-r, -r)$ است. چون $r = 3$ ،

پس مرکز دایره مورد نظر نقطه $(-3, -3)$ و معادله اش به صورت زیر است:

$$(x-(-3))^2 + (y-(-3))^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$$

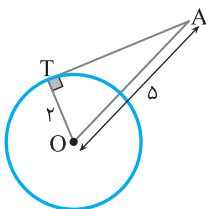


۱۳۲۸- گزینه ۱ مرکز دایره داده شده نقطه $O(1, -2)$ و شعاعش برابر

$r = 2$ است. از طرف دیگر $OA = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = 5$. اکنون توجه

کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه OTA :

$$AT = \sqrt{OA^2 - r^2} \Rightarrow AT = \sqrt{5^2 - 2^2} \Rightarrow AT = \sqrt{21}$$



۱۳۲۹- گزینه ۱ در معادله دایره y را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$x^2 + 0 + 3x + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -4, x = 1$$

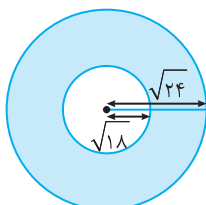
بنابراین $AB = 1 - (-4) = 5$

۱۳۳۰- گزینه ۳ ناحیه $x^2 + y^2 < 24$ ناحیه درون دایره $x^2 + y^2 = 24$

و ناحیه $x^2 + y^2 > 18$ ناحیه بیرون دایره $x^2 + y^2 = 18$ است. این دایره‌ها

هم‌مرکزاند و شعاع آن‌ها $\sqrt{24}$ و $\sqrt{18}$ است. بنابراین مساحت ناحیه مورد نظر

برابر است با مساحت ناحیه رنگی در شکل زیر $\pi(\sqrt{24})^2 - \pi(\sqrt{18})^2 = 6\pi$

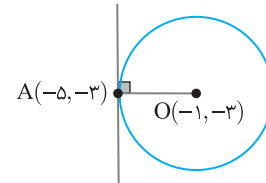


۱۳۳۱- گزینه ۱ نقطه $O(-\frac{2}{3}, -\frac{6}{3})$ ، یعنی $O(-1, -3)$ مرکز دایره

است. مطابق شکل زیر شیب OA برابر است با $\frac{-3+3}{-5+1} = 0$. بنابراین شیب

خط مماس بر دایره که عمود بر خط OA است، تعریف نمی‌شود و این خط موازی محور y است و معادله آن به صورت $x = -5$ است. پس $a = 1$ و

$b = 0$ و در نتیجه $a + b = 1$



۱۳۳۲- گزینه ۱ اگر دو دایره مماس درونی باشند، طول خط‌المركزین

آن‌ها برابر قدرمطلق تفاضل شعاع‌های آن‌هاست. مراکز دایره‌ها نقطه‌های $(1, 2)$ و $(-2, 6)$ و شعاع‌های آن‌ها 6 و r است. بنابراین

$$|6-r| = \sqrt{(1+2)^2 + (2-6)^2} = 5$$

$$\begin{cases} 6-r = -5 \Rightarrow r = 11 \\ 6-r = 5 \Rightarrow r = 1 \end{cases}$$

۱۳۳۳- گزینه ۳ مرکز دایره داده شده نقطه $(-\frac{2}{3}, -\frac{6}{3})$ ، یعنی $(-1, 3)$

است. شعاع این دایره هم برابر است با $\frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-6)^2} = 4$

بنابراین مرکز دایره مورد نظر نقطه $(-1, 3)$ و شعاعش برابر 2 است. در نتیجه

معادله اش به صورت $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ است.

۱۳۳۴- گزینه ۱ مرکز دایره داده شده، یعنی نقطه $(-1, 3)$ باید روی

خط $2x + by - 7 = 0$ باشد. در نتیجه

$$-2 + 3b - 7 = 0 \Rightarrow b = 3$$

۱۳۳۵- گزینه ۴ محل برخورد دو خط داده شده، مرکز دایره است. بنابراین

مختصات مرکز دایره جواب‌های دستگاه معادلات زیر هستند:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 8, y = -2$$

بنابراین شعاع دایره برابر با فاصله مرکز دایره، یعنی نقطه $(8, -2)$ از نقطه

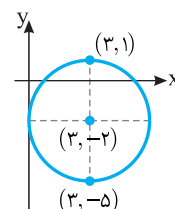
$(6, 2)$ است. پس $\text{شعاع دایره} = \sqrt{(8-6)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20}$

۱۳۳۶- گزینه ۳ نقطه $(-\frac{6}{3}, -\frac{4}{3})$ ، یعنی $(-2, -\frac{4}{3})$ مرکز دایره است و

اندازه شعاع دایره برابر $\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 4^2} = 3$ است. مطابق شکل زیر،

بیشترین و کمترین مقدار عرض نقاط روی دایره مربوط به نقاط $(3, 1)$ و

$(3, -5)$ است. پس حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار y برابر -5 است.



بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت $x^2 + y^2 + by + c = 0$ در می آید. چون نقطه های $(0, -1)$ و $(3, 0)$ روی این دایره اند، پس مختصات آن ها در معادله این دایره صدق می کنند:

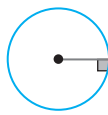
$$\begin{cases} (3, 0): 9 + c = 0 \\ (0, -1): 1 - b + c = 0 \end{cases}$$

پس $c = -9$ و $b = -8$. بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ است و شعاعش برابر است با

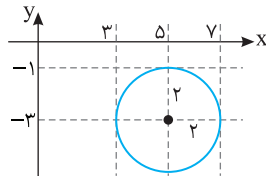
$$\frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (-8)^2 - 4(-9)} = 5$$

گزینه ۴ - ۱۳۳۴ اگر خط بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است. مرکز دایره مورد نظر نقطه $(7, 2)$ و شعاع آن برابر r است. از طرف دیگر، فاصله نقطه $(7, 2)$ تا خط $4x - 3y + 8 = 0$ برابر است

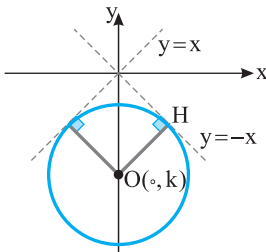
$$\text{با } r = 6 \text{ بنابراین } \frac{|4 \times 7 - 3 \times 2 + 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{30}{5} = 6$$



گزینه ۲ - ۱۳۳۵ شعاع دایره مورد نظر نصف فاصله خط های $x = 3$ و $x = 7$ است. چون این فاصله برابر ۴ است، پس شعاع دایره مورد نظر ۲ است. به این ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می شود که طول مرکز دایره برابر ۵ و عرض آن برابر ۳- است، یعنی مرکز دایره مورد نظر نقطه $(5, -3)$ است. بنابراین معادله دایره به صورت $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 4$ است.



گزینه ۲ - ۱۳۳۶ با توجه به شکل زیر مرکز دایره باید روی محور y باشد. اگر $O(0, k)$ مرکز دایره باشد، آن گاه $r = OH = \frac{|0+k|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 2$. پس $|k| = 2\sqrt{2}$ و چون k منفی است، $k = -2\sqrt{2}$.



گزینه ۲ - ۱۳۳۷ شعاع دایره مورد نظر برابر فاصله نقطه $(3, 4)$ از خط $x + 2y + 4 = 0$ است. بنابراین $r = \frac{|3 + 8 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 3\sqrt{5}$. بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت زیر است:

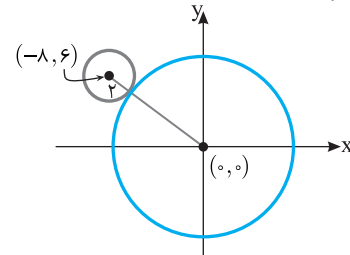
$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 45 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y - 20 = 0$$

گزینه ۱ - ۱۳۳۰ مرکز دایره $(x + 8)^2 + (y - 6)^2 = 4$ نقطه $(-8, 6)$ و

شعاعش برابر ۲ است. اگر دایره ای با این دایره مماس بیرونی باشد، طول خط المرکزین این دایره ها برابر با مجموع شعاع های آن ها است. توجه کنید که

$$1 = \sqrt{(0 - (-8))^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

در نتیجه، اگر شعاع دایره مورد نظر برابر r باشد، باید $10 = 2 + r$ ، یعنی $r = 8$. معادله دایره ای که مرکزش نقطه $(0, 0)$ و شعاعش برابر ۸ است به صورت $x^2 + y^2 = 64$ است.



گزینه ۲ - ۱۳۳۱ در معادله دایره، ضریب جمله های شامل x^2 و y^2 برابر ۱ است. بنابراین ابتدا دو طرف معادله داده شده را بر $3k - 2$ تقسیم می کنیم (توجه کنید که $3k - 2 \neq 0$):

$$x^2 + \frac{k+2}{3k-2} y^2 + \frac{4k}{3k-2} x - \frac{8k}{3k-2} y - \frac{16}{3k-2} = 0$$

بنابراین $\frac{k+2}{3k-2} = 1$ ، پس $k = 2$ و معادله دایره می شود

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

و شعاعش برابر است با

$$\frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4(-4)} = 3$$

گزینه ۲ - ۱۳۳۲ چون مرکز دایره روی خط $y = 2x$ و در ناحیه اول است، پس به صورت $(k, 2k)$ است ($k > 0$). چون دایره مورد نظر از مبدأ مختصات می گذرد و شعاعش $2\sqrt{5}$ است، پس فاصله مرکزش از مبدأ مختصات برابر $2\sqrt{5}$ است. بنابراین

$$\sqrt{(k-0)^2 + (2k-0)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{k^2 + 4k^2} = 2\sqrt{5}$$

$$|k| = 2 \Rightarrow k = 2$$

بنابراین مرکز دایره مورد نظر نقطه $(2, 4)$ و شعاعش $2\sqrt{5}$ است. در نتیجه معادله اش به صورت $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$ است.

گزینه ۳ - ۱۳۳۳ **راه حل اول** چون مرکز دایره روی محور y است، پس مختصات آن به صورت $O(0, \alpha)$ است. فرض کنید شعاع دایره r باشد.

نقطه های $A(0, -1)$ و $B(3, 0)$ روی دایره قرار دارند، پس $r = OA = OB$.

$$\text{از طرف دیگر } OA = \sqrt{(0+1)^2} \text{ و } OB = \sqrt{9+\alpha^2}$$

بنابراین

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 9 + \alpha^2 \Rightarrow \alpha = 4$$

و در نتیجه $r = OA = \sqrt{5^2} = 5$.

راه حل دوم اگر معادله گسترده دایره مورد نظر به صورت

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد، مرکزش نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است که چون

روی محور y است، پس $-\frac{a}{2} = 0$ ، یعنی $a = 0$.

۱۳۴۲- گزینه ۳ معادله خط را به صورت $x - ky + 1 = 0$ می‌نویسیم. پس

$$\frac{|3k - k(1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-k)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|2k + 1|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2$$

$$|2k + 1| = 2\sqrt{1 + k^2} \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 4 + 4k^2 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

۱۳۴۳- گزینه ۱ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر ۱- است.

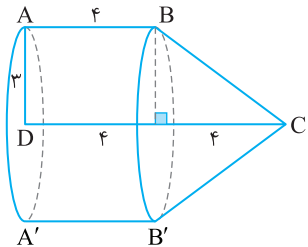
بنابراین شیب خطی که بر خط $2y = -3x$ ، یعنی $y = -\frac{3}{2}x$ عمود

است، برابر $\frac{2}{3}$ است. معادله خطی که شیب آن $\frac{2}{3}$ است و از نقطه $(0, -1)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow 3y - 2x + 3 = 0$$

۱۳۴۴- گزینه ۴ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴

است که مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ به آن اضافه شده است. بنابراین حجم جسم حاصل برابر است با

$$\pi \times 3^2 \times 4 + \frac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 48\pi$$


۱۳۴۵- گزینه ۳ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی تا کانون‌های

بیضی برابر است با ۲a. بنابراین $MF + MF' = 2a$ و $NF + NF' = 2a$. اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که محیط چهارضلعی MFNF' برابر است با ۴a. اکنون توجه کنید که $c = OF = 6$ و $2b = BB' = 16$ بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 = 6^2 + 3^2 = 45 \Rightarrow a = 3\sqrt{5}$$

پس محیط چهارضلعی MFNF' برابر است با $4a = 12\sqrt{5}$.

۱۳۴۶- گزینه ۱ توجه کنید که $2c = FF' = 8$ ، پس $c = 4$. همچنین

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{3}, \text{ پس } a = \frac{3}{2}c = 6. \text{ بنابراین}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b = 4\sqrt{5}$.

۱۳۴۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(3x - 1)^2 + (3y - 2)^2 = 4 \Rightarrow 9(x - \frac{1}{3})^2 + 9(y - \frac{2}{3})^2 = 4$$

$$(x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

بنابراین شعاع این دایره برابر $\frac{2}{3}$ است.

۱۳۴۸- گزینه ۲ مرکز دایره داده شده نقطه $(-\frac{6}{5}, -\frac{1}{5})$ ، یعنی

$(-5, 3)$ است. بنابراین مرکز دایره مورد نظر هم $(-5, 3)$ است. شعاع این

دایره برابر فاصله نقطه‌های $(-5, 3)$ و $(8, 7)$ است که می‌شود

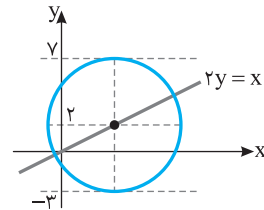
$$\sqrt{(8 - (-5))^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{169} = 13$$

۱۳۳۸- گزینه ۱ از روی شکل معلوم است که شعاع دایره مورد نظر برابر

با نصف فاصله خط‌های $y = 7$ و $y = -3$ است. فاصله این خط‌ها برابر است با $10 = 7 - (-3)$ ، پس شعاع دایره برابر ۵ است. عرض مرکز دایره روی خطی موازی با خطوط $y = 7$ و $y = -3$ است و از این دو خط به یک فاصله است.

یعنی روی خط $y = \frac{7 - 3}{2} = 2$ قرار دارد، در نتیجه طول مرکز دایره برابر است

با $x = 2y = 4$ ، یعنی مرکز دایره مورد نظر نقطه $(4, 2)$ و شعاع آن برابر ۵ است. در نتیجه معادله آن به صورت $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$ است.



۱۳۳۹- گزینه ۳ چون دایره‌ها متقاطع اند، طول خط‌المکزیین آن‌ها از

مجموع شعاع‌های دایره‌ها کمتر و از قدرمطلق تفاضل شعاع‌ها بیشتر است:

$$|r - 2| < \sqrt{(1 - (-3))^2 + (0 - r)^2} < r + 2$$

$$|r - 2| < \sqrt{16 + r^2} < r + 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} r^2 - 4r + 4 < 16 + r^2 < r^2 + 4r + 4 \Rightarrow -4r < 12 < 4r$$

نابرابری سمت چپ همواره درست است و نابرابری سمت راست یعنی $r > 3$.

۱۳۴۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که مختصات نقاط A و B در معادله هر دو

دایره صدق می‌کنند. پس مختصات این نقاط از حل دستگاه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 3y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

اگر معادله (۲) را از معادله (۱) کم کنیم، به معادله $3x - 3y = 0$ می‌رسیم.

بنابراین نقاط A و B روی خط $y = x$ قرار دارند و باید نقاط تقاطع این خط و یکی از دایره‌ها را به دست آوریم:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

بنابراین باید فاصله نقاط $A(-1, -1)$ و $B(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ را به دست بیاوریم:

$$AB = \sqrt{(-1 + \frac{1}{2})^2 + (-1 + \frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۳۴۱- گزینه ۱ دو سر وتر مثلث مورد نظر نقطه‌های برخورد خط

$x - 2y = 8$ با محورهای مختصات هستند. این نقطه‌ها $(8, 0)$ و $(0, -4)$

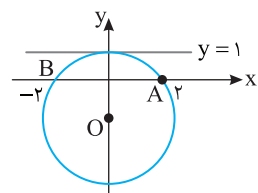
هستند. وسط پاره‌خط میان این دو نقطه، نقطه $(\frac{0+8}{2}, \frac{-4+0}{2})$ یعنی $(4, -2)$

است. معادله خطی که از مبدأ و این نقطه می‌گذرد $y = -\frac{1}{2}x$ یا $x + 2y = 0$ است.

۱۳۵۴-گزینه ۳ با توجه به تقارن شکل، مرکز دایره روی محور y است. پس $O(0, \beta)$ را مرکز دایره فرض می‌کنیم. توجه کنید که

فاصله O تا خط مماس OA = فاصله

از طرف دیگر فاصله نقطه مرکز تا خط مماس $|1-\beta|$ است و فاصله نقطه مرکز تا نقطه A برابر $\sqrt{(0-2)^2 + \beta^2}$ است، پس



خارج از کشور تجربی - ۸۸

$$\sqrt{(0-2)^2 + (\beta)^2} = |1-\beta|$$

$$4 + \beta^2 = 1 - 2\beta + \beta^2 \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}$$

$$R = |1-\beta| = |1-(-\frac{3}{2})| = \frac{5}{2}$$

بنابراین

۱۳۵۵-گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که مرکز دایره

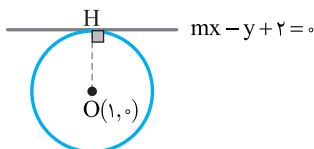
$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{نقطه } O(1, 0) \quad \text{و شعاع آن برابر}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 0 - 4(-3)} = 2 \quad \text{است. اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله}$$

مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است:

$$OH = \frac{|m \times 1 - 0 + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow \frac{(m+2)^2}{m^2 + 1} = 4$$

$$m^2 + 4m + 4 = 4m^2 + 4 \Rightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = \frac{4}{3}$$



راه‌حل دوم ابتدا در معادله دایره به جای y قرار می‌دهیم $mx+2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 3 \\ y = mx + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (mx+2)^2 - 2x = 3$$

$$x^2 + m^2x^2 + 4mx + 4 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (m^2+1)x^2 + (4m-2)x + 1 = 0$$

معادله به‌دست آمده باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = (4m-2)^2 - 4(m^2+1)(1) = 16m^2 - 16m + 4 - 4m^2 - 4 = 12m^2 - 16m = 0$$

$$= 12m^2 - 16m = 0 \Rightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = \frac{4}{3}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۳۵۶-گزینه ۱ فاصله خط‌های $y=x+4$ و $y=x$ برابر است با

$$\frac{|4-0|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$$

شعاع دایره مورد نظر نصف این فاصله است، یعنی برابر $\sqrt{2}$ است. اگر مرکز دایره نقطه $(-1, y)$ باشد، فاصله‌اش از خط $y=x$

$$\frac{|y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |y+1| = 2 \Rightarrow y = 1, y = -3$$

پس $\sqrt{2}$ برابر است. اگر $y = -3$ ، آن‌گاه نقطه $(-1, -3)$ بین دو خط $y=x+4$ و $y=x$

نیست. پس $y = -3$ قابل قبول نیست. بنابراین مرکز دایره نقطه $(-1, 1)$ و شعاع آن $\sqrt{2}$ است. پس معادله آن به‌صورت زیر است:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

ریاضی - ۸۹

۱۳۴۹-گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که در دایره $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

نقطه $O(1, 3)$ مرکز دایره است و شعاع آن برابر است با

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 - 4(5)} = \sqrt{5}$$

در دایره $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ نقطه $O'(-1, 3)$ مرکز دایره است و

شعاع آن برابر است با $r' = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 - 4(-15)} = 5$. بنابراین

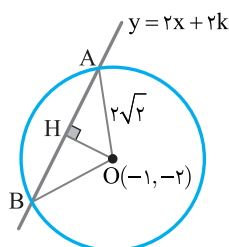
$$r' - r = 5 - \sqrt{5}, \quad OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (3-3)^2} = 2$$

پس $OO' < r' - r$ و در نتیجه دو دایره متداخل‌اند.

۱۳۵۰-گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که نقطه $O(-1, -2)$ مرکز دایره و

شعاع دایره برابر $\frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 12} = 2\sqrt{2}$ است. با توجه به شکل زیر

$$AH = \frac{AB}{2} = 2 \Rightarrow OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$$



از طرف دیگر فاصله نقطه O از خط

$$2x - y + 2k = 0 \quad \text{برابر است با}$$

$$OH = \frac{|-2 + 2 + 2k|}{\sqrt{4 + 1}}$$

بنابراین

$$\frac{|2k|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow |k| = \sqrt{5} \Rightarrow k = \pm\sqrt{5}$$

۱۳۵۱-گزینه ۳ معادله خط دوم را به شکل $2x - 2y + 2 = 0$ می‌نویسیم.

طول ضلع مربع برابر فاصله دو خط موازی $2x - 2y + 2 = 0$ و $2x - 2y - 3 = 0$

است. در نتیجه

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|-3-2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

تجربی - ۹۲

بنابراین مساحت مربع برابر است با $(\frac{5}{\sqrt{8}})^2 = \frac{25}{8}$.

۱۳۵۲-گزینه ۲ فرض کنید فاصله نقطه $A(a, a-1)$ که روی خط

$y = x - 1$ قرار دارد از خط $2x - 3y - 5 = 0$ برابر $\sqrt{13}$ باشد. در این صورت

$$\frac{|2a - 3(a-1) - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \sqrt{13} \Rightarrow |-a - 2| = 13 \Rightarrow \begin{cases} a + 2 = 13 \\ a + 2 = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ a = -15 \end{cases}$$

تجربی - ۸۹

۱۳۵۳-گزینه ۲ فرض کنید معادله دایره به‌صورت

$$C(-2, 4), B(2, 1), A(0, 0) \quad \text{باشد. نقاط } x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

روی دایره قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در معادله دایره صدق می‌کنند:

$$A: 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$B: 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \Rightarrow 2a + b = -5$$

$$C: 4 + 16 - 2a + 4b + c = 0 \Rightarrow -2a + 4b = -20$$

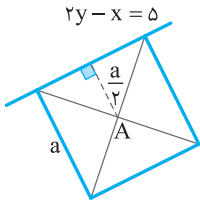
پس $a = 0$ و $b = -5$. در نتیجه شعاع دایره برابر است با

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{0 + 25 - 0} = \frac{5}{2}$$

تجربی - ۹۱

۱۳۶۱- گزینه ۴ فاصله نقطه A تا خط $2y - x - 5 = 0$ برابر نصف طول

ضلع مربع است:



$$\frac{a}{2} = \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با

$$S = a^2 = 80$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۶۲- گزینه ۲ راه حل اول برای محاسبه مساحت مثلث داده شده طول

ضلع AB را به دست آورده سپس فاصله نقطه C تا خط AB را محاسبه می‌کنیم. پس

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{26}, \quad m_{AB} = \frac{-5-0}{3-2} = -5$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$

$$y - 5 = -5(x - 2) \Rightarrow 5x + y - 15 = 0$$

$$AB \text{ فاصله نقطه } C \text{ تا خط } AB = \frac{|5 \times 0 + 2 - 15|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}}$$

$$\frac{\sqrt{26} \times \frac{13}{\sqrt{26}}}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ برابر است با } \frac{13}{2}$$

راه حل دوم ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{26}, \quad AC = \sqrt{(0-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}$$

واضح است که تساوی

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است.

پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن

برابر است با

$$S = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{13}{2} = 6.5$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۶۳- گزینه ۱ فرض کنید معادله دایره به صورت

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ باشد. نقاط } A(0,0), B(2,1), C(1,-2) \text{ و}$$

روی دایره قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در معادله دایره صدق می‌کنند:

$$A: 0+0+0+0+c=0 \Rightarrow c=0$$

$$B: 4+1+2a+b+c=0 \Rightarrow 2a+b=-5$$

$$C: 1+4+a-2b+c=0 \Rightarrow a-2b=-5$$

از حل دستگاه معادلات فوق نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=1$ و $c=0$. بنابراین

شعاع دایره برابر است با

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{9+1-0} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

تجربی - ۹۳

۱۳۵۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که مرکز دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

نقطه $O(1, -2)$ است و شعاع آن برابر است با $r = \frac{1}{2} \sqrt{4+16-4} = 2$. فرض

کنید شعاع دایره دیگر r' و مرکز آن $O'(-2, 2)$ باشد. چون دو دایره بر هم

مماس بیرونی هستند، پس $OO' = r + r'$ از طرف دیگر،

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

بنابراین

$$r + r' = 5 \Rightarrow 2 + r' = 5 \Rightarrow r' = 3$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۵۸- گزینه ۳ راه حل اول مرکز دایره روی نیمساز ربع اول است، پس

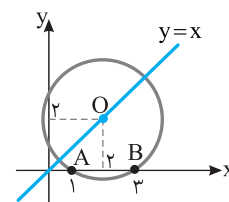
مختصات آن به صورت $O(\alpha, \alpha)$ است. فاصله مرکز دایره از دو نقطه $A(1,0)$

و $B(3,0)$ برابر هم و برابر شعاع دایره است، پس $OA = OB$ در نتیجه

$$\sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha-0)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (\alpha-0)^2}$$

$$2\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 2\alpha^2 - 2\alpha + 9 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$r = OA = \sqrt{(2-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$



راه حل دوم مرکز دایره روی عمودمنصف

وترهای دایره است، پس طول مرکز دایره

برابر $\frac{1+3}{2} = 2$ و در نتیجه عرض آن نیز

برابر ۲ است و شعاع دایره برابر

$$OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ است.}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۳۵۹- گزینه ۳ چون خط‌های $y=2x$ و $y=2x+10$ موازی‌اند، پس

فاصله آن‌ها برابر است با $\frac{|0-10|}{\sqrt{1+(-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$. بنابراین شعاع دایره

مورد نظر برابر است با $\sqrt{5}$. مرکز دایره روی خطی موازی دو خط داده شده است که

فاصله‌اش از این خط‌ها برابر است. معادله این خط $y = 2x + \frac{10}{2} = 2x + 5$ است.

فرض کنید مرکز دایره $O(\alpha, 2\alpha+5)$ باشد. چون دایره از مبدأ می‌گذرد، پس

فاصله مرکز دایره تا مبدأ برابر شعاع دایره است:

$$\sqrt{\alpha^2 + (2\alpha+5)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \alpha^2 + (2\alpha+5)^2 = 5 \Rightarrow 5\alpha^2 + 20\alpha + 25 = 5$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

بنابراین مرکز دایره نقطه $(-2, 1)$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۳۶۰- گزینه ۱ شعاع دایره $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$ برابر است با

$$r_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4+36+32} = 3\sqrt{2} \text{ و مرکز این دایره نقطه } O_1(1, -3) \text{ است.}$$

شعاع دایره $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ برابر است با

$$r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{64+16-48} = 2\sqrt{2}$$

و مرکز این دایره نقطه $O_2(-4, 2)$ است.

پس

$$O_1O_2 = \sqrt{(1+4)^2 + (-3-2)^2} = 5\sqrt{2}, \quad r_1 + r_2 = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین دو دایره مماس بیرون هستند.

تجربی - ۸۷

در معادله بالا قرار می‌دهیم $y=0$ تا محل تقاطع این دایره را با محور x به دست می‌آوریم:

$$(x-2)^2 + (0+1)^2 = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x-2 = \pm 1 \Rightarrow x=3, x=1$$

تجربی - ۹۵

۱۳۶۸- گزینه ۳ چون نقطه $(2, -9)$ در ربع چهارم قرار دارد و دایره

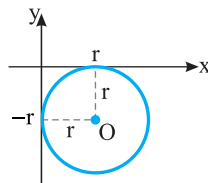
مورد نظر بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیه چهارم است. فرض کنید شعاع این دایره r باشد. با توجه به شکل زیر معلوم است که مرکز آن نقطه $O(r, -r)$ است. بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$$

دایره از نقطه $(2, -9)$ می‌گذرد، پس مختصات آن در معادله بالا صدق می‌کنند:

$$(2-r)^2 + (-9+r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 22r + 85 = 0 \Rightarrow r=5 \text{ یا } r=17$$

بنابراین شعاع دایره بزرگتر برابر ۱۷ است.



ریاضی - ۹۵

۱۳۶۹- گزینه ۲ چون نقطه $(1, -2)$ در ناحیه چهارم است و دایره مورد نظر

بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیه چهارم است. اگر شعاع این دایره برابر r باشد، از روی شکل روبه‌رو معلوم است که مرکز آن نقطه $O(r, -r)$ است. بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت $(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$ است. چون نقطه $(1, -2)$ روی این دایره است، پس

$$(1-r)^2 + (-2+r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-1)(r-5) = 0 \Rightarrow r=1, r=5$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

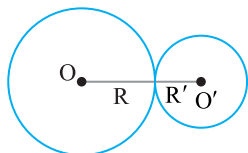
۱۳۷۰- گزینه ۱ مطابق شکل اگر دو دایره مماس خارج باشند، باید

$$OO' = R + R' \quad (1)$$

بنابراین

$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow O(-2, 0), R=2$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0 \Rightarrow O'(1, -4), R' = \sqrt{17-a}$$



اکنون با استفاده از رابطه (۱) به دست می‌آید

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 2 + \sqrt{17-a}$$

$$5 = 2 + \sqrt{17-a} \Rightarrow 3 = \sqrt{17-a} \Rightarrow a = 8$$

ریاضی - ۹۵

۱۳۶۴- گزینه ۳ فرض می‌کنیم مرکز دایره $O(\alpha, \beta)$ باشد. مختصات

نقطه O در خط $x-y=2$ صدق می‌کنند، پس مرکز دایره نقطه $O(\alpha, \alpha-2)$ است. همچنین، O از نقاط $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ به یک

فاصله است:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + (\alpha-3)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (\alpha-2)^2}$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 + 9 - 6\alpha = \alpha^2 + 9 - 6\alpha + \alpha^2 + 4 - 4\alpha$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow O(1, -1) \Rightarrow R = OA = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۰

۱۳۶۵- گزینه ۱ معادله نیمساز ناحیه اول $y=x$ است. پس مرکز دایره

به صورت (α, α) است. فاصله مرکز دایره از نقطه $A(6, 3)$ و خط

$2x-y=0$ یکسان است:

$$\sqrt{(\alpha-6)^2 + (\alpha-3)^2} = \frac{|2\alpha-\alpha|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\alpha^2 + 36 - 12\alpha + \alpha^2 + 9 - 6\alpha = \frac{\alpha^2}{5}$$

$$2\alpha^2 - 18\alpha + 45 = \frac{\alpha^2}{5} \Rightarrow 9\alpha^2 - 18 \times 5\alpha + 45 \times 5 = 0$$

$$\alpha^2 - 10\alpha + 25 = 0 \Rightarrow (\alpha-5)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 5$$

بنابراین مرکز دایره نقطه $O(5, 5)$ است و شعاع دایره برابر است با

$$r = OA = \sqrt{(5-6)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

ریاضی - ۹۲

۱۳۶۶- گزینه ۳ فاصله نقطه $M(2\sqrt{5}, b)$ از دو خط مماس برابر است.

فرض کنید نقاط تماس H و H' باشند. در این صورت

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|2\sqrt{5} - 2b|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|b - 4\sqrt{5}|}{\sqrt{1+4}}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{5} - 2b = b - 4\sqrt{5} \Rightarrow b = 2\sqrt{5} \Rightarrow M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \\ 2\sqrt{5} - 2b = -b + 4\sqrt{5} \Rightarrow b = -2\sqrt{5} \Rightarrow M(2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) \end{cases}$$

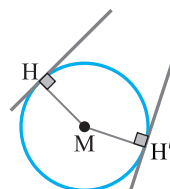
اگر نقطه $M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ مرکز دایره باشد، شعاع آن برابر می‌شود با

$$r = MH = \frac{|2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 2$$

اگر نقطه $M(2\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ مرکز دایره باشد،

شعاع آن برابر می‌شود با

$$r = MH = \frac{|2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 6$$



بنابراین شعاع دایره کوچکتر برابر ۲ است.

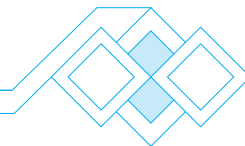
خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۳۶۷- گزینه ۱ فاصله مرکز دایره از خط مماس، برابر شعاع دایره است. فاصله

نقطه $(2, -1)$ از خط $x-y-1=0$ برابر است با $r = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$$



پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید $2^{256} = 2^{224} + 2^{32}$ است.

۱۳۸۱- گزینه ۲ برای رفتن از شهر A به شهر C تعداد مسیرها $4 \times 3 = 12$ تا است. برای برگشتن از شهر C به شهر A نیز ۱۲ مسیر وجود دارد که یکی از آن‌ها همان مسیر رفت است. پس ۱۱ مسیر برگشت باقی می‌ماند. پس برای رفت و برگشت $12 \times 11 = 132$ مسیر مختلف وجود دارد.

۱۳۸۲- گزینه ۳ تعداد راه‌های رفتن از شهر A به شهر D برابر است با $3 \times 5 \times 2 = 30$. در مسیر برگشت از یکی از راه‌های بین هر دو شهر نمی‌توان عبور کرد. بنابراین تعداد راه‌های برگشت از شهر D به شهر A برابر است با $1 \times 4 \times 2 = 8$. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $30 + 8 = 38$.

۱۳۸۳- گزینه ۲ جایگاه هر یک از ارقام را با یک دایره نشان می‌دهیم و سپس تعیین می‌کنیم که در هر یک از این جایگاه‌ها چند رقم می‌تواند قرار بگیرد. در نهایت طبق اصل ضرب، تعداد حالات ممکن برای قرار دادن ارقام در دایره‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\begin{matrix} 2 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 1 \\ 5 \text{ یا } 2 & & 5 \text{ یا } 2 & & 5 \text{ یا } 2 & & 5 \text{ یا } 2 & & 2 \text{ فقط} \end{matrix} = 16$$

۱۳۸۴- گزینه ۲ بنابراین اصل متمم، تعداد عددهای مورد نظر برابر است با تعداد کل عددهای سه رقمی که می‌توان با این رقم‌ها نوشت، منهای تعداد عددهای سه رقمی با این ارقام که رقم تکراری ندارند.

$$\begin{matrix} \text{یکان دهگان صدگان} & & \text{یکان دهگان صدگان} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

بنابراین $30 = 48 - 18 = 30 \times 3 \times 2 - 3 \times 4 \times 4$ تعداد عددهای مورد نظر.

۱۳۸۵- گزینه ۳ **راه حل اول** دقت کنید که رقم‌ها می‌توانند تکراری باشند. حالا باید تعداد همه عددهای طبیعی یک رقمی، دو رقمی و سه رقمی با ویژگی مورد نظر را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} &\text{یکان دهگان صدگان} \\ &\text{تعداد عددهای سه رقمی: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 \times 4 \times 6 = 24 \\ &\quad \quad \quad 3, 0, 1, 2, 3 \\ &\text{یکان دهگان صدگان} \\ &\text{تعداد عددهای دو رقمی: } \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 \times 6 \times 6 = 36 \\ &\quad \quad \quad 2 \\ &\text{یکان دهگان صدگان} \\ &\text{تعداد عددهای دو رقمی: } \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 \times 6 \times 6 = 36 \\ &\quad \quad \quad 1 \\ &\text{یکان دهگان صدگان} \\ &\text{تعداد عددهای دو رقمی: } \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 5 \times 6 = 30 \\ &\quad \quad \quad 2 \\ &\text{یکان دهگان صدگان} \\ &\text{تعداد عددهای یک رقمی: } \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 5 \end{aligned}$$

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $24 + 36 + 36 + 30 + 5 = 131$.

۱۳۷۱- گزینه ۴ برای اینکه عمل ضرب پرازنزهای داده شده را انجام دهیم، از هر پرازنز یک جمله انتخاب و جمله‌های انتخابی را در هم ضرب می‌کنیم. برای انتخاب یک جمله از پرازنز اول، دو حالت، از پرازنز دوم، سه حالت و از پرازنز سوم، پنج حالت وجود دارد. یعنی در نهایت $2 \times 3 \times 5 = 30$ جمله تولید می‌شود.

۱۳۷۲- گزینه ۲ ۵ رقم زوج داریم که از صفر نمی‌توان به عنوان اولین رقم از سمت چپ استفاده کرد. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با

$$4 \times 5 \times 1$$

$20 =$ رقم مشابه صدگان $\times$ تمام ارقام زوج $\times$ ارقام غیر صفر زوج

۱۳۷۳- گزینه ۴ برای رقم هزارگان می‌توانیم هر یک از ارقام به جز صفر را انتخاب کنیم. بنابراین سه حالت برای نوشتن هزارگان وجود دارد. هر یک از رقم‌های صدگان، دهگان و یکان را می‌توان به چهار حالت انتخاب کرد. بنابراین $3 \times 4 \times 4 \times 4$ عدد یعنی ۱۹۲ عدد چهار رقمی با شرایط سؤال وجود دارد.

۱۳۷۴- گزینه ۳ یکان عدد می‌تواند ۱، ۳ یا ۵ باشد، پس سه حالت برای انتخاب یکان وجود دارد. صدگان عدد می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد، پس پنج حالت برای انتخاب صدگان وجود دارد. دهگان عدد هم می‌تواند هر یک از ارقام عضو مجموعه باشد یعنی شش حالت برای انتخاب دهگان وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب $5 \times 6 \times 3 = 90$ عدد با شرایط مسئله وجود دارد.

۱۳۷۵- گزینه ۱ عدد ۲ را در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. عددهای ۸ و ۹ را در زیرمجموعه قرار نمی‌دهیم. بنابراین باید تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ را حساب کنیم که برابر است با $2^6 = 64$.

۱۳۷۶- گزینه ۳ هر تابع با ویژگی مورد نظر به صورت $f = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$ است که x, y, z می‌توانند هر یک از

پنج رقم ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ باشند، یعنی x, y, z هر کدام پنج مقدار مختلف می‌توانند داشته باشند. پس $5 \times 5 \times 5 = 125$ تابع با این شرایط وجود دارد.

۱۳۷۷- گزینه ۱ هر مسافر می‌تواند در یکی از ۲۰ طبقه پیاده شود. پس تعداد انتخاب‌های مسافر اول ۲۰ تا، مسافر دوم ۲۰ تا، ... و مسافر دهم ۲۰ تا است. بنابراین $20 \times 20 \times 20 \times \dots \times 20 = 20^{10}$ حالت برای پیاده شدن مسافران وجود دارد.

۱۳۷۸- گزینه ۳ هر سؤال چهار گزینه دارد که دانش‌آموز می‌تواند یکی از آن‌ها را انتخاب نماید. همچنین دانش‌آموز می‌تواند به سؤال پاسخ ندهد. پس برای پاسخ‌گویی به هر سؤال ۵ حالت وجود دارد. بنابراین تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به ۲۰ سؤال برابر $5 \times 5 \times \dots \times 5$ یعنی 5^{20} است.

۱۳۷۹- گزینه ۲ می‌توان مهره را در هر یک از خانه‌ها به جز خانه‌های ابتدا و انتها قرار داد یا قرار نداد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $32 = 2^5$.



۱۳۸۰- گزینه ۲ فرض می‌کنیم تعداد اعضای مجموعه n باشد. در این صورت این مجموعه 2^n زیرمجموعه دارد. اگر سه عضو به مجموعه اضافه کنیم، تعداد اعضای آن $n+3$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^{n+3} می‌شود. بنابراین تساوی $2^{n+3} = 2^n + 224$ درست است. در نتیجه

$$2^n \times 2^3 - 2^n = 224 \Rightarrow 7 \times 2^n = 224 \Rightarrow 2^n = 32$$

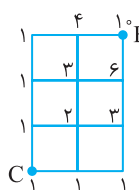
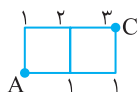
۱۳۹۱- گزینه ۱ از دو طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت:

$$\text{مسیر } ABCD: 2 \times 3 \times 3 = 18, \quad \text{مسیر } ABD: 2 \times 2 = 4$$

بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $18 + 4 = 22$.

۱۳۹۲- گزینه ۳ از ۲ راه می‌توان مستقیماً از شهر A به شهر C رفت و

می‌توان با 3×2 راه از شهر B عبور کرد و به شهر C رفت. بنابراین $2 + 6 = 8$ راه برای رفت وجود دارد. از یک راه می‌توان مستقیماً از شهر C به شهر A برگشت و از 2×2 راه می‌توان از شهر B عبور کرد و به شهر A برگشت. پس $1 + 4 = 5$ راه برای برگشت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب $8 \times 5 = 40$ راه رفت و برگشت موجود است.

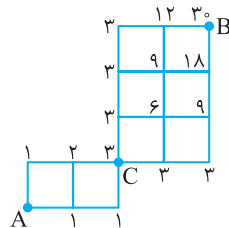


۱۳۹۳- گزینه ۳ راه‌حل اول به کمک اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن به نقطه C از نقطه A مطابق شکل به دست می‌آید که برابر ۳ است.

تعداد راه‌های رسیدن به نقطه B از نقطه C نیز به همین ترتیب به دست می‌آید. که مطابق شکل به کمک اصل جمع تعداد راه‌ها ۱۰ است.

توجه کنید که ابتدا باید با ۳ راه از نقطه A به نقطه C برویم. سپس با ۱۰ راه از نقطه C به نقطه B برویم. بنابراین $3 \times 10 = 30$ راه با شرایط مسئله وجود دارد.

راه‌حل دوم چون باید ابتدا به C برویم، راه‌هایی را که از آن‌ها نمی‌توان به نقطه C رسید حذف می‌کنیم. پس باید روی راه‌های شکل زیر حرکت کنیم، که به کمک اصل جمع تعداد راه‌ها ۳۰ به دست می‌آید.



۱۳۹۴- گزینه ۴ رقم صدگان باید ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد. دو حالت در نظر

می‌گیریم.

حالت اول رقم صدگان ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد.

یکان دهگان صدگان

۴	۶	۵

$$4 \times 6 \times 5 = 120$$

۳، ۴، ۵، ۶

حالت دوم رقم صدگان ۲ باشد. در این صورت رقم دهگان باید ۴، ۵ یا ۶ باشد.

یکان دهگان صدگان

۱	۳	۵

$$1 \times 3 \times 5 = 15$$

۲ ۴، ۵، ۶

توجه کنید که در حالت دوم یکی از عددها ۲۴۰ است که باید این عدد را از مجموع تعداد عددهای حاصل کم کنیم. در نتیجه تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $120 + 15 - 1 = 134$.

۱۳۹۵- گزینه ۲ عددهای ۲ و ۳ را به یک حالت در زیرمجموعه قرار

می‌دهیم. عددهای ۴، ۵ و ۶ را به یک حالت کنار می‌گذاریم و در زیرمجموعه قرار نمی‌دهیم، پنج عدد دیگر را می‌توانیم در زیرمجموعه قرار دهیم یا قرار ندهیم، یعنی هر کدام از آن‌ها دو حالت دارد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط سؤال برابر است با $2^5 = 32$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که اعداد دو رقمی مانند ۲۳ را می‌توان به صورت ۲۳ نوشت و اعداد یک رقمی مانند ۷ را می‌توان به صورت ۰۷ نوشت. اکنون برای نوشتن اعداد طبیعی کوچک تر از ۳۴۰، دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 3 \times 6 \times 6 = 108$$

۶ تا ۰ تا ۱، ۲، ۳

حالت ۲:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1 \times 4 \times 6 = 24$$

۳ تا ۰ تا ۱، ۲، ۳

پس در کل تعداد اعداد ایجاد شده برابرند با $108 + 24 = 132$. اما عدد صفر یکی از عددهای تولید شده است و چون عددهای طبیعی مدنظر هستند، بنابراین پاسخ برابر ۱۳۱ است.

۱۳۸۶- گزینه ۲ فرض می‌کنیم مجموعه اصلی n عضو داشته است. در

این صورت، این مجموعه 2^n زیرمجموعه دارد. اگر چهار عضو از این مجموعه کم کنیم، تعداد اعضای آن $n-4$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^{n-4} می‌شود.

بنابراین تساوی $2^n - 480 = 2^{n-4}$ برقرار است. در نتیجه

$$2^n - 2^{n-4} = 480 \Rightarrow 2^n - \frac{2^n}{16} = 480 \Rightarrow \frac{15}{16} \times 2^n = 480 \Rightarrow 2^n = 512$$

پس

$$2^n - 4 = 2^n - 480 = 512 - 480 = 32$$

۱۳۸۷- گزینه ۴ هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از

هفت خط افقی و هفت خط عمودی شکل زیر به وجود می‌آید. برای اینکه مستطیل‌ها 2×4 باشند، باید فاصله دو خط موازی دو واحد و فاصله دو خط موازی دیگر ۴ واحد باشد. در مستطیل‌های افقی، اگر یکی از هفت خط عمودی را انتخاب کنیم خط بعدی باید به فاصله ۴ واحد از آن باشد. پس خطوط ۱ تا ۳ را می‌توان انتخاب کرد و دو خط عمودی را رسم کرد. همچنین اگر یکی از هفت خط افقی را انتخاب کنیم خط

بعدی باید به فاصله ۲ واحد از آن باشد. پس خطوط ۱ تا ۵ را می‌توان انتخاب کرد. پس $3 \times 5 = 15$ مستطیل افقی 2×4 داریم. به همین ترتیب ۱۵ مستطیل عمودی 4×2 داریم و جمعاً ۳۰ مستطیل با ابعاد ۲ و ۴ وجود دارد.

۱۳۸۸- گزینه ۲ عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ یا ۷ است از

عدد ۵۹۷۳۱ بزرگ‌ترند. تعداد این عددها برابر است با

۲	۴	۳	۲	۱

$$2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$$

۷، ۹

بعد از این‌ها بزرگ‌ترین عدد ۵۹۷۳۱ است، بنابراین عدد ۵۹۷۳۱، ۴۹، ۵۹، ۷۹، ۹۹، ۱۰۹، ۱۱۹، ۱۲۹، ۱۳۹، ۱۴۹، ۱۵۹، ۱۶۹، ۱۷۹، ۱۸۹، ۱۹۹، ۲۰۹، ۲۱۹، ۲۲۹، ۲۳۹، ۲۴۹، ۲۵۹، ۲۶۹، ۲۷۹، ۲۸۹، ۲۹۹، ۳۰۹، ۳۱۹، ۳۲۹، ۳۳۹، ۳۴۹، ۳۵۹، ۳۶۹، ۳۷۹، ۳۸۹، ۳۹۹، ۴۰۹، ۴۱۹، ۴۲۹، ۴۳۹، ۴۴۹، ۴۵۹، ۴۶۹، ۴۷۹، ۴۸۹، ۴۹۹، ۵۰۹، ۵۱۹، ۵۲۹، ۵۳۹، ۵۴۹، ۵۵۹، ۵۶۹، ۵۷۹، ۵۸۹، ۵۹۹، ۶۰۹، ۶۱۹، ۶۲۹، ۶۳۹، ۶۴۹، ۶۵۹، ۶۶۹، ۶۷۹، ۶۸۹، ۶۹۹، ۷۰۹، ۷۱۹، ۷۲۹، ۷۳۹، ۷۴۹، ۷۵۹، ۷۶۹، ۷۷۹، ۷۸۹، ۷۹۹، ۸۰۹، ۸۱۹، ۸۲۹، ۸۳۹، ۸۴۹، ۸۵۹، ۸۶۹، ۸۷۹، ۸۸۹، ۸۹۹، ۹۰۹، ۹۱۹، ۹۲۹، ۹۳۹، ۹۴۹، ۹۵۹، ۹۶۹، ۹۷۹، ۹۸۹، ۹۹۹، ۱۰۰۹، ۱۰۱۹، ۱۰۲۹، ۱۰۳۹، ۱۰۴۹، ۱۰۵۹، ۱۰۶۹، ۱۰۷۹، ۱۰۸۹، ۱۰۹۹، ۱۱۰۹، ۱۱۱۹، ۱۱۲۹، ۱۱۳۹، ۱۱۴۹، ۱۱۵۹، ۱۱۶۹، ۱۱۷۹، ۱۱۸۹، ۱۱۹۹، ۱۲۰۹، ۱۲۱۹، ۱۲۲۹، ۱۲۳۹، ۱۲۴۹، ۱۲۵۹، ۱۲۶۹، ۱۲۷۹، ۱۲۸۹، ۱۲۹۹، ۱۳۰۹، ۱۳۱۹، ۱۳۲۹، ۱۳۳۹، ۱۳۴۹، ۱۳۵۹، ۱۳۶۹، ۱۳۷۹، ۱۳۸۹، ۱۳۹۹، ۱۴۰۹، ۱۴۱۹، ۱۴۲۹، ۱۴۳۹، ۱۴۴۹، ۱۴۵۹، ۱۴۶۹، ۱۴۷۹، ۱۴۸۹، ۱۴۹۹، ۱۵۰۹، ۱۵۱۹، ۱۵۲۹، ۱۵۳۹، ۱۵۴۹، ۱۵۵۹، ۱۵۶۹، ۱۵۷۹، ۱۵۸۹، ۱۵۹۹، ۱۶۰۹، ۱۶۱۹، ۱۶۲۹، ۱۶۳۹، ۱۶۴۹، ۱۶۵۹، ۱۶۶۹، ۱۶۷۹، ۱۶۸۹، ۱۶۹۹، ۱۷۰۹، ۱۷۱۹، ۱۷۲۹، ۱۷۳۹، ۱۷۴۹، ۱۷۵۹، ۱۷۶۹، ۱۷۷۹، ۱۷۸۹، ۱۷۹۹، ۱۸۰۹، ۱۸۱۹، ۱۸۲۹، ۱۸۳۹، ۱۸۴۹، ۱۸۵۹، ۱۸۶۹، ۱۸۷۹، ۱۸۸۹، ۱۸۹۹، ۱۹۰۹، ۱۹۱۹، ۱۹۲۹، ۱۹۳۹، ۱۹۴۹، ۱۹۵۹، ۱۹۶۹، ۱۹۷۹، ۱۹۸۹، ۱۹۹۹، ۲۰۰۹، ۲۰۱۹، ۲۰۲۹، ۲۰۳۹، ۲۰۴۹، ۲۰۵۹، ۲۰۶۹، ۲۰۷۹، ۲۰۸۹، ۲۰۹۹، ۲۱۰۹، ۲۱۱۹، ۲۱۲۹، ۲۱۳۹، ۲۱۴۹، ۲۱۵۹، ۲۱۶۹، ۲۱۷۹، ۲۱۸۹، ۲۱۹۹، ۲۲۰۹، ۲۲۱۹، ۲۲۲۹، ۲۲۳۹، ۲۲۴۹، ۲۲۵۹، ۲۲۶۹، ۲۲۷۹، ۲۲۸۹، ۲۲۹۹، ۲۳۰۹، ۲۳۱۹، ۲۳۲۹، ۲۳۳۹، ۲۳۴۹، ۲۳۵۹، ۲۳۶۹، ۲۳۷۹، ۲۳۸۹، ۲۳۹۹، ۲۴۰۹، ۲۴۱۹، ۲۴۲۹، ۲۴۳۹، ۲۴۴۹، ۲۴۵۹، ۲۴۶۹، ۲۴۷۹، ۲۴۸۹، ۲۴۹۹، ۲۵۰۹، ۲۵۱۹، ۲۵۲۹، ۲۵۳۹، ۲۵۴۹، ۲۵۵۹، ۲۵۶۹، ۲۵۷۹، ۲۵۸۹، ۲۵۹۹، ۲۶۰۹، ۲۶۱۹، ۲۶۲۹، ۲۶۳۹، ۲۶۴۹، ۲۶۵۹، ۲۶۶۹، ۲۶۷۹، ۲۶۸۹، ۲۶۹۹، ۲۷۰۹، ۲۷۱۹، ۲۷۲۹، ۲۷۳۹، ۲۷۴۹، ۲۷۵۹، ۲۷۶۹، ۲۷۷۹، ۲۷۸۹، ۲۷۹۹، ۲۸۰۹، ۲۸۱۹، ۲۸۲۹، ۲۸۳۹، ۲۸۴۹، ۲۸۵۹، ۲۸۶۹، ۲۸۷۹، ۲۸۸۹، ۲۸۹۹، ۲۹۰۹، ۲۹۱۹، ۲۹۲۹، ۲۹۳۹، ۲۹۴۹، ۲۹۵۹، ۲۹۶۹، ۲۹۷۹، ۲۹۸۹، ۲۹۹۹، ۳۰۰۹، ۳۰۱۹، ۳۰۲۹، ۳۰۳۹، ۳۰۴۹، ۳۰۵۹، ۳۰۶۹، ۳۰۷۹، ۳۰۸۹، ۳۰۹۹، ۳۱۰۹، ۳۱۱۹، ۳۱۲۹، ۳۱۳۹، ۳۱۴۹، ۳۱۵۹، ۳۱۶۹، ۳۱۷۹، ۳۱۸۹، ۳۱۹۹، ۳۲۰۹، ۳۲۱۹، ۳۲۲۹، ۳۲۳۹، ۳۲۴۹، ۳۲۵۹، ۳۲۶۹، ۳۲۷۹، ۳۲۸۹، ۳۲۹۹، ۳۳۰۹، ۳۳۱۹، ۳۳۲۹، ۳۳۳۹، ۳۳۴۹، ۳۳۵۹، ۳۳۶۹، ۳۳۷۹، ۳۳۸۹، ۳۳۹۹، ۳۴۰۹، ۳۴۱۹، ۳۴۲۹، ۳۴۳۹، ۳۴۴۹، ۳۴۵۹، ۳۴۶۹، ۳۴۷۹، ۳۴۸۹، ۳۴۹۹، ۳۵۰۹، ۳۵۱۹، ۳۵۲۹، ۳۵۳۹، ۳۵۴۹، ۳۵۵۹، ۳۵۶۹، ۳۵۷۹، ۳۵۸۹، ۳۵۹۹، ۳۶۰۹، ۳۶۱۹، ۳۶۲۹، ۳۶۳۹، ۳۶۴۹، ۳۶۵۹، ۳۶۶۹، ۳۶۷۹، ۳۶۸۹، ۳۶۹۹، ۳۷۰۹، ۳۷۱۹، ۳۷۲۹، ۳۷۳۹، ۳۷۴۹، ۳۷۵۹، ۳۷۶۹، ۳۷۷۹، ۳۷۸۹، ۳۷۹۹، ۳۸۰۹، ۳۸۱۹، ۳۸۲۹، ۳۸۳۹، ۳۸۴۹، ۳۸۵۹، ۳۸۶۹، ۳۸۷۹، ۳۸۸۹، ۳۸۹۹، ۳۹۰۹، ۳۹۱۹، ۳۹۲۹، ۳۹۳۹، ۳۹۴۹، ۳۹۵۹، ۳۹۶۹، ۳۹۷۹، ۳۹۸۹، ۳۹۹۹، ۴۰۰۹، ۴۰۱۹، ۴۰۲۹، ۴۰۳۹، ۴۰۴۹، ۴۰۵۹، ۴۰۶۹، ۴۰۷۹، ۴۰۸۹، ۴۰۹۹، ۴۱۰۹، ۴۱۱۹، ۴۱۲۹، ۴۱۳۹، ۴۱۴۹، ۴۱۵۹، ۴۱۶۹، ۴۱۷۹، ۴۱۸۹، ۴۱۹۹، ۴۲۰۹، ۴۲۱۹، ۴۲۲۹، ۴۲۳۹، ۴۲۴۹، ۴۲۵۹، ۴۲۶۹، ۴۲۷۹، ۴۲۸۹، ۴۲۹۹، ۴۳۰۹، ۴۳۱۹، ۴۳۲۹، ۴۳۳۹، ۴۳۴۹، ۴۳۵۹، ۴۳۶۹، ۴۳۷۹، ۴۳۸۹، ۴۳۹۹، ۴۴۰۹، ۴۴۱۹، ۴۴۲۹، ۴۴۳۹، ۴۴۴۹، ۴۴۵۹، ۴۴۶۹، ۴۴۷۹، ۴۴۸۹، ۴۴۹۹، ۴۵۰۹، ۴۵۱۹، ۴۵۲۹، ۴۵۳۹، ۴۵۴۹، ۴۵۵۹، ۴۵۶۹، ۴۵۷۹، ۴۵۸۹، ۴۵۹۹، ۴۶۰۹، ۴۶۱۹، ۴۶۲۹، ۴۶۳۹، ۴۶۴۹، ۴۶۵۹، ۴۶۶۹، ۴۶۷۹، ۴۶۸۹، ۴۶۹۹، ۴۷۰۹، ۴۷۱۹، ۴۷۲۹، ۴۷۳۹، ۴۷۴۹، ۴۷۵۹، ۴۷۶۹، ۴۷۷۹، ۴۷۸۹، ۴۷۹۹، ۴۸۰۹، ۴۸۱۹، ۴۸۲۹، ۴۸۳۹، ۴۸۴۹، ۴۸۵۹، ۴۸۶۹، ۴۸۷۹، ۴۸۸۹، ۴۸۹۹، ۴۹۰۹، ۴۹۱۹، ۴۹۲۹، ۴۹۳۹، ۴۹۴۹، ۴۹۵۹، ۴۹۶۹، ۴۹۷۹، ۴۹۸۹، ۴۹۹۹، ۵۰۰۹، ۵۰۱۹، ۵۰۲۹، ۵۰۳۹، ۵۰۴۹، ۵۰۵۹، ۵۰۶۹، ۵۰۷۹، ۵۰۸۹، ۵۰۹۹، ۵۱۰۹، ۵۱۱۹، ۵۱۲۹، ۵۱۳۹، ۵۱۴۹، ۵۱۵۹، ۵۱۶۹، ۵۱۷۹، ۵۱۸۹، ۵۱۹۹، ۵۲۰۹، ۵۲۱۹، ۵۲۲۹، ۵۲۳۹، ۵۲۴۹، ۵۲۵۹، ۵۲۶۹، ۵۲۷۹، ۵۲۸۹، ۵۲۹۹، ۵۳۰۹، ۵۳۱۹، ۵۳۲۹، ۵۳۳۹، ۵۳۴۹، ۵۳۵۹، ۵۳۶۹، ۵۳۷۹، ۵۳۸۹، ۵۳۹۹، ۵۴۰۹، ۵۴۱۹، ۵۴۲۹، ۵۴۳۹، ۵۴۴۹، ۵۴۵۹، ۵۴۶۹، ۵۴۷۹، ۵۴۸۹، ۵۴۹۹، ۵۵۰۹، ۵۵۱۹، ۵۵۲۹، ۵۵۳۹، ۵۵۴۹، ۵۵۵۹، ۵۵۶۹، ۵۵۷۹، ۵۵۸۹، ۵۵۹۹، ۵۶۰۹، ۵۶۱۹، ۵۶۲۹، ۵۶۳۹، ۵۶۴۹، ۵۶۵۹، ۵۶۶۹، ۵۶۷۹، ۵۶۸۹، ۵۶۹۹، ۵۷۰۹، ۵۷۱۹، ۵۷۲۹، ۵۷۳۹، ۵۷۴۹، ۵۷۵۹، ۵۷۶۹، ۵۷۷۹، ۵۷۸۹، ۵۷۹۹، ۵۸۰۹، ۵۸۱۹، ۵۸۲۹، ۵۸۳۹، ۵۸۴۹، ۵۸۵۹، ۵۸۶۹، ۵۸۷۹، ۵۸۸۹، ۵۸۹۹، ۵۹۰۹، ۵۹۱۹، ۵۹۲۹، ۵۹۳۹، ۵۹۴۹، ۵۹۵۹، ۵۹۶۹، ۵۹۷۹، ۵۹۸۹، ۵۹۹۹، ۶۰۰۹، ۶۰۱۹، ۶۰۲۹، ۶۰۳۹، ۶۰۴۹، ۶۰۵۹، ۶۰۶۹، ۶۰۷۹، ۶۰۸۹، ۶۰۹۹، ۶۱۰۹، ۶۱۱۹، ۶۱۲۹، ۶۱۳۹، ۶۱۴۹، ۶۱۵۹، ۶۱۶۹، ۶۱۷۹، ۶۱۸۹، ۶۱۹۹، ۶۲۰۹، ۶۲۱۹، ۶۲۲۹، ۶۲۳۹، ۶۲۴۹، ۶۲۵۹، ۶۲۶۹، ۶۲۷۹، ۶۲۸۹، ۶۲۹۹، ۶۳۰۹، ۶۳۱۹، ۶۳۲۹، ۶۳۳۹، ۶۳۴۹، ۶۳۵۹، ۶۳۶۹، ۶۳۷۹، ۶۳۸۹، ۶۳۹۹، ۶۴۰۹، ۶۴۱۹، ۶۴۲۹، ۶۴۳۹، ۶۴۴۹، ۶۴۵۹، ۶۴۶۹، ۶۴۷۹، ۶۴۸۹، ۶۴۹۹، ۶۵۰۹، ۶۵۱۹، ۶۵۲۹، ۶۵۳۹، ۶۵۴۹، ۶۵۵۹، ۶۵۶۹، ۶۵۷۹، ۶۵۸۹، ۶۵۹۹، ۶۶۰۹، ۶۶۱۹، ۶۶۲۹، ۶۶۳۹، ۶۶۴۹، ۶۶۵۹، ۶۶۶۹، ۶۶۷۹، ۶۶۸۹، ۶۶۹۹، ۶۷۰۹، ۶۷۱۹، ۶۷۲۹، ۶۷۳۹، ۶۷۴۹، ۶۷۵۹، ۶۷۶۹، ۶۷۷۹، ۶۷۸۹، ۶۷۹۹، ۶۸۰۹، ۶۸۱۹، ۶۸۲۹، ۶۸۳۹، ۶۸۴۹، ۶۸۵۹، ۶۸۶۹، ۶۸۷۹، ۶۸۸۹، ۶۸۹۹، ۶۹۰۹، ۶۹۱۹، ۶۹۲۹، ۶۹۳۹، ۶۹۴۹، ۶۹۵۹، ۶۹۶۹، ۶۹۷۹، ۶۹۸۹، ۶۹۹۹، ۷۰۰۹، ۷۰۱۹، ۷۰۲۹، ۷۰۳۹، ۷۰۴۹، ۷۰۵۹، ۷۰۶۹، ۷۰۷۹، ۷۰۸۹، ۷۰۹۹، ۷۱۰۹، ۷۱۱۹، ۷۱۲۹، ۷۱۳۹، ۷۱۴۹، ۷۱۵۹، ۷۱۶۹، ۷۱۷۹، ۷۱۸۹، ۷۱۹۹، ۷۲۰۹، ۷۲۱۹، ۷۲۲۹، ۷۲۳۹، ۷۲۴۹، ۷۲۵۹، ۷۲۶۹، ۷۲۷۹، ۷۲۸۹، ۷۲۹۹، ۷۳۰۹، ۷۳۱۹، ۷۳۲۹، ۷۳۳۹، ۷۳۴۹، ۷۳۵۹، ۷۳۶۹، ۷۳۷۹، ۷۳۸۹، ۷۳۹۹، ۷۴۰۹، ۷۴۱۹، ۷۴۲۹، ۷۴۳۹، ۷۴۴۹، ۷۴۵۹، ۷۴۶۹، ۷۴۷۹، ۷۴۸۹، ۷۴۹۹، ۷۵۰۹، ۷۵۱۹، ۷۵۲۹، ۷۵۳۹، ۷۵۴۹، ۷۵۵۹، ۷۵۶۹، ۷۵۷۹، ۷۵۸۹، ۷۵۹۹، ۷۶۰۹، ۷۶۱۹، ۷۶۲۹، ۷۶۳۹، ۷۶۴۹، ۷۶۵۹، ۷۶۶۹، ۷۶۷۹، ۷۶۸۹، ۷۶۹۹، ۷۷۰۹، ۷۷۱۹، ۷۷۲۹، ۷۷۳۹، ۷۷۴۹، ۷۷۵۹، ۷۷۶۹، ۷۷۷۹، ۷۷۸۹، ۷۷۹۹، ۷۸۰۹، ۷۸۱۹، ۷۸۲۹، ۷۸۳۹، ۷۸۴۹، ۷۸۵۹، ۷۸۶۹، ۷۸۷۹، ۷۸۸۹، ۷۸۹۹، ۷۹۰۹، ۷۹۱۹، ۷۹۲۹، ۷۹۳۹، ۷۹۴۹، ۷۹۵۹، ۷۹۶۹، ۷۹۷۹، ۷۹۸۹، ۷۹۹۹، ۸۰۰۹، ۸۰۱۹، ۸۰۲۹، ۸۰۳۹، ۸۰۴۹، ۸۰۵۹، ۸۰۶۹، ۸۰۷۹، ۸۰۸۹، ۸۰۹۹، ۸۱۰۹، ۸۱۱۹، ۸۱۲۹، ۸۱۳۹، ۸۱۴۹، ۸۱۵۹، ۸۱۶۹، ۸۱۷۹، ۸۱۸۹، ۸۱۹۹، ۸۲۰۹، ۸۲۱۹، ۸۲۲۹، ۸۲۳۹، ۸۲۴۹، ۸۲۵۹، ۸۲۶۹، ۸۲۷۹، ۸۲۸۹، ۸۲۹۹، ۸۳۰۹، ۸۳۱۹، ۸۳۲۹، ۸۳۳۹، ۸۳۴۹، ۸۳۵۹، ۸۳۶۹، ۸۳۷۹، ۸۳۸۹، ۸۳۹۹، ۸۴۰۹، ۸۴۱۹، ۸۴۲۹، ۸۴۳۹، ۸۴۴۹، ۸۴۵۹، ۸۴۶۹، ۸۴۷۹، ۸۴۸۹، ۸۴۹۹، ۸۵۰۹، ۸۵۱۹، ۸۵۲۹، ۸۵۳۹، ۸۵۴۹، ۸۵۵۹، ۸۵۶۹، ۸۵۷۹، ۸۵۸۹، ۸۵۹۹، ۸۶۰۹، ۸۶

۱۴۰۳- گزینه ۲ **راه حل اول** کافی است بنابر اصل متمم، تعداد حالت‌هایی را که ارغوان و اردوان کنار هم ایستاده‌اند از تعداد کل حالت‌های ایستادن این شش نفر کم کنیم. اگر ارغوان و اردوان کنار هم ایستاده باشند، می‌توان آن‌ها را یک نفر در نظر گرفت، که البته به ۲! طریق می‌توانند کنار هم بایستند. بنابراین تعداد صف‌ها در این حالت برابر است با $2! \times 5! = 240$. تعداد صف‌هایی که بدون محدودیت می‌توان تشکیل داد برابر است با $6! = 720$. بنابراین تعداد صف‌های مورد نظر برابر است با $720 - 240 = 480$.

راه حل دوم ارغوان و اردوان را کنار می‌گذاریم. ابتدا تعداد حالت‌هایی که ۴ نفر در یک صف قرار می‌گیرند، محاسبه می‌کنیم که برابر با $4!$ خواهد بود. در ابتدا و انتها صف و در بین این ۴ نفر، ۵ مکان وجود دارد که از این ۵ مکان ۲ تا را انتخاب می‌کنیم که ارغوان و اردوان در آن‌ها بایستند. پس تعداد کل صف‌ها برابر است با $P(5, 2) \times 4! = 20 \times 24 = 480$.

۱۴۰۴- گزینه ۳ اگر f تابعی با ویژگی مورد نظر باشد، معلوم است که $f(1), f(2), f(3), f(4)$ جایگشتی از عددهای ۵، ۶، ۷ و ۸ هستند. بنابراین تعداد تابع‌هایی مانند f برابر است با $4! = 24$.

۱۴۰۵- گزینه ۲ کتاب‌های ریاضی را به $4!$ طریق می‌توان در یک ردیف چید. اکنون کتاب‌های فیزیک را می‌توان فقط در جاهای مشخص شده در سطر زیر گذاشت. ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی

این کار به ۳! طریق ممکن است. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $4! \times 3! = 144$.

۱۴۰۶- گزینه ۴ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$${}_{72}P(n, r) = P(n+2, r+2) \Rightarrow 72 \times \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{(n+2)!}{(n+2-r-2)!}$$

$$\frac{72n!}{(n-r)!} = \frac{n!(n+1)(n+2)}{(n-r)!} \Rightarrow (n+1)(n+2) = 72 = 8 \times 9 \Rightarrow n = 7$$

$$\text{بنابراین } P(n-1, n-2) = P(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = 720$$

۱۴۰۷- گزینه ۴ کتاب‌های ریاضی را می‌توان به $4!$ طریق کنار هم چید. بین این کتاب‌ها ۳ جای خالی وجود دارد که باید کتاب‌های فیزیک را در آن‌ها بگذاریم. این کار هم به ۳! حالت ممکن است.

ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی

کل این مجموعه و ۲ کتاب شیمی را می‌توان ۳ کتاب در نظر گرفت و آن‌ها را به ۳! حالت مرتب کرد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $4! \times 3! = 288$.

۱۴۰۸- گزینه ۲ توجه کنید که ۴ کتاب فیزیک به $4!$ طریق و ۳ کتاب ادبیات به ۳! طریق کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. حال کتاب‌های فیزیک را در یک بسته و کتاب‌های ادبیات را در بسته دیگری در نظر می‌گیریم. این دو بسته به ۲! طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند. بنابراین تعداد حالات مورد نظر برابر است با $4! \times 3! \times 2! = 24 \times 6 \times 2 = 288$.

۱۴۰۹- گزینه ۴ ابتدا حرف a را قرار می‌دهیم که برای آن ۳ انتخاب داریم: حرف اول، دوم یا سوم. سپس ۲ حرف از ۴ حرف باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد کلمات مورد نظر برابر است با $3P(4, 2)$.

۱۴۱۰- گزینه ۱ ۳ گلابی را باید بین ۳ پسر از ۵ پسر توزیع کنیم که این کار به $P(5, 3)$ حالت امکان‌پذیر است. سپس باید ۲ سیب را بین ۲ نفر از ۸ نفر باقی‌مانده توزیع کنیم که این کار به $P(8, 2)$ حالت امکان‌پذیر است. پس

$$\text{جواب مسئله برابر است با } \frac{5! \times 8!}{2! \times 6!} = \frac{5! \times 8!}{2 \times 6 \times 5!} = \frac{8!}{2 \times 6} = \frac{40320}{12} = 3360$$

۱۳۹۶- گزینه ۲ هر مقسوم‌علیه طبیعی عدد a به صورت $2^x \times 3^y \times 5^z$ است که x, y و z اعدادی حسابی هستند. چون می‌خواهیم مقسوم‌علیه، زوج باشد پس باید حداقل یک عامل ۲ داشته باشد و چون می‌خواهیم بر 10 بخش‌پذیر نباشد، پس نباید عامل ۵ داشته باشد. بنابراین باید $1 \leq x \leq 3$ ، $0 \leq y \leq 4$ و $z = 0$ ، یعنی برای x سه حالت، برای y پنج حالت و برای z یک حالت وجود دارد. پس تعداد این مقسوم‌علیه‌ها برابر است با $3 \times 5 \times 1 = 15$.

۱۳۹۷- گزینه ۳ هر عضو مجموعه A را می‌توانیم به یکی از اعضای مجموعه B با یک پیکان وصل کنیم. همچنین می‌توانیم این عضو A را به هیچ عضوی از B وصل نکنیم، یعنی برای خارج کردن یک پیکان از هر عضو A ، پنج حالت وجود دارد. پس $5 \times 5 \times 5 = 125$ تابع می‌توان نوشت که دامنه آن زیرمجموعه A و برد آن زیرمجموعه B است. یکی از این توابع تهی است که در آن دامنه تابع تهی است. بنابراین ۱۲۴ تابع غیرتهی وجود دارد.

۱۳۹۸- گزینه ۲ هر تابع به صورت $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ مطلوب مسئله است که در آن a, b, c و d می‌توانند ۱ تا ۴ باشند (چهار انتخاب دارند) ولی a می‌تواند ۲ تا ۴ باشد (سه انتخاب دارد). بنابراین تعداد توابعی مانند f برابر است با $4 \times 4 \times 4 \times 3 = 192$.

۱۳۹۹- گزینه ۴ تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ است، برابر است با

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۸ است، برابر است با

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۶ است، برابر است با

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تعداد این عددها برابر است با $24 + 24 + 24 = 72$ ، پس هفتاد و دومین عددی که نوشته‌ایم کوچک‌ترین عددی است که با ارقام داده شده می‌توان نوشت به شرط آنکه اولین رقم سمت چپ آن برابر ۶ باشد. این عدد 62489 است.

۱۴۰۰- گزینه ۲ به شکل زیر توجه کنید.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow \\ \text{پشت یا رو} & & & \text{رو} & & & \text{پشت یا رو} & & & \text{پشت یا رو} \end{array}$$

پرتاب چهارم باید رو بیاید، پس ۱ حالت دارد. یکی از سه پرتاب اول باید رو بیاید که این کار به ۳ حالت امکان‌پذیر است. دو پرتاب دیگر باید پشت بیایند که ۱ حالت دارد. پرتاب‌های پنجم تا دهم می‌توانند رو یا پشت بیایند که هر کدام دو حالت دارند و کلاً 2^6 حالت دارند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب سؤال $3 \times 2^6 = 192$ است.

۱۴۰۱- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{(n+1)! + (n-1)!}{n^3 - 1} = 120 \Rightarrow \frac{(n-1)!(n(n+1)+1)}{(n-1)(n^2+n+1)} = 120$$

$$\frac{(n-1)(n-2)!(n^2+n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)} = 120 \Rightarrow (n-2)! = 120 = 5! \Rightarrow n = 7$$

۱۴۰۲- گزینه ۲ حروف صدادار a, o و i هستند که به ۳! حالت می‌توانند کنار یکدیگر قرار بگیرند. این بسته حروف صدادار به همراه شش حرف بی‌صدای دیگر هفت شیء متمایز هستند که به ۷! حالت می‌توانند در کنار هم قرار بگیرند. بنابراین تعداد جایگشت‌های مورد نظر سؤال برابر $3! \times 7! = 6 \times 5040 = 30240$ است.

بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها t وجود دارد برابر است با

$$4P(7, 3) = 4 \times \frac{7!}{4!} = 4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$$

۱۴۱۸- گزینه ۳ ابتدا مقدار n را از تساوی داده شده به دست می‌آوریم:

$$\frac{n!}{(n-3)!} - \frac{3n!}{(n-2)!} = 3 \Rightarrow n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) = 3$$

$$n^3 - 6n^2 + 5n - 3 = 0 \Rightarrow n^2(n-6) + 5(n-6) = 0$$

$$(n-6)(n^2+5) = 0 \Rightarrow n = 6$$

$$P(n, 4) = P(6, 4) = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

۱۴۱۹- گزینه ۲ عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌هایش بر ۳

بخش‌پذیر باشد. اکنون توجه کنید که از شش رقم داده شده، اگر فقط ۰ یا ۳ را

حذف کنیم، مجموع پنج رقم دیگر بر ۳ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر،

عددهای پنج رقمی بدون رقم صفر

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 5! = 120$$

عددهای پنج رقمی بدون رقم ۳

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$$

$$1, 2, 4, 5$$

بنابراین، پاسخ سؤال برابر است با $120 + 96 = 216$.

۱۴۲۰- گزینه ۱ تعداد کل جایگشت‌های ۸ حرفی این کلمه ۸! است.

ابتدا تعداد حالت‌هایی را که هیچ دو حرف صداداری کنار یکدیگر قرار ندارند حساب می‌کنیم، سپس آن را از ۸! کم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی که حداقل دو حرف صدادار کنار یکدیگر قرار دارند، به دست آید. برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌هایی که هیچ دو حرف صداداری کنار هم قرار ندارند، ابتدا پنج حرف بی‌صدار را کنار هم قرار می‌دهیم که این کار به ۵! حالت انجام‌پذیر است. سپس در شش جای خالی مطابق شکل زیر ۳ حرف صدادار را قرار می‌دهیم که این کار به $P(6, 3)$ حالت امکان‌پذیر است.



پس تعداد حالت‌های مطلوب مسئله $5! \cdot P(6, 3)$ است که برابر است با

$$8! - 5! \times \frac{6!}{3!} = 8! - 20 \times 6! = 6! (56 - 20) = 36 \times 6!$$

۱۴۲۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{(n+1)n!}{k(k-1)!} \cdot \frac{(k-1)!}{n!} = \frac{n+1}{k}$$

۱۴۲۲- گزینه ۳ تعداد راه‌های انتخاب دو توپ از جعبه A برابر $\binom{3}{2}$ و

از جعبه B برابر $\binom{9}{2}$ است. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{3}{2} \binom{9}{2} = 3 \times \frac{9 \times 8}{2} = 108$$

۱۴۱۲- گزینه ۲ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{90} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{90}$$

$$n(n+1) = 90 \Rightarrow n^2 + n - 90 = 0 \Rightarrow (n+10)(n-9) = 0$$

$$n = -10 \text{ (غ.ق.)}, \Rightarrow n = 9$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 72$$

۱۴۱۲- گزینه ۱ باید تعداد حالت‌هایی را که در آن‌ها عبارت $\log$ دیده

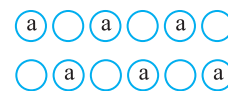
می‌شود، از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم. عبارت $\log$ و شش حرف i, r, a, h, t و m هفت شیء متمایز هستند که به ۷! حالت می‌توانند در کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد کل جایگشت‌ها نیز برابر ۹! است. بنابراین تعداد حالت‌های مورد نظر برابر است با $9! - 7! = 7!(9 \times 8 - 1) = 7! \times 71$.

۱۴۱۳- گزینه ۳ تعداد کل حالت‌های ایستادن ۵ نفر در یک صف ۵!

است. در نیمی از این حالات احمد در مکان جلوتری نسبت به محمد ایستاده است و در نیم دیگر حالات محمد در مکان جلوتری نسبت به احمد ایستاده است. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب سؤال برابر است با $\frac{5!}{2} = 60$.

۱۴۱۴- گزینه ۲ به دو روش می‌توان حروف را چید طوری که حروف a

یکی در میان باشند:



در هر دو روش، سه حرف p, n, m را به ۳! حالت می‌توان در جاهای خالی قرار داد. پس تعداد حالت‌های مورد نظر $3! \times 3! = 12$ است.

۱۴۱۵- گزینه ۲ تعداد همه عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که

می‌توان با شش رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ نوشت برابر است با $P(6, 4) = 360$. از طرف دیگر، تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که در آن‌ها هیچ یک از رقم‌های ۱ و ۵ نیامده است، برابر است با تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که می‌توان با رقم‌های ۲، ۳، ۴، ۶ نوشت. تعداد این عددها برابر است با $4! = 24$. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $360 - 24 = 336$.

۱۴۱۶- گزینه ۴ تعداد کل جایگشت‌های شش حرفی کلمه نه حرفی

logarithm برابر $P(9, 6)$ است. تعداد جایگشت‌های شش حرفی که هیچ کدام از حروف m و t را ندارند برابر $P(7, 6)$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با

$$P(9, 6) - P(7, 6) = \frac{9!}{3!} - \frac{7!}{1!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{6} - 7! = 12 \times 7! - 7! = 11 \times 7!$$

۱۴۱۷- گزینه ۲ راه‌حل اول تعداد کل جایگشت‌های چهارحرفی هشت

حرف این کلمه برابر $P(8, 4)$ است. تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها حرف t وجود ندارد برابر است با $P(7, 4)$. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حرف t دارند می‌شود $P(8, 4) - P(7, 4)$ که برابر است با

$$P(8, 4) - P(7, 4) = \frac{8!}{4!} - \frac{7!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 - 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 7 \times 6 \times 5 (8 - 4) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

راه‌حل دوم ابتدا حرف t را به ۴ حالت در یکی از چهارخانه خالی در نظر گرفته

شده برای جایگشت قرار می‌دهیم. سپس سه خانه خالی وجود دارد که باید با ۷ حرف باقی‌مانده پر شوند که تعداد حالت‌های پر شدن آن‌ها $P(7, 3)$ است.

۱۴۲۹- گزینه ۴ راه حل اول بنا بر اصل متمم، باید از تعداد کل زیرمجموعه‌ها، تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی، یک عضوی و دو عضوی را کم کنیم. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$2^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} - \binom{8}{2} = 256 - 1 - 8 - 28 = 219$$

راه حل دوم تعداد زیرمجموعه‌های دست کم سه عضوی برابر با مجموع تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی، چهار عضوی، ... و هشت عضوی مجموعه است. پس

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 219$$

۱۴۳۰- گزینه ۳ بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی و دو عضوی

یک مجموعه n عضوی به ترتیب $\binom{n}{1}$ و $\binom{n}{2}$ است. بنابراین

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 45 \Rightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 45$$

$$n^2 + n - 90 = 0 \Rightarrow n = 9, n = -10 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین مجموعه مورد نظر ۹ عضو دارد و تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن

$$\binom{9}{3} = 84 \text{ برابر است با}$$

۱۴۳۱- گزینه ۱ از رابطه داده شده به دست می‌آید

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!(n+1-(n-1))!} = 6 \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = 6$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)! \times 2} = 6 \Rightarrow n(n+1) = 12 \Rightarrow n = 3$$

بنابراین باید $\binom{5}{3}$ را محاسبه کنیم که برابر است با $\frac{5!}{3!2!} = 10$

۱۴۳۲- گزینه ۱ دو نفر دیگر را می‌توان از میان هفت نفر دیگر به $\binom{7}{2}$

طریق انتخاب کرد. پنج نفر را هم می‌توان به ۵! طریق در یک صف مرتب

$$\text{کرد. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با } 5! \times \binom{7}{2} = 21 \times 20 = 420$$

۱۴۳۳- گزینه ۱ اگر سه نفر از هشت نفر را انتخاب کنیم و آن‌ها را به همراه A و B در یک تیم پنج نفره قرار دهیم، پنج نفر باقی‌مانده تیم دیگر را

تشکیل خواهند داد. بنابراین جواب مسئله $\binom{8}{3}$ است.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 5!} = 8 \times 7 = 56$$

۱۴۳۴- گزینه ۴ راه حل اول به شکل زیر توجه کنید.

به سه روش می‌توان مثلث را رسم کرد. در روش اول دو رأس مثلث را از نقاط A_1 تا A_5 انتخاب می‌کنیم و یک رأس دیگر را از بین نقاط A_6 تا A_9 انتخاب

می‌کنیم. تعداد این مثلث‌ها $\binom{5}{2} \binom{4}{1} = 40$ است. در روش دوم، یک رأس مثلث

را از نقاط A_1 تا A_5 و دو رأس دیگر را از نقاط A_6 تا A_9 انتخاب می‌کنیم.

۱۴۲۳- گزینه ۳ فرض کنید فرد A یکی از این دوازده نفر باشد. اگر پنج نفر

از یازده نفر دیگر را انتخاب کنیم و با A یک تیم شش نفره درست کنیم، شش نفر باقی‌مانده هم یک تیم شش نفره دیگر تشکیل خواهند داد. بنابراین

$$\text{جواب } \binom{11}{5} \text{ است.}$$

۱۴۲۴- گزینه ۲ اگر هر سه نقطه از این پنج نقطه را به هم وصل کنیم، یک

مثلث تشکیل خواهند داد. پس تعداد مثلث‌ها برابر $\binom{5}{3}$ یعنی ۱۰ تا است.

۱۴۲۵- گزینه ۳ در یک صفحه شطرنجی 4×7 تعداد خط‌های افقی ۵ تا و

تعداد خط‌های عمودی ۸ تا است. از تقاطع هر دو خط عمودی و دو خط افقی یک مستطیل رسم می‌شود. پس باید دو خط از پنج خط افقی و دو خط از هشت خط

$$\text{عمودی را انتخاب کنیم، یعنی تعداد مستطیل‌ها برابر است با } \binom{5}{2} \binom{8}{2} = 280$$

۱۴۲۶- گزینه ۱ راه حل اول این کار را به چند روش می‌توانیم انجام دهیم:

الف) صفر مرد و سه زن را به $\binom{7}{0} \binom{5}{3} = 1 \times 10 = 10$ طریق انتخاب می‌کنیم.

ب) یک مرد و دو زن را به $\binom{7}{1} \binom{5}{2} = 7 \times 10 = 70$ طریق انتخاب می‌کنیم.

پ) دو مرد و یک زن را به $\binom{7}{2} \binom{5}{1} = 21 \times 5 = 105$ طریق انتخاب می‌کنیم.

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با

$$\binom{7}{0} \binom{5}{3} + \binom{7}{1} \binom{5}{2} + \binom{7}{2} \binom{5}{1} = 10 + 70 + 105 = 185$$

راه حل دوم تعداد حالت‌های انتخاب سه نفر از بین ۱۲ نفر برابر است با $\binom{12}{3}$.

همچنین تعداد حالت‌هایی که در آن سه مرد انتخاب شوند برابر $\binom{7}{3}$ است.

پس بنا بر اصل متمم، تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با

$$\binom{12}{3} - \binom{7}{3} = 220 - 35 = 185$$

۱۴۲۷- گزینه ۳ هر حالت پرتاب هفت سکه، یک رشته هفت حرفی مانند

«ر پ ر پ پ ر پ» درست می‌کند. اگر جای ۳ تا «رو» را در این رشته انتخاب کنیم، جای ۴ تا «پشت» خود به خود معلوم می‌شود. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر

$$\text{برابر است با } \binom{7}{3} = 35$$

۱۴۲۸- گزینه ۲ ابتدا ۷ حرف دیگر را به ۷! طریق در یک ردیف قرار

می‌دهیم. سپس در دو مکان از ۸ مکان به وجود آمده، دو حرف e را قرار

می‌دهیم که این کار به $\binom{8}{2}$ حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد کل حالت‌ها

$$7! \times \binom{8}{2} \text{ است که می‌شود } 28 \times 7!$$

بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با

$$\binom{6}{1}\binom{5}{2} + \binom{6}{2}\binom{5}{1} + \binom{6}{3}\binom{5}{0} = 155$$

راه حل دوم تعداد راه‌های انتخاب سه نفر از یازده نفر بازیکن هر دو تیم برابر

$$\binom{11}{3} = 165 \text{ است و تعداد راه‌هایی که در آن‌ها هیچ بازیکنی از تیم A انتخاب}$$

نشود برابر با $\binom{5}{3} = 10$ است. پس بنابر اصل متمم، تعداد راه‌های مورد نظر

برابر است با

$$\binom{11}{3} - \binom{5}{3} = 155$$

۱۴۳۷- گزینه ۴ شش جای خالی در نظر بگیرید که می‌خواهیم در آن‌ها

ارقام ۱ تا ۵ را بنویسیم. ابتدا ۴ جای خالی را از این ۶ جا انتخاب می‌کنیم و در آن‌ها یکی از ارقام ۱، ۳ یا ۵ را می‌نویسیم. سپس در ۲ جای باقی‌مانده یکی از ارقام ۲ یا ۴ را می‌نویسیم:

$$\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب جای ارقام فرد}} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{نوشتن ارقام فرد در ۴ جای انتخاب شده}} \times \underbrace{2 \times 2}_{\text{نوشتن ارقام ۲ یا ۴ در ۲ جای باقی مانده}} = 486$$

۱۴۳۸- گزینه ۲ اعداد ۱ و ۲ را باید در زیرمجموعه قرار دهیم. اعداد ۳، ۴ و ۵

را کنار می‌گذاریم تا عضو زیرمجموعه نباشند. دو عضو دیگر زیرمجموعه را از بین

اعداد ۶ تا ۲۰ به $\binom{15}{2} = 105$ حالت انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد

زیرمجموعه‌ها با شرایط مسئله برابر است با

$$\binom{15}{2} = 105$$

۱۴۳۹- گزینه ۱ توجه کنید که $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. اکنون اگر دو تا از

عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷ را انتخاب کنیم، حاصل ضرب آن‌ها و دو عدد دیگر،

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ ویژگی مورد نظر را دارند. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با } 6.$$

۱۴۴۰- گزینه ۳ ابتدا یک جفت کفش را از ۶ جفت کفش به $\binom{6}{1}$ حالت

انتخاب می‌کنیم. اکنون باید ۳ لنگه کفش را از بین ۵ جفت کفش باقی‌مانده

انتخاب کنیم طوری که هیچ دو لنگه‌ای متعلق به یک جفت نباشند. به این منظور ابتدا ۳ جفت کفش را از بین ۵ جفت کفش به $\binom{5}{3}$ حالت انتخاب

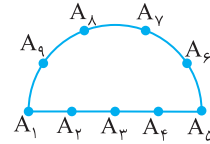
می‌کنیم، سپس از هر جفت کفش انتخاب شده یک لنگه را انتخاب می‌کنیم که این کار به $2 \times 2 \times 2$ حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد حالت‌های مورد نظر

$$\binom{5}{3} \times 2^3 = 480 \text{ مسئله است.}$$

تعداد این مثلث‌ها $\binom{4}{2}\binom{5}{1} = 30$ است و در روش سوم، هر سه رأس مثلث

را از نقاط A_6 تا A_9 انتخاب می‌کنیم که تعداد این مثلث‌ها $\binom{4}{3} = 4$ است.

پس در مجموع $4 + 30 + 4 = 74$ مثلث وجود دارد.



راه حل دوم تعداد انتخاب‌های ۳ نقطه از ۹ نقطه برابر $\binom{9}{3}$ است که اگر هر

سه نقطه روی یک خط نباشند، می‌توانند رأس‌های یک مثلث باشند. پس تعداد

حالت‌هایی را که سه نقطه روی یک خط هستند، یعنی $\binom{5}{3}$ را از تعداد کل

$$\binom{9}{3} - \binom{5}{3} = 74 \text{ حالت‌ها کم می‌کنیم:}$$

۱۴۳۵- گزینه ۳ هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از

۹ خط افقی و ۹ خط عمودی شکل زیر به وجود می‌آید. برای اینکه مستطیل‌ها 5×3 یا 3×5 باشند، باید فاصله دو خط موازی ۳ واحد و فاصله دو خط موازی دیگر ۵ واحد باشد. برای رسم مستطیل‌های 3×5 یکی از خطوط ۱ تا ۶

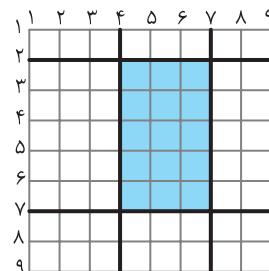
افقی را می‌توانیم به $\binom{6}{1}$ روش انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به

فاصله ۳ واحد رسم می‌شود. همچنین یکی از خطوط عمودی ۱ تا ۴ را می‌توانیم

به $\binom{4}{1}$ روش انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصله ۵ واحد رسم

می‌شود. بنابراین $6 \times 4 = 24$ مستطیل 3×5 وجود دارد. به همین ترتیب ۲۴

مستطیل 5×3 وجود دارد. پس جمعاً ۴۸ مستطیل با ابعاد ۳ و ۵ وجود دارد.



۱۴۳۶- گزینه ۴ **راه حل اول** به چند روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

(الف) یک بازیکن از تیم A و دو بازیکن از تیم B را به $\binom{5}{2}\binom{6}{1} = 60 = 6 \times 10$

طریق انتخاب کنیم.

(ب) دو بازیکن از تیم A و یک بازیکن از تیم B را به $\binom{5}{1}\binom{6}{2} = 75 = 5 \times 15$

طریق انتخاب کنیم.

(پ) سه بازیکن از تیم A و صفر بازیکن از تیم B را به $\binom{5}{0}\binom{6}{3} = 20 = 1 \times 20$

طریق انتخاب کنیم.

۱۴۴۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{\frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!}} = \frac{n-r+1}{r}$$

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r+1}} = \frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{\frac{n!}{(r+1)!(n-(r+1))!}} = \frac{r+1}{n-r}$$

بنابراین

$$\begin{cases} \frac{n-r+1}{r} = \frac{84}{36} = \frac{7}{3} \\ \frac{r+1}{n-r} = \frac{84}{126} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n-10r+3=0 \\ 2n-5r-3=0 \end{cases} \Rightarrow n=9, r=3$$

پس $n+r=12$.

۱۴۴۲- گزینه ۲

چون ۲ معلم خاص باید حتماً در تیم باشند، پس باید تیمی ۳ نفره انتخاب کنیم که ۲ دانش‌آموز خاص در آن نباشند. این ۲ دانش‌آموز را حذف می‌کنیم. بنابراین باید تیمی ۳ نفره از میان ۹ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{9}{3} = 84$.

۱۴۴۳- گزینه ۲

هر نقطه برخورد مربوط به دو قطر و در نتیجه مربوط به ۴ رأس است. بنابراین تعداد نقطه‌های مورد نظر برابر است با



$$\binom{7}{4} = 35$$

۱۴۴۴- گزینه ۲

راه‌حل اول به دو روش می‌توان مثلث را رسم کرد:
روش اول دو رأس مثلث را از بین نقاط A_1 تا A_4 انتخاب کنیم و یک رأس مثلث را از بین نقاط B_1 تا B_3 انتخاب کنیم. تعداد این مثلث‌ها برابر است با

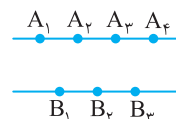
$$\binom{4}{2} \binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18$$

روش دوم دو رأس مثلث را از بین نقاط B_1 تا B_3 انتخاب کنیم و یک رأس مثلث را از بین نقاط A_1 تا A_4 انتخاب کنیم. تعداد این مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{3}{2} \binom{4}{1} = 3 \times 4 = 12$$

بنابراین تعداد کل مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} = 18 + 12 = 30$$



راه‌حل دوم ابتدا تعداد مثلث‌های قابل رسم با ۷ نقطه را محاسبه می‌کنیم.

سپس تعداد مثلث‌هایی را که با ۴ نقطه A_1, A_2, A_3, A_4 و با ۳ نقطه B_1, B_2, B_3 قابل رسم هستند از آن کم می‌کنیم. پس

$$\binom{7}{3} - \binom{4}{3} - \binom{3}{3} = 35 - 4 - 1 = 30.$$

۱۴۴۵- گزینه ۳

اگر سه سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم، باید سه سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر $\binom{5}{3} \binom{5}{2} = 10 \times 10 = 100$ است. اگر چهار سؤال از پنج سؤال اول

را انتخاب کنیم، باید دو سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها

جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر $\binom{5}{4} \binom{5}{1} = 5 \times 10 = 50$ است. اگر

پنج سؤال از پنج سؤال اول را انتخاب کنیم باید یک سؤال از پنج سؤال دوم را هم انتخاب کنیم و به آن‌ها جواب بدهیم. تعداد این حالت‌ها برابر

$$\binom{5}{5} \binom{5}{0} = 1 \times 5 = 5 \text{ است. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با}$$

$$\binom{5}{3} \binom{5}{2} + \binom{5}{4} \binom{5}{1} + \binom{5}{5} \binom{5}{0} = 100 + 50 + 5 = 155$$

۱۴۴۶- گزینه ۴ اگر هیچ مردی را انتخاب نکنیم، تعداد راه‌های انتخاب

اعضای تیم برابر است با $\binom{6}{4} = 15$ و اگر یک مرد و سه زن انتخاب کنیم،

تعداد راه‌ها برابر است با $\binom{4}{1} \binom{6}{3} = 4 \times 20 = 80$. بنابراین تعداد راه‌های

انتخاب تیمی چهار نفره که حداکثر یک مرد عضو آن باشد (بدون انتخاب مدیر)

برابر است با $\binom{6}{4} + \binom{4}{1} \binom{6}{3} = 15 + 80 = 95$. تعداد راه‌های انتخاب مدیر

هم برابر است با $\binom{4}{1}$. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{4}{1} \left(\binom{6}{4} + \binom{4}{1} \binom{6}{3} \right) = 4 \times 95 = 380.$$

۱۴۴۷- گزینه ۴ **راه‌حل اول** تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها

حرف t وجود دارد ولی حرف a وجود ندارد برابر است با $5! \times 4! = 15 \times 5!$.

به همین ترتیب، تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که در آن‌ها حرف a وجود دارد ولی حرف t وجود ندارد برابر است با $5! \times 1$. حال تعداد جایگشت‌های پنج

حرفی که در آن‌ها هر دو حرف a و t وجود دارند برابر است با $5! \times 2! = 20 \times 5!$.

در نتیجه تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی مورد نظر برابر است با

$$15 \times 5! + 5! \times 1 + 20 \times 5! = 50 \times 5!$$

۱۴۵۱- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$n(S)=2^3=8, \quad n(A)=\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=3+3+1=7$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{7}{8} \quad \text{بنابراین}$$

راه حل دوم احتمال اینکه سکه هر سه بار پشت بیاید، برابر $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$P(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \quad \text{است. بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر } A \text{ باشد،}$$

۱۴۵۲- گزینه ۱ تعداد اعداد دورقمی برابر $n(S)=90$ است. اعداد

دورقمی مربع کامل عبارتند از $4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$ و 9^2 که تعداد آنها برابر $n(A)=6$ است. بنابراین احتمال مربع کامل بودن عدد انتخاب

$$\text{شده برابر است با } P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$$

۱۴۵۳- گزینه ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش $6 \times 6 = 36$ عضو دارد و

پیشامد مطلوب به شکل زیر است

$$A=\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4),$$

$$(5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18} \quad \text{بنابراین}$$

۱۴۵۴- گزینه ۳ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۴ عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ که تعداد آن‌ها $n(S)=8$ است. تعداد مقسوم‌علیه‌های

طبیعی و زوج ۲۴ برابر $n(A)=6$ است. بنابراین احتمال زوج بودن

$$\text{مقسوم‌علیه انتخاب شده } P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \quad \text{است.}$$

۱۴۵۵- گزینه ۴ تعداد کل حالت‌های ممکن برای چیدن ۸ کتاب در یک

قفسه برابر ۸! است. اگر بخواهیم کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند، ابتدا کتاب‌های ادبیات را به ۵! حالت کنار هم می‌چینیم. سپس کتاب‌های ریاضی را به ۳! حالت کنار هم می‌چینیم و در آخر به ۲! حالت این دو دسته کتاب را در قفسه قرار می‌دهیم. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آنگاه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5!3!2!}{8!}=\frac{1}{28} \quad \text{پس } n(A)=5!3!2!$$

۱۴۵۶- گزینه ۲ تعداد کل مسیرهایی که از شهر A به شهر C می‌روند،

برابر است با $4 \times 3 + 2 = 14$. دو مسیر مستقیم از شهر A به شهر C است که از شهر B عبور نمی‌کنند، ۱۲ مسیر دیگر از شهر B عبور می‌کنند. بنابراین

$$\text{احتمال اینکه در مسیرمان از شهر } B \text{ عبور کنیم، برابر } \frac{12}{14}=\frac{6}{7}$$

۱۴۵۷- گزینه ۲ تعداد راه‌های انتخاب سه مهره از ده مهره برابر است با

$$\binom{10}{3} \quad \text{و تعداد راه‌های انتخاب سه مهره سفید از پنج مهره سفید برابر است با}$$

$$\binom{5}{3} \quad \text{بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با } \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

راه حل دوم تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی کلمه هشت حرفی triangle برابر

$P(8,5)$ است. تعداد جایگشت‌های پنج حرفی که هیچ کدام از حروف a و t

را ندارند، برابر $P(6,5)$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از

این دو حرف را دارند برابر است با

$$P(8,5)-P(6,5)=\frac{8!}{3!}-\frac{6!}{1!}=\frac{8!}{6}-6!=6!(\frac{8 \times 7}{6}-1)=5! \times 5$$

۱۴۴۸- گزینه ۳ عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰ را بر حسب زوج یا فرد بودنشان

به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

عددهای دسته اول: ۱، ۳، ۵، ۷، ۹

عددهای دسته دوم: ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰

برای اینکه مجموع چهار عدد مورد نظر زوج باشد، یا باید هر چهار عدد را از دسته اول انتخاب کنیم، یا باید دوتا از دسته اول و دوتا از دسته دوم انتخاب کنیم، یا باید هر چهار تا را از دسته دوم انتخاب کنیم. بنابراین تعداد راه‌های

$$\text{مورد نظر برابر است با } \binom{5}{4}+\binom{5}{2}\binom{5}{2}+\binom{5}{4}=5+10 \times 10+5=110$$

۱۴۴۹- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا یک زوج را از شش زوج به $\binom{6}{1}$

حالت انتخاب می‌کنیم. حالا باید دو نفر را از بین پنج زوج باقی‌مانده انتخاب کنیم به طوری که هیچ دو نفری زن و شوهر نباشند. به این منظور ابتدا دو زوج

را از بین پنج زوج به $\binom{5}{2}$ حالت انتخاب می‌کنیم، سپس از هر زوج انتخاب

شده یک نفر را انتخاب می‌کنیم که این کار به 2×2 طریق امکان‌پذیر است.

پس تعداد راه‌های مورد نظر مسئله برابر است با

$$\binom{6}{1}\binom{5}{2} \times 2^2 = 6 \times 10 \times 4 = 240$$

راه حل دوم ابتدا یک زوج را از میان شش زوج به $\binom{6}{1}$ طریق انتخاب می‌کنیم

و برای انتخاب دو نفر دیگر، دو نفر را از ده نفر باقی‌مانده به $\binom{10}{2}$ طریق

انتخاب می‌کنیم و پنج حالتی را که ممکن است این دو نفر زن و شوهر باشند، از انتخاب‌هایمان کم می‌کنیم. بنابراین تعداد انتخاب‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{6}{1} \times \left(\binom{10}{2} - 5 \right) = 6 \times (45 - 5) = 240$$

۱۴۵۰- گزینه ۲ به شکل زیر توجه کنید:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ & & & \text{پ} & & & & & & \\ & & & \text{دوتا رو و دوتا پشت} & & & & & & \text{پشت یا رو} \end{array}$$

پرتاب پنجم باید رو بیاید پس یک حالت دارد. دو تا از چهار پرتاب اول باید رو

بیایند که این کار به $\binom{4}{2}$ حالت امکان‌پذیر است. دو پرتاب دیگر باید پشت

بیایند که یک حالت دارد. پرتاب‌های ششم تا دهم می‌توانند رو یا پشت بیایند که هر کدام دو حالت و کلاً ۲۵ حالت دارند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب

$$\text{مسئله برابر است با } \binom{4}{2} \times 2^5 = 6 \times 32 = 192$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{1}{35}$$

۱۴۶۶- گزینه ۲ تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ برابر $2^6 - 1$ است و تعداد زیرمجموعه‌های

دو عضوی آن برابر $\binom{6}{2}$ است. بنابراین احتمال دو عضوی بودن زیرمجموعه

انتخاب شده برابر است با

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6 - 1} = \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$$

۱۴۶۷- گزینه ۳ انتخاب سه مهره از ۹ مهره به $\binom{9}{3}$ حالت امکان‌پذیر

است و تعداد راه‌هایی که دو تا از آن‌ها سفید باشند برابر است با

$$\binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \binom{4}{2} = 18$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{18}{\binom{9}{3}} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$

۱۴۶۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

۱۴۶۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$P(A') + P(B') = 1 - P(A) + 1 - P(B) = 2 - (P(A) + P(B)) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

۱۴۷۰- گزینه ۴ توجه کنید که $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

از طرف دیگر،

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = P(A) + \frac{1}{10} - P(A \cap B)$$

$$P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

۱۴۷۱- گزینه ۴ فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو است که در ۶ عضو آن

به صورت $(1, 1), (1, 2), (2, 2), \dots, (6, 6)$ عددهای روی دو تاس برابر هستند و در

بقیه برابر نیستند. پس در ۳۰ حالت عدد روی تاس‌ها فرق دارند. بنابراین

احتمال پیشامد مطلوب $\frac{30}{36}$ یا همان $\frac{5}{6}$ است.

۱۴۵۸- گزینه ۳ چون A و B ناسازگارند، $P(A \cap B) = 0$. در نتیجه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{9} + \frac{5}{6} = \frac{17}{18}$$

۱۴۵۹- گزینه ۴ چون A و B ناسازگارند، پس $P(A \cap B) = 0$. از طرف

دیگر $P(B) = 1 - P(B') = \frac{1}{4}$. در نتیجه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

۱۴۶۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0/6 = P(A) + P(B) - 0/2 \Rightarrow P(A) + P(B) = 0/8$$

بنابراین

$$P(A') + P(B') = (1 - P(A)) + (1 - P(B))$$

$$= 2 - (P(A) + P(B)) = 2 - 0/8 = 1/2$$

۱۴۶۱- گزینه ۱ فضای نمونه‌ای آزمایش 6×6 عضو دارد و پیشامد

مطلوب برابر است با $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

۱۴۶۲- گزینه ۳ تعداد کل عددهای سه رقمی با رقم‌های متمایز که

رقم‌های آن عضو مجموعه $\{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$ باشند برابر است با $5 \times 4 \times 5$.

یعنی $n(S) = 100$. توجه کنید که اگر رقم صفر را انتخاب کنیم نمی‌توان عدد

سه رقمی با شرایط گفته شده نوشت. پس از ۵ رقم دیگر سه رقم را انتخاب

می‌کنیم. با این سه رقم انتخاب شده فقط به یک طریق می‌توانیم یک عدد با

شرایط خواسته شده بنویسیم بنابراین اگر A پیشامد این باشد که رقم‌ها

صعودی باشند، آن‌گاه $n(A) = \binom{5}{3} = 10$. بنابراین احتمال مورد نظر برابر

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

۱۴۶۳- گزینه ۲ تعداد کل اعداد سه رقمی برابر $9 \times 10 \times 10$ است. اگر

بخواهیم رقم تکراری نداشته باشیم، تعداد اعداد برابر $9 \times 9 \times 8$ خواهد بود.

بنابراین احتمال اینکه عدد نوشته شده دارای رقم‌های تکراری نباشد یعنی

$$\frac{9 \times 9 \times 8}{9 \times 10 \times 10} = 0/72$$

۱۴۶۴- گزینه ۱ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ حرفی society برابر با ۷! است. سه حرف صدادر کلمهٔ society را یک حرف در نظر

می‌گیریم. در این صورت پنج حرف داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر

۵! است و چون تعداد جایگشت‌های حروف صدادر هم ۳! است، پس تعداد

جایگشت‌هایی که حروف صدادر کنار هم هستند برابر $5! \times 3!$ است. بنابراین

$$P(A) = \frac{5! \times 3!}{7!} = \frac{1}{7}$$

۱۴۶۵- گزینه ۴ فضای نمونه‌ای این آزمایش ۷! عضو دارد، یعنی

$n(S) = 7!$. اگر A پیشامد مطلوب مسئله باشد، تعداد اعضای A برابر است با

$n(A) = 4! \times 3!$. (ابتدا کتاب‌های ریاضی را به ۴! حالت در $\bigcirc$ ها می‌چینیم،

سپس در مکان‌های بین آن‌ها کتاب‌های فیزیکی را به ۳! حالت در $\square$ ها می‌چینیم.)



در نتیجه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{7}{1} \binom{7}{2}}{\binom{14}{3}} = \frac{21}{52}$$

۱۴۷۸- گزینه ۳ با توجه به رابطه $P(A) = 1 - P(A')$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{17}{24} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5}{24}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{6}$$

در نتیجه

۱۴۷۹- گزینه ۱ راه حل اول فرض کنید $n(S) = s$ در این صورت

$$P(A \cap B) = \frac{5}{24} \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{5}{24} s, \quad P(A') = \frac{5}{8} \Rightarrow n(A') = \frac{5}{8} s$$

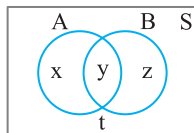
از روی نمودار و ن زیر و تساوی های بالا معلوم می شود که

$$y = \frac{5}{24} s, \quad z + t = \frac{5}{8} s$$

اکنون توجه کنید که

$$x + y + z + t = s \Rightarrow x + \frac{5}{24} s + \frac{5}{8} s = s \Rightarrow x = s - \frac{5}{24} s - \frac{5}{8} s = \frac{1}{6} s$$

به این ترتیب



$$P(A \cap B') = \frac{n(A \cap B')}{n(S)} = \frac{x}{s} = \frac{1}{6}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= (1 - \frac{5}{8}) - \frac{5}{24} = \frac{3}{8} - \frac{5}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

۱۴۸۰- گزینه ۳ راه حل اول می دانیم $0 \leq P(A) \leq 1$ پس

$$0 \leq \frac{k}{3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq k \leq 3 \quad (1)$$

چون A و B ناسازگارند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{k}{3} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{k}{3}$$

از طرفی $0 \leq P(B) \leq 1$ ، در نتیجه

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{k}{3} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{k}{3} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

با توجه به نابرابری های (۱) و (۲) به دست می آید $0 \leq k \leq \frac{3}{2}$

راه حل دوم چون $A \subseteq A \cup B$ پس $0 \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

$$\text{بنابراین } 0 \leq k \leq \frac{3}{2} \text{ پس } 0 \leq \frac{k}{3} \leq \frac{1}{2}$$

۱۴۷۲- گزینه ۲ تعداد کل عددهای سه رقمی با رقم های متمایز برابر

است با $9 \times 9 \times 8$. پس $n(S) = 9 \times 9 \times 8$. اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

آن گاه $n(A) = 8 \times 8 \times 5$ بنابراین

$$P(A) = \frac{8 \times 8 \times 5}{9 \times 9 \times 8} = \frac{40}{81}$$

۱۴۷۳- گزینه ۱ فضای نمونه ای این آزمایش به شکل زیر است:

$$S = \{(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

پیشامد اینکه حاصل جمع دو عدد ۵ باشد به شکل $A = \{(2, 3), (3, 2)\}$

$$\text{است. بنابراین } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۴۷۴- گزینه ۱ راه حل اول فضای نمونه ای 2^5 عضو دارد، پس

$n(S) = 2^5 = 32$. اگر تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد،

باید تعداد فرزندان دختر ۵ یا ۳ باشد. پس تعداد اعضای این پیشامد برابر

$$\text{است با } n(A) = \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} = 16 \text{ بنابراین}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم چون تعداد کل فرزندان خانواده فرد است، پس در نیمی از حالات تعداد

دختران بیشتر از تعداد پسران و در نیمی دیگر از حالات برعکس است. همچنین،

هرگز تعداد دختران و پسران این خانواده برابر نمی شود. بنابراین $P(A) = \frac{1}{2}$.

۱۴۷۵- گزینه ۲ تعداد راه های انتخاب دو عدد از میان ده عدد داده شده

برابر است با $n(S) = \binom{10}{2} = 45$. از طرف دیگر، اگر A پیشامد مورد نظر

باشد $A = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \dots, \{8, 10\}\}$ پس $n(A) = 8$ و در نتیجه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{45}$$

۱۴۷۶- گزینه ۴ تعداد راه های انتخاب زیرمجموعه ای سه عضوی از

مجموعه هفت عضوی داده شده برابر است با $n(S) = \binom{7}{3} = 35$ برای اینکه

حاصل ضرب عضوهای زیرمجموعه انتخاب شده منفی باشد، باید یک عضو

منفی باشد و دو عضو دیگرش مثبت باشند یا هر سه عضو منفی باشند.

بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 10$$

$$\text{بنابراین } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

۱۴۷۷- گزینه ۴ تعداد کل مهره های کیسه برابر ۱۴ است و تعداد راه های

انتخاب سه مهره از این ۱۴ مهره برابر است با $n(S) = \binom{14}{3}$ اگر A پیشامد

این باشد که دقیقاً یک مهره سبز انتخاب شود، دو مهره دیگر را باید از هفت

$$\text{مهره آبی یا قرمز انتخاب کنیم. بنابراین } n(A) = \binom{7}{1} \binom{7}{2}$$

۱۴۸۷- گزینه ۱ تعداد کل مهره‌ها برابر است با $۳+۴+۵=۱۲$ و تعداد

راه‌های انتخاب سه مهره از این ۱۲ مهره برابر است با

$$n(S) = \binom{12}{3} = 220$$

اگر A پیشامد این باشد که مهره‌ها به سه رنگ مختلف باشند، آن‌گاه

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 60$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

۱۴۸۸- گزینه ۳ فضای نمونه‌ای آزمایش $\binom{n}{2}$ عضو دارد. اگر A

پیشامد سفید بودن هر دو مهره باشد، تعداد اعضای A برابر $\binom{4}{2}$ است.

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{6}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{12}{n(n-1)} = \frac{2}{15}$$

پس

$$n(n-1) = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=10 \\ \text{غ.ق.} \end{cases}$$

۱۴۸۹- گزینه ۱ از تساوی $P(B') = 3P(A')$ نتیجه می‌شود

$$1 - P(B) = 3(1 - P(A)) \Rightarrow 1 - P(B) = 3 - 3P(A) \Rightarrow P(B) = 3P(A) - 2$$

با توجه به اینکه $P(A) = 2P(B)$ ، در تساوی فوق به جای $P(A)$ قرار

می‌دهیم $2P(B)$ و نتیجه می‌شود

$$P(B) = 6P(B) - 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \frac{4}{5} \text{ و در نتیجه } P(A) + P(B) = \frac{6}{5}$$

۱۴۹۰- گزینه ۴ با توجه به رابطه $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$ ،

نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} \frac{1}{2} \leq k \leq 2$$

۱۴۹۱- گزینه ۴ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش 6^4 است.

یعنی $n(S) = 6^4$. اگر A پیشامد این باشد که دقیقاً در دو پرتاب عدد ۶ ظاهر

شود، آن‌گاه $n(A) = \binom{4}{2} \times 1 \times 5^2$ (توجه کنید که کافی است دو پرتاب از

چهار پرتاب را انتخاب کنیم که در آن‌ها به یک حالت عدد ۶ ظاهر می‌شود و در

دو پرتاب باقی‌مانده به پنج حالت عدهای دیگری ظاهر شوند). بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2} \times 5^2}{6^4} = \frac{25}{216}$$

۱۴۸۱- گزینه ۲ فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس ۳۶ عضو دارد. اگر A

پیشامد این باشد که مجموع عددهای رو شده در تاس‌ها بیشتر از ۸ باشد، آن‌گاه

$$A = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۱۴۸۲- گزینه ۳ در اینجا $n(S) = 4 \times 3 \times 2 = 24$. اگر A پیشامد

مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$A = \{(1, -1, 0), \{2, -2, 0\}, \{3, 0, -3\}, \{4, -1, -3\}\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

۱۴۸۳- گزینه ۴ چون می‌دانیم عدد رو شده روی دو تاس، اول است، پس

هریک از تاس‌ها می‌توانند ۲، ۳ یا ۵ بیایند. بنابراین فضای نمونه‌ای این آزمایش

دارای 3×3 حالت است یعنی $n(S) = 9$. فقط در یک حالت که عدد روی هر دو

تاس ۲ بیاید، عدد روی هر دو تاس زوج خواهد بود. پس $n(A) = 1$ و در نتیجه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{9}$$

۱۴۸۴- گزینه ۱ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $8!$ و تعداد

حالت‌هایی که دو برادر در ابتدا و انتهای صف می‌ایستند برابر $2 \times 6!$ است.

$$\text{بنابراین احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با } \frac{2 \times 6!}{8!} = \frac{1}{28}$$

۱۴۸۵- گزینه ۲ تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی کلمه نه حرفی

logarithm برابر $P(9, 5)$ است. تعداد جایگشت‌هایی که هیچ کدام از

حروف t و g را ندارند برابر $P(7, 5)$ است. پس تعداد جایگشت‌هایی که

حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با $P(9, 5) - P(7, 5)$. بنابراین

احتمال اینکه در جایگشت انتخاب شده حداقل یکی از حروف t و g وجود داشته

باشد، برابر است با

$$\frac{P(9, 5) - P(7, 5)}{P(9, 5)} = 1 - \frac{P(7, 5)}{P(9, 5)} = 1 - \frac{7! \times 4!}{9! \times 2!} = 1 - \frac{4 \times 3}{8 \times 9} = \frac{5}{6}$$

۱۴۸۶- گزینه ۳ در کل تعداد افراد برابر است با $2 \times 5 = 10$. در نتیجه

تعداد راه‌های انتخاب سه نفر از این ده نفر برابر است با $n(S) = \binom{10}{3}$. برای

اینکه از این سه نفر هیچ دو نفری زن و شوهر نباشند، باید از هر زوج حداکثر

یک نفر را انتخاب کنیم، یعنی باید ابتدا سه زوج را انتخاب کنیم و سپس از هر

زوج، یک نفر را انتخاب کنیم. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد،

$$n(A) = \binom{5}{3} \times 2 \times 2 \times 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{3} 2^3}{\binom{10}{3}} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$$

۱۴۹۶- گزینه ۲ در مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ، تعداد اعدادی که

بر ۳ بخش پذیرند، ۳۳ تا $(3, 6, 9, \dots, 96, 99)$ و تعداد اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند، ۱۴ تا $(7, 14, 21, \dots, 91, 98)$ است. پس اگر A را پیشامد بخش پذیر بودن عدد بر ۳ و B را پیشامد بخش پذیر بودن عدد بر ۷ بنامیم، آن گاه

$$P(A) = \frac{33}{100}, P(B) = \frac{14}{100} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{14}{100} = \frac{86}{100}$$

تعداد اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۷ بخش پذیر هستند، ۴ تا $(21, 42, 63, 84)$ است. پس تعداد اعدادی که بر ۳ بخش پذیر هستند ولی بر ۷ بخش پذیر نیستند، برابر $33 - 4$ تا است. پس

$$n(A \cap B') = 29 \Rightarrow P(A \cap B') = \frac{29}{100}$$

می‌خواهیم $P(A \cup B')$ را محاسبه کنیم:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = \frac{33}{100} + \frac{86}{100} - \frac{29}{100} = \frac{90}{100}$$

۱۴۹۷- گزینه ۲ کل حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۲ نفر برابر $\binom{12}{4}$

است. یعنی $n(S) = \binom{12}{4}$ تعداد حالت‌هایی که کمیته شامل هیچ زنی

نیست برابر است با $\binom{9}{4}$. بنابراین اگر A پیشامد این باشد که کمیته شامل هیچ

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{9}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{14}{55} \quad n(A) = \binom{9}{4} \quad \text{زنی نباشد آن گاه}$$

پیشامد اینکه کمیته حداقل شامل یک زن باشد، متمم A است. پس

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$$

۱۴۹۸- گزینه ۴ چون باید چهار نفر را از میان دوازده نفر انتخاب کنیم،

$$P(S) = \binom{12}{4} = 495 \quad \text{پس } n(S) = \binom{12}{4} = 495 \quad \text{توجه کنید که باید یک زوج انتخاب شوند.}$$

سپس باید دو زوج از پنج زوج دیگر انتخاب شوند و از هر کدام یک نفر انتخاب شوند. چون از هر یک از این زوج‌ها می‌توانیم زن یا شوهر را انتخاب کنیم، تعداد

$$\left(\binom{6}{1} \right) \left(\binom{5}{2} \right)^2 = 6 \times 10 \times 4 = 240 \quad \text{راه‌های انجام این کار برابر است با}$$

به این ترتیب، احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{16}{33}$.

۱۴۹۹- گزینه ۳ از تساوی‌های داده شده نتیجه می‌گیریم $P(A) = \frac{1}{8}$.

$$P(B) = \frac{1}{12} \quad \text{و} \quad P(C) = \frac{1}{20} \quad \text{چون } A, B \text{ و } C \text{ پیشامدهای دویبه‌دو ناسازگار}$$

هستند، پس

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{31}{120}$$

۱۴۹۲- گزینه ۱ تعداد راه‌های انتخاب ۲ عدد از میان ۲۰ عدد داده شده برابر

$$n(S) = \binom{20}{2} = 190 \quad \text{است با } n(S) = \binom{20}{2} = 190 \quad \text{از طرف دیگر، اگر } A \text{ پیشامد مورد نظر باشد،}$$

$$A = \{ \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \dots, \{19, 20\} \}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{19}{190} = \frac{1}{10} \quad \text{و در نتیجه}$$

۱۴۹۳- گزینه ۳ در اینجا $n(S) = \binom{25}{2} = 300$ فرض کنید A پیشامد

مورد نظر باشد. در این صورت A' پیشامد این است که هر دو خانه در یک

سطر یا یک ستون باشند. همچنین، تعداد راه‌های انتخاب دو خانه از یک سطر یا دو خانه از یک ستون هر کدام برابر است با $\binom{5}{2}$ و چون ۵ سطر و ۵ ستون

داریم، پس

$$n(A') = 5 \times \binom{5}{2} + 5 \times \binom{5}{2} = 5 \times 10 + 5 \times 10 = 100$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \quad \text{پس}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۱۴۹۴- گزینه ۲ تعداد مهره‌ها $2n - 2$ است، پس $n(S) = \binom{2n-2}{2}$.

اگر A پیشامد غیرهمرنگ بودن مهره باشد، $n(A) = \binom{n}{1} \binom{n-2}{1}$ زیرا

باید یک مهره آبی و یک مهره قرمز انتخاب کنیم. بنابراین

$$P(A) = \frac{\binom{n}{1} \binom{n-2}{1}}{\binom{2n-2}{2}} = \frac{n(n-2)}{\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}} = \frac{n(n-2)}{(n-1)(2n-3)} = \frac{8}{15}$$

پس

$$15n(n-2) = 8(n-1)(2n-3) \Rightarrow 15n^2 - 30n = 16n^2 - 40n + 24$$

$$n^2 - 10n + 24 = 0 \Rightarrow (n-6)(n-4) = 0 \Rightarrow n = 6 \quad \text{یا} \quad n = 4$$

تعداد کل مهره‌ها $2n - 2$ است، پس تعداد مهره‌ها در کیسه ۶ یا ۱۰ تا است.

۱۴۹۵- گزینه ۱ اگر A را پیشامد مضرب ۳ بودن عدد و B را پیشامد

مضرب ۸ بودن آن در نظر بگیریم، آن گاه

$$n(A) = \frac{69-3}{3} + 1 = 23 \Rightarrow P(A) = \frac{23}{70}$$

$$n(B) = \frac{64-8}{8} + 1 = 8 \Rightarrow P(B) = \frac{8}{70}$$

اعدادی که مضرب ۳ و ۸ باشند، مضرب ۲۴ هستند.

$$A \cap B = \{24, 48\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{70}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{23}{70} + \frac{8}{70} - \frac{2}{70} = \frac{29}{70}$$

۱۵۰۵- گزینه ۱ راه‌حل اول پیشامد «به هدف زدن شخص اول» را A و

پیشامد «به هدف زدن شخص دوم» را B می‌نامیم. پس

$$P(A) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

پیشامد «حداقل یکی از آن‌ها به هدف نزنند» برابر $A' \cup B'$ است که چون

A' و B' مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A')P(B') = \frac{5}{6} + \frac{2}{5} - \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$$

راه‌حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هر دو فرد تیر را به هدف بزنند. در این صورت مطلوب مسئله $P(A')$ است. چون زدن تیر دو شخص

به هدف پیشامدهایی مستقل هستند، پس $P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$. بنابراین

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

۱۵۰۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \{2\}, \quad A \cap D = \{1\}, \quad A \cap E = \{1, 2\}$$

بنابراین A و B مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A \cap B) = 0, \quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

A و C مستقل از هم هستند، زیرا

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4}, \quad P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

A و D مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A \cap D) = \frac{1}{4}, \quad P(A) \times P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

A و E مستقل از هم نیستند، زیرا

$$P(A \cap E) = \frac{1}{2}, \quad P(A) \times P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

۱۵۰۷- گزینه ۴ با توجه به فرض مسئله،

$$P(A) = 1 - P(A') = 0/6, \quad P(B) = 1 - P(B') = 0/8$$

در نتیجه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/6 \times 0/8 = 0/48$ ، بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6 + 0/8 - 0/48 = 0/92$$

۱۵۰۸- گزینه ۱ اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آن‌گاه A'

و B نیز مستقل از هم هستند. بنابراین $P(B|A) = P(B) = \frac{1}{3}$

$$P(A'|B) = P(A') = \frac{3}{5} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{5}$$

و در نتیجه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

۱۵۰۹- گزینه ۴ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامد این باشند که آقای

فیضی و آقای تقوی در روز پنج‌شنبه سرکار بیایند. در این صورت $P(A \cup B)$

را می‌خواهیم. توجه کنید که پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

۱۵۰۰- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر $A - B$ ، $B - A$ و $A \cap B$

اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها برابر $A \cup B$ است. پس

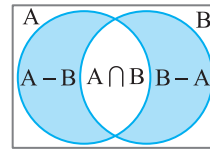
$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + P(A \cap B) = \frac{1}{2} + P(A \cap B)$$

چون $P(A \cup B) \leq 1$ ، پس

$$\frac{1}{2} + P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$$

یعنی بیشترین مقدار $P(A \cap B)$ برابر $\frac{1}{2}$ است.



۱۵۰۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0/3 + 0/2 - 0/5 = 0$$

$$\text{بنابراین } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$$

۱۵۰۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(A|B) = 4P(B|A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A \cap B) \neq 0$$

$$4P(B) = P(A) \Rightarrow \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

۱۵۰۳- گزینه ۱ راه‌حل اول فرض کنید A پیشامد این باشد که نفر اول

عضو تیم باشد و B پیشامد این باشد که نفر دوم نیز عضو تیم باشد. توجه کنید

که $P(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$. از طرف دیگر $P(B|A) = \frac{1}{23}$ ، پس احتمال مورد نظر

برابر است با

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{23} = \frac{1}{276}$$

راه‌حل دوم فضای نمونه‌ای این آزمایش انتخاب دو دانش‌آموز از ۲۴ دانش‌آموز

این کلاس است که تعداد عضوهای آن برابر است با

$$n(S) = \binom{24}{2} = 276$$

اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $n(A) = \binom{2}{2} = 1$. بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{276}$$

۱۵۰۴- گزینه ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که اختلاف عددی

که آمده‌اند ۳ باشد و B پیشامد این باشد که دست کم یک بار ۲ آمده باشد. در

این صورت

$$A = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

$$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2),$$

$$(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$$

به این ترتیب، $A \cap B = \{(2, 5), (5, 2)\}$ و در نتیجه

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

پیشامدهای A و D مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A \cap D = \{2, 3\} \Rightarrow P(A \cap D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) \times P(D) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

پیشامدهای A و E مستقل از هم هستند، زیرا

$$A \cap E = \{2, 3\} \Rightarrow P(A \cap E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) \times P(E) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

۱۵۱۷- گزینه ۴ راه حل اول فرض کنید A پیشامد این باشد که نفر اول

به هدف بزند و B پیشامد این باشد که نفر دوم به هدف بزند. توجه کنید که $P(B) = \frac{1}{8}$ و $P(A) = \frac{1}{8}$ و در نتیجه

احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{15}{64}$$

راه حل دوم فرض کنید A پیشامد آن باشد که هیچ یک از این دو نفر به هدف نزنند. در این صورت مطلوب مسئله $P(A')$ است. چون به هدف زدن دو نفر

پیشامدهای مستقل هستند، بنابراین به هدف زدن آنها نیز دو پیشامد مستقل

هستند، پس $P(A) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$ ، بنابراین

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

۱۵۱۸- گزینه ۳ چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \left(\frac{1}{4} - P(A) \right) = \frac{1}{4} P(A) - P^2(A)$$

اگر فرض کنیم $P(A) = x$ آن گاه $x - x^2 = \frac{1}{4}$ حد اکثر مقدار

$$\text{عبارت } x - x^2 \text{ به ازای } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{4}}{2(-1)} = \frac{1}{8}$$

است با $\frac{1}{8}$ پس حد اکثر مقدار $P(A \cap B)$ برابر $\frac{1}{64}$ است.

۱۵۱۹- گزینه ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که مهره بیرون آمده از

کیسه اول سفید باشد و B پیشامد این باشد که مهره بیرون آمده از کیسه دوم

سفید باشد. در این صورت $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ توجه کنید

که پیشامدهای A و B مستقل اند. پس احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

۱۵۲۰- گزینه ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که در روز مورد نظر،

دانشجوی اول در کلاس حاضر باشد و B پیشامد این باشد که در روز مورد نظر،

دانشجوی دوم در کلاس حاضر باشد. در این صورت $P(A) = \frac{1}{8}$ و

$P(B) = \frac{1}{6}$ توجه کنید که پیشامدهای A و B مستقل اند، بنابراین احتمال

مورد نظر برابر است با

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{17}{24}$$

۱۵۲۱- گزینه ۳ ابتدا مقدار $P(A \cap B)$ را به دست می آوریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{4}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

اکنون مقدار $P(B)$ را به دست می آوریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{12}}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{12} \times \frac{8}{1} = \frac{2}{3}$$

۱۵۱۰- گزینه ۱ باید احتمال متمم این پیشامد را که عمل برای هر دو

ناموفق باشد، بیابیم.

$$\text{احتمال عدم موفقیت برای هر دو نفر} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

۱۵۱۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) + P(A') - P(B \cup A')}{P(A')} \\ = \frac{1 - P(B) + 1 - P(A) - P(B \cup A')}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{4}$$

۱۵۱۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$= (1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{5} = \frac{11}{12}$$

از طرف دیگر،

$$P(B|A \cup B') = \frac{P(B \cap (A \cup B'))}{P(A \cup B')}$$

$$= \frac{P(B) + P(A \cup B') - P(B \cup (A \cup B'))}{\frac{11}{12}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{11}{12} - 1}{\frac{11}{12}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{12}} = \frac{8}{11}$$

۱۵۱۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} P(A)$$

بنابراین

$$\frac{1}{6} P(B) = \frac{1}{4} P(A) \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{2}{3}$$

۱۵۱۴- گزینه ۲ اگر A را پیشامد مبتلا شدن فرد به بیماری و B را

پیشامد بهبود یافتن فرد مبتلا شده در نظر بگیریم، آن گاه

$$P(A) = \frac{1}{10}, \quad P(B|A) = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{10}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{60}$$

پس احتمال اینکه فردی از این جامعه به بیماری مبتلا شود، سپس بهبود یابد برابر $\frac{1}{60}$ است.

۱۵۱۵- گزینه ۱ اگر A را پیشامد «مضرب ۵ بودن عدد» و B را پیشامد

«زوج بودن عدد» در نظر بگیریم، آن گاه

$$n(A) = \frac{1}{5} \times 20 = 4, \quad n(A \cap B) = \frac{1}{10} \times 20 = 2$$

زیرا عددی که زوج و مضرب ۵ باشد، مضرب ۱۰ است. بنابراین

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۵۱۶- گزینه ۴ پیشامدهای A و B مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A \cap B = \{2, 5\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

پیشامدهای A و C مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A \cap C = \{2\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) \times P(C) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5}, \quad P(A) \times P(B) = \frac{6}{25} \neq P(A \cap B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{5}, \quad P(A) \times P(C) = \frac{6}{25} \neq P(A \cap C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{2}{5}, \quad P(B) \times P(C) = \frac{9}{25} \neq P(B \cap C)$$

بنابراین هیچ دوتایی از پیشامدهای A، B و C مستقل نیستند.

۱۵۲۶- گزینه ۳ چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

اگر فرض کنیم $P(A) = x$ ، آنگاه

$$\frac{2}{3} = x + \frac{3}{2}x - x\left(\frac{3}{2}x\right) \Rightarrow 9x^2 - 15x + 4 = 0$$

$$(3x-1)(3x-4) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = \frac{4}{3}$$

چون $0 \leq P(A) \leq 1$ ، پس $x = \frac{4}{3}$ غیر قابل قبول است، بنابراین $P(A) = \frac{1}{3}$.

۱۵۲۷- گزینه ۱ چون A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

فرض می‌کنیم $P(A) = x$ و در نتیجه

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} - x\left(\frac{1}{8} - x\right) = x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$$

حداقل مقدار عبارت $x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$ به ازای $x = -\frac{\frac{1}{8}}{2 \times 1} = \frac{1}{16}$ به دستمی‌آید که برابر است با $\left(\frac{1}{16}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{8} = \frac{31}{256}$.بنابراین حداقل مقدار $P(A \cup B)$ برابر $\frac{31}{256}$ است.۱۵۲۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $A = (A-B) \cup (A \cap B)$ و $A \cap B$ و $A-B$ ناسازگارند. بنابراین

$$P(A) = P((A-B) \cup (A \cap B)) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

بنابراین $P(A) - P(A-B) = P(A \cap B)$ و چون A و B مستقل از همهستند، پس $P(A) - P(A-B) = P(A) \times P(B)$.

۱۵۲۹- گزینه ۴ پیشامد A را تنها به مسافرت رفتن علی و پیشامد B را

تنها به مسافرت رفتن محسن تعریف می‌کنیم. در نتیجه

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{25}$$

اکنون باید $P(A \cap B')$ را حساب کنیم. می‌دانیم این دو پیشامد مستقل

هستند. در نتیجه

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = P(A)(1 - P(B))$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{25}) = \frac{1}{2} \times \frac{24}{25} = \frac{12}{25} = 48\%$$

۱۵۳۰- گزینه ۴ احتمال قبولی مهدی در ریاضی را با $P(A)$ و احتمال قبولیدر فیزیک را با $P(B)$ نشان می‌دهیم. با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$P(B \cap A') = \frac{1}{18}$$

می‌دانیم این دو پیشامد (قبولی در فیزیک و ریاضی) مستقل از یکدیگرند. در نتیجه

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A') = P(B)(1 - P(A)) = P(B)(1 - \frac{1}{6}) = \frac{1}{18}$$

بنابراین $P(B) = \frac{1}{45}$ ، در نتیجه $P(B') = 1 - P(B) = \frac{44}{45}$.

۱۵۲۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A \cap B \subset A \cup B \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B$$

بنابراین

$$P(A \cup B | A \cap B) = \frac{P((A \cup B) \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$

۱۵۲۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5} P(A \cap B)$$

بنابراین باید حداکثر و حداقل مقدار $P(A \cap B)$ را حساب کنیم. توجه کنید که

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - P(A \cup B) = \frac{49}{30} - P(A \cup B)$$

چون $P(A \cup B) \leq 1$ ، پس $P(A \cap B) \geq \frac{49}{30} - 1 = \frac{19}{30}$ ، همچنین $P(A \cap B) \leq P(A)$ ، در نتیجه حداکثر مقدار $P(A \cap B)$ برابر است با $\frac{4}{5}$ است. بنابراین $\frac{19}{30} \leq P(A \cap B) \leq \frac{4}{5}$. در نتیجه

$$\frac{6}{5} \times \frac{19}{30} \leq P(A|B) \leq \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{19}{25} \leq P(A|B) \leq \frac{24}{25}$$

بنابراین اختلاف بیشترین مقدار ممکن $P(A|B)$ و کمترین مقدار ممکن آن

$$\frac{24}{25} - \frac{19}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

۱۵۲۴- گزینه ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که دست کم یک دستیار

انتخاب شده باشد و B پیشامد این باشد که دقیقاً دو پزشک انتخاب شوند.

توجه کنید که A' پیشامد این است که هیچ دستیار انتخاب نشود، یعنی هر

چهار نفر از میان هفت نفر پزشک انتخاب شده‌اند. بنابراین

$$P(A') = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = \frac{5}{6}$$

از طرف دیگر، $A \cap B$ پیشامد این است که دو نفر پزشک و دو نفر دستیار

انتخاب شده باشند. بنابراین

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{7}{2} \binom{3}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{3}{10}$$

$$\text{در نتیجه } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{25}$$

۱۵۲۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$A \cap B = \{2\}, \quad A \cap C = \{2\}, \quad B \cap C = \{2, 5\}$$

از طرف دیگر

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{3}{5}, \quad P(C) = \frac{3}{5}$$

طبق قانون احتمال کل،

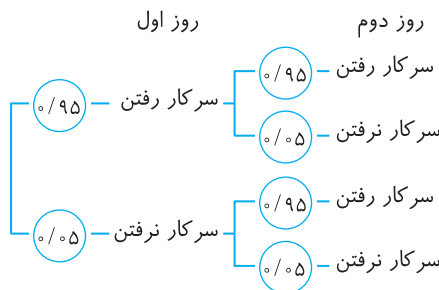
$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

گزینه ۱- ۱۵۳۷ فرض کنید B پیشامد «رو» آمدن سکه و A پیشامد سفید بودن همه مهره‌های خارج شده از ظرف باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{21} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{35} = \frac{1}{7} + \frac{2}{35} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۴- ۱۵۳۸ راه حل اول نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



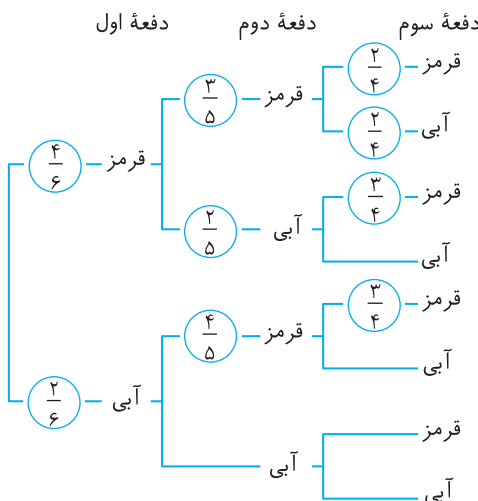
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با $0.95 \times 0.95 + 0.95 \times 0.05 + 0.05 \times 0.95 = 0.9975$

راه حل دوم اگر A را پیشامد سرکار نرفتن حاج داود در آن دو روز متوالی در نظر بگیریم: $P(A) = (1 - \frac{95}{100}) \times (1 - \frac{95}{100}) = 0.0025$. پس احتمال آنکه حاج

داود حداقل یک روز از آن دو روز را سرکار برود برابر است با

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.0025 = 0.9975$$

گزینه ۲- ۱۵۳۹ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$$

گزینه ۳- ۱۵۳۱ توجه کنید که در اینجا فضای نمونه‌ای

$S = \{ق ق, آ ق, ق آ, آ آ\}$ است. فرض کنید B_1 پیشامد این باشد که توپ دوم آبی و R_1 و B_1 به ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز و توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون R_1 و B_1 فضای نمونه‌ای S را افراز می‌کنند، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B_1) = P(R_1)P(B_1|R_1) + P(B_1)P(B_1|B_1)$$

$$= \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$

گزینه ۴- ۱۵۳۲ فرض کنید A پیشامد این باشد که توپی که در کیسه ۲

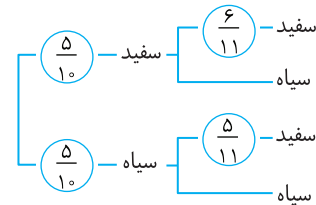
گذاشته‌ایم، سفید باشد و B پیشامد این باشد که توپی که از کیسه ۲ بیرون آورده‌ایم، سفید باشد. روشن است که $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

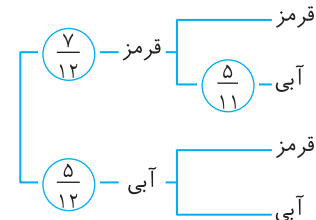
گزینه ۳- ۱۵۳۳ پیشامد اگر سفید بودن مهره آخر را با A نشان دهیم، با

توجه به نمودار درختی زیر می‌توان نوشت:

$$P(A) = \frac{5}{10} \times \frac{6}{11} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{11} = 0.5$$



گزینه ۴- ۱۵۳۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

گزینه ۴- ۱۵۳۵ فرض کنید B_i پیشامد انتخاب جعبه i ام، $i=1, 2, 3$

و A پیشامد سالم بودن لامپ انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. چون B_1 و B_2 و B_3 فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{8} = \frac{5}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{10}{36} + \frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{25}{36}$$

گزینه ۲- ۱۵۳۶ فرض کنید B پیشامد انتخاب جعبه اول برای افزودن ۳

مهره سیاه باشد. در این صورت B' پیشامد انتخاب جعبه دوم برای افزودن ۳ مهره سیاه است. همچنین فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهره انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم.

توجه کنید که اگر سه مهره سیاه به جعبه اول اضافه شود، این جعبه شامل ۵ مهره سفید و ۵ مهره سیاه می‌شود، پس احتمال سفید بودن مهره انتخابی از این جعبه

برابر $\frac{5}{10}$ می‌شود، یعنی $P(A|B) = \frac{5}{10}$ ، به طور مشابه $P(A|B') = \frac{2}{8}$.

۱۵۴۴- گزینه ۳ فرض کنید B این پیشامد باشد که فردا باران بیارد و A

این پیشامد باشد که فردا برق قطع شود. باید $P(A')$ را حساب کنیم. ابتدا $P(A)$ را به کمک قانون احتمال کل به دست می‌آوریم:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$= 0.8 \times 0.15 + (1 - 0.8) \times 0.5 = 0.12 + 0.1 = 0.22$$

در نتیجه

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.22 = 0.78$$

۱۵۴۵- گزینه ۴ توجه کنید که

احتمال انتخاب جعبه A احتمال انتخاب جعبه B

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \right) = \frac{3}{22} + \frac{1}{12} = \frac{29}{132}$$

احتمال زوج بودن مهره اول احتمال زوج بودن مهره دوم احتمال زوج بودن مهره اول احتمال زوج بودن مهره دوم

۱۵۴۶- گزینه ۳ فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهره انتخابی باشد و

B پیشامد آن باشد که مهره انتخابی جزء مهره‌های اولیه داخل ظرف باشد. در این صورت B' پیشامد آن است که مهره انتخابی جزء ۵ مهره سفید اضافه شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

چون مهره انتخابی از بین ۱۰ تا از مهره‌های اولیه و ۵ مهره اضافه شده انتخاب

شده است، پس $P(B) = \frac{10}{15}$ و $P(B') = \frac{5}{15}$. همچنین اگر مهره انتخابی از

مهره‌های اولیه باشد، احتمال سفید بودن آن برابر $\frac{5}{14}$ است و اگر از مهره‌های

اضافه شده باشد، احتمال سفید بودن آن برابر ۱ است.

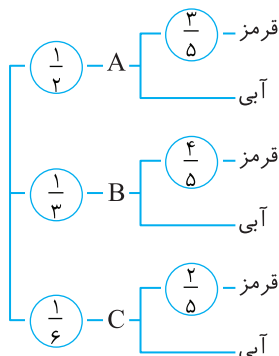
بنابراین

$$P(A|B) = \frac{5}{14}, \quad P(A|B') = 1$$

در نتیجه

$$P(A) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{5}{15} \times 1 = \frac{5}{21} + \frac{1}{3} = \frac{5+7}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

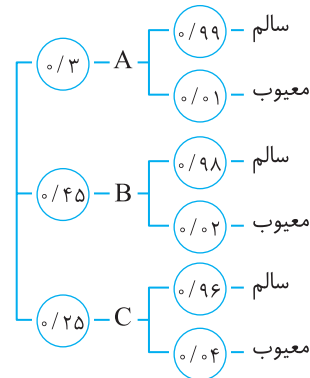
۱۵۴۷- گزینه ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{19}{30}$$

۱۵۴۰- گزینه ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید.



راه‌حل اول

$$P(\text{سالم}) = 0.3 \times 0.99 + 0.45 \times 0.98 + 0.25 \times 0.96 = 0.978$$

راه‌حل دوم اگر A را پیشامد معیوب بودن محصول را در نظر بگیریم:

$$P(A) = 0.3 \times 0.01 + 0.45 \times 0.02 + 0.25 \times 0.04 = 0.022$$

بنابراین احتمال سالم بودن این محصول برابر است با

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.022 = 0.978$$

۱۵۴۱- گزینه ۱ توجه کنید که

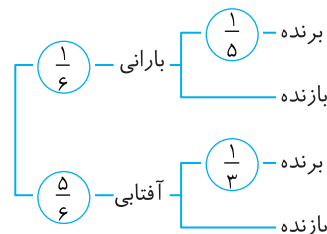
$P(\text{مهره انتخابی سفید})$

$$= P(\text{انتخاب جعبه اول} | \text{مهره انتخابی سفید}) P(\text{انتخاب جعبه اول})$$

$$+ P(\text{انتخاب جعبه دوم} | \text{مهره انتخابی سفید}) P(\text{انتخاب جعبه دوم})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{7+5} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{2+15+21} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{38} = \frac{7}{24} + \frac{15}{76} = \frac{17}{38}$$

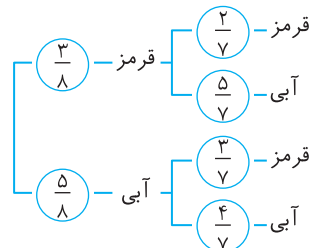
۱۵۴۲- گزینه ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$$

۱۵۴۳- گزینه ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



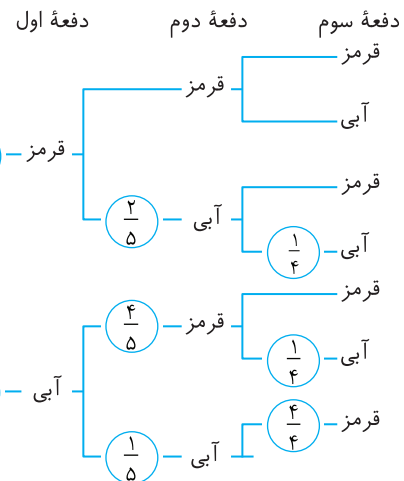
راه‌حل اول از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$P(\text{دست کم یکی آبی باشد}) = 1 - P(\text{هر دو قرمز باشند}) = 1 - \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28}$$

۱۵۴۸- گزینه ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{5}$$

۱۵۴۹- گزینه ۴ از احتمال متمم استفاده می‌کنیم، یعنی ابتدا احتمال این را

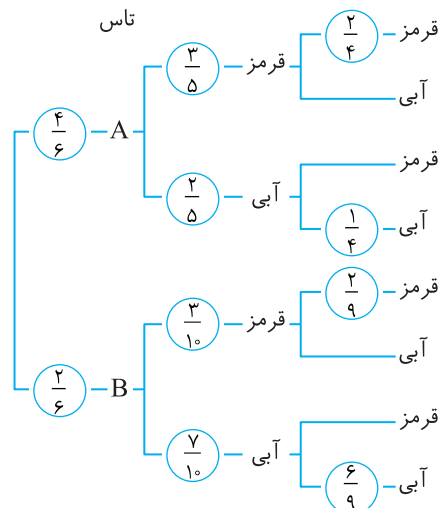
که رنگ مهره‌ها یکسان باشد، پیدا می‌کنیم و از ۱ کم می‌کنیم. حالا اگر بخواهیم رنگ مهره‌ها یکسان باشد یعنی اینکه یا هر دو مهره سبز باشد یا هر دو سفید:

$$P(\text{هر دو سبز}) + P(\text{هر دو سفید}) = P(\text{رنگ‌ها یکسان باشد})$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{8} = \frac{26}{80} = \frac{13}{40}$$

$$P(\text{رنگ‌ها متفاوت باشد}) = 1 - \frac{13}{40} = \frac{27}{40}$$

۱۵۵۰- گزینه ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{9}$$

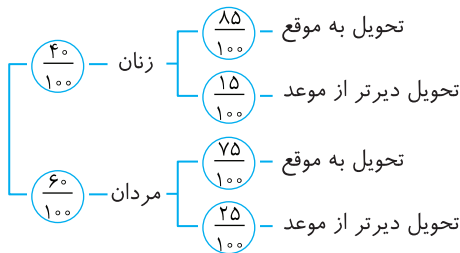
۱۵۵۱- گزینه ۲ فرض کنید R پیشامد قرمز بودن مهره و B پیشامد

آبی بودن مهره باشد. در این صورت، اگر A پیشامد این باشد که یکی از مهره‌ها

قرمز و دیگری آبی باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(R)P(A|R) + P(B)P(A|B) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

۱۵۵۲- گزینه ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{40}{100} \times \frac{15}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{21}{100}$$

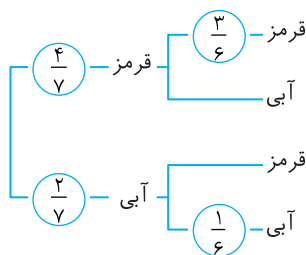
۱۵۵۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(\text{دو مهره همرنگ نباشند}) = 1 - P(\text{دو مهره همرنگ باشند})$$

بنابراین کافی است احتمال این را که دو مهره همرنگ باشند، حساب کنیم. توجه کنید که چون فقط یک مهره سبز در جعبه وجود دارد، امکان ندارد دو مهره سبز رنگ باشند. اکنون نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید. از روی این نمودار معلوم است که

$$P(\text{دو مهره همرنگ باشند}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.



۱۵۵۴- گزینه ۳ فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهره اول و A پیشامد

سفید بودن مهره دوم باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. چون B و B' فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند (توجه کنید B' پیشامد سیاه بودن مهره اول است)، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{30}{49}$$

توجه کنید که اگر مهره اول سفید باشد، مهره دوم از بین ۵ مهره سفید و ۲ مهره سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B) = \frac{5}{7}$ و اگر مهره اول سیاه باشد، مهره دوم

از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B') = \frac{4}{7}$.

۱۵۵۵- گزینه ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که عددهای برابر نیابند

(که از این‌ها (۱، ۳) و (۳، ۱) مطلوب‌اند)، B پیشامد این باشد که عددهای دو

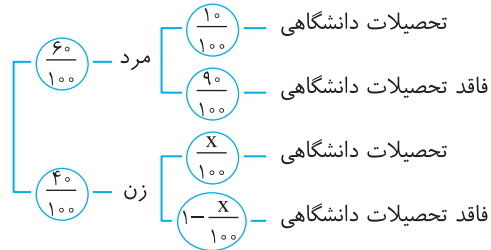
تاس برابر بیابند (که از اینها (۱، ۱) و سپس بار دیگر (۱، ۱) مطلوب‌اند) و C

پیشامد این باشد که مجموع نهایی برابر ۴ باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$

$$= \frac{30}{36} \times \frac{2}{30} + \frac{6}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

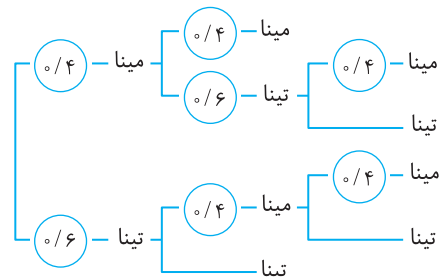
۱۵۵۶- گزینه ۲ فرض کنید X درصد زنانی باشند که تحصیلات دانشگاهی دارند، نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



با توجه به فرض مسئله،

$$\left(\frac{60}{100} \times \frac{10}{100}\right) + \left(\frac{40}{100} \times \frac{X}{100}\right) = \frac{92}{1000} \Rightarrow 0.06 + 0.004X = 0.092 \Rightarrow X = 8$$

۱۵۵۷- گزینه ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



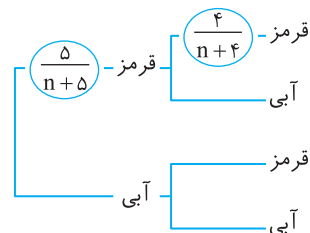
از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{10} \times \frac{4}{4} + \frac{6}{10} \times \frac{6}{6} = \frac{352}{1000} = \frac{44}{125}$$

۱۵۵۸- گزینه ۱ فرض کنید A_1, A_2, A_3 به ترتیب پیشامد این باشند که دانش آموز انتخاب شده در پایه دهم، یازدهم یا دوازدهم باشد و A پیشامد این باشد که این دانش آموز به کارهای هنری علاقه‌مند است. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) \\ = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{11}{12}$$

۱۵۵۹- گزینه ۲ فرض کنید تعداد مهره‌های آبی برابر n باشد. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{5}{n+5} \times \frac{4}{n+4} = \frac{2}{11} \Rightarrow (n+5)(n+4) = 11 \times 10 \Rightarrow n^2 + 9n - 90 = 0 \\ (\text{غ.ق.ق.}) \quad (n-6)(n+15) = 0 \Rightarrow n = 6, n = -15$$

۱۵۶۰- گزینه ۲ فرض کنید A, B و C به ترتیب پیشامد تیراندازی با این کمان‌ها باشند و D پیشامد اصابت تیر به هدف باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{85}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{8}{10} = \frac{255}{300} = \frac{17}{20}$$

۱۵۶۱- گزینه ۱

۱۵۶۲- گزینه ۲

۱۵۶۳- گزینه ۴

۱۵۶۴- گزینه ۱

۱۵۶۵- گزینه ۲ فرض کنید $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. در این صورت

$$\frac{3X_1 - 2 + \dots + 3X_n - 2}{n} = 3\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) - 2 = 3\bar{X} - 2 = 13$$

بنابراین $\bar{X} = 5$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{5X_1 + 2 + \dots + 5X_n + 2}{n} = 5\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) + 2 = 5\bar{X} + 2 = 27$$

۱۵۶۶- گزینه ۴ برای تعیین میانه، ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. سپس اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده وسط و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده وسط را به عنوان میانه برمی‌گزینیم. پس

$$3, 8, 10, 12, 14, 20 \Rightarrow m = \frac{10+12}{2} = 11$$

۱۵۶۷- گزینه ۴ ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم

5, 10, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 20

در نتیجه میانه داده‌ها برابر است با ۱۵. برای داده‌های قبل و بعد از میانه، میانه‌ها برابر هستند با ۱۳/۵ و ۱۷/۵:

$$5, 10, 12, \underbrace{13, 14}_{13.5}, 14, 15, 15 \quad 15, 16, 17, \underbrace{17, 18}_{17.5}, 18, 19, 20$$

۱۵۶۸- گزینه ۲ واریانس داده‌ها تنها زمانی صفر است که همگی برابر باشند. فرض کنید $X_1 = X_2 = \dots = X_n = a$. در نتیجه با افزودن سه عدد جدید، $\bar{X} = 6 = \frac{5a + 5 + 8 + 10}{8} = \frac{5a + 23}{8}$. بنابراین واریانس داده‌ها برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{6 \times (5-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{8} = \frac{6 + 4 + 16}{8} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}$$

۱۵۶۹- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. در نتیجه میانگین

داده‌های $2 - \frac{X_1}{4}, \dots, 2 - \frac{X_n}{4}$ برابر با $2 - \frac{\bar{X}}{4}$ است. بنابراین

$$\sigma_1^2 = \frac{\left(2 - \frac{X_1}{4} - 2 + \frac{\bar{X}}{4}\right)^2 + \dots + \left(2 - \frac{X_n}{4} - 2 + \frac{\bar{X}}{4}\right)^2}{n}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} \times \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n} \\ \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n} = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

همچنین با استدلال مشابه می‌توان دید

$$\sigma_1^2 = \frac{(X_1 - 2 - \bar{X} + 2)^2 + \dots + (X_n - 2 - \bar{X} + 2)^2}{n} \\ = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n} = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

بنابراین $\sigma_1 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

واریانس همه این داده‌ها برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{x})^2}{25} + \frac{(y_1 - \bar{x})^2 + (y_2 - \bar{x})^2 + \dots + (y_{10} - \bar{x})^2}{25}$$

$$= \frac{14 \times 15 + 7 \times 9 \times 10}{25} = \frac{210 + 63}{25} = \frac{273}{25} \Rightarrow \sigma = \frac{17}{5} = 3.4$$

۱۵۸۱- گزینه ۲ برای پیدا کردن تعداد عددهای مورد نظر می‌توانیم تعداد عددهایی را که در آن‌ها رقم ۵ و ۶ وجود ندارد از تعداد کل عددهای سه‌رقمی کم کنیم. تعداد عددهای سه‌رقمی که در آن‌ها رقم ۵ و ۶ وجود ندارد، برابر است با تعداد عددهای سه‌رقمی که می‌توان با رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷، ۸ و ۹ نوشت. تعداد این عددها برابر است با $7 \times 8 \times 8 = 448$. بنابراین تعداد عددهای سه‌رقمی که در آن‌ها ۵ یا ۶ وجود دارد برابر است با $1000 - 448 = 552$.

۱۵۸۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(n+1, 3) = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = (n+1)n(n-1)$$

بنابراین

$$\frac{P(n+1, 3)}{n+1} = 56 \Rightarrow \frac{(n+1)n(n-1)}{n+1} = 56$$

$$n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow (n-8)(n+7) = 0 \Rightarrow n = 8$$

۱۵۸۳- گزینه ۳ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه

n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است. بنابراین

$$8 \binom{n}{3} = \binom{n}{4} \Rightarrow \frac{8n!}{3!(n-3)!} = \frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$\frac{8n!}{3!(n-3)(n-4)!} = \frac{n!}{4 \times 4(n-4)!} \Rightarrow n-3 = 32 \Rightarrow n = 35$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی این مجموعه برابر است با

$$\binom{35}{2} = 595$$

۱۵۸۴- گزینه ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش 6×6 عضو دارد. فرض

کنید A پیشامد این باشد که عدد پرتاب اول دو برابر عدد پرتاب دوم باشد.

در این صورت $A = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$ بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

بنابراین $P(A') = 1 - P(A) = \frac{11}{12}$ احتمال مورد نظر برابر است با

۱۵۸۵- گزینه ۳ در اینجا $n(S) = \binom{10}{3}$ برای اینکه هیچ دو مهره‌ای

هم‌رنگ نباشند، باید از هر رنگ یک مهره خارج شود، یعنی

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{4} \quad n(A) = \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{5}{1}$$

۱۵۷۰- گزینه ۱ اگر به هر داده، $\bar{x}$ را اضافه کنیم، میانگین نیز به اندازه

$\bar{x}$ اضافه می‌شود اما انحراف معیار تغییر نمی‌کند. بنابراین

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \bar{x} + \bar{x} = 2\bar{x}, \quad CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{2\bar{x}} = \frac{1}{2} CV_{\text{قدیم}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0.6$$

۱۵۷۱- گزینه ۱

۱۵۷۲- گزینه ۲

۱۵۷۳- گزینه ۳

۱۵۷۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع نمرات ۸ درس}}{8} = 12/5$$

$$\text{مجموع نمرات ۸ درس} = 12/5 \times 8 = 100$$

$$\bar{x}' = \frac{100 + 14 + 16}{10} = \frac{130}{10} = 13$$

۱۵۷۵- گزینه ۳ توجه کنید که $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ بنابراین

$$\bar{x}' = \frac{(x_1 + \bar{x}) + (x_2 + 2\bar{x}) + \dots + (x_n + n\bar{x})}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \bar{x} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n} \right)$$

$$= \bar{x} + \bar{x} \frac{n(n+1)}{2n} = \bar{x} + \left(\frac{n+1}{2} \right) \bar{x} = \bar{x} \left(\frac{n+3}{2} \right)$$

۱۵۷۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\bar{x} = \frac{5+2+8}{3} = \frac{15}{3} = 5, \quad \sigma^2 = \frac{(5-5)^2 + (2-5)^2 + (8-5)^2}{3} = 6$$

۱۵۷۷- گزینه ۱ ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{10 + 3 \times 12 + 2 \times 13}{6} = 12, \quad \sigma = \sqrt{\frac{(10-12)^2 + 3 \times 0 + 2 \times 1}{6}} = 1$$

۱۵۷۸- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\bar{x} = \frac{8+6+5+4+2}{5} \Rightarrow \bar{x} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(8-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (2-5)^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2, \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = \frac{2}{5}$$

۱۵۷۹- گزینه ۳ اگر انحراف معیار داده‌ها برابر با صفر باشد، آن‌گاه داده‌ها

با هم برابرند، پس

$$x_1 = x_2 = x_3 = 10$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + 20}{4} = \frac{10 + 10 + 10 + 20}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$$

۱۵۸۰- گزینه ۳ می‌دانیم واریانس پانزده داده اول برابر ۱۴ و واریانس ده داده

دوم برابر ۷/۹ است. از طرف دیگر میانگین هر دو گروه یکسان است، بنابراین

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{x})^2}{15} = 14$$

$$\frac{(y_1 - \bar{x})^2 + (y_2 - \bar{x})^2 + \dots + (y_{10} - \bar{x})^2}{10} = 7/9$$

توجه کنید که

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \left((-2)^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + (a-1)^2 \right) - \left(\frac{(-2)+1+2+(-1)+(a-1)}{5} \right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{10 + (a-1)^2}{5} - \frac{(a-1)^2}{25} \Rightarrow \sigma^2 = 2 + \frac{4(a-1)^2}{25}$$

$$\sigma^2 = \frac{4(a-1)^2}{25} \Rightarrow (a-1)^2 = 25 \Rightarrow a-1 = \pm 5 \Rightarrow a = 15 \text{ یا } a = 5$$

۱۵۹۱- گزینه ۲ هر تابع به صورت

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

مطلوب مسئله است که در آن $d \neq 4$ و $c \neq 3$ ، $b \neq 2$ ، $a \neq 1$ برای a, b, c و d هر کدام سه انتخاب داریم و تعداد توابع مورد برابر با $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ است.

۱۵۹۲- گزینه ۲ این دانش آموز یا باید چهار تا از پنج سؤال نخست را انتخاب کند و شش سؤال از هشت سؤال آخر، یا پنج سؤال نخست را انتخاب کند و پنج تا از هشت سؤال آخر. بنابراین تعداد انتخاب‌های او برابر است با

$$\binom{5}{4} \binom{8}{6} + \binom{5}{5} \binom{8}{5} = 196$$

۱۵۹۳- گزینه ۲ هرطور که دو نقطه از یک خط و دو نقطه از خط دیگر

انتخاب کنیم، می‌توانیم یک چهارضلعی که رأس‌هایش این نقطه‌ها هستند رسم کنیم. بنابراین تعداد چهارضلعی‌های مورد نظر برابر است با $\binom{5}{2} \binom{4}{2} = 60$.

۱۵۹۴- گزینه ۲ چون می‌دانیم حاصل جمع عددهای ظاهر شده عددی

اول است، پس فضای نمونه‌ای آزمایش به صورت زیر است

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$$

پیشامد مطلوب که در آن مجموع عددهای ظاهر شده ۷ است به شکل $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ است. بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۱۵۹۵- گزینه ۴ در اینجا $n(S) = 2^5$. فرض کنید A پیشامد مورد نظر

باشد. در این صورت باید از پنج جای زیر حداکثر دو جا را برای نوشتن «ر» انتخاب کنیم. مثلاً

$\overline{r} \overline{r} \overline{r} \overline{r} \overline{r}$ یا $\overline{r} \overline{r} \overline{r} \overline{r} r$ یا $\overline{r} \overline{r} \overline{r} r \overline{r}$ یا $\overline{r} \overline{r} r \overline{r} \overline{r}$ یا $\overline{r} r \overline{r} \overline{r} \overline{r}$ یا $r \overline{r} \overline{r} \overline{r} \overline{r}$

$$n(A) = \binom{5}{2} + \binom{5}{1} + \binom{5}{0} = 10 + 5 + 1 = 16$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{2^5} = \frac{1}{2}$$

۱۵۹۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A' \cap B' \subseteq A' \cup B' \Rightarrow (A' \cup B') \cap (A' \cap B') = A' \cap B'$$

بنابراین

$$P(A' \cup B' | A' \cap B') = \frac{P((A' \cup B') \cap (A' \cap B'))}{P(A' \cap B')} = \frac{P(A' \cap B')}{P(A' \cap B')} = 1$$

۱۵۸۶- گزینه ۱ توجه کنید که $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$. از طرف دیگر،

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{3}{4} = P(A) + \frac{1}{8} - P(A \cap B)$$

$$P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

بنابراین

۱۵۸۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{9}$$

۱۵۸۸- گزینه ۲ فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهره اول و A پیشامد

سفید بودن مهره دوم باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم چون B و B' فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند (توجه کنید B' پیشامد سیاه بودن مهره اول است)، طبق قانون احتمال کل،

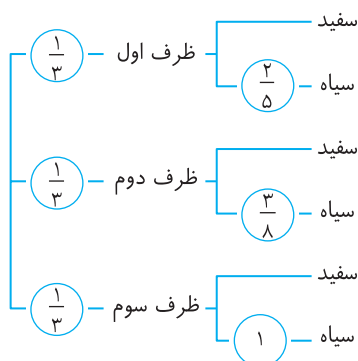
$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{22}{35}$$

توجه کنید که اگر مهره اول سفید باشد، مهره دوم از بین پنج مهره سفید و دو مهره سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B) = \frac{5}{7}$ و اگر مهره اول سیاه باشد، مهره دوم

از بین چهار مهره سفید و سه مهره سیاه انتخاب می‌شود. پس

$$P(A|B') = \frac{4}{7}$$

۱۵۸۹- گزینه ۱ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{71}{120}$$

۱۵۹۰- گزینه ۴ می‌دانیم اگر از هر یک از داده‌ها ۱۰ واحد کم کنیم،

واریانس تغییر نمی‌کند، پس باید مقدار a را طوری پیدا کنیم که واریانس داده‌های $-2, 1, 2, -1, a-10$ برابر ۶ شود.

۱۶۰۲- گزینه ۲ توجه کنید که $n(S) = \binom{12}{3}$ باید از هر رنگ

یک مهره انتخاب کنیم. در نتیجه اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن گاه

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{11}$$

تجربی - ۹۶

۱۶۰۳- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که $n(S) = \binom{10}{2}$ برای

اینکه دو مهره هم رنگ نباشند باید یکی سفید یکی سیاه، یکی سفید یکی قرمز، یا یکی سیاه و یکی قرمز باشد. بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن گاه

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \binom{5}{1} + \binom{2}{1} \binom{5}{1} = 31$$

$$P(A) = \frac{31}{45}$$

راه حل دوم اگر پیشامد مورد نظر A باشد، A' پیشامد این است که هر دو مهره هم رنگ باشند. بنابراین

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \frac{3+1+10}{45} = \frac{31}{45}$$

تجربی - ۹۴

۱۶۰۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $n(S) = 5! = 120$ فرض کنید ابتدا

عدد زوج خارج شود. در این صورت امکان ندارد که دو عدد فرد کنار هم نباشند.

ف ز ف ز ف ز
اگر ابتدا عددی فرد خارج شود، عددهای فرد را به ۳! طریق می توان خارج کرد و عددهای زوج را هم به ۲! طریق.

ف ز ف ز ف ز
بنابراین، اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن گاه $n(A) = 3! \times 2! = 12$ پس

$$P(A) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

تجربی - ۹۲

۱۶۰۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $n(S) = 2^2 \times 6 = 24$ اگر A

پیشامد مورد نظر باشد، آن گاه $A = \{(3, r, r), (3, r, p), (3, p, r), (6, r, r), (6, r, p), (6, p, r)\}$

خارج از کشور تجربی - ۹۱
پس $n(A) = 6$ و $P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۶۰۶- گزینه ۴
۱۶۰۷- گزینه ۱ فرض می کنیم $y_i = 2x_i - 7$ بنابراین

$$CV_y = \frac{r}{2} CV_x \quad \frac{\bar{y} - 2\bar{x} - 7}{\sigma_y = 2\sigma_x} \rightarrow \frac{2\sigma_x}{2\bar{x} - 7} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times \frac{r}{2}$$

$$4\bar{x} = 6\bar{x} - 21 \Rightarrow \bar{x} = \frac{21}{2}$$

اکنون از اینکه $\bar{x} = \frac{21}{2}$ به دست می آید

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{20}}{20} = \frac{21}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 210$$

ریاضی - ۸۶

۱۵۹۷- گزینه ۴ از تساوی $P(B') = 3P(A')$ نتیجه می شود

$$1 - P(B) = 3(1 - P(A)) \Rightarrow 1 - P(B) = 3 - 3P(A) \Rightarrow P(B) = 3P(A) - 2$$

در تساوی فوق به جای $P(A)$ قرار می دهیم $2P(B)$ و نتیجه می شود

$$P(B) = 6P(B) - 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

پس $P(A) = \frac{4}{5}$ و چون A و B مستقل از هم هستند، در نتیجه

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{8}{25}$$

۱۵۹۸- گزینه ۴ فرض کنید A_1 ، A_2 و A_3 به ترتیب پیشامد این

باشند که دانش آموز انتخاب شده در پایه دهم، یازدهم یا دوازدهم است و A پیشامد این باشد که این دانش آموز به کارهای هنری علاقه مند است. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) \\ = 0/4 \times 0/2 + 0/3 \times 0/4 + 0/3 \times 0/35 = 0/35$$

۱۵۹۹- گزینه ۲ فرض کنید A پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی باشد و

B پیشامد آن باشد که لامپ انتخابی به جعبه اول تعلق داشته باشد. در این صورت B' پیشامد تعلق این لامپ به جعبه دوم است. باید $P(A)$ را حساب کنیم.

طبق قانون احتمال کل، $P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$ چون در جعبه جدید ۸ لامپ از جعبه اول و ۶ لامپ از جعبه دوم است، پس

$$P(B) = \frac{8}{14} \text{ و } P(B') = \frac{6}{14}$$

انتخابی از جعبه اول برابر $\frac{4}{24}$ و احتمال معیوب بودن یک لامپ انتخابی از جعبه

دوم برابر $\frac{2}{15}$ است، پس $P(A|B) = \frac{4}{24}$ و $P(A|B') = \frac{2}{15}$ در نتیجه

$$P(A) = \frac{8}{14} \times \frac{4}{24} + \frac{6}{14} \times \frac{2}{15} = \frac{2}{21} + \frac{2}{35} = \frac{10+6}{105} = \frac{16}{105}$$

۱۶۰۰- گزینه ۱ چون میانگین ۹ داده آماری برابر ۸ است و داده جدید نیز

برابر ۸ است، پس میانگین کل ۱۰ داده نیز برابر ۸ است (زیرا مجموع ۹ داده برابر $9 \times 8 = 72$ است، پس مجموع آن ها به همراه داده جدید برابر ۸۰ می شود،

بنابراین میانگین کل ۱۰ داده برابر $\frac{80}{10} = 8$ است). چون انحراف معیار ۹ داده

برابر ۲ است، پس واریانس این داده ها برابر $2^2 = 4$ است. از فرمول

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)$$

$$4 = \frac{1}{9} ((x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 + \dots + (x_9 - 8)^2)$$

$$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 + \dots + (x_9 - 8)^2 = 4 \times 9 = 36$$

$$10 \text{ داده } \sigma^2 = \frac{1}{10} ((x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 + \dots + (x_{10} - 8)^2)$$

$$= \frac{1}{10} (((x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 + \dots + (x_9 - 8)^2) + (x_{10} - 8)^2)$$

$$= \frac{1}{10} (36 + (x_{10} - 8)^2) = \frac{36}{10} = \frac{9}{2.5}$$

۱۶۰۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $n(S) = 6 \times 6 = 36$ از طرف دیگر،

اگر پیشامد مورد نظر A باشد، آن گاه

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)\}$$

بنابراین $n(A) = 9$ ، در نتیجه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

تجربی - ۹۷

۱۶۰۸- گزینه ۲ داده‌ها را بدون در نظر گرفتن X مرتب می‌کنیم:

$$۵۰, ۶۳, ۶۴, ۶۵, ۶۶, ۷۰, ۷۷$$

در حال حاضر میانه ۶۵ است. اگر عدد X را خود ۶۵ در نظر بگیریم،

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{۵۰+۶۳+۶۴+۶۵+۶۶+۷۰+۷۷}{۸} \\ &= ۶۵ + \frac{-۱۵-۲-۱+۰+۰+۱+۵+۱۲}{۸} \\ &= ۶۵ + \frac{-۱۸+۱۸}{۸} \Rightarrow \bar{x} = ۶۵\end{aligned}$$

پس $x = ۶۵$ قابل قبول است. خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۶۰۹- گزینه ۱ ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌های X_i را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{۱+۲+۳+۴+۵}{۵} = ۳, \quad \bar{x^2} = \frac{۱+۴+۹+۱۶+۲۵}{۵} = ۱۱ \\ \sigma_x^2 &= ۱۱ - (۳)^2 = ۲ \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{۲}\end{aligned}$$

اکنون برای داده‌های u_i به دست می‌آید

$$\bar{u} = ۱۲\bar{x} + ۶ = ۱۲ \times ۳ + ۶ = ۴۲, \quad \sigma_u = ۱۲ \times \sigma_x = ۱۲\sqrt{۲}$$

$$(CV)_u = \frac{\sigma_u}{\bar{u}} = \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۴۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۷} \approx \frac{۲ \times ۱/۴}{۷} = ۰/۴$$

ریاضی - ۹۵

۱۶۱۰- گزینه ۲ می‌دانیم واریانس ۱۵ داده اول برابر ۱۲ و واریانس ۱۰

داده دوم برابر ۷/۶ است. بنابراین

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{۱۵} = ۱۲$$

$$\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}{۱۰} = ۷/۶$$

بنابراین از آنجا که $\bar{x} = \bar{y}$ ، واریانس همه این داده‌ها برابر است با

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)}{۲۵} \\ &+ \frac{((y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2)}{۲۵} \\ &= \frac{۷۶+۱۸۰}{۲۵} = \frac{۲۵۶}{۲۵} \Rightarrow \sigma = \frac{۱۶}{۵} = ۳/۲\end{aligned}$$

ریاضی - ۸۹

۱۶۱۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $n(S) = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$. باید دو مهره

از یک رنگ و یک مهره از رنگ دیگر انتخاب کنیم. بنابراین اگر پیشامد مورد

نظر A باشد، آن‌گاه

$$n(A) = \binom{۵}{۲} \binom{۵}{۱} + \binom{۳}{۲} \binom{۷}{۱} + \binom{۲}{۲} \binom{۸}{۱} = ۷۹$$

در نتیجه $P(A) = \frac{۷۹}{۱۲۰}$. خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱۶۱۲- گزینه ۴ توجه کنید که $P(A) = ۰/۹$ و $P(B) = ۰/۸$. چون

پیشامدهای A و B مستقل اند، پس

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= ۰/۹ + ۰/۸ - ۰/۹ \times ۰/۸ = ۱/۷ - ۰/۷۲ = ۰/۹۸\end{aligned}$$

تجربی - ۹۵

۱۶۱۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $n(S) = \binom{۱۴}{۴}$. اگر پیشامد مورد نظر

$$n(A) = \binom{۲}{۱} \binom{۷}{۲} \binom{۵}{۱} + \binom{۲}{۱} \binom{۷}{۳} = ۲۸۰$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{۲۸۰}{\binom{۱۴}{۴}} = \frac{۴۰}{۱۴۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۶۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که $n(S) = \binom{۹}{۳} = ۸۴$. باید سه مهره از ۴

مهره سفید یا سه مهره از ۵ مهره سیاه انتخاب کنیم. بنابراین اگر پیشامد مورد نظر

$$n(A) = \binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۴ + ۱۰ = ۱۴$$

$$P(A) = \frac{۱۴}{۸۴} = \frac{۱}{۶}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۶۱۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $n(S) = \binom{۱۱}{۳}$. فرض کنید پیشامد

مورد نظر A باشد. در این صورت A' پیشامد این است که هیچ کدام از موش‌ها سفید نباشد، یعنی هر سه موش سیاه هستند. بنابراین

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = 1 - \frac{۴}{۳۳} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۶۱۶- گزینه ۲ ابتدا میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۸۰+۸۱+۸۵+۹۲+۹۴+۹۶+۹۷+۱۰۰+۱۰۰+۱۰۰+۱۰۳+۱۰۴+۱۰۸}{۱۲} = ۹۵$$

اگر داده‌ها را سه برابر کنیم و سپس با -۴۰ جمع کنیم، میانگین هم سه برابر شده و با -۴۰ جمع می‌شود. در نتیجه $۳ \times ۹۵ - ۴۰ = ۲۴۵$ جدید $\bar{x}$.

ریاضی - ۹۲

۱۶۱۷- گزینه ۴ با توجه به $n = ۲۵$ ، $\bar{x} = ۳۰$ و $\sigma = ۸$

$$۶۴ = \frac{\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها}}{۲۵}$$

$$\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها} = ۲۵ \times ۶۴ = ۱۶۰۰$$

از طرفی داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ نیز دارای میانگین ۳۰ هستند. در نتیجه

x_i	۱۰	۱۵	۴۵	۵۰
$x_i - ۳۰$	-۲۰	-۱۵	۱۵	۲۰

مجموع مربعات اختلاف از میانگین داده‌های دور افتاده برابر است با

$$۴۰۰ + ۲۲۵ + ۲۲۵ + ۴۰۰ = ۱۲۵۰$$

اکنون واریانس ۲۱ داده باقی مانده به صورت زیر به دست می آید

$$\sigma^2 = \frac{64 \times 25 - 1250}{25 - 4} = \frac{1600 - 1250}{21} = \frac{350}{21} = \frac{50}{3} \approx 16.66$$

تجربی - ۹۳

۱۶۱۸- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا میانگین داده های جدید را به دست می آوریم:

$$\bar{y} = \frac{18 \times 25 + 20 + 27 + 28}{18 + 3} \Rightarrow \bar{y} = 25$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{n-1} - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$= \frac{18 \times 9 + (20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 + (28 - 25)^2}{21} = \frac{200}{21} \approx 9.52$$

دقت کنید که برای ۱۸ داده اولیه مجموع مربع اختلاف مقادیر داده ها از میانگین برابر 18×9 است.

راه حل دوم ابتدا میانگین داده های جدید را به دست می آوریم

$$\bar{y} = \frac{18 \times 25 + 20 + 27 + 28}{18 + 3} \Rightarrow \bar{y} = 25$$

برای محاسبه واریانس از فرمول زیر کمک می گیریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 9 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{18} - 625$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 18 \times 634 = 11412$$

بنابراین مجموع مربعات داده های قبلی برای ۱۱۴۱۲ است. مجموع مربعات داده های

جدید برابر است با $A = 11412 + 20^2 + 27^2 + 28^2 = 13325$. در نتیجه

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{A}{21} - (25)^2 = \frac{13325}{21} - 625 \approx 9.52$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۶۱۹- گزینه ۴ میانگین ۳ داده ۱۶، ۲۴ و ۲۶ برابر است با

$$\frac{16 + 24 + 26}{3} = 22$$

واریانس آن ها صفر است پس تمام آن ها با هم برابرند و ۲۲ هستند.

بنابراین واریانس این ۱۴ داده برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{(22 - 22)^2 + (22 - 22)^2 + \dots + (22 - 22)^2}{14}$$

$$+ \frac{(16 - 22)^2 + (24 - 22)^2 + (26 - 22)^2}{14} = \frac{36 + 4 + 16}{14} = 4$$

بنابراین انحراف معیار برابر $\sigma = 2$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

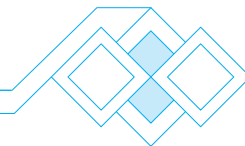
۱۶۲۰- گزینه ۱ برای مقایسه دقت عمل این دو دستگاه کافی است که

ضریب تغییرات آن ها را مقایسه کنیم

$$\begin{cases} CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{3/6}{150} = 0.024 \\ CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{3/84}{160} = 0.024 \end{cases} \Rightarrow CV_A = CV_B$$

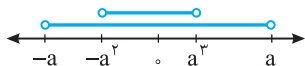
با توجه به برابری ضریب تغییرات دو دستگاه A و B، دقت عمل هر دو پیرامون میانگین یکسان است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵



۱۶۲۷- گزینه ۳ چون $0 < a < 1$ ، پس $a^3 < a$ و $-a^2 < -a$ ، بنابراین

$$(-a, a) \cap (-a^2, a^3) = (-a^2, a^3)$$



۱۶۲۸- گزینه ۲ مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ به شکل زیر هستند:

$$A_1 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}], A_2 = [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}], \dots, A_n = [\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+1}]$$

واضح است که مجموعه A_n شامل همه مجموعه‌های دیگر است. یعنی همه مجموعه‌های دیگر زیرمجموعه مجموعه A_n هستند. پس اجتماع همه این مجموعه‌ها همان A_n است.

۱۶۲۹- گزینه ۴ از تساوی $(-1, 1] \cap [a, b) = [0, 1]$ معلوم می‌شود $a = 0$

و $b \geq 1$. از تساوی $(-1, 1] \cup [a, b) = (-1, 4)$ معلوم می‌شود $b = 4$. بنابراین

$$a + b = 4$$

۱۶۳۰- گزینه ۴ اشتراک این دو بازه فقط زمانی تک‌عضوی است که ابتدای

بازه $[-2a+1, +\infty)$ بر انتهای بازه $(-\infty, a+4]$ منطبق باشد. در نتیجه

$$-2a+1 = a+4 \Rightarrow a = -1$$

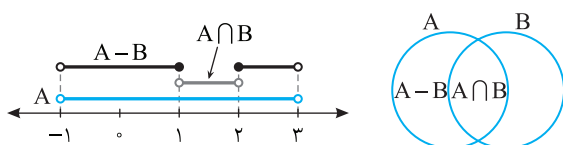
۱۶۳۱- گزینه ۳ می‌دانیم عضوهای A کوچک‌تر از یا مساوی ۲ هستند

و مجموعه مورد نظر شامل اعضای A نیست. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴)

رد می‌شوند. اکنون دقت کنید که $B - A = (0, 4) - [-2, 2] = (2, 4)$.

۱۶۳۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A - B = A - (A \cap B) = (-1, 3) - (-1, 2) = (-1, 1] \cup [2, 3)$$



۱۶۳۳- گزینه ۲ چون a عضو بازه است، پس $2a-1 < a < 3-3a$ از

ناابرابری $2a-1 < a$ نتیجه می‌شود $a < 1$ و از ناابرابری $a < 3-3a$ نتیجه می‌شود

$a < \frac{3}{4}$. بنابراین باید $a < \frac{3}{4}$. اکنون توجه کنید که شرط اینکه $(2a-1, 3-3a)$

بازه باشد این است که $2a-1 < 3-3a$ ، یعنی $a < \frac{4}{5}$ ، که اگر $a < \frac{3}{4}$ ، این شرط

هم برقرار است. بنابراین مجموعه مقادیر ممکن a بازه $(-\infty, \frac{3}{4})$ است.

۱۶۳۴- گزینه ۱ توجه کنید که طول بازه $(a-5, 2a+1)$ برابر است با

$$(2a+1) - (a-5) = a+6$$

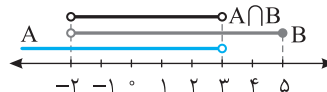
از طرف دیگر طول بازه $(a-6, 3a-1)$ برابر است با

$$(3a-1) - (a-6) = 2a+5$$

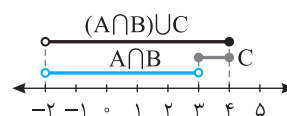
چون $a \leq -2$ ، پس $2a \leq -4$ و در نتیجه $2a+5 \leq 1$. پس حداکثر طول بازه

مورد نظر برابر ۱ است.

۱۶۲۱- گزینه ۴ مجموعه $A \cap B$ به کمک شکل زیر پیدا می‌شود:



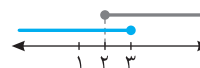
پس $A \cap B = (-2, 3)$. اجتماع دو مجموعه $A \cap B$ و C به شکل زیر است:



یعنی $(A \cap B) \cup C = (-2, 4)$.

۱۶۲۲- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر $(-\infty, 3) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}$ ، بنابراین

می‌خواهیم $\mathbb{R} - (1, 4]$ را پیدا کنیم که حاصل آن $(-\infty, 1] \cup (4, +\infty)$ است.



۱۶۲۳- گزینه ۲ عدد $\frac{1}{4}$ باید از $\frac{1}{n+3}$ بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+3} < \frac{1}{4} \Rightarrow n+3 > 4 \Rightarrow n > 1$$

عدد $\frac{1}{4}$ نباید از $\frac{1}{n+1}$ بیشتر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow n+1 \leq 4 \Rightarrow n \leq 3$$

بنابراین عدد طبیعی n می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۱۶۲۴- گزینه ۳ نقطه وسط پاره‌خط، متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه

است، یعنی

$$\frac{2a^2+1+(-a^2)}{2} = \frac{a^2+1}{2} = 5 \Rightarrow a^2 = 9$$

بنابراین بازه مورد نظر $[-9, 19]$ است و طول این بازه برابر است با

$$19 - (-9) = 28$$

۱۶۲۵- گزینه ۳ از روی شکل زیر معلوم است که باید

$$\begin{cases} a+3 \leq -1 \\ b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -4 \\ b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \geq 4 \\ b \geq 1 \end{cases}$$

بنابراین $b-a \geq 1+4=5$. در ضمن اگر $a=-4$ و $b=1$ ، شرط داده شده در

مسئله برقرار است.



۱۶۲۶- گزینه ۱ طول بازه $(a, b+2)$ برابر است با $b+2-a=b-a+2$

و طول بازه $(2a-1, 2b+3)$ برابر است با

$$2b+3 - (2a-1) = 2(b-a+2)$$

بنابراین طول بازه $(a, b+2)$ نصف طول بازه $(2a-1, 2b+3)$ است.

حالت (۳)	حالت (۲)	حالت (۱)
$\emptyset$	$(2a-1, a+2]$	$(0, a+2]$
$A \cap B$		

حالت (۱) قابل قبول نیست، زیرا در این حالت $A \cap B \not\subseteq (1, 3]$ در حالت (۲) باید $2a-1 \leq 3$ و $a+2 \leq 3$ از نابرابری اول به دست می آید $a \geq 1$ و از نابرابری دوم به دست می آید $a \leq 1$ پس $a=1$. در حالت (۳) باید $2a-1 \geq a+2$ و در نتیجه $a \geq 3$. در این حالت اشتراک A و B برابر تهی است که زیرمجموعه $(1, 3]$ است. پس $a \in [3, +\infty) \cup \{1\}$.

گزینه ۴ - ۱۶۴۱ چون A نامتناهی است و $A \subseteq B$ ، پس B هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعه دیگری نامتناهی است. یعنی $A' \cup B$ نامتناهی است.

گزینه ۱ - ۱۶۴۲ B نامتناهی است، پس B' می تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون A متناهی است، پس $A \cap B'$ متناهی است. همچنین چون B نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه ای نامتناهی است. یعنی $A' \cup B$ و $A \cup B$ نامتناهی هستند. توجه کنید که چون B نامتناهی است، پس مجموعه مرجع هم نامتناهی است. در نتیجه A' نامتناهی است. پس متناهی یا نامتناهی بودن $A' \cap B$ مشخص نیست.

گزینه ۲ - ۱۶۴۳ توجه کنید که $B = \{3, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$ ، $C = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, \dots\}$

بنابراین $B \cap C = \{3, 4, 6, 8, 9, \dots\}$ و در نتیجه $A - (B \cap C) = \{1, 5\}$.

گزینه ۱ - ۱۶۴۴ **راه حل اول** توجه کنید که $|x-5| > 3 \Rightarrow \begin{cases} x-5 > 3 \\ x-5 < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < 2 \end{cases}$

بنابراین $A = \{\dots, 0, 1, 9, 10, \dots\}$. در نتیجه $A' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. یعنی $n(A') = 7$.

راه حل دوم چون $A = \{x \mid |x-5| > 3\}$ ، پس $A' = \{x \mid |x-5| \leq 3\}$.

از نابرابری $|x-5| \leq 3$ نتیجه می شود $-3 \leq x-5 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8$

مجموعه مرجع $\mathbb{Z}$ است، پس $A' = \{2, 3, \dots, 8\}$ ، بنابراین $n(A') = 7$.

گزینه ۴ - ۱۶۴۵ توجه کنید که $\begin{cases} n(A) + n(B') = 17 \\ n(B) + n(A') = 13 \end{cases} \Rightarrow n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = 30$
 $n(U) + n(U) = 30 \Rightarrow n(U) = 15$

بنابراین $n(C) + n(C') = n(U) = 15$

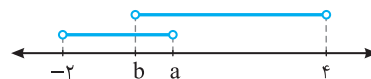
گزینه ۳ - ۱۶۴۶ توجه کنید که $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

بنابراین $n(A \cup B) + n(A \cap B) = 2n(B) + n(B) \Rightarrow 24 = 3n(B) \Rightarrow n(B) = 8$

گزینه ۱ - ۱۶۴۷ توجه کنید که $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $16 = 24 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 8$

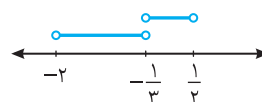
از طرف دیگر، $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
 $16 = n(A - B) + 8 + 3 \Rightarrow n(A - B) = 16 - 11 = 5$

گزینه ۴ - ۱۶۳۵ با توجه به فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می شود $(b, 4) \cap [-2, a) = (b, a)$



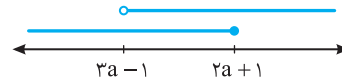
بنابراین $a = \frac{1}{3}$ و $b = -\frac{1}{3}$ اکنون می توان نوشت

$$(b, a) \cup (-2a-1, b) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cup (-2, -\frac{1}{3}) = (-2, \frac{1}{3}) - \{-\frac{1}{3}\}$$



گزینه ۱ - ۱۶۳۶ چون اشتراک دو بازه از عدد -2 شروع می شود و $a < a+2$ ، پس $a+2 = -2$ ، یعنی $a = -4$. بنابراین تساوی داده شده به صورت $[-4, 2] \cap [-2, b] = [-2, 1]$ است. چون اشتراک در سمت چپ به عدد 1 ختم شده است و $1 < 2$ ، پس $b = 1$. در نتیجه $a - b = -5$.

گزینه ۳ - ۱۶۳۷ از روی شکل زیر معلوم می شود که $(-\infty, 2a+1] \cup (3a-1, +\infty) = \mathbb{R}$ وقتی برقرار است که $3a-1 \leq 2a+1$ ، یعنی $a \leq 2$.



گزینه ۳ - ۱۶۳۸ در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه مجموعه ای تک عضوی می شود.

حالت اول $1-2a = -3 \Rightarrow a = 2$

حالت دوم $1+2a = -5 \Rightarrow a = -3$

اکنون توجه کنید شرط اینکه $[1-2a, 1+2a]$ بازه باشد این است که $1-2a < 1+2a$ ، یعنی $a > 0$. بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای a برابر 2 است.

گزینه ۱ - ۱۶۳۹ فرض می کنیم $I = (\frac{1}{n}, \frac{n+2}{2})$ ، بنابراین به ازای $n=1$

شامل هیچ عدد طبیعی ای نیست. $I = (1, \frac{3}{2})$

به ازای $n=2$

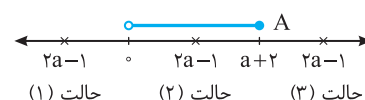
$$I = (\frac{1}{2}, 2) \Rightarrow 1 \in I$$

به ازای $n=3$

$$I = (\frac{1}{3}, \frac{5}{2}) \Rightarrow 1, 2 \in I$$

به این ترتیب به ازای $n \geq 3$ بازه I حداقل شامل اعداد طبیعی 1 و 2 است. پس فقط به ازای $n=2$ بازه داده شده فقط شامل یک عدد طبیعی است.

گزینه ۳ - ۱۶۴۰ اگر به بازه A دقت کنید معلوم می شود که $a+2 > 0$ ، پس $a > -2$. از روی محور زیر. برحسب اینکه $2a-1$ در کدام ناحیه باشد، حاصل $A \cap B$ را به دست آورده ایم و در جدول زیر آن نوشته ایم.



۱۶۵۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

پس

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) = 24$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} n(A) + n(B) = 24 \\ n(A) - n(B) = 4 \end{cases} \Rightarrow n(B) = 10$$

۱۶۵۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow n(A \cup B) = n(B)$$

طبق فرض $n(A \cup B) = 9$ ، پس $n(B) = 9$ از طرف دیگر،

$$n(A) + n(A') = n(B) + n(B') \Rightarrow n(A) + 14 = 9 + 10 \Rightarrow n(A) = 5$$

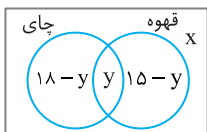
۱۶۵۸- گزینه ۲ فرض کنید A مجموعه علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعه علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آنگاه

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$100 - x = 85 + 70 - n(A \cap B)$$

پس $n(A \cap B) = 55 + x$ برای اینکه $n(A \cap B)$ حداقل باشد، باید $x = 0$ ،بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A \cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۶۵۹- گزینه ۲ راه‌حل اول فرض کنید



x نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین $30 - x$ نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و y نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.

$$x + 18 - y + y + 15 - y = 30 \Rightarrow x = y - 3$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x \geq 0, y \geq 0, 15 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 15 \Rightarrow 0 \leq y \leq 15$$

پس

$$0 \leq y - 3 \leq 12 \Rightarrow 3 \leq x \leq 12$$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

راه‌حل دوم فرض کنید A مجموعه دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعه دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 12 + 15 - n(A \cup B) = 27 - n(A \cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A \cup B) \geq n(B) = 15$ ، بنابراین

$$n(A \cap B) = 27 - n(A \cup B) \leq 27 - 15 = 12$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر $A \subseteq B$ ، این وضعیت پیش می‌آید).

۱۶۶۰- گزینه ۳ چون $A \subseteq B$ ، پس $A \cup B = B$ از طرف دیگر،

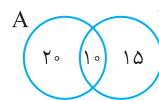
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B)$$

اکنون توجه کنید که $14 = n(A) + 2n(B) \leq n(B) + 2n(B) = 3n(B)$ و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B) \geq 5$ ، بنابراین

$$n(A \cup B) = n(B) \geq 5$$

۱۶۴۸- گزینه ۲ تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با

۲۰-۳۰، یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب B را دارند برابر ۲۵-۴۵=۲۰ است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب A را نیز دارند. پس ۱۵ محصول



فقط عیب B را دارند و ۲۰ تا از آن‌ها فقط عیب A را دارند. پس ۳۵ تا از محصولات فقط یک عیب دارند.

۱۶۴۹- گزینه ۱ مجموعه بینندگان شبکه ۱ را با A و مجموعه بینندگانشبکه ۲ را با B نشان می‌دهیم:

$$n(A) = 65, n(B) = 45, n(A \cap B) = 20$$

در نتیجه $n(A \cup B) = 65 + 45 - 20 = 90$ ، یعنی ۹۰ نفر حداقل یکی از شبکه‌ها را تماشا می‌کنند، پس ۱۰ نفر هیچ‌یک از این دو شبکه را تماشا نمی‌کنند.

۱۶۵۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3k - 1 + 3 - (k - 2) = 2k + 4$$

از طرف دیگر،

$$n(A \cap B) \leq n(B) \Rightarrow k - 2 \leq 3 \Rightarrow k \leq 5$$

بنابراین $n(A \cup B) = 2k + 4 \leq 2 \times 5 + 4 = 14$.

۱۶۵۱- گزینه ۳ گزینه (۳) ممکن است نادرست باشد. برای مثال،

$A = \{0, 1\}$ و $B = \{1, 2\}$ نامتناهی هستند، اما $A \cap B = \{1\}$ متناهی است.

۱۶۵۲- گزینه ۲ توجه کنید که $A \cap B = \{3, 5\}$ ، پس

$$(A \cap B)' = \{1, 2, 4, 6\}, C \cap (A \cap B)' = \{1, 2\}$$

۱۶۵۳- گزینه ۴ ابتدا مجموعه‌های A' ، B' و C' را پیدا می‌کنیم:

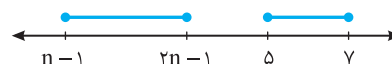
$$A' = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty), B' = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty), C' = [0, +\infty)$$

بنابراین $A' - B' = (-1, 1]$ و در نتیجه $(A' - B') - C' = (-1, 0)$.۱۶۵۴- گزینه ۴ **راه‌حل اول** مجموعه مرجع $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ است،پس $B' = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ و $C = \{2, 3, 7, 8, 9\}$ در نتیجه

$$A \cap B' = \{1, 6\} \Rightarrow (A \cap B') \cup C = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

بنابراین $n((A \cap B') \cup C) = 7$ ، هفت عضو دارد.**راه‌حل دوم** توجه کنید که

$$A \cap B' = A - B = \{1, 6\}, C = \{2, 3, 7, 8, 9\}$$

بنابراین $(A \cap B') \cup C = \{1, 6\} \cup \{2, 3, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$.پس مجموعه $(A \cap B') \cup C$ ، هفت عضو دارد.۱۶۵۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید برای اینکه $[n-1, 2n-1]$ بازه باشد،باید $n > 0$. اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:**حالت اول**

$$2n - 1 < 5 \Rightarrow n < 3$$

حالت دوم

$$n - 1 > 7 \Rightarrow n > 8$$

بنابراین n اعداد طبیعی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.

۱۶۶۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} n(A) = 3n(A') \\ n(A) = 12 \end{cases} \Rightarrow n(A') = 4$$

در نتیجه،

$$n(U) = n(A) + n(A') = 12 + 4 = 16$$

اکنون توجه کنید که

$$n(U) = n(B) + n(B') \Rightarrow 16 = n(B) + 7 \Rightarrow n(B) = 9$$

۱۶۶۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$n(A) + n(A') = n(U) \xrightarrow{n(A) = n(A')} 2n(A) = 26 \Rightarrow n(A) = 13$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 14 = 13 + n(B) - n(A \cap B) \\ n(B) - n(A \cap B) &= 1 \Rightarrow n(B - A) = 1 \end{aligned}$$

۱۶۶۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} n(A - B) &= 2n(B - A) \Rightarrow n(A) - n(A \cap B) = 2n(B) - 2n(A \cap B) \\ n(A) &= 2n(B) - n(A \cap B) = 2n(B) - 5 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{cases} n(A) = 2n(B) - 5 \\ n(A) = n(B) + 3 \end{cases} \Rightarrow n(A) = 11, n(B) = 8$$

در نتیجه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 11 + 8 - 5 = 14$

۱۶۶۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$n(A') = n(U) - n(A) = 23 - 10 = 13$$

$$n(B') = n(U) - n(B) = 23 - 7 = 16$$

اکنون توجه کنید که $n(A' \cap B') \leq n(A') = 13$

۱۶۶۹- گزینه ۳ فرض می‌کنیم تعداد دانش‌آموزان کلاس برابر x باشد.

همچنین، فرض می‌کنیم A و B به ترتیب مجموعه کسانی باشند که به فیزیک و ریاضیات علاقه دارند. در این صورت $n(A) = \frac{1}{6}x$ و $n(B) = \frac{1}{7}x$. از طرف دیگر، چون هر دانش‌آموز کلاس حداقل به یکی از درس‌های فیزیک یا ریاضی علاقه‌مند است، پس مجموعه دانش‌آموزان کلاس برابر $A \cup B$ است، در نتیجه، $n(A \cup B) = x$. به این ترتیب،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{7}x - 6 \Rightarrow x = 20$$

۱۶۷۰- گزینه ۳ فرض کنید A مجموعه علاقه‌مندان به ریاضی و

B مجموعه علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

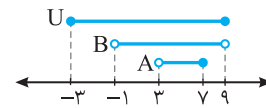
$$120 - x = 105 + 95 - n(A \cap B) \Rightarrow 120 - x = 200 - n(A \cap B)$$

پس $n(A \cap B) = 80 + x$. برای اینکه $n(A \cap B)$ حداقل باشد و با توجه به

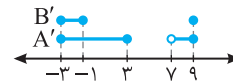
اینکه $x \geq 0$ است، باید $x = 0$ ؛ پس حداقل مقدار $n(A \cap B)$ برابر با ۸۰ است.

۱۶۶۱- گزینه ۲ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که

$$A' = [-3, 3] \cup (7, 9], \quad B' = [-3, -1] \cup \{9\}$$



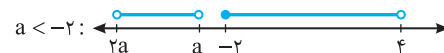
بنابراین از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A' - B' = (-1, 3] \cup (7, 9)$.



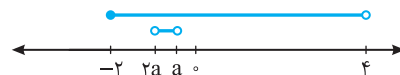
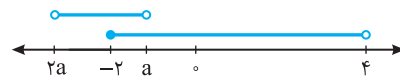
بنابراین، عددی صحیح در مجموعه $A' - B'$ عبارت‌اند از صفر، ۱، ۲، ۳ و ۸، که مجموعشان می‌شود ۱۴.

۱۶۶۲- گزینه ۲ چون $(2a, a)$ یک بازه است، پس $2a < a$ و در نتیجه

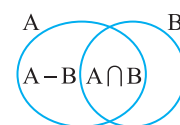
$a < 0$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $a \leq -2$ اشتراک بازه‌های $[2a, a]$ و $[-2, 4]$ تهی است:



بنابراین $a > -2$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $-2 < a < 0$ ، اشتراک بازه‌های $[2a, a]$ و $[-2, 4]$ تهی نیست.

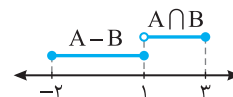


۱۶۶۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ (شکل



زیر را ببینید).

از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A = [-2, 3]$.



۱۶۶۴- گزینه ۳ اگر از مجموعه‌ای نامتناهی تعدادی متناهی عضو حذف

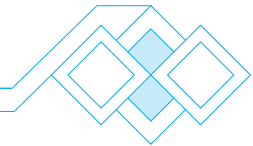
کنیم، مجموعه‌ای که به دست می‌آید نامتناهی است. پس $B - A$ نامتناهی است. بقیه گزینه‌ها ممکن است متناهی باشند.

گزینه (۱) اگر $U = \mathbb{N}$ ، $A = \{1\}$ و $B = \{2, 3, 4, \dots\}$ ، آن‌گاه

$$A' - B = \emptyset$$

گزینه (۲) چون A متناهی است، پس $A - B'$ نیز متناهی است.

گزینه (۴) اگر $U = \mathbb{N}$ ، $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$ ، آن‌گاه $B' - A' = \emptyset$.



۱۶۸۰- گزینه ۱ عدد آخر دسته اول ۵، عدد آخر دسته دوم 3×5 ، عدد آخر دسته سوم 5×5 ، و عدد آخر دسته n ام برابر $(2n-1) \times 5$ است. پس عدد آخر دسته چهل و نهم $5 \times (49-1) = 240$ است. پس عدد اول دسته پنجاهم، برابر ۴۸۷ خواهد بود.

۱۶۸۱- گزینه ۳ شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل n ام، $4 + 9(n-1)$ یعنی $9n-5$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۶۸۲- گزینه ۳ **راه حل اول** تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	$1+3+1$	$2+4+2$	$3+5+3$	...	$n+(n+2)+n$

بنابراین در شکل n ام، $3n+2$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم. **راه حل دوم** اگر ۴ نقطه به چهار گوشه شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل n ام برابر $3(n+2)-4$ خواهد بود. پس در شکل n ام، $3(n+2)-4$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۱۶۸۳- گزینه ۳ تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل n ام برابر است با $1+2+3+\dots+n$

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل n ام برابر است با $0+1+2+\dots+(n-1)$. بنابراین تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل n ام، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ‌نشده آن است. پس در شکل سی‌ام، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰ است.

۱۶۸۴- گزینه ۲ تعداد کل گوی‌ها در شکل n ام برابر است با

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل n ام برابر است با

$$1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل n ام برابر

$$\frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n}$$

است با $\frac{n-1}{n} = \frac{8}{17}$ به این ترتیب $\frac{n-1}{2n} = \frac{8}{17}$ پس $n=17$.

۱۶۸۵- گزینه ۲ با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شماره آن‌ها زوج است،

نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^2}{2}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شماره آن‌ها فرد

است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها n^2-1 خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی

را نیز رنگ می‌کنیم. پس $1+\frac{n^2-1}{2}$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر

n عددی زوج باشد، $\frac{n^2}{2}$ نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شماره

زوج، تعداد گوی‌های رنگ‌شده زوج است و در شکل‌هایی با شماره فرد، تعداد گوی‌های رنگ‌شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل n ام وجود دارد،

پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^2-1}{2}+1=113 \Rightarrow n^2-1=224 \Rightarrow n^2=225 \Rightarrow n=15$$

۱۶۷۱- گزینه ۳ شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیشتر از قبلی دارد. پس شکل n ام دارای $4+3(n-1)$ چوب کبریت است. یعنی $3n+1$ چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

۱۶۷۲- گزینه ۳ شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت به شکل مرحله قبل اضافه می‌شود. پس در شکل n ام $5+4(n-1)$ چوب کبریت وجود دارد. یعنی $4n+1$ چوب کبریت در شکل n ام وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۶۷۳- گزینه ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله n ام به تعداد $4(n-1)$ نقطه به ۵ نقطه شکل (۱) اضافه شده است: $4(n-1)+5=4n+1$ ، یعنی شکل n ام، $4n+1$ نقطه دارد. پس شکل دهم ۴۱ نقطه دارد.

۱۶۷۴- گزینه ۱ در شکل n ام تعداد مثلث‌های رنگ‌شده برابر است با

$$\frac{n(n-1)}{2} = 0+1+2+\dots+(n-1)$$

برای اینکه بدانیم در کدام شکل ۳۶ مثلث رنگ‌شده وجود دارد، معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0$$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=9$ ، یعنی در شکل نهم ۳۶ مثلث رنگ‌شده وجود دارد.

۱۶۷۵- گزینه ۴ در شکل n ام، $(n+1)^2$ دایره وجود دارد که $(n+1)$ تایی آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی $(n+1)^2 - (n+1)$ است که برابر است با n^2+n .

۱۶۷۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_n = 3n^2 - n + 2a_1 \xrightarrow{n=1} a_1 = 3 - 1 + 2a_1 \Rightarrow a_1 = -2$$

بنابراین $a_6 = 3 \times 16 - 4 + 2(-2) = 40$.

۱۶۷۷- گزینه ۳ با حل معادله $a_n = \frac{1}{8}$ مقدار n را که شماره جمله مورد نظر است، می‌یابیم:

$$\frac{n^2+1}{81n^2-1} = \frac{1}{8} \Rightarrow 8n^2+8=81n^2-1 \Rightarrow n^2=81 \Rightarrow n=9$$

بنابراین a_9 برابر $\frac{1}{8}$ است.

۱۶۷۸- گزینه ۲ باید ببینیم نامعادله $a_n < \frac{3}{9}$ برای کدام مقادیر n درست است:

$$\frac{4n-1}{n+6} < \frac{3}{9} \Rightarrow 4n-1 < \frac{1}{3}(n+6) \Rightarrow 12n-3 < n+6 \Rightarrow 11n < 9 \Rightarrow n < \frac{9}{11}$$

بنابراین $n \leq 243$ ، یعنی جمله اول دنباله کمتر از $\frac{3}{9}$ هستند.

۱۶۷۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$72 < a_n < 160 \Rightarrow 72 < n^2 + 2n - 8 < 160$$

بنابراین

$$n^2 + 2n - 8 < 160 \Rightarrow (n-12)(n+14) < 0 \Rightarrow 12 < n < 14 \Rightarrow 13 \leq n \leq 14$$

$$n^2 + 2n - 8 > 72 \Rightarrow (n-8)(n+10) > 0 \Rightarrow n > 8 \Rightarrow n \geq 9$$

در نتیجه n می‌تواند عددهای ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد.

۱۶۹۵- گزینه ۲ چون $a_1=2$ و $d=4$ ، پس جمله عمومی دنباله به صورت $a_n=2+4(n-1)=4n-2$ است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید $a_n < 500$ باشد. یعنی

$$4n-2 < 500 \Rightarrow n < \frac{502}{4} \Rightarrow n \leq 125$$

پس ۱۲۵ جمله اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۱۶۹۶- گزینه ۲ اندازه زاویه‌های مثلث را به صورت $a-d, a, a+d$

در نظر می‌گیریم. مجموع اندازه زاویه‌های مثلث برابر 180° است. پس

$$a-d+a+a+d=180^\circ \Rightarrow a=60^\circ$$

میانگین اندازه بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه مثلث همان a است که برابر 60° است.

۱۶۹۷- گزینه ۴ زاویه‌های پنج‌ضلعی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازه زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر 540° است، پس

$$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=540^\circ$$

بنابراین $5a=540^\circ$ و در نتیجه $a=108^\circ$. اندازه کوچک‌ترین زاویه 86°

است، پس $a-2d=86^\circ$ و در نتیجه $d=11^\circ$. پس اندازه بزرگ‌ترین زاویه

یعنی $a+2d$ برابر است با $108^\circ+2 \times 11^\circ=130^\circ$.

۱۶۹۸- گزینه ۲ راه حل اول چون $a_1=\sqrt{3}-5$ و $a_6=\sqrt{3}+5$ ، پس

$$a_6=a_1+5d \Rightarrow \sqrt{3}+5=\sqrt{3}-5+5d \Rightarrow d=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{3}-5+2$ یا همان $\sqrt{3}-3$ است.

راه حل دوم قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر است با

$$d=\frac{(\sqrt{3}+5)-(\sqrt{3}-5)}{4+1}=\frac{10}{5}=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با

$$(\sqrt{3}-5)+2=\sqrt{3}-3$$

۱۶۹۹- گزینه ۴ سه جمله متوالی دنباله را به صورت $a-d, a, a+d$

در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-d+a+a+d=15 \Rightarrow 3a=15 \Rightarrow a=5$$

از طرف دیگر،

$$(a-d) \times a \times (a+d)=45 \Rightarrow a(a^2-d^2)=45$$

چون $a=5$ ، پس

$$5(25-d^2)=45 \Rightarrow d^2=16 \Rightarrow d=\pm 4$$

۱۷۰۰- گزینه ۲ فرض کنید قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر d

باشد. در این صورت

$$a_1=d, \quad a_n=a_1+(n-1)d=d+(n-1)d=nd$$

به این ترتیب

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = 1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times \dots \times 9^9 = (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9)^9 = 9!^9$$

$$d^9 \times 9! = 10^9 \times 9! \Rightarrow d=10$$

بنابراین $a_{10}=10d=100$

۱۶۸۶- گزینه ۳ چون همه جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_1=a_2 \Rightarrow \frac{2-k}{8}=\frac{4-k}{13} \Rightarrow 26-13k=32-8k \Rightarrow 5k=-6 \Rightarrow k=-\frac{6}{5}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{6}{5}$ ، آن‌گاه $a_n=\frac{2}{5}$.

۱۶۸۷- گزینه ۲ چند جمله اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینه (۱) $2, 3, 4, 5, \dots$ گزینه (۲) $2, 3, 10, 15, \dots$

گزینه (۳) $2, 3, 10, 23, \dots$ گزینه (۴) $2, 3, 8, 17, \dots$

بنابراین فقط $n^2-(-1)^n$ می‌تواند جمله عمومی دنباله باشد.

۱۶۸۸- گزینه ۲ به چند جمله اول دنباله توجه کنید:

$$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2} \times 1=\frac{1}{2}, \quad a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}=\frac{1}{3}, \quad a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_n=\frac{1}{n}$ ، پس $a_{100}=\frac{1}{100}$.

۱۶۸۹- گزینه ۴ بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y=-3x^2+12x+c$

به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{-6}=2$ به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جمله

دنباله مورد نظر برابر a_2 است. در نتیجه

$$a_2=8 \Rightarrow -3 \times 4 + 12 \times 2 + c = 8 \Rightarrow c = -4$$

۱۶۹۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$a_1=\log_2 \frac{1}{2}, \quad a_2=\log_2 \frac{2}{2}, \quad a_3=\log_2 \frac{3}{2}, \quad \dots$$

بنابراین مجموع n جمله اول دنباله به صورت زیر است:

$$S_n=\log_2 \frac{1}{2}+\log_2 \frac{2}{2}+\log_2 \frac{3}{2}+\dots+\log_2 \frac{n-1}{n}+\log_2 \frac{n}{n+1}$$

$$=\log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \right) = \log_2 \frac{1}{n+1} = -\log_2(n+1)$$

بنابراین

$$-\log_2(n+1)=-3 \Rightarrow n+1=2^3=8 \Rightarrow n=7$$

۱۶۹۱- گزینه ۳ چون $a_{n+1}-a_n=-2$ ، پس دنباله مورد نظر دنباله‌ای

حسابی است که قدرنسبت آن -2 است. چون جمله اول برابر 3 است، پس

$$a_{10}=a_1+9d=3+9(-2)=-15, \quad a_5=a_1+4d=3+4(-2)=-5$$

$$\frac{a_{10}}{a_5}=\frac{-15}{-5}=3$$

بنابراین

۱۶۹۲- گزینه ۲ از رابطه داده شده به‌دست می‌آید

$$3(a_1+3d)+4(a_1+4d)-7(a_1+5d)=124$$

پس $31d=124$ و در نتیجه $d=4$.

۱۶۹۳- گزینه ۴ قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$3x-4-(3x-1)=-3$$

بنابراین

$$4x-2=(3x-4)-3 \Rightarrow x=-5$$

بنابراین جمله سوم دنباله برابر است با $4(-5)-2=-22$ و جمله چهارم برابر است با $-22-3=-25$.

۱۶۹۴- گزینه ۲ چون $a_1=-1$ و $d=2-(-1)=3$ ، پس

$a_k=3k-4=218$ ، بنابراین $a_n=3n-4$ یعنی $a_n=-1+3(n-1)$

پس $k=74$.

۱۷۰۷- گزینه ۲ چون $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$ پس

جواب‌های معادله مورد نظر a ، ۲ و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$\begin{aligned} 6, 2, a \Rightarrow \frac{6+a}{2} = 2 \Rightarrow a = -2, \quad 2, 6, a \Rightarrow \frac{2+a}{2} = 6 \Rightarrow a = 10 \\ 6, a, 2 \Rightarrow \frac{6+2}{2} = a \Rightarrow a = 4, \quad 2, a, 6 \Rightarrow \frac{2+6}{2} = a \Rightarrow a = 4 \\ a, 6, 2 \Rightarrow \frac{a+2}{2} = 6 \Rightarrow a = 10, \quad a, 2, 6 \Rightarrow \frac{a+6}{2} = 2 \Rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

بنابراین a ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۱۷۰۸- گزینه ۳ اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم.

طبق قضیه فیثاغورس،

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad + a^2 = a^2 + d^2 + 2ad$$

$$a^2 = 4ad \Rightarrow a = 4d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویه قائمه a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a}{a-d} = \frac{4d}{4d-d} = \frac{4d}{3d} = \frac{4}{3}$$

۱۷۰۹- گزینه ۳ چهار جمله متوالی دنباله را به صورت

$$a-3d, a-d, a+d, a+3d$$

$$a-3d+a-d+a+d+a+3d=0 \Rightarrow 4a=0 \Rightarrow a=0$$

پس دنباله به صورت $-3d, -d, d, 3d$ است و

$$9d^2 + d^2 + d^2 + 9d^2 = 8 \Rightarrow d^2 = 4$$

بنابراین، حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(3d)(-3d) = -9d^2 = -36$$

۱۷۱۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که m باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱

باشد. پس $m^2 + 4 < m^2 + 3m + 4$.

اگر $m-1$ عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آنگاه قدرنسبت دنباله حاصل، برابر است با

$$d = \frac{m^2 + 3m + 4 - m^2 - 4}{(m-1) + 1} = \frac{3m}{m} = 3$$

۱۷۱۱- گزینه ۱ دنباله a_n ، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{3}{2}$ است.

در نتیجه

$$a_3 = a_1 r^2 \Rightarrow a_3 = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3}$$

$$\text{بنابراین } a_{29} = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{28} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{28} = \frac{3^{27}}{2^{26}}$$

۱۷۱۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[3]{2}$ واسطه هندسی $\sqrt{a}$ و $\sqrt[4]{2}$

است، پس

$$(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$ ، در نتیجه

$$a_{13} = a_1 r^{12} = \sqrt{a} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)^{12} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{2}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \times 2 = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \frac{\sqrt[6]{2^1}}{\sqrt[6]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

۱۷۰۱- گزینه ۴ راه حل اول با قرار دادن $n=1$ در جمله عمومی به دست

می‌آید $a_1 = 1$ با قرار دادن $n=2$ در جمله عمومی به دست می‌آید $a_2 = \frac{1}{3}$.

$$\text{بنابراین } d = a_2 - a_1 = -\frac{2}{3} \text{ پس } a_1 - d = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

راه حل دوم جمله عمومی دنباله حسابی با قدرنسبت d و جمله اول a_1 به صورت

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ است، بنابراین } a_n = dn + (a_1 - d) = -\frac{2}{3}n + \frac{5}{3} \text{ پس}$$

$$a_1 - d = \frac{5}{3}$$

۱۷۰۲- گزینه ۲ از $a_1 + a_3 = 16$ نتیجه می‌شود

$$a_1 + a_1 + 2d = 16 \Rightarrow a_1 + d = 8$$

چون $a_2 + a_5 + a_8 = 51$ پس

$$a_1 + d + a_1 + 4d + a_1 + 7d = 51 \Rightarrow 3a_1 + 12d = 51$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 3a_1 + 12d = 51 \end{cases} \text{ از حل دستگاه } \begin{cases} a_1 + d = 8 \\ d = 3 \end{cases} \text{ به دست می‌آید}$$

۱۷۰۳- گزینه ۱ چون دنباله حسابی است، پس

$$2a - 1 = \frac{a+1-3a}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین $d = (2a - 1) - a = a - 1 = -\frac{1}{2}$ پس جمله عمومی دنباله به شکل

زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n-1) = 1 - \frac{n}{2}$$

۱۷۰۴- گزینه ۴ راه حل اول چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی

است، پس

$$a+c-(a+b) = (b+c)-(a+c) \Rightarrow c-b = b-a$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

راه حل دوم چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c = \frac{a+b+b+c}{2} \Rightarrow 2(a+c) = a+2b+c \Rightarrow a+c = 2b$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

۱۷۰۵- گزینه ۳ جمله عمومی دنباله به صورت زیر است

$$a_n = 196 - 4(n-1) = 200 - 4n$$

بنابراین $a_{50} = 0$ ، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر -4 است، پس

$$a_{47} = 12, \quad a_{48} = 8, \quad a_{49} = 4, \quad a_{50} = 0$$

۱۷۰۶- گزینه ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d = \frac{a_{10} - a_2}{10 - 2} = -\frac{32}{8} = -4$$

بنابراین $a_1 = 27$ و در نتیجه $a_n = a_1 + (n-1)d = 27 - 4(n-1) = 31 - 4n$ اکنون توجه کنید که

عمومی دنباله می‌شود $a_n = 27 - 4(n-1) = 31 - 4n$.

$$a_n > 0 \Rightarrow 31 - 4n > 0 \Rightarrow n \leq 7$$

بنابراین هفت جمله نخست دنباله مثبت هستند.

در نتیجه جمله هشتادونهم این دنباله برابر است با

$$a_{80} = -12 + \frac{1}{8} \times (89-1) = -1$$

دهیم، آن گاه $(3r)^5 = 243r^5$ جمله ششم دنباله هندسی. بنابراین

$$(3r)^5 = -1 \Rightarrow 3r = -1 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

۱۷۱۹- گزینه ۱ چون ۸ واسطه حسابی عددهای a و b است، پس

$$a+b=16 \Rightarrow b=16-a$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطه هندسی عددهای a و $b+4$ می شود.

$$\text{بنابراین } 64 = a(b+4) = a(16-a+4) = 20a - a^2$$

پس $a^2 - 20a + 64 = 0$ و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است (توجه کنید در این معادله $\Delta > 0$).

۱۷۲۰- گزینه ۴ جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله حسابی را به ترتیب به صورت $a+d$ ، $a+5d$ و $a+13d$ در نظر می گیریم. چون این اعداد دنباله هندسی تشکیل می دهند، پس

$$(a+5d)^2 = (a+d)(a+13d) \Rightarrow 12d^2 = 4ad \Rightarrow a=3d$$

بنابراین قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با $r = \frac{a+5d}{a+d} = \frac{3d+5d}{3d+d} = \frac{8d}{4d} = 2$

۱۷۲۱- گزینه ۲ چون $\frac{a_8}{a_4} = \sqrt{2}$ ، پس $\frac{a_1 r^7}{a_1 r^3} = \sqrt{2}$ در نتیجه

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^2} = r^4 = (\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow r^2 = \sqrt{2}$$

۱۷۲۲- گزینه ۳ چون 4^{2x} واسطه هندسی 2^{x-4} و 8^{2-3x} است، پس

$$(4^{2x})^2 = 2^{x-4} \times 8^{2-3x} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{x-4} \times 2^{6-9x} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{2-8x}$$

بنابراین $12x = 2 - 8x$ ، یعنی $x = \frac{1}{10}$.

۱۷۲۳- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله هندسی مورد نظر برابر است با

$$r = \frac{\log a}{\log_f a} = \frac{\log 16}{\log a} = \frac{\log 4}{\log 16} = \frac{\log 4}{2 \log 4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$a_7 = a_1 r^6 \Rightarrow \frac{1}{32} = \log_f a \times \frac{1}{64} \Rightarrow \log_f a = 2 \Rightarrow a = 4^2 = 16$$

۱۷۲۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_8 - a_1 = 130 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 = 130 \Rightarrow a_1(r^7 - 1) = 130$$

$$a_4 - a_7 = 25 \Rightarrow a_1 r^3 - a_1 r^6 = 25 \Rightarrow a_1 r(r^2 - 1) = 25$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به دست می آید

$$\frac{r^4 - 1}{r(r^2 - 1)} = \frac{130}{25} \Rightarrow \frac{(r^2 - 1)(r^2 + 1)}{r(r^2 - 1)} = \frac{26}{5} \Rightarrow \frac{r^2 + 1}{r} = \frac{26}{5}$$

$$\delta(r^2 + 1) = 26r \Rightarrow \delta r^2 - 26r + \delta = 0 \Rightarrow r = \delta, \quad r = \frac{1}{\delta} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

به این ترتیب،

$$a_1 r(r^2 - 1) = 25 \Rightarrow a_1 \times \delta \times 24 = 25 \Rightarrow a_1 = \frac{25}{24}$$

در نتیجه $a_7 = a_1 r = \frac{25}{24}$

۱۷۱۳- گزینه ۱ فرض می کنیم جواب های معادله x_1 و x_2 باشند. در

این صورت

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4/5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 9, \quad \sqrt{x_1 x_2} = 1/5 \Rightarrow \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{9}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل $x^2 - 9x + \frac{9}{4} = 0$ است که اگر طرفین آن را

در ۴ ضرب کنیم، می شود $4x^2 - 36x + 9 = 0$.

۱۷۱۴- گزینه ۳ از تساوی $a_1 a_6 = 27$ نتیجه می شود

$$a_1 \times a_1 r^5 = 27 \Rightarrow a_1^2 r^5 = 27$$

از تساوی $a_4 a_9 = 9$ به دست می آید

$$a_1 r \times a_1 r^8 = 9 \Rightarrow a_1^2 r^9 = 9$$

از تقسیم طرفین دو تساوی به دست آمده نتیجه می شود

$$\frac{a_1^2 r^5}{a_1^2 r^9} = \frac{27}{9} \Rightarrow r = 3$$

با جای گذاری $r = 3$ در یکی از رابطه ها نتیجه می شود $a_1 = \pm \frac{1}{3}$. چون جملات

دنباله مثبت هستند، پس $a_1 = \frac{1}{3}$ و در نتیجه $a_8 = a_1 r^7 = \frac{1}{3} \times 3^7 = 27$.

۱۷۱۵- گزینه ۲ مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_5 + a_8 = a_1 r^4 + a_1 r^7 = a_1 r^4(1 + r^3)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با

$$a_7 + a_8 = a_1 r^6 + a_1 r^7 = a_1 r^6(1 + r)$$

$$\frac{a_5 + a_8}{a_7 + a_8} = \frac{a_1 r^4(1 + r^3)}{a_1 r^6(1 + r)} = \frac{1 + r^3}{r^2(1 + r)} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r}(1 + \frac{1}{r})} = 7$$

۱۷۱۶- گزینه ۳ این جملات را به صورت $ar^2, ar, a, \frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}$ در نظر

می گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 1024 \Rightarrow a^5 = 2^{10} = 4^5$$

در نتیجه جمله وسط برابر ۴ است.

۱۷۱۷- گزینه ۱ راه حل اول این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 16\sqrt{2}$$

پس $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_9 = 16\sqrt{2}$ ، بنابراین

$$a_1 r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow r^8 = 16 \Rightarrow (r^2)^4 = 2^4 \Rightarrow r^2 = 2$$

در نتیجه $a_7 = a_1 r^6 = 2\sqrt{2}$.

راه حل دوم ابتدا قدرنسبت دنباله هندسی حاصل را به دست می آوریم:

$$r^{7+1} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow r^8 = 16 = 2^4 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$$

$$a_7 = a_1 r^6 = \sqrt{2} \times (\pm\sqrt{2})^6 = 2\sqrt{2}$$

۱۷۱۸- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله حسابی برابر است با

$$-\frac{95}{8} - (-12) = \frac{1}{8}$$

بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = -12 + \frac{1}{8}(n-1)$ است.

۱۷۳۱- گزینه ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴

نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله n ام به تعداد $(n-1) \times 4$

نقطه به ۵ نقطه شکل (۱) اضافه شده است: $4(n-1) + 5 = 4n + 1$ ، یعنی شکل

n ام $4n + 1$ نقطه دارد. پس شکل پانزدهم ۶۱ نقطه دارد.

۱۷۳۲- گزینه ۲ از شرط $a_n > 0$ مقادیری از n را پیدا می‌کنیم که به ازای

آن‌ها a_n مثبت است:

$$a_n > 0 \Rightarrow 95n - n^2 > 0 \Rightarrow n(95 - n) > 0$$

چون $n > 0$ ، پس $95 - n > 0$ ، در نتیجه $n < 95$ ، یعنی $n \leq 94$. بنابراین ۹۴

جمله دنباله مثبت هستند.

۱۷۳۳- گزینه ۴ فرض کنید قدرنسبت این دنباله d باشد. بنابراین

$$a_5 = 2a_1 \Rightarrow a_1 + 4d = 2(a_1 + 4d) \Rightarrow a_1 + 4d = 0 \Rightarrow 15a_1 = 0$$

۱۷۳۴- گزینه ۳ جمله وسط، واسطه حسابی دو جمله دیگر است:

$$\log_7 a + \log_7 (16a) = 2 \log_7 (3a + 4) \Rightarrow \log_7 (a(16a)) = \log_7 (3a + 4)^2$$

$$16a^2 = (3a + 4)^2 \Rightarrow 16a^2 = 9a^2 + 24a + 16$$

$$7a^2 - 24a - 16 = 0 \Rightarrow a = 4, a = -\frac{4}{7} \text{ (غ.ق.ی)}$$

۱۷۳۵- گزینه ۳ جمله‌های اول و دوم دنباله $a_n = 2 - 3n$ به ترتیب برابر

۱- و ۴- است. پس قدرنسبت آن برابر $3 - (-1) = 4$ است. اگر جمله

اول را ۴ واحد کاهش دهیم، به ۵- تبدیل می‌شود و اگر قدرنسبت را ۶ واحد

افزایش دهیم، به ۳ تبدیل می‌شود. پس دنباله حسابی جدید $5, -2, 1, \dots$

است که جمله عمومی آن به صورت $b_n = -5 + 3(n-1) = 3n - 8$ است.

پس جمله بیستم و یکم دنباله جدید $b_{21} = 3 \times 21 - 8 = 55$ است.

۱۷۳۶- گزینه ۲ مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر را حساب می‌کنیم:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 6 - \sqrt{2} + 6 + \sqrt{2} = 12$$

چون $a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ ، پس

$$3(a_1 + a_n) = 12 \Rightarrow a_1 + a_n = 4$$

۱۷۳۷- گزینه ۴ چون $a_1 = \frac{1}{2}$ و $r = 1 \div \frac{1}{2} = 2$ ، حاصل ضرب پانزده

جمله اول دنباله برابر است با

$$P = a_1 \times a_1 r \times \dots \times a_1 r^{14} = a_1^{15} \times r^{1+2+\dots+14} = a_1^{15} r^{\frac{14 \times 15}{2}} = a_1^{15} r^{105}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{15} 2^{105} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \times 2^{105} = 2^{90}$$

۱۷۳۸- گزینه ۴ می‌دانیم اگر دنباله‌ای هم حسابی و هم هندسی باشد

جمله‌های آن با هم برابرند، پس هر سه جمله باید برابر باشند. در نتیجه

$$y - 9 = 2x + 3 = 3x - 1$$

بنابراین $x = 4$ و $y = 20$ ، پس $x + y = 24$.

۱۷۳۹- گزینه ۳ توجه کنید که $y = rx$ ، $z = r^2 x$ و $t = r^3 x$ به شرط

آنکه r قدرنسبت دنباله باشد. پس

$$x + z = 20 \Rightarrow x + r^2 x = 20 \Rightarrow x(1 + r^2) = 20 \quad (1)$$

$$y + t = 60 \Rightarrow rx + r^3 x = 60 \Rightarrow rx(1 + r^2) = 60 \quad (2)$$

از تقسیم طرفین تساوی (۲) بر طرفین تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{rx(1+r^2)}{x(1+r^2)} = \frac{60}{20} \Rightarrow r = 3$$

۱۷۲۵- گزینه ۳ در حالتی که پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم، $r^6 = \frac{b}{a}$.

در حالتی که چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم، $r'^5 = \frac{b}{a} = (2r)^5$. بنابراین

$$r^6 = (2r)^5 \Rightarrow r^6 = 32r^5 \Rightarrow r = 32$$

۱۷۲۶- گزینه ۳ این سه عدد را به صورت $\frac{a}{r}$ ، a ، ar در نظر می‌گیریم.

پس

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r} + a + ar = 14 \Rightarrow a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 14$$

$$4\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 14 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, r = 2$$

بنابراین سه جمله مورد نظر به ازای $r = \frac{1}{2}$ ، به صورت $8, 4, 2$ و به ازای $r = 2$ ،

به صورت $2, 4, 8$ هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین

این اعداد برابر ۶ است.

۱۷۲۷- گزینه ۲ طول اضلاع مثلث a ، ar و ar^2 در نظر می‌گیریم.

طبق قضیه فیثاغورس، $a^2 + (ar)^2 = (ar^2)^2$. بنابراین

$$a^2(1+r^2) = a^2 r^4 \Rightarrow r^4 - r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۱۷۲۸- گزینه ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنباله

ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases} 2y + x = 2x + y \Rightarrow y = x \\ 2y + x = x + 4 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

پس $x = y = 2$. بنابراین $x + 2y = 6$.

۱۷۲۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$a_p = a - 3, \quad a_d = a - 5, \quad a_e = a - 6$$

بنابر فرض، $(a-5)^2 = (a-3)(a-6)$. بنابراین

$$a^2 - 10a + 25 = a^2 - 9a + 18 \Rightarrow a = 7$$

در نتیجه $a_e = 7 - 6 = 1$.

۱۷۳۰- گزینه ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنباله حسابی را به ترتیب

$a + 2d$ ، $a + 4d$ و $a + 7d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنباله

هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a + 4d)^2 = (a + 2d)(a + 7d) \Rightarrow rd^2 = ad \Rightarrow a = 2d$$

بنابراین دنباله هندسی به صورت $4d, 6d, 9d, \dots$ است که جمله چهارم آن

$\frac{27}{2}d$ است زیرا $r = \frac{3}{2}$ و $9d \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}d$. همچنین جمله عمومی دنباله

حسابی به صورت زیر است:

$$a_n = a + (n-1)d = 2d + (n-1)d = (n+1)d$$

به این ترتیب $a_{17} = 13d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{27}{2}d}{13d} = \frac{27}{26}$.

۱۷۴۶- گزینه ۴ شرط اینکه سه عدد a ، b و c سه جمله متوالی یک دنباله

حسابی باشند این است که $2b = a + c$. بنابراین

$$2(3p+4) = (2p+3) + (5p-1) \Rightarrow p=6$$

$$d = 3p + 4 - 2p - 3 = p + 1 \xrightarrow{p=6} d=7$$

ریاضی - ۸۴

۱۷۴۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_5^2 = a_1 a_{11} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 10d)$$

$$a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1 d \Rightarrow 16d^2 = 2a_1 d \Rightarrow a_1 = 8d$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 12d, a_{11} = a_1 + 10d = 18d \Rightarrow r = \frac{a_{11}}{a_5} = \frac{18d}{12d} = \frac{3}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۷۴۸- گزینه ۲ فرض کنید t_3 ، t_4 و t_5 جملات دنباله حسابی و

a_1 ، a_2 و a_3 جملات متوالی دنباله هندسی باشند. در این صورت

$$a_2^2 = a_1 a_3 \Rightarrow t_2^2 = t_3 t_4 \Rightarrow (t_1 + d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 3d)$$

$$t_1^2 + 2t_1 d + d^2 = t_1^2 + 5t_1 d + 6d^2 \Rightarrow 3t_1 d + 5d^2 = 0 \xrightarrow{d \neq 0} t_1 + \frac{5}{3}d = 0$$

$$2t_1 d + 2 \cdot d^2 = 0 \Rightarrow 2d(t_1 + d) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} t_1 + d = 0$$

تجربی - ۸۸

بنابراین جمله یازدهم دنباله حسابی برابر صفر است.

۱۷۴۹- گزینه ۳ طبق فرض،

$$\begin{cases} a_{12} - a_{10} = 5 \\ a_{12} + a_{10} = 25 \end{cases} \Rightarrow a_{12} = 15, a_{10} = 10 \Rightarrow d = \frac{a_{12} - a_{10}}{12 - 10} = \frac{5}{2}$$

از طرف دیگر،

$$d = \frac{a_{21} - a_{10}}{21 - 10} \Rightarrow a_{21} = a_{10} + 11d = 10 + 11 \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۴

۱۷۵۰- گزینه ۲ سه جمله را به صورت $\frac{a}{r}$ ، a ، ar فرض می کنیم، در

این صورت

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 19 \Rightarrow \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19 \Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$(3r-2)(2r-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{سه جمله متوالی: } 9, 6, 4 \\ r = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{سه جمله متوالی: } 4, 6, 9 \end{cases}$$

در هر دو صورت تفاضل بزرگترین و کوچکترین جمله برابر ۵ است.

تجربی - ۹۰

۱۷۴۰- گزینه ۳ توجه کنید که اگر قدرنسبت دنباله r و جمله اول آن a_1

باشد، آن گاه

$$a_5 - a_3 = 96 \Rightarrow a_1 r^4 - a_1 r^2 = 96 \Rightarrow a_1 r^2 (r^2 - 1) = 96 \quad (1)$$

$$a_8 - a_6 = 12 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 r^5 = 12 \Rightarrow a_1 r^5 (r^2 - 1) = 12 \quad (2)$$

طرفین تساوی (۲) را بر طرفین تساوی (۱) تقسیم می کنیم:

$$\frac{a_1 r^5 (r^2 - 1)}{a_1 r^2 (r^2 - 1)} = \frac{12}{96} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

پس

$$a_1 r^2 (r^2 - 1) = 96 \Rightarrow a_1 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 96 \Rightarrow a_1 = -512$$

بنابراین

$$a_8 = a_1 r^7 = -512 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = -32$$

۱۷۴۱- گزینه ۴ با استفاده از رابطه $a_n = 2a_{n-1} + 1$ و جمله اول $a_1 = 1$ ،

جمله هشتم را محاسبه می کنیم:

$$a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7, \quad a_4 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$a_5 = 2 \times 15 + 1 = 31, \quad a_6 = 2 \times 31 + 1 = 63$$

$$a_7 = 2 \times 63 + 1 = 127, \quad a_8 = 2 \times 127 + 1 = 255$$

تجربی - ۹۰

۱۷۴۲- گزینه ۴ در این دنباله، هر جمله از دو برابر جمله قبل، دو واحد

کمتر است. پس هشت جمله اول برابر است با

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2 \times 3 - 2 = 4, \quad a_3 = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$$a_4 = 2 \times 6 - 2 = 10, \quad a_5 = 2 \times 10 - 2 = 18, \quad a_6 = 2 \times 18 - 2 = 34$$

$$a_7 = 2 \times 34 - 2 = 66, \quad a_8 = 2 \times 66 - 2 = 130$$

بنابراین $a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$.

۱۷۴۳- گزینه ۱ عدد $4\sqrt{2}$ واسطه هندسی 2^a و 2^b است، پس

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b=5$$

واسطه حسابی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{2}$ ، یعنی $\frac{5}{2}$ است. ریاضی - ۸۷

۱۷۴۴- گزینه ۴ جملات را به صورت a ، $a+3d$ ، $a+10d$ در نظر

می گیریم. در این صورت

$$(a+3d)^2 = a(a+10d) \Rightarrow a^2 + 9d^2 + 6ad = a^2 + 10ad$$

$$9d^2 = 4ad \Rightarrow d = \frac{4}{9}a$$

بنابراین جملات دنباله هندسی a ، $\frac{4}{9}a$ ، $\frac{4}{3}a$ هستند و قدرنسبت این دنباله

$$\frac{\frac{4}{3}a}{\frac{4}{9}a} = \frac{\frac{4}{3}a}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

تجربی - ۹۲

۱۷۴۵- گزینه ۱ جملات a_4 ، a_5 و a_{12} از دنباله حسابی، دنباله هندسی

تشکیل می دهند، پس جمله ششم واسطه هندسی جملات چهارم و دوازدهم است:

$$a_6^2 = a_4 \times a_{12} \Rightarrow (a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 11d)$$

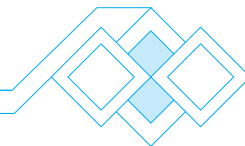
$$a_1^2 + 10a_1 d + 25d^2 = a_1^2 + 14a_1 d + 33d^2$$

$$4a_1 d = -8d^2 \Rightarrow a_1 = -2d$$

ریاضی - ۸۱

$$r = \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d} = \frac{-2d + 5d}{-2d + 3d} = 3$$

فصل دهم



۱۷۵۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{5}{x^2} = 32 \Rightarrow \left(\frac{5}{x^2}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{32}{1}\right)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow x = 2^2$$

بنابراین

$$\frac{2}{x^2} = \left(\frac{2}{2^2}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{2^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{4}{5}}} = 2^{\frac{2}{5}-\frac{4}{5}} = 2^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}}$$

۱۷۵۹- گزینه ۳ ابتدا x, y و z را ساده‌تر می‌کنیم:

$$x = a^{\frac{3}{4}}, \quad y = a^{\frac{4}{3}}, \quad z = a^{\frac{10}{12}} = a^{\frac{5}{6}}$$

از طرف دیگر، $\frac{4}{3} > \frac{5}{6} > \frac{3}{4}$ و چون $0 < a < 1$ ، پس

$$a^{\frac{4}{3}} < a^{\frac{5}{6}} < a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y < z < x$$

۱۷۶۰- گزینه ۴ راه‌حل اول اولاً واضح است که $\sqrt[4]{0} = 0$ و ریشه چهارم

عدد صفر در بازه مورد نظر قرار دارد. اکنون فرض می‌کنیم a عددی مثبت باشد که ریشه چهارم مثبت آن در بازه $(0, 4)$ قرار دارد. یعنی

$$0 < \sqrt[4]{a} < 4 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{a})^4 < 4^4 \Rightarrow 0 < a < 256$$

همچنین فرض می‌کنیم b عددی مثبت باشد که ریشه چهارم منفی آن در بازه $(-3, 0)$ قرار دارد. یعنی

$$-3 < -\sqrt[4]{b} < 0 \Rightarrow 0 < \sqrt[4]{b} < 3 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{b})^4 < 3^4 \Rightarrow 0 < b < 81$$

بنابراین a می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ و b می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می‌توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... و ۲۵۵ حداقل یک ریشه چهارم در بازه $(-3, 4)$ دارند. تعداد این

اعداد صحیح ۲۵۶ تا است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$-3 < \sqrt[4]{x} < 4 \Rightarrow -\sqrt[4]{81} < \sqrt[4]{x} < \sqrt[4]{256} \Rightarrow -3 \leq x \leq 256$$

پس تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶ تا است.

۱۷۶۱- گزینه ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $x < 0$.

$$\sqrt[4]{-x^5} = \sqrt[4]{(-x)x^4} = \sqrt[4]{-x} \times \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{-x} \times |x| = -x \sqrt[4]{-x}$$

راه‌حل دوم چون $x < 0$ ، حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x = -1$ می‌یابیم:

$$\sqrt[4]{-x^5} = \sqrt[4]{1} = 1$$

فقط مقدار گزینه (۳) به ازای $x = -1$ برابر ۱ است.

۱۷۶۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^4}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^4}} = \sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt[4]{96} = \sqrt[4]{2^5 \times 3} = \sqrt[4]{2^4 \times 2 \times 3} = 2 \sqrt[4]{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt[4]{81}} = \frac{3}{\sqrt[4]{3^4}} \times \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{3 \times \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3^5}} = \frac{3 \sqrt[4]{3}}{3} = \sqrt[4]{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = -2\sqrt[4]{3}$

۱۷۵۱- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $0 < a < b$ ، آنگاه $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

بنابراین

$$0 < 9 \Rightarrow \sqrt{0} < \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{0} < 3 \Rightarrow \sqrt{0} - 3 < 0$$

در نتیجه $\sqrt{(\sqrt{0}-3)^2} = |\sqrt{0}-3| = -(\sqrt{0}-3) = 3-\sqrt{0}$ از طرف

دیگر، $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} = \sqrt{3}-2$ همین‌طور

$$4 < 5 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}-2 > 0$$

بنابراین $\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$ به این ترتیب عبارت مورد نظر

برابر است با $3-\sqrt{0}+\sqrt{3}-2+\sqrt{5}-2 = \sqrt{3}-1$.

۱۷۵۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{8\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{7}{2}}} = 2^{\frac{7}{8}} \times 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{8}{8}} = 2$$

۱۷۵۳- گزینه ۴ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{27}} - \frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{27} \times \sqrt[3]{3}} - \frac{\sqrt[5]{9} \times \sqrt[3]{27}}{\sqrt[5]{27} \times \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{27} \times \sqrt[3]{3}} = \frac{3-3}{\sqrt[5]{27} \times \sqrt[3]{3}} = 0$$

۱۷۵۴- گزینه ۳ صورت و مخرج کسر را به شکل اعداد توان‌دار با نمای

گویا می‌نویسیم:

$$3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}} = 3^1 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}$$

$$2\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}} = 2^1 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$$

بنابراین

۱۷۵۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{x^3} \times \sqrt[3]{x^4} \times \sqrt{x^5} \times \sqrt[5]{x^6} = x^{\frac{3}{2}} \times x^{\frac{4}{3}} \times x^{\frac{5}{2}} \times x^{\frac{6}{5}} = x^{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{6}{5}} = x^{\frac{15}{6} + \frac{8}{6} + \frac{15}{6} + \frac{8}{6}} = x^{\frac{46}{6}} = x^{\frac{23}{3}}$$

$$= x^{\frac{30}{6} + \frac{10}{6} + \frac{20}{6} + \frac{5}{6}} = x^{\frac{65}{6}} = x^{\frac{10}{6}} \times x^{\frac{55}{6}} = x^{\frac{5}{3}} \times x^{\frac{55}{6}}$$

۱۷۵۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[5]{9} \times \sqrt[2]{3} = 9^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{5}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{4}{10} + \frac{15}{10}} = 3^{\frac{19}{10}} = \sqrt[10]{3^{19}}$$

پس

$$\frac{5}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 5$$

در نتیجه $\sqrt[5]{37-n} = \sqrt[5]{37-5} = \sqrt[5]{32} = 2$.

۱۷۵۷- گزینه ۴ چون x عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل

زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{x} \sqrt{x} = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2} \times x = 3 \Rightarrow \sqrt{x^3} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3$$

بنابراین $x = 9$ و در نتیجه

$$\sqrt{x} \sqrt{x} = \sqrt{9} \sqrt{9} = \sqrt{9 \times 9} = 3 \sqrt{3^2} = 3 \sqrt{3}$$

۱۷۶۹- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{4}}, \quad \sqrt{b\sqrt{a}} = b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}}$$

بنابراین

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \times \sqrt{b\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}} \times b^{\frac{3}{4}} = (a^{\frac{1}{4}})^3 \times (b^{\frac{1}{4}})^3$$

$$= (a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}})^3 = (2\sqrt[4]{2})^3 = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

راه حل دوم فرض کنید $a=1$ و $b=3$. در این صورت

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \times \sqrt{b\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{3}} \times \sqrt{3\sqrt{1}} = \sqrt[4]{3} \times \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

۱۷۷۰- گزینه ۳ راه حل اول چون $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$ پس $0 < a < 1$ و در

نتیجه واضح است که $\sqrt[4]{a} > \sqrt{a}$ و همچنین از فرض $0 < a < 1$ نتیجه می شود $a^8 > a^9$ و در نتیجه $\sqrt[4]{a^8} > \sqrt[4]{a^9}$ ، یعنی $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt[4]{a^3}$.

ولی $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt[4]{a^3}$ درست نیست، زیرا

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^9 < a^8 \Rightarrow \sqrt[4]{a^9} < \sqrt[4]{a^8} \Rightarrow \sqrt[4]{a^3} < \sqrt[3]{a^2}$$

راه حل دوم چون $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$ پس $a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{1}{2}}$ و چون $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ پس $0 < a < 1$.

بررسی گزینه ها به صورت زیر است:

$$\frac{1}{4} < 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{4}} > a \Rightarrow \sqrt[4]{a} > a \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} > a \Rightarrow \sqrt{a} > a \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$\frac{3}{2} > \frac{2}{3} \Rightarrow a^{\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sqrt{a^3} < \sqrt[3]{a^2} \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} > \sqrt[4]{a^3} \quad \text{گزینه (۴)}$$

بنابراین گزینه (۳) نادرست است.

۱۷۷۱- گزینه ۴ طرفین رابطه $x+y=4$ را به توان دو می رسانیم:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 16$$

چون $xy=2$ پس

$$x^2 + y^2 + 4 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 12$$

حال، طرفین رابطه اخیر را به توان دو می رسانیم:

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 144 \Rightarrow x^4 + y^4 + 2(xy)^2 = 144$$

$$x^4 + y^4 + 2 \times 4 = 144 \Rightarrow x^4 + y^4 = 136$$

۱۷۷۲- گزینه ۳ اعداد $14+6\sqrt{5}$ و $14-6\sqrt{5}$ مربع کامل هستند.

زیرا $14+6\sqrt{5} = 9+5+2 \times 3\sqrt{5} = 3^2 + \sqrt{5}^2 + 2(3\sqrt{5}) = (3+\sqrt{5})^2$

به همین ترتیب $14-6\sqrt{5} = (3-\sqrt{5})^2$. بنابراین

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}} = 3+\sqrt{5} - (3-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$$

۱۷۷۳- گزینه ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج،

$$(\sqrt{x+11} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x+11} + \sqrt{x+3}) = (x+11) - (x+3) = 8$$

بنابراین

$$\sqrt{2}(\sqrt{x+11} + \sqrt{x+3}) = 8 \Rightarrow \sqrt{x+11} + \sqrt{x+3} = 4\sqrt{2}$$

۱۷۶۳- گزینه ۲ راه حل اول فرض کنید $\sqrt[6]{2} = a$. در این صورت

$$\sqrt[6]{2} = a \Rightarrow 2^{\frac{1}{6}} = a \Rightarrow (2^{\frac{1}{6}})^3 = a^3 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = a^3 \Rightarrow \sqrt{2} = a^3$$

$$\sqrt[6]{2} = a \Rightarrow 2^{\frac{1}{6}} = a \Rightarrow (2^{\frac{1}{6}})^2 = a^2 \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}} = a^2 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = a^2$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[6]{2}} = \frac{a^3 + a^2}{1 + a} = \frac{a^2(a+1)}{1+a} = a^2 = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[6]{2} + 1)}{1 + \sqrt[6]{2}} = \sqrt[3]{2}$$

۱۷۶۴- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$x \left(\sqrt{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^9}} \right) = \sqrt{x^8 \left(\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^9} \right)} = \sqrt{\frac{x^8}{x^8} - \frac{x^8}{x^9}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

در نتیجه $\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{x}$ پس

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{128} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{128}{129}$$

راه حل دوم از تساوی داده شده نتیجه می شود

$$x \sqrt{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^9}} = \frac{1}{x} \Rightarrow x \left(\frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} - 1 = \left(\frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{128} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = \frac{128}{129}$$

۱۷۶۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که x مثبت است. می توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} \sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{\sqrt{9x}} = \sqrt[6]{9x} \Rightarrow (\sqrt[4]{3})^{12} = (\sqrt[6]{9x})^{12}$$

$$3^3 = (9x)^2 \Rightarrow 3\sqrt{3} = 9x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۷۶۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $x > 0$. می توان نوشت

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x}\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x^3\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x^3x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{1}{x^4} \times \frac{1}{x^{12}} \times \frac{1}{x^{24}} = \frac{1}{x^{36}} = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3^6} \times \frac{1}{3^2} \Rightarrow x^4 = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{9}{x^{24}} = \frac{9}{3^{12}} \Rightarrow x^{24} = 3^{12} \Rightarrow (x^2)^{12} = 3^{12} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = 9$$

۱۷۶۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[6]{9^3 x - 6} = \sqrt[6]{(3^2)^3 (x-2)} = \sqrt[6]{3^6 (x-2)} = 3 \sqrt[6]{x-2} = 3^{x-2}$$

$$\sqrt[6]{27^4 x - 2} = \sqrt[6]{3^3 (4x-2)} = 3^{\frac{3(4x-2)}{6}} = 3^{2x-2}$$

بنابراین معادله مورد نظر می شود

$$\frac{3^{x-2}}{3^{2x-2}} = 27 \Rightarrow 3^{x-2-(2x-2)} = 3^3 \Rightarrow 3^{-x} = 3^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -1$$

۱۷۶۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $a > 0$. در تساوی داده شده اعداد را

با نمای گویا می نویسیم و ساده می کنیم:

$$\frac{\frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{a^6}}{\frac{1}{a^4} \times \frac{1}{a^5} \times \frac{1}{a^{20}}} = \frac{a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}}} = \frac{a^1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow (a^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2$$

بنابراین $a=9$.

۱۷۸۰- گزینه ۳ به کمک اتحاد جمله مشترک عبارت را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$A = x(x-1)(x+1)(x-2)+1 = (x^2-x)(x^2-x-2)+1 \\ = (x^2-x)((x^2-x)-2)+1 = (x^2-x)^2 - 2(x^2-x) + 1$$

اکنون به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = (x^2 - x - 1)^2$$

۱۷۸۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$x^2 + \frac{4}{9x^2} = (x + \frac{2}{3x})^2 - 2(x)(\frac{2}{3x}) \\ = (x + \frac{2}{3x})^2 - \frac{4}{3} = 3^2 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3}$$

$$\therefore 3x^2 + \frac{4}{3x^2} = 3(x^2 + \frac{4}{9x^2}) = 3 \times \frac{23}{3} = 23$$

۱۷۸۲- گزینه ۳ توجه کنید که $\frac{1}{a} = 2 + |a| > 0$ ، در نتیجه $a > 0$.

بنابراین، فرض مسئله به شکل $\frac{1}{a} - a = 2$ درمی‌آید. اکنون توجه کنید که

$$\frac{1}{a} + |a| = \frac{1}{a} + a > 0. \text{ از طرف دیگر، } (a + \frac{1}{a})^2 - (a - \frac{1}{a})^2 = 4.$$

$$(a + \frac{1}{a})^2 = 4 + 4 = 8 \xrightarrow{a + \frac{1}{a} > 0} a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{2}$$

۱۷۸۳- گزینه ۱ توجه کنید که $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$. بنابراین

$$(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^3$$

و در نتیجه

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{2}-1$$

۱۷۸۴- گزینه ۲ فرض کنید $A = (\frac{1}{3^8} + 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)$

دو طرف این تساوی را در $3^8 - 1$ ، که همان a است، ضرب می‌کنیم:

$$(\frac{1}{3^8} - 1)A = (\frac{1}{3^8} - 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)$$

$$= ((\frac{1}{3^8})^2 - 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1) = (\frac{1}{3^4} - 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)$$

$$= (\frac{1}{3^2} - 1)(\frac{1}{3^2} + 1) = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore A = \frac{2}{\frac{1}{3^8} - 1} = \frac{2}{3^8 - 1}$$

۱۷۸۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$$

بنابراین

$$10^2 = 66 - 2(ab + bc - ca) \Rightarrow 34 = -2(ab + bc - ca)$$

$$\therefore ab + bc - ca = -17$$

۱۷۸۶- گزینه ۴ بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله،

$$(a-b)^3 - a^3 + b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3$$

$$= -3ab(a-b) = -3ab(\frac{3}{ab}) = -9$$

۱۷۷۴- گزینه ۱ ابتدا عبارت را به صورت $\frac{\sqrt{\sqrt{24}-4} - \sqrt{\sqrt{24}+4}}{\sqrt{\sqrt{24}+4} - \sqrt{\sqrt{24}-4}}$

می‌نویسیم. اکنون با مخارج مشترک‌گیری و استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود که عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(\sqrt{24}-4) - (\sqrt{24}+4)}{\sqrt{\sqrt{24}+4} \times \sqrt{\sqrt{24}-4}} = \frac{-8}{\sqrt{(\sqrt{24})^2 - 4^2}} = \frac{-8}{\sqrt{8}} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

۱۷۷۵- گزینه ۴ به کمک اتحاد مربع مجموع سه جمله عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

بنابراین

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc - 3a^2 - 3b^2 - 3c^2$$

$$+ 6ab - 6ac + 6bc + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

$$= 8ab - 8ac + 4bc = 4(2ab - 2ac + bc)$$

۱۷۷۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(x^2 - 2x)^3 - 2x^6 = x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3 - 2x^6 \\ = x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 8x^3$$

بنابراین ضریب x^4 برابر ۱۰ است.

۱۷۷۷- گزینه ۲ اگر دو طرف تساوی $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{4}$ را به توان سه

برسانیم، از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله نتیجه می‌شود

$$a - b - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = 4 \Rightarrow a - b - 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{4}) = 4$$

$$a - b - 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = 4 \Rightarrow a - b - 2(2) = 4 \Rightarrow a - b = 10$$

۱۷۷۸- گزینه ۴ راه حل اول بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}) = 4(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}) \quad (1)$$

از طرف دیگر، $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^2 + \frac{2}{ab} = 4^2 + \frac{2}{3}$. بنابراین از تساوی (۱)

نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = 4(16 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}) = 68$$

راه حل دوم توجه کنید که اگر طرفین رابطه $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4$ را به توان سه برسانیم.

$$(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^3 = 4^3 \Rightarrow \frac{1}{a^3} - \frac{3}{a^2b} + \frac{3}{ab^2} - \frac{1}{b^3} = 64$$

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} - \frac{3}{ab}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = 64$$

$$ab = 3, \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = 64 + \frac{3}{3} \times 4 = 68$$

۱۷۷۹- گزینه ۴ اگر از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم، عبارت مورد نظر

برابر است با

$$\frac{5}{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}^2 - \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2)} = \frac{5}{\sqrt[3]{3}^3 + \sqrt[3]{2}^3} = \frac{5}{3+2} = 1$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$$

$$b = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\text{پس } (a-b)^6 = (\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)^6 = (-2)^6 = 64$$

۱۷۹۴- گزینه ۳ طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم

$$(\sqrt{x-a}+\sqrt{x})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x})=a+1$$

$$x-a-x=a+1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۱۷۹۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc-ab-ac)$$

$$\text{پس } a-b-c = \pm 6. \text{ بنابراین } (a-b-c)^2 = 28+2(4) = 36$$

۱۷۹۶- گزینه ۴ توجه کنید که $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

دو طرف تساوی داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{\sqrt{3}-2})^3 + (\sqrt[3]{\sqrt{3}+2})^3 \\ &+ 3\sqrt[3]{\sqrt{3}-2} \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} (\sqrt[3]{\sqrt{3}-2} + \sqrt[3]{\sqrt{3}+2}) \\ &= \sqrt{3}-2 + \sqrt{3}+2 + 3\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}(x) = 2\sqrt{3}-3x \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین } x^3 + 3x = 2\sqrt{3}$$

۱۷۹۷- گزینه ۲ اگر تساوی دوم را یک بار با تساوی اول جمع و بار دیگر

از آن کم کنیم، به دست می‌آید

$$a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2b = 125 \Rightarrow (a+b)^3 = 125 \Rightarrow a+b=5$$

$$a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b = 27 \Rightarrow (a-b)^3 = 27 \Rightarrow a-b=3$$

$$\text{بنابراین } \frac{a+b}{a-b} = \frac{5}{3}$$

۱۷۹۸- گزینه ۳ بنابر فرض،

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a + \frac{1}{a} - 2 = 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 4$$

و اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به دست می‌آید

$$a^3 + \frac{1}{a^3} + 3a + \frac{3}{a} = 64$$

$$\text{به این ترتیب } a^3 + \frac{1}{a^3} = 64 - 3(4) = 52$$

۱۷۹۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$a = \sqrt[3]{2 \times 9} + \sqrt[3]{2 \times 15} + \sqrt[3]{2 \times 25} = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{25})$$

$$= \sqrt[3]{2}((\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{5})^2)$$

در نتیجه، از اتحاد چاق و لاغر نتیجه می‌شود:

$$ab = (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5})((\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{5})^2)(\sqrt[3]{2})$$

$$= ((\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{5})^3)(\sqrt[3]{2}) = (3-5)\sqrt[3]{2} = -2\sqrt[3]{2}$$

۱۷۸۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$a^3 + b^3 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab)$$

از طرف دیگر،

$$a+b = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{3}}{3-2} = 2\sqrt{3}$$

$$ab = \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$\text{بنابراین } a^3 + b^3 = 2\sqrt{3}(4 \times 3 - 3) = 18\sqrt{3}$$

۱۷۸۸- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow 25 = 17 - 2ab \Rightarrow ab = -4$$

بنابراین، طبق اتحاد چاق و لاغر،

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) = 5(17-4) = 65$$

راه حل دوم توجه کنید که $a=4$ و $b=-1$ در تساوی‌های داده شده صدق

می‌کنند، در این صورت $a^3 - b^3 = 65$

۱۷۸۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = 7 \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{a^3 b^3} = 7 \xrightarrow{ab=1} a^3 + b^3 = 7$$

از طرف دیگر،

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 7+2=9$$

چون a و b عددهایی منفی‌اند، پس $a+b$ نیز منفی است، در نتیجه

$$a+b = -3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (-3)(7-1) = -18$$

۱۷۹۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a^{10} + a^5 + 1) = (a^5 - 1)(a^{10} + a^5 + 1)$$

$$= (a^5 - 1)((a^5)^2 + a^5 \times 1 + 1) = (a^5)^3 - 1 = a^{15} - 1$$

$$= (\sqrt[5]{3})^{15} - 1 = 3^3 - 1 = 26$$

۱۷۹۱- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 + 2 \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 8^2 + 2 = 66$$

۱۷۹۲- گزینه ۳ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را با ۱ جمع می‌کنیم:

$$a + \frac{1}{a+1} = 4 \Rightarrow a + 1 + \frac{1}{a+1} = 5$$

اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(a+1+\frac{1}{a+1})^2 = 5^2 \Rightarrow (a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2} + 2(a+1) \times \frac{1}{a+1} = 25$$

$$(a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2} + 2 = 25 \Rightarrow (a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2} = 25-2=23$$

۱۷۹۳- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا مقدار $(a-b)^2$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-b)^2 = (\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}})^2$$

$$= 3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}-2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 6-2=4$$

بنابراین

$$(a-b)^6 = ((a-b)^2)^3 = 4^3 = 64$$

۱۸۰۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} A &= (x-2y)(x^5 + 2x^3y + 4x^2y^2 + 8xy^3 + 16y^4) \\ &= (x-2y)(x^5 + x^3(2y) + x^2(2y)^2 + x(2y)^3 + (2y)^4) \\ &= x^6 - (2y)^6 = x^6 - 32y^6 \end{aligned}$$

بنابراین به ازای $x = 2\sqrt[5]{2}$ و $y = \sqrt[5]{4}$ مقدار A برابر است با

$$A = (2\sqrt[5]{2})^6 - 32(\sqrt[5]{4})^6 = 32 \times 2 - 32 \times 4 = -64$$

۱۸۰۱- گزینه ۲ مقدار عبارت $\frac{a+b}{a-b}$ مثبت است، بنابراین این عبارت را

می‌توان به صورت $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ نوشت. به این ترتیب

$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab}} = \sqrt{\frac{8ab + 2ab}{8ab - 2ab}} = \sqrt{\frac{10ab}{6ab}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

۱۸۰۲- گزینه ۱ راه‌حل اول با توجه به اینکه $x \neq 0$ ، دو طرف تساوی

داده شده را معکوس می‌کنیم و مقدار $x + \frac{1}{x}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2+1}{x} = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4$$

برای محاسبه مقدار $\frac{x^2}{x^4+1}$ ، ابتدا مقدار معکوس آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{x^4+1}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$$

$$\text{بنابراین } \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{14}$$

راه‌حل دوم از تساوی $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ نتیجه می‌شود

$$x^2 + 1 = 4x \Rightarrow x^2 = 4x - 1$$

دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $x^4 = 16x^2 - 8x + 1$. به جای x^2 قرار می‌دهیم $4x - 1$:

$$x^4 = 16(4x - 1) - 8x + 1 = 64x - 16x - 8x + 1 = 40x - 15$$

$$\text{بنابراین } \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{4x-1}{40x-14} = \frac{4x-1}{14(4x-1)} = \frac{1}{14}$$

۱۸۰۳- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} &\sqrt{\sqrt{5+2}\sqrt{5-2}\sqrt{5-2}} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{5+2})^3 \times \sqrt[3]{(\sqrt{5-2})^2 \times \sqrt[3]{\sqrt{5-2}}}} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{5+2})^3 (\sqrt{5-2})^2 (\sqrt{5-2})} = \sqrt[3]{(\sqrt{5+2})^3 (\sqrt{5-2})^3} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5+2})(\sqrt{5-2})} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2} = \sqrt{5-4} = 1 \end{aligned}$$

۱۸۰۴- گزینه ۳ راه‌حل اول فرض کنید

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{3-\sqrt{8}} = a$$

طرفین این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^2 = 3 + \sqrt{8} + 3 - \sqrt{8} + 2\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = 6 + 2\sqrt{9-8} = 8$$

بنابراین $a = \sqrt{8}$. از طرف دیگر، می‌دانیم

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

پس مقدار عبارت داده شده برابر $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ یا همان ۴ است.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

$$\text{پس } (\sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}) \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1) \sqrt{2} = 4$$

۱۸۰۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

از طرف دیگر،

$$a+b+c = 6abc \Rightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 6 \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 6$$

$$\text{بنابراین } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = 13 \text{ در نتیجه } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2(6) = 13$$

۱۸۰۶- گزینه ۴ ابتدا دو طرف تساوی را به توان سه می‌رسانیم و از

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$1 = (\sqrt[3]{a+5} - \sqrt[3]{a-5})^3 = a+5 - (a-5) - 3\sqrt[3]{a^2-25}(\sqrt[3]{a+5} - \sqrt[3]{a-5})$$

$$\text{در نتیجه } \sqrt[3]{a^2-25} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2-25} = 1 \Rightarrow a^2-25 = 1$$

$$a^2 - 25 = 24$$

۱۸۰۷- گزینه ۲ ابتدا به کمک اتحاد $a^2 - \frac{1}{a^2} = 2$ مقدار

$a - \frac{1}{a}$ را حساب می‌کنیم:

$$(a - \frac{1}{a})^2 = 18 - 2 = 16 \Rightarrow a - \frac{1}{a} = \pm 4$$

از $a < 1$ نتیجه می‌شود $a < \frac{1}{a}$. بنابراین $a - \frac{1}{a} = -4$ درست است. اکنون

با استفاده از اتحاد $(a - \frac{1}{a})^3 = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3(a - \frac{1}{a})$ مقدار $a^3 - \frac{1}{a^3}$ را

حساب می‌کنیم:

$$(-4)^3 = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3(-4) \Rightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} = -76$$

۱۸۰۸- گزینه ۳ طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3})((\sqrt[3]{5})^2 - \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{3})^2) = (\sqrt[3]{5})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 5 + 3 = 8$$

$$\text{بنابراین } \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3} = \frac{8}{a}$$

۱۸۰۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)^2 = (a-b)^2(a^2 + ab + b^2)^2$$

$$= ((a-b)(a^2 + ab + b^2))^2 = (a^3 - b^3)^2$$

اگر تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$5a^3 - 5b^3 = 15 \Rightarrow a^3 - b^3 = 3$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۹ است.

۱۸۱۶- گزینه ۱ صورت و مخرج کسر دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 2x^2 + 5x - 2x - 5 = x(2x+5) - (2x+5) = (2x+5)(x-1)$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(2x+5)} \times \frac{(2x+5)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{1}{x}$

۱۸۱۷- گزینه ۱ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^3+x} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x}$$

۱۸۱۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{a^6 - a^4 + a^2 - 1}{-a^2 + a^4} = \frac{a^5(a - \frac{1}{a}) + a(a - \frac{1}{a})}{a^3(a - \frac{1}{a})} = \frac{a^5 + a}{a^3} = a^2 + \frac{1}{a^3}$$

$$= a^2 + \frac{1}{a^3} = (a - \frac{1}{a})^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$$

۱۸۱۹- گزینه ۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$a^6 - a^4 - a^2 + 1 = a^4(a^2 - 1) - (a^2 - 1) = (a^2 - 1)(a^4 - 1)$$

$$a^3 - a^2 - a + 1 = a^2(a - 1) - (a - 1) = (a - 1)(a^2 - 1)$$

$$\frac{(a^2 - 1)(a^2 - 1)}{(a - 1)(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1}{a - 1}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{a^2 - 1}{a - 1}$ چون

$$a^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$$

پس عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{4-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 3\sqrt{2}+3$$

۱۸۲۰- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $A = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ در این صورت، بنابر

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله،

$$A^3 = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3 = a - b - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$$

$$= 76 - 3\sqrt[3]{ab}(A) = 76 - 3A$$

بنابراین

$$A^3 + 3A - 76 = 0 \Rightarrow A^3 - 64 - 12 + 3A = 0 \Rightarrow A^3 - 4^3 + 3(A - 4) = 0$$

$$(A - 4)(A^2 + 4A + 16) + 3(A - 4) = 0 \Rightarrow (A - 4)(A^2 + 4A + 19) = 0$$

$$\text{چون } A^2 + 4A + 19 = (A + 2)^2 + 15 \neq 0, A - 4 = 0 \text{ پس } A = 4 \text{ در نتیجه } A = 4$$

۱۸۲۱- گزینه ۳ عبارت را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$2a^2 - 3ab - 2b^2 = (2a^2 - 4ab) + (ab - 2b^2) = 2a(a - 2b) + b(a - 2b)$$

$$= (a - 2b)(2a + b)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $a - 2b$ وجود دارد.

۱۸۲۲- گزینه ۲ راه حل اول فرض کنید $x^2 - x = A$ در این صورت

$$(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = A^2 - 14A + 24 = (A - 2)(A - 12)$$

اکنون توجه کنید که

$$A - 2 = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

$$A - 12 = x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

۱۸۱۰- گزینه ۲ با توجه به اینکه $x \neq \pm 1$ ، دو طرف معادله داده شده را

در $x^2 - 1$ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود

$$(x^2 - 1)(1 + x + \dots + x^5) = x^6 + x^5 - x^2 + 1$$

$$(x + 1)(x - 1)(1 + x + \dots + x^5) = x^6 + x^5 - x^2 + 1$$

$$(x + 1)(x^6 - 1) = x^6 + x^5 - x^2 + 1$$

$$x^5 + x^6 - x - 1 = x^6 + x^5 - x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۸۱۱- گزینه ۲ راه حل اول عبارت مورد نظر را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 - 2x + 9x - 3 = 2x(3x - 1) + 3(3x - 1)$$

$$= (3x - 1)(2x + 3)$$

پس عامل $3x - 1$ در تجزیه عبارت وجود دارد.

راه حل دوم عبارت مورد نظر را A می‌نامیم و آن را به کمک اتحاد جمله مشترک به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$A = 6x^2 + 7x - 3 \Rightarrow 6A = 36x^2 + 42x - 18 = (6x - 2)(6x + 9)$$

$$= 2 \times 3(3x - 1)(2x + 3)$$

بنابراین $A = (3x - 1)(2x + 3)$ و عامل $3x - 1$ در تجزیه وجود دارد.

۱۸۱۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$x^2 - 2x + 4y - y^2 - 3 = x^2 - 2x + 1 - (y^2 - 4y + 4) = (x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

$$= (x - 1 - (y - 2))(x - 1 + y - 2) = (x - y + 1)(x + y - 3)$$

بنابراین $x - y + 1$ عاملی از عبارت است.

۱۸۱۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$x^4 + 16x^2 + 100 = (x^4 + 20x^2 + 100) - 4x^2 = (x^2 + 10)^2 - 4x^2$$

$$= (x^2 + 10 - 2x)(x^2 + 10 + 2x)$$

بنابراین $x^2 - 2x + 10$ عامل $x^4 + 16x^2 + 100$ است.

۱۸۱۴- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + 1) + 2x^2 + 2x$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x) = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

بنابراین $x^2 + x + 1$ عامل $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ است.

راه حل دوم توجه کنید که

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1)$$

$$= x^2(x + 1) + (x + 1)^2 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

بنابراین $x^2 + x + 1$ عامل $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ است.

۱۸۱۵- گزینه ۳ ابتدا به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله، عبارت را

به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $x^2 + y^2 - xy$ وجود دارد.

۱۸۲۸- گزینه ۱ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2(\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-2) - 2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{8-2x}{x-4} = -\frac{2(x-4)}{x-4} = -2$$

۱۸۲۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 b^2}, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 b^2} \div \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab} = \frac{a^3 - b^3}{(a^2 + b^2 + ab)ab} = \frac{(a-b)(a^2 + b^2 + ab)}{(a^2 + b^2 + ab)ab}$$

$$= \frac{a-b}{ab} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = -2\sqrt{2}$$

۱۸۳۰- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$a^6 + a^2 + 1 = a^6 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2$$

$$= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a-1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} = a^3 - 1 = 5 - 1 = 4$$

۱۸۳۱- گزینه ۲ راه حل دوم اگر صورت و مخرج عبارت داده شده را در $(a+1)$ ضرب کنیم،

می‌توان نوشت

$$\frac{(a+1)(a-1)(a^6 + a^2 + 1)}{(a+1)(a^2 - a + 1)} = \frac{(a^2 - 1)(a^6 + a^2 + 1)}{a^3 + 1}$$

$$= \frac{a^6 - 1}{a^3 + 1} = \frac{(a^3 - 1)(a^3 + 1)}{(a^3 + 1)} = a^3 - 1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر به ازای $a = \sqrt[3]{5}$ برابر است با $a^3 - 1 = 5 - 1 = 4$.

۱۸۳۲- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-2}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2(\sqrt{2}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(2-2)}{2(2-2)} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

۱۸۳۳- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا مخرج کسرها را گویا می‌کنیم، سپس

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} + \frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} + \frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2} = -1-\sqrt{2} + 3+\sqrt{2} = 2$$

۱۸۳۴- گزینه ۲ راه حل دوم ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}+7-\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{10-2\sqrt{2}}{5-4\sqrt{2}} = \frac{2(5-\sqrt{2})}{5-4\sqrt{2}} = 2$$

بنابراین $x+1$ ، $x-2$ ، $x-4$ و $x+3$ عامل‌های عبارت مورد نظر هستند. اکنون توجه کنید که

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3), \quad x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3), \quad x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

بنابراین $x^2 - 2x - 3$ عامل عبارت مورد نظر نیست.

۱۸۳۵- گزینه ۲ با توجه به عامل‌های عبارت‌های ذکر شده در گزینه‌ها، که در راه حل اول نوشته‌ایم، کافی است بررسی کنیم که کدام یک از عبارت‌های $x+1$ ، $x+3$ ، $x-2$ ، $x-3$ و $x-4$ عامل عبارت داده شده در صورت سؤال نیست.

فرض کنید $P(x) = (x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24$. در این صورت

$$P(-1) = 4 - 28 + 24 = 0, \quad P(-3) = 144 - 168 + 24 = 0$$

$$P(3) = 36 - 84 + 24 = -24 \neq 0$$

پس $x-3$ عامل عبارت مورد نظر نیست. در نتیجه گزینه (۲) عامل عبارت مورد نظر نیست.

۱۸۳۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$4x^6 + 3x^2 + 1 = (4x^6 + 4x^2 + 1) - x^2 = (2x^2 + 1)^2 - x^2$$

$$= (2x^2 + 1 - x)(2x^2 + 1 + x)$$

بنابراین عامل‌های $4x^6 + 3x^2 + 1$ عبارت‌های $2x^2 - x + 1$ و $2x^2 + x + 1$ هستند، یعنی مقادیر ممکن a عددهای -1 و 1 هستند که حاصل ضرب آن‌ها برابر -1 است.

۱۸۳۷- گزینه ۴ توجه کنید که با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله

می‌توان نوشت

$$4x^6 - 16x^2 y^2 + 9y^4 = 4x^6 - 12x^2 y^2 + 9y^4 - 4x^2 y^2$$

$$= (2x^2 - 3y^2)^2 - 4x^2 y^2$$

طبق اتحاد مزدوج این عبارت به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(2x^2 - 2xy - 3y^2)(2x^2 + 2xy - 3y^2)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $2x^2 - 2xy - 3y^2$ وجود دارد.

۱۸۳۸- گزینه ۱ عبارت را ابتدا به کمک فاکتورگیری و سپس به کمک

اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$3a^3 - 3ab^2 - 2a^2 b + 2b^3 = 3a(a^2 - b^2) - 2b(a^2 - b^2)$$

$$= (a^2 - b^2)(3a - 2b) = (a-b)(a+b)(3a - 2b)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $3a - 2b$ وجود دارد.

۱۸۳۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1), \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x+3)(x-1)}{x^2 - x + 1} = x+3$$

۱۸۴۰- گزینه ۳ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2 - (x-1) - (x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2 - 2x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2}{x+1}$$

۱۸۳۳- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt[4]{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[4]{2}+1-\sqrt[4]{2}=1$.

راه حل دوم با مخرج مشترک گیری می توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} - \sqrt[4]{2} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{2}-1)}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} = 1$$

۱۸۳۴- گزینه ۲ صورت و مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$ را در $\sqrt[4]{2}-1$ ضرب

می کنیم: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1} \times \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1}$ بنابراین

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}+1} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

۱۸۳۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{8\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+1} = 8 \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = 8 \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{8(\sqrt{5}-1)^2}{5-1} = 2(\sqrt{5}-1)^2$$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5-4} = (\sqrt{5}-2)^2$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$2(\sqrt{5}-1)^2 - (\sqrt{5}-2)^2 = 2(6-2\sqrt{5}) - (9-4\sqrt{5}) = 3$$

۱۸۳۶- گزینه ۲ ابتدا مخرج کسر $\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ را گویا می کنیم. برای

این کار صورت و مخرج را در $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ضرب می کنیم:

$$\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

بنابراین $x=1+\sqrt{2}$ و در نتیجه $(x-1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$.

۱۸۳۷- گزینه ۲ برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج آن را در

مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})} = \frac{4+2\sqrt{4-3}}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

۱۸۳۸- گزینه ۳ چون در مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ ریشه سوم وجود دارد،

برای گویا کردن مخرج این کسر از اتحاد چاق و لاغر استفاده می کنیم.

به این ترتیب، صورت و مخرج این کسر را در

$$\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

به این ترتیب، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4} - (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4}) = 2\sqrt[3]{4}$$

۱۸۳۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$2 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$$

بنابراین

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - \frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$$

اکنون با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می کنیم:

$$A = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)} - \frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1} - \frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2})^3+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

۱۸۴۰- گزینه ۳ چون $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1 = \sqrt[3]{3}^2 + 1 \times \sqrt[3]{3} + 1^2$ برای اینکه

مخرج کسر اول را گویا کنیم (با استفاده از اتحاد چاق و لاغر)، صورت و مخرج

آن را در $\sqrt[3]{3}-1$ ضرب می کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}+1^2} \times \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{\sqrt[3]{3}^3-1} = \frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{3-1} = \sqrt[3]{3}-1$$

به همین ترتیب،

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{2}+1} \times \frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{2}^3+1} = \frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{2+1} = \sqrt[3]{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{2}+1 = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$.

۱۸۴۱- گزینه ۲ باقی مانده تقسیم چندجمله ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر

$$P(2) = 2^5 - 3(2)^3 + 3(2)^2 - 2 + 2 = 20.$$

۱۸۴۲- گزینه ۲ باقی مانده تقسیم چندجمله ای $P(x)$ بر $x-1$ برابر

است با $P(1) = 3 - 4a - 1 = -4a + 2$. چون چندجمله ای $P(x)$ بر $x-1$

بخش پذیر است، پس این باقی مانده صفر است، در نتیجه

$$-4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۱۸۵۰- گزینه ۳ بنابر فرض مسئله،

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1 = (x-1)Q(x) + 3 \quad (۱)$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-3$ برابر با $Q(3)$ است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=3$ ، به دست می‌آید $Q(3)+3=(3-1)Q(3)+3$ در نتیجه $Q(3)=17$.

۱۸۵۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $P(x)=(x-1)^3+7$ در نتیجه،

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-\sqrt[3]{3}-1$ برابر است با

$$P(\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3}+1-1)^3+7=3+7=10.$$

۱۸۵۲- گزینه ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+2)^2$ بخش‌پذیر

است، پس بر $x+2$ نیز بخش‌پذیر است، بنابراین

$$P(-2)=0 \Rightarrow -32+48+2a+16=0 \Rightarrow a=-16$$

۱۸۵۳- گزینه ۱ چون ۱، ۲ و ۳ ریشه‌های $P(x)$ هستند، پس $x-1$ ،

$x-2$ و $x+2$ عامل‌های $P(x)$ هستند. از طرف دیگر، چون $P(x)$ درجه سوم است، پس عامل دیگری ندارد. بنابراین می‌توان نوشت

$$P(x)=a(x-1)(x-2)(x+2)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$ ، چون $P(-1)=24$ ، به دست می‌آید

$$24=a(-2)(-3)(1) \Rightarrow a=4$$

به این ترتیب، $P(x)=4(x-1)(x-2)(x+2)$ و باقی‌مانده تقسیم

چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ برابر است با

$$P(-3)=4(-3-1)(-3-2)(-3+2)=-80.$$

۱۸۵۴- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-3)$ بر $x-5$

برابر است با $P(2)$. بنابراین $P(5-3)=P(2)$. اگر در تساوی

$$P(x+3)=x^3-mx^2+mx+2$$

$$P(2)=(-1)^3-m(-1)^2+m(-1)+2=-3 \Rightarrow m=2$$

۱۸۵۵- گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر

است با $P(-4)$. اکنون اگر در تساوی $P^2(x)-8xP(x)=-16x^2$ قرار دهیم $x=-4$ ، به دست می‌آید

$$P^2(-4)+32P(-4)+16^2=0 \Rightarrow (P(-4)+16)^2=0 \Rightarrow P(-4)=-16$$

۱۸۵۶- گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-1$ برابر

$P(2)$ است. اگر در تساوی $P(x-2)=x^2-x^2+4m$ قرار دهیم

$x=4$ ، مقدار $P(2)$ به دست می‌آید: $P(2)=64-16+4m=48+4m$.

$$48+4m=4 \Rightarrow m=-11$$

۱۸۵۷- گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-3$ برابر

$Q(3)$ است، پس $Q(3)=2$. اگر در تساوی $P(Q(x-1))=x^2-3x+2$

قرار دهیم $x=4$ ، نتیجه می‌شود

$$P(Q(3))=16-12+2 \Rightarrow P(2)=6$$

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=P(x+1)$ بر $x-1$ برابر $f(1)$ یا همان

$P(2)$ است که برابر ۶ است.

۱۸۵۸- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-1$ برابر

$Q(1)$ است. پس $Q(1)=5$. اگر در تساوی $P(x-3)=(x^2-3)Q(x+2)$

قرار دهیم $x=-1$ ، نتیجه می‌شود $P(-4)=-2Q(1)=-2 \times 5=-10$.

بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر -10 است.

۱۸۴۳- گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-4$ برابر با

$P(4)$ است، و چون بنابر فرض این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(4)=16$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{13}+bx^{97}-5 \Rightarrow P(4)=a(4)^{13}+b(4)^{97}-5$$

$$16=4^{13}a+4^{97}b-5 \Rightarrow 4^{13}a+4^{97}b=21$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر با

$P(-4)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(-4)=-4^{13}a-4^{97}b-5 \xrightarrow{4^{13}a+4^{97}b=21} -21-5=-26$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر -26 است.

۱۸۴۴- گزینه ۳ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ بخش‌پذیر است،

پس $P(-3)=0$ ، در نتیجه $P(-3)=(-3)^8+3(-3)^7+a(-3)^2-9=0$.

بنابراین $a=1$ و $P(x)=x^8+3x^7+x^2-9$. از طرف دیگر، باقی‌مانده

تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر است با $P(2-1)=P(1)$. اکنون

توجه کنید که $P(1)=1+3+1-9=-4$.

۱۸۴۵- گزینه ۴ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$

برابر با ۴ است، پس $P(2)=4$. در نتیجه، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای

$$P(2 \times 3 - 4) = P(2) = 4 \text{ بر } x-3 \text{ برابر است با } P(2 \times 3 - 4) = P(2) = 4.$$

۱۸۴۶- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-3$

برابر است با $P(3+1)=P(4)$. از طرف دیگر،

$$P(x-2)=x^2-3x+2 \xrightarrow{x=6} P(4)=(6)^2-3(6)+2=20.$$

۱۸۴۷- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$

برابر ۱۲ است، پس $P(2-1)=12$ ، یعنی $P(1)=12$. در نتیجه

$$P(1)=1+a+6+b+10=12 \Rightarrow a+b=-5$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+2)$ بر $x+3$ برابر است

با $P(-3+2)=P(-1)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-1)=1-a+6-b+10=17-(a+b)=17-(-5)=22$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۸۴۸- گزینه ۱ چون $x^2-1=(x-1)(x+1)$ ، پس چندجمله‌ای $P(x)$

بر چندجمله‌ای‌های $x-1$ و $x+1$ بخش‌پذیر است. بنابراین

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+1-2=0 \\ a+b-1-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

در نتیجه، $P(x)=2x^6-x^5+x-2$. به این ترتیب، باقی‌مانده تقسیم

چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $x-2$ برابر است با

$$P(2)=2 \times 2^6 - 2^5 + 2 - 2 = 96$$

۱۸۴۹- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x+1)$ و

$Q(x+1)$ بر $x-2$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ است، پس

$$P(2+1)=3 \Rightarrow P(3)=3, \quad Q(2+1)=5 \Rightarrow Q(3)=5$$

بنابراین، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)Q(x-1)$ بر $x-4$ برابر

$$\text{است با } P(4-1)Q(4-1)=P(3)Q(3)=3 \times 5=15.$$

۱۸۷۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$b = (a+b) - a = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{17+3}}{2} = \frac{\sqrt{17-3}}{2}$$

بنابراین $a-b=3$ و $ab=2$. به این ترتیب،

$$a^3 - b^3 + 9ab = (a-b)((a-b)^2 + 3ab) + 9ab = 3(9+6) + 18 = 63$$

۱۸۷۶- گزینه ۲ اگر دو طرف تساوی داده شده را در $1-\sqrt[3]{2}$ ضرب

کنیم، به دست می‌آید

$$(1+\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}) = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1}$$

$$(1+\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}) = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1}$$

$$(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}) = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1} \Rightarrow 1-2 = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1}$$

$$-1 = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{x^3-1} \Rightarrow x^3-1 = \sqrt[3]{2}-1 \Rightarrow x^3 = \sqrt[3]{2}$$

$$(x^3)^{16} = (\sqrt[3]{2})^{16} \Rightarrow x^{48} = 2^{\frac{16}{3}} = 4$$

۱۸۷۷- گزینه ۱ ابتدا همه ریشه‌ها را به ریشه ششم تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{\sqrt[3]{2}+1} \times \sqrt[6]{\sqrt[3]{2}-1} \times \sqrt[6]{\sqrt[3]{2}-1} &= \sqrt[6]{(\sqrt[3]{2}+1)^3 \times (\sqrt[3]{2}-1)^3} \times \sqrt[6]{\sqrt[3]{2}-1} \\ &= \sqrt[6]{(\sqrt[3]{2}+1)^3 (\sqrt[3]{2}-1)^3 (\sqrt[3]{2}-1)^3} \\ &= \sqrt[6]{((\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1))^3 (\sqrt[3]{2}-1)^3} = \sqrt[6]{(2-1)^3 (\sqrt[3]{2}-1)^3} = \sqrt[6]{1} = 1 \end{aligned}$$

۱۸۷۸- گزینه ۲ ابتدا مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} &= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{3+2+2\sqrt{6}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)} \times \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{2(6-4)} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{4} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{4} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۸۷۹- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$x^2y^2 - x^2 - y^2 - 4xy + 1 = x^2y^2 - 2xy + 1 - (x^2 + y^2 + 2xy)$$

$$= (xy-1)^2 - (x+y)^2 = (xy-1-x-y)(xy-1+x+y)$$

۱۸۸۰- گزینه ۳ چون چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است،

$$P(1-x) = ax^2 - x + 2a \quad P(2+1) = P(3) = 0 \quad \text{پس}$$

قرار دهیم $x = -2$ ، به دست می‌آید

$$P(3) = a(-2)^2 - (-2) + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

۱۸۶۸- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $A = \frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)\sqrt{4+\sqrt{7}}$ در این صورت،

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{9}(\sqrt{7}-1)^2(4+\sqrt{7}) = \frac{1}{9}(7+1-2\sqrt{7})(4+\sqrt{7}) \\ &= \frac{2}{9}(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7}) = \frac{2}{9}(16-7) = 2 \end{aligned}$$

چون A عددی مثبت است، $A = \sqrt{2}$.

۱۸۶۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}} &= \frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-\sqrt{3})} = \frac{2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1-3)(1-2)} = \frac{2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1-3)(1-2)} \end{aligned}$$

۱۸۷۰- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$

برابر ۱۲ است، پس $P(2-1) = 12$ ، یعنی $P(1) = 12$. در نتیجه

$$P(1) = 1 + a + 6 + b + 1 = 12 \Rightarrow a + b = -5$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x+2$ برابر است

با $P(-2+1) = P(-1)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-1) = 1 - a + 6 - b + 1 = 17 - (a+b) = 17 - (-5) = 22$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۸۷۱- گزینه ۱ توجه کنید که $x = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$ ، بنابراین

$$\sqrt[4]{x^{21}} = x^{\frac{21}{4}} = (3^{\frac{2}{3}})^{\frac{21}{4}} = 3^{\frac{7}{2}}$$

۱۸۷۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{12}} \times 4^{\frac{1}{36}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{5}{9}}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}} \times \sqrt[9]{16} = 2^{\frac{5}{9}} \times 2^{\frac{4}{9}} = 2$$

۱۸۷۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{b^3}} &= \sqrt{ab^{-3}} = a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}} \\ \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^5}} &= \sqrt[3]{b^2a^{-5}} = b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{5}{3}} \\ \sqrt[12]{a^{14}b^{10}} &= a^{\frac{14}{12}}b^{\frac{10}{12}} = a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}} \times \frac{2}{b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}} \times \frac{5}{3a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{5}{3} - \frac{7}{6}} b^{\frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{5}{6}} = a^{-1} b^0 = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

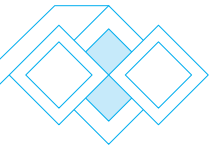
۱۸۷۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$3^{x-1} + 3^{-x-1} = 2 \Rightarrow \frac{3^x}{3} + \frac{3^{-x}}{3} = 2 \Rightarrow 3^x + 3^{-x} = 6$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$3^{2x} + 3^{-2x} + 2 \times 3^x \times 3^{-x} = 36 \Rightarrow 9^x + 9^{-x} + 2 = 36$$

$$9^x + 9^{-x} = 34$$

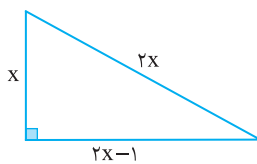


۱۸۸۹- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر و بنابر قضیه فیثاغورس، معادله $(2x-1)^2 = x^2 + (2x)^2$ به دست می آید. بنابراین

$4x^2 = x^2 + 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{3}, x = 2 + \sqrt{3}$
چون $2x-1$ اندازه یکی از ضلع های مثلث است، پس $2x-1 > 0$ ، یعنی $x > \frac{1}{2}$. بنابراین $x = 2 - \sqrt{3}$ قابل قبول نیست و در نتیجه $x = 2 + \sqrt{3}$ از

طرف دیگر محیط مثلث برابر است با

$$P = x + 2x + 2x - 1 = 5x - 1 = 5(2 + \sqrt{3}) - 1 = 9 + 5\sqrt{3}$$



۱۸۹۰- گزینه ۲ این دو عدد را x و $x+2$ در نظر می گیریم. بنابراین تساوی $x^3 - (x+2)^3 = 488$ برقرار است. پس

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 = 488 \Rightarrow 6x^2 + 12x - 480 = 0$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+10) = 0 \Rightarrow x = 8, x = -10$$

چون عددها طبیعی و زوج هستند، پس $x = -10$ قابل قبول نیست. بنابراین $x = 8$ و دو عدد مورد نظر ۸ و ۱۰ هستند و تفاضل مربعات آنها برابر $10^2 - 8^2 = 100 - 64$ ، یعنی ۳۶ است.

۱۸۹۱- گزینه ۲ دلتای معادله باید برابر با صفر باشد:

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4m(m+1) = 4(m+1)(m+1-m) = 4(m+1) = 0$$

بنابراین $m = -1$.

۱۸۹۲- گزینه ۲ اگر معادله حداکثر یک جواب حقیقی داشته باشد، باید $\Delta \leq 0$. پس

$$\Delta = 36 - 4 \times 4(k-2) \leq 0 \Rightarrow 68 - 16k \leq 0 \Rightarrow k \geq \frac{17}{4}$$

پس حداقل مقدار k برابر $\frac{17}{4}$ است.

۱۸۹۳- گزینه ۲ چون معادله $x^2 + 2x + b = 0$ دو جواب حقیقی دارد، پس $\Delta = 4 - 4b > 0$. اکنون دلتای معادله $x^2 - 6x + b + 8 = 0$ را حساب می کنیم. بنابراین، معادله اخیر نیز دو جواب دارد. $\Delta = 36 - 4(b+8) = 4 - 4b > 0$.

۱۸۹۴- گزینه ۲ راه حل اول

$$x^2 + (m-1)x + m - 2m^2 = 0$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-2m^2) = m^2 - 2m + 1 - 4m + 8m^2 = 9m^2 - 6m + 1 = (3m-1)^2$$

$$= 9m^2 - 6m + 1 = (3m-1)^2$$

$$x = \frac{(1-m) \pm \sqrt{(3m-1)^2}}{2} = \frac{(1-m) \pm (3m-1)}{2} \Rightarrow x_1 = 1-2m, x_2 = m$$

حالت اول

$$x_1 = 1-2m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}, x_2 = m < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 2$$

۱۸۸۱- گزینه ۳ چون معادله ریشه مضاعف دارد، پس $\Delta = 0$. در نتیجه

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 2^2 - 4 \times 2 \times (k-2) = 0 \Rightarrow 4 - 8(k-2) = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

۱۸۸۲- گزینه ۴ دلتای معادله باید مثبت باشد:

$$\Delta = 4k^2 - k = k(4k-1) > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{4} \text{ یا } k < 0$$

بنابراین k متعلق به مجموعه $\mathbb{R} - [\frac{1}{4}, 0]$ است.

۱۸۸۳- گزینه ۳ چون معادله $x^2 - 4x + k - 1 = 0$ جواب حقیقی ندارد، پس

$$\Delta = 16 - 4(k-1) < 0 \Rightarrow k-1 > 4 \Rightarrow k > 5$$

در معادله $x^2 + 2x - k + 6 = 0$ مقدار Δ را حساب می کنیم:

$$\Delta = 4 - 4(-k+6) = 4k - 20 = 4(k-5)$$

چون $k > 5$ ، پس $4(k-5) > 0$ و در نتیجه این معادله دو جواب حقیقی دارد.

۱۸۸۴- گزینه ۱ معادله را به روش تجزیه حل می کنیم:

$$(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{5}) = 0 \xrightarrow{x_1 < x_2} x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{5}$$

$$\text{بنابراین } x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 = 2 + 5 = 7$$

۱۸۸۵- گزینه ۱ چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از

جواب های معادله برابر ۱ است و دیگری $-\frac{\sqrt{12}}{3}$. چون $x_1 < x_2$ ، بنابراین

$$x_1 = -\frac{\sqrt{12}}{3}, x_2 = 1 \Rightarrow 3x_1 + x_2 = 1 - \sqrt{12}$$

۱۸۸۶- گزینه ۳ چون a جواب معادله $x^2 - x - 5 = 0$ است، پس در این

معادله صدق می کند، یعنی

$$a^2 - a - 5 = 0 \Rightarrow a^2 - a = 5$$

به همین ترتیب معلوم می شود $b^2 - b = 5$. بنابراین

$$(a^2 - a - 2)(b^2 - b + 2) = (5 - 2)(5 + 2) = 21$$

۱۸۸۷- گزینه ۱ اگر اندازه طول مستطیل را y و اندازه عرض آن را x

فرض کنیم، اندازه قطر آن می شود $\sqrt{x^2 + y^2}$. پس $y = 4 + x$ و $x^2 + y^2 = 30$ در نتیجه

$$x^2 + (4+x)^2 = 30 \Rightarrow x^2 + 16 + 8x + x^2 = 30$$

$$x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = -2 + \sqrt{11}, x = -2 - \sqrt{11}$$

اگر $x = -2 - \sqrt{11}$ ، x عددی منفی می شود، بنابراین قابل قبول نیست. پس $x = -2 + \sqrt{11}$ و در نتیجه $y = 4 + (-2 + \sqrt{11}) = 2 + \sqrt{11}$ بنابراین

مساحت مستطیل برابر است با

$$S = xy = (\sqrt{11} - 2)(\sqrt{11} + 2) = 11 - 4 = 7$$

۱۸۸۸- گزینه ۱ دو عدد را x و y می نامیم. پس $\frac{y}{x} = 4$ و

بنابراین $xy = x + y + 6$

$$x(4x) = x + 4x + 6 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 96 = 121 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 11}{8} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{3}{4}$$

بنابراین $y = 8$ و در نتیجه $y - x = 6$.

حالت دوم

$$x_1 = 1 - 2m < 2 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}, x_2 = m < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

پس می‌توان گفت $m \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$.

راه‌حل دوم اگر معادله را به صورت $x^2 + (m-1)x - m(2m-1) = 0$ بنویسیم، به کمک تجزیه می‌توانیم آن را حل کنیم. در واقع به دنبال دو عدد هستیم که حاصل ضربشان $-m(2m-1)$ و حاصل جمعشان $m-1$ باشد. پس یکی از این دو عدد $2m-1$ و دیگر $-m$ است. بنابراین $(x-m)(x+2m-1) = 0$. پس جواب‌های معادله $x_1 = 1-2m$ و $x_2 = m$ هستند. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

$$x_1 = 1 - 2m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}, x_2 = m < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 2$$

حالت اول

$$x_1 = 1 - 2m < 2 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}, x_2 = m < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

حالت دوم

بنابراین $m \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$.

۱۸۹۵-گزینه ۱ مجموع ضرایب معادله برابر است با $2-m+m-2=0$. پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است.

۱۸۹۶-گزینه ۲ در معادله $ax^2+bx+c=0$ اگر $a-b+c=0$ ، آن‌گاه

جواب‌های معادله $x=-\frac{c}{a}$ و $x=-1$ هستند.

در معادله $(\sin^2 \alpha)x^2 + x + \cos^2 \alpha = 0$.

$$a = \sin^2 \alpha, b = 1, c = \cos^2 \alpha \Rightarrow a - b + c = \cos^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha = 0$$

بنابراین $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\cot^2 \alpha$ توجه کنید که چون

$0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، پس $\cot \alpha > 1$ و در نتیجه $-\cot^2 \alpha < -1$ ، بنابراین

$$x_2^2 - x_1 = (-1)^2 - (-\cot^2 \alpha) = 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

۱۸۹۷-گزینه ۲ با توجه به شکل واضح است که ابعاد قاب $12+2x$ و $6+4x$ است. بنابراین مساحت قاب برابر است با $(12+2x)(6+4x)$. پس

$$(6+4x)(12+2x) = 104 \Rightarrow 2x^2 + 15x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -8$$

$x = -8$ قابل قبول نیست. پس $x = \frac{1}{2}$ و

محیط قاب برابر است با

$$P = 2(6+4x+12+2x)$$

$$= 2(6x+18) = 42 \text{ cm}$$

۱۸۹۸-گزینه ۱ سن کنونی مریم را x و سن کنونی برادرش را y در نظر

می‌گیریم. در این صورت $x-2=7(y-2)$ و $x=y^2$. اگر در معادله اول به

جای x قرار دهیم y^2 ، به دست می‌آید:

$$y^2 - 2 = 7(y-2) \Rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0 \Rightarrow (y-3)(y-4) = 0 \Rightarrow y = 3, 4$$

اگر $y = 3$ ، آن‌گاه $x = 9$ یعنی مریم و برادرش در مجموع ۱۲ سال دارند که در گزینه‌ها نیست. اگر $y = 4$ ، آن‌گاه $x = 16$ یعنی مریم و برادرش در

مجموع ۲۰ سال دارند که در گزینه (۱) آمده است.

۱۸۹۹-گزینه ۳ اگر طول ضلع مربع x باشد، اندازه مساحت آن x^2 و طول

مطر آن $\sqrt{2}x$ است. بنابراین طول ضلع مربع را از معادله زیر به دست می‌آوریم:

$$x^2 + \sqrt{2}x = \frac{7}{2} \Rightarrow x^2 + \sqrt{2}x - \frac{7}{2} = 0$$

$$x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

محیط مربع $4x$ است که می‌شود $8-2\sqrt{2}$.

۱۹۰۰-گزینه ۳ طول یک تکه را x بگیرد. در این صورت طول تکه دیگر

$20-x$ است. بنابراین طول هر ضلع مربع نظیر تکه اول $\frac{x}{4}$ و طول هر ضلع

مربع نظیر تکه دوم $\frac{20-x}{4}$ است. در نتیجه، مساحت این مربع‌ها $(\frac{x}{4})^2$ و

$(\frac{20-x}{4})^2$ است. به این ترتیب،

$$(\frac{x}{4})^2 + (\frac{20-x}{4})^2 = 13 \Rightarrow x^2 - 20x + 96 = 0 \Rightarrow x = 12, x = 8$$

چون $12+8=20$ ، پس، طول یکی از تکه‌ها ۱۲ سانتی‌متر و طول تکه دیگر ۸ سانتی‌متر و اختلاف اندازه‌های آن‌ها برابر ۴ سانتی‌متر است.

۱۹۰۱-گزینه ۲ اگر α و β جواب‌های معادله مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$\alpha + \beta = m + 1 = 5 \Rightarrow m = 4$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر است با $\alpha\beta = -2m - 1 = -9$.

۱۹۰۲-گزینه ۳ توجه کنید که $x_1x_2 = -5$ و $x_1 + x_2 = 3$. در نتیجه

$$x_1(x_2 - 2) + x_2(x_1 - 2) = 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 2(-5) - 2(3) = -16$$

۱۹۰۳-گزینه ۴ جواب‌های معادله $x^2 - 2x - 5 = 0$ را با α و β نشان

می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل $(\alpha-2)(\beta-2) = (2-\alpha)(2-\beta)$ را بیابیم.

برای این کار می‌توانیم یکی از روش‌های زیر را به کار ببریم.

راه‌حل اول دقت کنید که $(\alpha-2)(\beta-2) = \alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 4$. از طرف

دیگر، $\alpha+\beta=2$ و $\alpha\beta=-5$. بنابراین $(\alpha-2)(\beta-2) = -5 - 4 + 4 = -5$.

پس حاصل ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

راه‌حل دوم می‌دانیم $x^2 - 2x - 5 = (x-\alpha)(x-\beta)$. اگر در این تساوی به

جای x قرار دهیم ۲، به دست می‌آید $-5 = (2-\alpha)(2-\beta)$. چون $\alpha\beta = -5$ ،

پس حاصل ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

۱۹۰۴-گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = -(k+1) = -1-k, x_1x_2 = 8$$

بنابراین

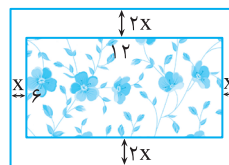
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-1-k}{8} = -\frac{3}{4}$$

بنابراین $k=5$.

۱۹۰۵-گزینه ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha = \frac{2}{\beta}$

در نتیجه $\alpha\beta=2$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2} = 2 \Rightarrow m-1=4 \Rightarrow m=5$$



۱۹۱۱- گزینه ۳ مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{m^2}{m}$ و حاصل ضرب

آن‌ها برابر $\frac{1}{m}$ است. بنابراین

$$\frac{m^2}{m} = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

اگر $m=1$ ، آن‌گاه معادله به صورت $x^2 - x + 1 = 0$ است که جواب ندارد چون $\Delta = -3 < 0$. اگر $m=-1$ ، آن‌گاه معادله به صورت $-x^2 - x + 1 = 0$ است که دو جواب دارد.

۱۹۱۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{3}{2}$

و حاصل ضرب آن‌ها برابر $-\frac{5}{2}$ است. بنابراین

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{15}{4}$$

۱۹۱۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha\beta = -\frac{5}{2}$. بنابراین

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{1}{4} - 2(-\frac{5}{2})}{-\frac{5}{2}} = \frac{\frac{1}{4} + 5}{-\frac{5}{2}} = \frac{\frac{21}{4}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{21}{10}$$

۱۹۱۴- گزینه ۳ توجه کنید که $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. بنابراین

$$3 = \frac{\sqrt{5^2 - 4(k+1)(-2)}}{|-2|} \Rightarrow 6 = \sqrt{8k + 33}$$

$$6^2 = 8k + 33 \Rightarrow 8k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{8}$$

۱۹۱۵- گزینه ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 1$ و

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{1 - 4(2k - 3)} = \sqrt{13 - 8k}$$

از طرف دیگر،

$$x_1^2 - x_2^2 = 6 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 6 \Rightarrow x_1 - x_2 = 6$$

پس $x_1 - x_2 > 0$ ، در نتیجه

$$\sqrt{13 - 8k} = 6 \Rightarrow 13 - 8k = 36 \Rightarrow k = -\frac{23}{8}$$

۱۹۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که $x_1x_2 = 9$ و $x_1 + x_2 = 15$. بنابراین

$x_1, x_2 > 0$

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5$$

۱۹۱۷- گزینه ۴ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -(\frac{-6}{3}) = 2$ و $x_1x_2 = -\frac{4}{3}$.

از طرف دیگر،

$$S = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 = 4$$

$$P = (x_1^2 + x_1x_2)(x_2^2 + x_1x_2) = (x_1(x_1 + x_2))(x_2(x_1 + x_2))$$

$$= x_1x_2(x_1 + x_2)^2 = -\frac{4}{3} \times 4 = -\frac{16}{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر $x^2 - 4x - \frac{16}{3} = 0$ یا $3x^2 - 12x - 16 = 0$ است.

۱۹۰۶- گزینه ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha = \beta^2$.

از طرف دیگر،

$$\alpha\beta = -\frac{27}{8} \Rightarrow \beta^3 = -\frac{27}{8} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}$$

پس $\alpha = \frac{9}{4}$ ، همچنین $\alpha + \beta = -\frac{m}{8}$. بنابراین

$$\frac{9}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{m}{8} \Rightarrow m = -6$$

۱۹۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) \quad (1)$$

از طرف دیگر، $x_1 + x_2 = 2$ و $x_1x_2 = k$. در نتیجه، از تساوی (۱) و اینکه

$$x_1^3 + x_2^3 = 6 \text{ به دست می‌آید } 8 = 6 + 6k \text{ بنابراین } k = \frac{1}{3}$$

۱۹۰۸- گزینه ۴ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 3k$ و $x_1x_2 = 9$. از طرف

دیگر،

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 6 \Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 6^2$$

$$x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} = 36 \Rightarrow 3k - 2\sqrt{9} = 36 \Rightarrow k = 14$$

۱۹۰۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\alpha + \beta = 3 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = 9, \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{13} \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 13$$

پس معادله‌ای مورد نظر است که جواب‌های آن ۹ و ۱۳ باشند. چون مجموع این جواب‌ها برابر ۲۲ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱۱۷ است، پس معادله مورد نظر به صورت زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 22x + 117 = 0$$

۱۹۱۰- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 9 = 0$

را می‌یابیم:

$$2x^2 + 3x - 9 = 0 \Rightarrow (2x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -3$$

بنابراین جواب‌های معادله $9x^2 - ax + b = 0$ به صورت زیر هستند:

$$\alpha = \frac{1}{x_1^2} - 3 = \frac{4}{9} - 3 = -\frac{23}{9}, \quad \beta = \frac{1}{x_2^2} - 3 = \frac{1}{9} - 3 = -\frac{26}{9}$$

از طرف دیگر، $\alpha + \beta = \frac{a}{9}$. بنابراین

$$\frac{a}{9} = -\frac{49}{9} \Rightarrow a = -49$$

راه حل دوم جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 9 = 0$ را با α و β نشان

می‌دهیم. اگر جواب‌های معادله $9x^2 - ax + b = 0$ را با t و z نشان دهیم،

$$\text{آن‌گاه } t = \frac{1}{\beta^2} - 3 \text{ و } z = \frac{1}{\alpha^2} - 3$$

توجه کنید که $\alpha + \beta = -\frac{3}{2}$ چون $z + t = \frac{a}{9} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - 6 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2}$

و $\alpha\beta = -\frac{9}{4}$ ، پس $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$ بنابراین

$$\frac{45}{9} = \frac{4}{9} - 6 = \frac{5}{9} - 6 \Rightarrow a = -49$$

بنابراین $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (4, +\infty)$. همچنین مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها باید مثبت باشند: $\frac{a+2}{a} > 0$ و $\frac{9}{4a} > 0$. پس $a > 0$. در نتیجه $a \in (0, 1) \cup (4, +\infty)$ ، یعنی a مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را نمی‌تواند داشته باشد.

۱۹۲۵- گزینه ۱ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، باید شرط‌های $\Delta > 0$ ، $\alpha\beta > 0$ و $\alpha + \beta < 0$ برقرار باشند تا معادله دو جواب منفی داشته باشد. در نتیجه

$$\Delta = m^2 - 8(m-2) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m + 16 > 0 \Rightarrow (m-4)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 4$$

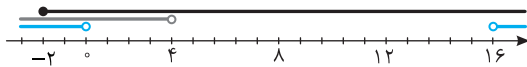
$$\alpha + \beta < 0 \Rightarrow \frac{-m}{2} < 0 \Rightarrow m > 0, \quad \alpha\beta > 0 \Rightarrow \frac{m-2}{2} > 0 \Rightarrow m > 2$$

بنابراین $m \in (2, +\infty) - \{4\}$.

۱۹۲۶- گزینه ۲ برای اینکه معادله دو جواب داشته باشد باید $\Delta > 0 \Rightarrow (m-4)^2 - 4(2m+4) > 0 \Rightarrow m^2 - 16m > 0 \Rightarrow m < 0$ یا $m > 16$ برای اینکه دو جواب معادله نامنفی باشند، باید مجموع آن‌ها مثبت و حاصل ضربشان نامنفی باشد:

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow 2m+4 \geq 0 \Rightarrow m \geq -2, \quad -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 4-m > 0 \Rightarrow m < 4$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برای m به صورت $-2 \leq m < 4$ است و در نتیجه m می‌تواند مقادیر صحیح ۲ و ۳ را داشته باشد.



۱۹۲۷- گزینه ۳ معادله مورد نظر همواره دو جواب دارد $(\Delta = m^2 + 8 > 0)$. اگر معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع آن‌ها منفی و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد. بنابراین

$$m-2 < 0 \Rightarrow m < 2, \quad -(m+1) > 0 \Rightarrow m < -1$$

پس $m < -1$.

۱۹۲۸- گزینه ۳ توجه کنید که $\Delta = (2m+1)^2$. چون معادله دو جواب دارد، باید $m \neq -\frac{1}{2}$. چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت کوچک‌تر است، پس مجموع جواب‌ها مثبت است و چون جواب‌ها مختلف‌العلامت هستند، پس حاصل ضرب آن‌ها منفی است. بنابراین

$$x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{m} > 0 \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{2}, \quad x_1 x_2 = -\frac{2}{m} < 0 \Rightarrow m > 0$$

بنابراین $0 < m < \frac{1}{2}$.

۱۹۲۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که باید $\Delta \geq 0$. پس

$$4-4m+8 \geq 0 \Rightarrow m \leq 3$$

از طرف دیگر، اگر معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، آن‌گاه

$$\frac{c}{a} \leq 0 \Rightarrow m-2 \leq 0 \Rightarrow m \leq 2$$

همچنین، ممکن است معادله دو جواب نامثبت داشته باشد، که در این صورت باید مجموع آن‌ها نامثبت باشد، یعنی $-\frac{b}{a} \leq 0$ ، که ممکن نیست، زیرا $-\frac{b}{a} = 2$. بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۲ است.

۱۹۱۸- گزینه ۱ اگر جواب‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ را α و β بنامیم، آن‌گاه $\alpha + \beta = 3$ و $\alpha\beta = -5$. جواب‌های معادله مورد نظر α^3 و β^3 هستند. بنابراین

$$S = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 27 - 3 \times (-5) \times 3 = 72$$

$$P = \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = (-5)^3 = -125$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 72x - 125 = 0$$

۱۹۱۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = -1$ و $\alpha\beta = -3$. بنابراین مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$S = \alpha^2 + \frac{1}{\beta} + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 1 + 6 + \frac{-1}{-3} = \frac{22}{3}$$

$$P = (\alpha^2 + \frac{1}{\beta})(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}) = (\alpha\beta)^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha\beta} = 9 - 1 + \frac{1}{-3} = \frac{23}{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{23}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 22x + 23 = 0$$

۱۹۲۰- گزینه ۳ اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = -1 \\ (x_1 + x_2) - x_1 x_2 = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S + P = -1 \\ S - P = -11 \end{cases}$$

را حل کنیم، به‌دست می‌آید $S = -6$ و $P = 5$. بنابراین x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 + 6x + 5 = 0$ هستند.

۱۹۲۱- گزینه ۲ کافی است در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ نابرابری $\frac{c}{a} < 0$ برقرار باشد تا معادله دو جواب داشته باشد که یکی مثبت و یکی منفی است. پس $\frac{m-4}{m+2} < 0$ در نتیجه $-2 < m < 4$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۱، ۲ و ۳ باشد.

۱۹۲۲- گزینه ۲ اگر $a = 0$ ، آن‌گاه معادله فقط یک جواب دارد که قابل قبول نیست. اگر $a \neq 0$ ، آن‌گاه حاصل ضرب جواب‌ها برابر است با $\frac{1-a^2}{a^2}$ که باید منفی باشد. پس

$$\frac{1-a^2}{a^2} < 0 \Rightarrow 1-a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow |a| > 1$$

۱۹۲۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\Delta = 4m^2 + 4m + 4 \Rightarrow (2m+1)^2 + 3 > 0$$

پس معادله حتماً دو جواب دارد. برای اینکه جواب‌ها هم‌علامت باشند، کافی است حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد، پس

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -m-1 > 0 \Rightarrow m < -1$$

۱۹۲۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $a = 0$ ، آن‌گاه معادله به صورت $-8x + 9 = 0$ درمی‌آید که فقط یک جواب دارد. با شرط $a \neq 0$ باید دلتای معادله مثبت باشد:

$$\Delta = 16(a+2)^2 - 16a \times 9 = 16((a+2)^2 - 9a) = 16(a^2 - 5a + 4) = 16(a-1)(a-4) > 0$$

۱۹۳۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\Delta = 4m^2 + 4m + 8 = (2m+1)^2 + 7 > 0$$

بنابراین معادله حتماً دو جواب دارد. از طرف دیگر، برای اینکه معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع جواب‌ها منفی و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد. یعنی باید

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow 2m < 0 \Rightarrow m < 0, \quad \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -m-2 > 0 \Rightarrow m < -2$$

پس اگر $m < -2$ ، معادله دو جواب منفی دارد. اکنون توجه کنید که اگر $m = -2$ ، معادله به صورت $x^2 + 4x = 0$ درمی‌آید که یک جواب آن $x = 0$ و جواب دیگر $x = -4$ است. پس در این حالت نیز معادله جواب مثبت ندارد. بنابراین اگر $m > -2$ ، معادله یا دو جواب مثبت، یا دو جواب مختلف‌العلامت دارد، که در هر صورت یکی از جواب‌ها مثبت است.

۱۹۳۱- گزینه ۳ چون $x = -1$ و $x = \frac{1}{3}$ جواب‌های معادله هستند، پس

$$\begin{cases} 6(\frac{1}{27}) - 5(\frac{1}{9}) + a(\frac{1}{3}) + b = 0 \\ 6(-1) - 5 \times 1 - a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ a - b = -11 \end{cases}$$

بنابراین $a = -8$ و $b = 3$. پس معادله به شکل $6x^3 - 5x^2 - 8x + 3 = 0$ درمی‌آید که چون $\frac{1}{3}$ و -1 جواب‌های آن هستند، پس $3x-1$ و $x+1$ عامل‌های عبارت سمت چپ معادله هستند و به کمک تقسیم می‌توان نوشت $(x+1)(3x-1)(2x-3) = 0$. بنابراین جواب دیگر معادله $x = \frac{3}{2}$ است. در

$$\text{نتیجه } k = \frac{3}{2} \text{ و } \frac{ab}{k} = \frac{(-8) \times 3}{\frac{3}{2}} = -16$$

۱۹۳۲- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^3 + 8 + x^2 - 5x - 14 = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) + (x+2)(x-7) = 0 \\ (x+2)(x^2 - 2x + 4 + x - 7) = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 - x - 3) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2, \quad x^2-x-3=0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

پس حاصل ضرب جواب‌های منفی معادله برابر است با

$$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)(-2) = \sqrt{13}-1$$

۱۹۳۳- گزینه ۴ واضح است که $x = -1$ جواب معادله است. پس

$x+1$ عامل عبارت سمت چپ معادله است

$$x^3 + x^2 + x^2 - mx - m - 1 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) + (x+1)(x-m-1) = 0 \\ (x+1)(x^2 + x - (m+1)) = 0$$

برای اینکه معادله سه جواب داشته باشد، باید معادله $x^2 + x - (m+1) = 0$ دو جواب داشته باشد و هیچ یک از این جواب‌ها برابر -1 نباشند. بنابراین

$$\Delta = 1 + 4(m+1) > 0 \Rightarrow 5 + 4m > 0 \Rightarrow m > -\frac{5}{4} \\ (-1)^2 - 1 - (m+1) \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$$

پس $m \in (-\frac{5}{4}, +\infty) - \{-1\}$

۱۹۳۴- گزینه ۲ راه‌حل اول اگر فرض کنیم $t = x^2 \geq 0$ ، معادله

به صورت $t^2 - 5t - 3 = 0$ درمی‌آید که جواب‌های آن $t = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ هستند.

جواب $\frac{5 - \sqrt{37}}{2}$ قابل قبول نیست چون عددی منفی است. بنابراین

$$x^2 = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{37}}{2}}$$

یعنی معادله دو جواب دارد.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $t = x^2 \geq 0$ ، معادله به صورت $t^2 - 5t - 3 = 0$ در

می‌آید، که در آن $\frac{c}{a} < 0$ است. پس معادله دو جواب مختلف‌العلامت دارد.

که با توجه به فرض $t \geq 0$ ، جواب منفی غیرقابل قبول و جواب مثبت قابل قبول خواهد بود و $x = \pm \sqrt{t}$. پس معادله داده شده دو جواب دارد.

۱۹۳۵- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، معادله مورد نظر می‌شود

$$t^2 - 4t - 12 = 0$$

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+2) = 0$$

$$t = -2 \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad t = 6 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر -6 است.

۱۹۳۶- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $x^2 = t$. در این صورت معادله مورد

نظر می‌شود $t^2 + (2m-1)t - 2m = 0$. چون معادله اصلی چهار جواب دارد،

پس این معادله درجه دوم دو جواب مثبت دارد. بنابراین

$$\Delta > 0 \Rightarrow (2m-1)^2 + 8m > 0 \Rightarrow (2m+1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -2m > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -(2m-1) > 0 \Rightarrow 2m-1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

بنابراین مجموعه مقادیر m به صورت $\{-\frac{1}{2}\} \cup (-\infty, 0)$ است.

۱۹۳۷- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، به معادله $t^2 - kt + \frac{3-2k}{4} = 0$

می‌رسیم. اگر این معادله فقط یک جواب مثبت مانند t_1 داشته باشد، معادله

اصلی دو جواب به صورت $x = \pm \sqrt{t_1}$ دارد:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ t_1 = -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - (3-2k) = 0 \\ \frac{k}{2} > 0 \Rightarrow k > 0 \end{cases}$$

$$k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = -3 \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad k = 1$$

همچنین اگر معادله درجه دوم یک جواب منفی و یک جواب مثبت داشته باشد،

جواب منفی قابل قبول نیست، چون x^2 نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادله

اصلی دو جواب به صورت $x = \pm \sqrt{t}$ دارد، پس

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{3-2k}{4} < 0 \Rightarrow 3-2k < 0 \Rightarrow k > \frac{3}{2}$$

بنابراین $k > \frac{3}{2}$ یا $k = 1$ جواب مسئله است.

چون $x=5$ جواب معادله است، پس

$$25 - 5(a+7) + 6a + 2 = 0 \Rightarrow a = 8$$

چون مجموع جواب‌های معادله (۱) برابر $a+7$ است، پس

$$a+7=5+x_1 \Rightarrow 15=5+x_1 \Rightarrow x_1=10$$

یعنی جواب دیگر معادله ۱۰ است که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نمی‌کند و قابل قبول است.

گزینه ۲ - ۱۹۴۵ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{2x-2a+x+3}{(x+3)(x-a)} = 4 \Rightarrow \frac{3x-2a+3}{(x+3)(x-a)} = 4$$

$$3x-2a+3=4x^2+(12-4a)x-12a \Rightarrow 4x^2+(9-4a)x-10a-3=0$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-10a-3}{4}$ است. پس

$$\frac{-10a-3}{4} = \frac{y}{4} \Rightarrow -10a=10 \Rightarrow a=-1$$

گزینه ۲ - ۱۹۴۶ دو طرف معادله را در x^2-1 ضرب می‌کنیم:

$$x-1-2=a(x^2-1) \Rightarrow ax^2-x+3-a=0 \quad (1)$$

اگر در معادله (۱) شرط $\Delta < 0$ برقرار باشد، معادله جواب ندارد. بنابراین

$$\Delta = 1-4a(3-a) < 0 \Rightarrow 4a^2-12a+1 < 0 \Rightarrow \frac{3-2\sqrt{2}}{2} < a < \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

پس به ازای اعداد طبیعی $a=1$ و $a=2$ معادله جواب ندارد.

توجه کنید که در حالت‌های زیر هم معادله اصلی جواب ندارد ولی این حالت‌ها در این مسئله اتفاق نمی‌افتند.

(۱) $x=1$ ریشه مضاعف معادله (۱) باشد.

(۲) $x=-1$ ریشه مضاعف معادله (۲) باشد.

(۳) $x=1$ و $x=-1$ هر دو جواب‌های معادله (۱) باشند.

گزینه ۴ - ۱۹۴۷ فرض می‌کنیم $\frac{2x+1}{x} = t$. در این صورت معادله مورد

نظر به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$t + \frac{-6}{t} = 5 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow t = -1, t = 6$$

بنابراین

$$t = -1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$t = 6 \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

از آنجایی که هیچ کدام از این دو مقدار باعث صفر شدن مخرج‌ها در معادله اصلی نمی‌شوند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل ضرب جواب‌های

معادله مورد نظر برابر است با $-\frac{1}{12}$.

گزینه ۱ - ۱۹۴۸ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $x + \frac{1}{x} = 4$. بنابراین

$$x^2 + 1 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

بنابراین دو عدد $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ شرط مورد نظر را دارند که $2 - \sqrt{3}$ کوچک‌ترین عددی است که این شرط را دارد.

گزینه ۳ - ۱۹۳۸ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm\sqrt{t}$ ، $x \geq 0$ و

معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0 \quad (*)$$

در این معادله $\Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 4) = 16 > 0$. بنابراین معادله (*) به ازای

هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادله اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت. بنابراین اگر t_1 و t_2

جواب‌های معادله (*) باشند، باید

$$t_1 + t_2 < 0 \Rightarrow 2m < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$t_1 t_2 > 0 \Rightarrow m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 2$$

بنابراین کافی است $m < -2$ تا معادله اولیه جواب حقیقی نداشته باشد.

گزینه ۲ - ۱۹۳۹ فرض می‌کنیم $x^2 + x = t$. در این صورت

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t-6)(t-12) = 0$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$$

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow x_3 = 3, x_4 = -4$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

گزینه ۱ - ۱۹۴۰ فرض می‌کنیم $x^2 - 7x + 11 = t$. در نتیجه $x^2 = 7t + 4$.

بنابراین $t = -1, 4$ ، پس به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$x^2 - 7x + 11 = -1 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3, 4$$

$$x^2 - 7x + 11 = 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}$$

پس معادله مورد نظر چهار جواب دارد.

گزینه ۱ - ۱۹۴۱ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x^2 + 1 = 2(x+1) \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

جواب‌های معادله بالا $x = 1 + \sqrt{2}$ و $x = 1 - \sqrt{2}$ هستند. پس جواب بزرگ‌تر معادله $1 + \sqrt{2}$ است.

گزینه ۲ - ۱۹۴۲ معادله را به شکل $\frac{x}{x^4 - x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x^3 - 1}$

می‌نویسیم. بنابراین

$$x^4 - x = x^4 - x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1$$

گزینه ۳ - ۱۹۴۳ طرفین معادله را در $(x-1)(x+1)$ ضرب و آن را ساده

می‌کنیم:

$$x+1+2(x-1) = 2(x-1)(x+1) \Rightarrow 3x-1 = 2x^2-2 \Rightarrow 2x^2-3x-1=0$$

معادله بالا دو جواب دارد که ۱ و -۱ از آن‌ها نیستند و مجموع آن‌ها برابر $\frac{3}{2}$ است.

گزینه ۳ - ۱۹۴۴ فرض کنید x_1 جواب دیگر معادله باشد. ابتدا معادله

داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{5x-2-4a}{x^2-(a+2)x+2a} = 1 \Rightarrow x^2 - (a+7)x + 6a + 2 = 0 \quad (1)$$

اگر $\sqrt[3]{2a+1}$ ریشهٔ مخرج کسر در معادلهٔ اصلی باشد، قابل قبول نیست. در غیر این صورت قابل قبول است و معادله یک جواب دارد. ریشهٔ مخرج کسر $x=1$ است، پس

$$\sqrt[3]{2a+1}=1 \Rightarrow 2a+1=1 \Rightarrow a=0$$

توجه کنید که اگر $a=0$ ، آن‌گاه معادله به صورت $x^2+x+1=0$ درمی‌آید که جواب ندارد. همچنین اگر $a=-1$ ، آن‌گاه سمت راست معادله تعریف نمی‌شود. بنابراین برای $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ معادله همواره یک جواب دارد.

راه حل دوم چون $a+1$ در مخرج کسر است، پس $a \neq -1$. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. برای یافتن گزینهٔ صحیح کافی است $a=0$ را امتحان کنیم.

به ازای $a=0$ معادله می‌شود $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=0$ که جواب ندارد. پس $a \neq 0$.

۱۹۵۵- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{5}{(x-1)(x+4)} - \frac{3}{(x+1)(x+4)} = k$$

$$\frac{5(x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+4)} = k \Rightarrow \frac{2(x+4)}{(x-1)(x+1)(x+4)} = k$$

$$k(x^2-1)=2 \Rightarrow kx^2-k-2=0$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-k-2}{k}$ است. پس

$$\frac{-k-2}{k} = -4 \Rightarrow 4k = k+2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

۱۹۵۶- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $t = (x + \frac{2}{x})^2$ ، معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2 - 9t - 10 = 0 \Rightarrow t = -1, t = 10$$

چون $t > 0$ ، پس $t = -1$ غیر قابل قبول است. اگر $t = 10$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x + \frac{2}{x} = \sqrt{10} \Rightarrow x^2 - \sqrt{10}x + 2 = 0, & \Delta = 2 \\ x + \frac{2}{x} = -\sqrt{10} \Rightarrow x^2 + \sqrt{10}x + 2 = 0, & \Delta = 2 \end{cases}$$

هر کدام از معادله‌های بالا دو جواب غیرصفر دارند و جواب‌های معادلهٔ اول قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ دوم هستند. پس معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد.

۱۹۵۷- گزینه ۴ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{21}{x^2+4x+10} - (x^2+4x+10) + 1 = 6$$

اگر فرض کنیم $x^2+4x+10=t$ ، این معادله می‌شود

$$\frac{21}{t} - t + 4 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب در } t} 21 - t^2 + 4t = 0$$

$$t^2 - 4t - 21 = 0 \Rightarrow (t-7)(t+3) = 0 \Rightarrow t = -3, t = 7$$

بنابراین

$$t = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 10 = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 13 = 0 \quad (\Delta < 0) \quad \text{جواب ندارد}$$

$$t = 7 \Rightarrow x^2 + 4x + 10 = 7 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -3$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -4 است.

۱۹۴۹- گزینه ۲ فرض کنید زمان رفت برابر t و سرعت رفت برابر v

باشد. در این صورت زمان برگشت برابر $t + \frac{4}{9}$ و سرعت برگشت برابر $v-5$

است. چون فاصلهٔ دو شهر برابر 200 کیلومتر است، پس تساوی‌های $200 = vt$

$$\text{و } 200 = (v-5)\left(t + \frac{4}{9}\right) \text{ برقرارند. بنابراین}$$

$$v = \frac{200}{t} \Rightarrow 200 = \left(\frac{200}{t} - 5\right)\left(t + \frac{4}{9}\right) \Rightarrow 200 = 200 + \frac{800}{9t} - 5t - \frac{20}{9}$$

$$800 - 45t^2 - 20t = 0 \Rightarrow 9t^2 + 4t - 160 = 0$$

$$(9t+40)(t-4) = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ ساعت}$$

بنابراین زمان رفت 4 ساعت است.

۱۹۵۰- گزینه ۱ نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

است. اگر طول این مستطیل برابر x و عرض آن برابر y باشد، آن‌گاه

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)y$$

از طرف دیگر نسبت محیط به مساحت مستطیل برابر $3-\sqrt{5}$ است. بنابراین

$$\frac{2(x+y)}{xy} = 3-\sqrt{5} \Rightarrow 2\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)y + y\right) = (3-\sqrt{5})xy$$

$$2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1\right) = (3-\sqrt{5})x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+3}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})^2}{9-5} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

۱۹۵۱- گزینه ۴ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(x-1)\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5}\right) = 0 \Rightarrow (x-1)\left(\frac{x-5+x-3}{(x-3)(x-5)}\right) = 0$$

$$(x-1)\left(\frac{2x-8}{(x-3)(x-5)}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x-4)}{(x-3)(x-5)} = 0$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ مورد نظر 1 و 4 هستند و مجموع آن‌ها 5 است.

۱۹۵۲- گزینه ۱ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{x-12}{x^2+3x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x+3} = \frac{2x+6+5x}{x^2+3x} = \frac{7x+6}{x^2+3x}$$

در نتیجه، با فرض $x \neq 0, -3$

$$x-12 = 7x+6 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow x = -3$$

که قابل قبول نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۱۹۵۳- گزینه ۳ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم

$$\frac{3x-2-2a}{x^2-(a+2)x+2a} = 1 \Rightarrow x^2 - (a+5)x + 4a+2 = 0 \quad (1)$$

چون $x=6$ جواب معادله است، پس

$$36-6(a+5)+4a+2=0 \Rightarrow -2a+8=0 \Rightarrow a=4$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر $a+5=9$ است، پس جواب دیگر معادلهٔ مورد نظر برابر 3 است.

۱۹۵۴- گزینه ۴ **راه حل اول** دو طرف معادلهٔ داده شده را در

$$(x-1)(x^2-x+1) \text{ ضرب می‌کنیم:}$$

$$(x-1)(x^2-x+1) = \frac{a}{a+1}(x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^3-1 = \frac{a}{a+1}(x^3+1) \Rightarrow (a+1)x^3 - a - 1 = ax^3 + a$$

$$x^3 = 2a+1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2a+1}$$

اگر $m = -2$ ، عبارت به صورت $y = -2nx - 2$ است. چون $x = 4$ ریشه عبارت است، پس $-2 = -2n \times 4 - 2$ ، در نتیجه $n = -\frac{1}{4}$ ، بنابراین $mn = \frac{1}{4}$.

۱۹۶۳- گزینه ۱ با توجه به جدول، $x = 1$ و $x = 2$ ریشه‌های عبارت هستند:

$$x = 1 \Rightarrow m + 2 - (m + 2)^2 + n = 0 \quad (*)$$

$$x = 2 \Rightarrow 4(m + 2) - 2(m + 2)^2 + n = 0$$

دو طرف تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$(m + 2)^2 - 3(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2 \\ m + 2 = 3 \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

به ازای $m = -2$ نتیجه می‌شود $y = n$ که در این صورت علامت y ثابت است و به ازای $m = 1$ از معادله (*) مقدار n به دست می‌آید

$$3 - 9 + n = 0 \Rightarrow n = 6$$

۱۹۶۴- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا نامعادله‌ها را به صورت‌های زیر

بازنویسی می‌کنیم:

$$x - x^3 > 0 \Rightarrow x(1 - x)(1 + x) > 0, \quad x - x^2 < 0 \Rightarrow x(1 - x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

در نتیجه مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر، با فرض $x > 1$ یا $x < 0$ مجموعه جواب‌های نامعادله $1 + x < 0$ که بازه $(-\infty, -1)$ است، برابر است. اشتراک مجموعه‌های $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ و $(-\infty, -1)$ برابر $(-\infty, -1)$ است که مجموعه جواب نامعادله مورد نظر مسئله است.

راه حل دوم عدد $-\frac{1}{2}$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی عدد -2 در آن صدق

می‌کند پس گزینه (۱) جواب است.

۱۹۶۵- گزینه ۴ توجه کنید که می‌خواهیم نامعادله زیر را حل کنیم:

$$x(x^2 - 4x - 5)^2(x^2 - 1) < 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1), \quad x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

در نتیجه طرف چپ نامعادله بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = x(x + 1)^3(x - 5)^2(x - 1)$$

با تشکیل جدول تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	0	1	5	$+\infty$
y		-	+	-	+	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله برابر است با $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. پس

$$a = -1, \quad b = 0 \quad \text{و در نتیجه} \quad a + b = -1$$

۱۹۶۶- گزینه ۳ توجه کنید که $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ دلتای

عبارت $x^2 - x + 1$ منفی است ($\Delta = -3$). در نتیجه همواره $x^2 - x + 1 > 0$.

بنابراین مسئله به یافتن مجموعه جواب‌های نامعادله $y = \frac{x + 1}{(x - 2)(x - 4)} \leq 0$

تبدیل می‌شود. جدول تعیین علامت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
y		-	+	-	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر $(-\infty, -1] \cup (2, 4)$ است.

$$\text{پس } a = -1 \quad \text{و} \quad b = 4 \quad \text{و در نتیجه} \quad a + b = 3$$

۱۹۵۸- گزینه ۲ اگر طول ضلع‌های زاویه قائمه مثلث را a و b و طول وتر آن را c فرض کنیم، آن‌گاه

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{4}{3}a$$

بنابراین طول وتر برابر است با

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{16}{9}a^2} = \sqrt{\frac{25}{9}a^2} = \frac{5}{3}a$$

بنابراین

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{47}{30} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{4}{3}a} + \frac{1}{\frac{5}{3}a} = \frac{47}{30} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{4a} + \frac{3}{5a} = \frac{47}{30}$$

دو طرف معادله را در $60a$ ضرب می‌کنیم

$$60 + 45 + 36 = 94a \Rightarrow a = \frac{141}{94} = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{4}{3}a = 2$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$.

۱۹۵۹- گزینه ۱ فرض می‌کنیم تعداد افراد کلاس، n نفر باشند. در نتیجه

هزینه سرانه اولیه برابر $\frac{700}{n}$ (برحسب هزار تومان) است. با افزودن پنج نفر از

دانش‌آموزان کلاس دیگر هزینه سرانه برابر با $\frac{700}{n} - 7$ می‌شود. در نتیجه

$$\left(\frac{700}{n} - 7\right)(n + 5) = 700$$

$$\left(\frac{700 - 7n}{n}\right)(n + 5) = 700 \Rightarrow (700 - 7n)(n + 5) = 700n$$

$$n^2 + 5n - 500 = 0 \Rightarrow (n + 25)(n - 20) = 0 \Rightarrow n = -25, n = 20$$

فقط جواب $n = 20$ قابل قبول است.

۱۹۶۰- گزینه ۱ 20 کیلوگرم از محلول اولیه شکر و 80 کیلوگرم آن آب

است. اگر نیمی از آب را تبخیر کنیم، 40 کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، جرم شکر $20 + x$ و جرم محلول $60 + x$ می‌شود. پس

$$\frac{20 + x}{60 + x} = \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{20 + x}{60 + x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 100 + 5x = 120 + 2x \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

۱۹۶۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$y = x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت y به صورت زیر است.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y		-	+	-	+

۱۹۶۲- گزینه ۱ چون عبارت یک ریشه دارد و در دو طرف ریشه علامت آن

متفاوت است، پس باید عبارت از درجه اول باشد. یعنی ضریب x^2 باید صفر باشد:

$$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$$

اگر $m = 2$ ، عبارت به صورت $y = 2nx + 2$ است. چون $x = 4$ ریشه عبارت است، پس

$$0 = 2n \times 4 + 2 \Rightarrow n = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2$$

در این صورت جدول تعیین علامت عبارت به صورت زیر است و این حالت

قابل قبول نیست.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y		+	-

۱۹۷۳- گزینه ۲) باید نامعادله های $x^3 - 3x^2 \geq -4$ و $x^3 - 3x^2 \leq 0$ را حل کنیم و بین مجموعه جواب های آن ها اشتراک بگیریم:

$$x^3 - 3x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2(x-3) \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

بنابراین $-1 \leq x \leq 3$ مجموعه جواب های نامعادله های مورد نظر است. پس $a = -1$ و $b = 3$ و در نتیجه $a + b = 2$. توجه کنید که

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 + 1 - 3x^2 + 3 = (x^3 + 1) - 3(x^2 - 1)$$

$$= (x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x-1)(x+1) = (x+1)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x+1)(x-2)^2$$

$$(x+1)(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$(x^2 - 2x - 4)^2 - 4(x^2 - 2)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 2x - 4 + 2x + 4)(x^2 - 2x - 4 - 2x - 4) \geq 0$$

$$(3x^2 - 2x - 8)(-x^2 - 2x) \geq 0 \Rightarrow -x(3x+4)(x-2)(x+2) \geq 0$$

$$y = x(3x+4)(x-2)(x+2) \leq 0$$

$$x \quad | \quad -\infty \quad -2 \quad -\frac{4}{3} \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$$

$$y \quad | \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$

با توجه به جدول تعیین علامت بالا، مجموعه جواب های نامعادله به صورت

$$[-2, -\frac{4}{3}] \cup [0, 2]$$

$$-2 \text{ و } 0, 1, 2 \text{ است که اعداد صحیح } 0, 1, 2 \text{ را شامل می شود.}$$

۱۹۷۵- گزینه ۳) عبارت را به شکل زیر می نویسیم:

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}, \quad x \neq 2$$

$$y = \frac{x-3}{x+2}$$

$$\text{بنابراین جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:}$$

$$x \quad | \quad -\infty \quad -2 \quad 2 \quad 3 \quad +\infty$$

$$y \quad | \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$

بنابراین y به ازای هر x که در مجموعه $\{2\} - (-2, 3)$ باشد، منفی است. پس

$$\frac{a+b}{c} = \frac{1}{2} \text{ در نتیجه } c = 2 \text{ و } b = 3, a = -2$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{1}{2}$$

۱۹۷۶- گزینه ۳) مجموعه جواب های نامعادله $ax - b > 0$ به یکی از دو

$$\text{صورت } (-\infty, \frac{b}{a}) \text{ یا } (\frac{b}{a}, +\infty) \text{ است. با توجه به فرض مسئله،}$$

$$a > 0, \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow 2a = b$$

$$a > 0, \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow 2a = b$$

بنابراین $\frac{ax+b}{x-2} = a(\frac{x+2}{x-2})$. چون $a > 0$ ، کافی است مجموعه جواب های

$$\frac{x+2}{x-2} < 0 \text{ را بیابیم که بازه } (-2, 2) \text{ است.}$$

$$\frac{x+2}{x-2} < 0$$

$$\text{نامعادله } \frac{x+2}{x-2} < 0 \text{ را بیابیم که بازه } (-2, 2) \text{ است.}$$

۱۹۷۷- گزینه ۱) نامعادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{9}{x+3} + 5 - x < 0 \Rightarrow \frac{9 + (5-x)(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{9 + (5-x)(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 24}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x+4)}{x+3} > 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 24}{x+3} < 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه جواب های نامعادله به صورت

$$(-4, -3) \cup (6, +\infty) \text{ است.}$$

$$x \quad | \quad -\infty \quad -4 \quad -3 \quad 6 \quad +\infty$$

$$y \quad | \quad - \quad + \quad - \quad +$$

$$\text{پس } a = -4 \text{ و } b = 6 \text{ و در نتیجه } a + b = 2$$

۱۹۶۷- گزینه ۲) نامعادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$x^4 - x^2 - 2 < 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 2) < 0$$

$$\text{چون مقدار عبارت } x^2 + 1 \text{ همواره مثبت است، پس}$$

$$x^2 - 2 < 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$$\text{پس مجموعه جواب های نامعادله به صورت } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ است. در نتیجه}$$

$$a = -\sqrt{2}, b = \sqrt{2} \Rightarrow ab = -2$$

۱۹۶۸- گزینه ۲) راه حل اول توجه کنید که اگر فرض کنیم

$$P(x) = x^2 + (a-1)x + 2a - 6$$

$$\text{جدول تعیین علامت باید به صورت زیر باشد}$$

$$x \quad | \quad -\infty \quad x_1 \quad -3 \quad x_2 \quad +\infty$$

$$P(x) \quad | \quad + \quad - \quad +$$

$$\text{پس باید } P(x) \text{ به ازای } x = -3 \text{ منفی باشد. بنابراین}$$

$$P(-3) = (-3)^2 - 3(a-1) + 2a - 6 < 0 \Rightarrow a > 6$$

۱۹۶۹- گزینه ۳) توجه کنید که اگر $m = 0$ ، آن گاه عبارت برابر $-2x$

$$x^2 + (a-1)x + 2(a-3) = (x+a-3)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+a-3=0 \Rightarrow x=3-a \end{cases}$$

$$x_1 < -3 < x_2 \Rightarrow x_1 = 3-a, x_2 = -2$$

$$x_1 = 3-a < -3 \Rightarrow a > 6$$

$$x_1 = 3-a < -3 \Rightarrow a > 6$$

۱۹۶۹- گزینه ۳) توجه کنید که اگر $m = 0$ ، آن گاه عبارت برابر $-2x$

$$x^2 + (a-1)x + 2(a-3) = (x+a-3)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+a-3=0 \Rightarrow x=3-a \end{cases}$$

$$x_1 < -3 < x_2 \Rightarrow x_1 = 3-a, x_2 = -2$$

$$x_1 = 3-a < -3 \Rightarrow a > 6$$

۱۹۷۰- گزینه ۳) می خواهیم به ازای هر مقدار x نابرابری

$$mx^2 - 2mx + 8 > 0 \text{ برقرار باشد، یعنی } mx^2 - 2mx + 8 > 0$$

$$\text{بنابراین } mx^2 - 2mx + 8 > 0$$

$$\text{اگر } m \neq 0 \text{، باید } m > 0 \text{ و } \Delta < 0 \text{ پس}$$

$$\Delta = (-2m)^2 - 32m < 0 \Rightarrow m(m-8) < 0$$

$$\Delta = (-2m)^2 - 32m < 0$$

$$\text{با توجه به جدول زیر، باید } 0 < m < 8$$

$$m \quad | \quad -\infty \quad 0 \quad 8 \quad +\infty$$

$$m(m-8) \quad | \quad + \quad - \quad +$$

از طرف دیگر، اگر $m = 0$ ، آن گاه عبارت به صورت $y = 2$ است که از -6 بزرگ تر

$$\text{است. بنابراین } 0 \leq m < 8 \text{ پس } m \text{ می تواند هشت مقدار صحیح داشته باشد.}$$

۱۹۷۱- گزینه ۱) عبارت را تجزیه می کنیم:

$$y = x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$$

$$\text{چون } x^2 + 1 \text{ همواره مثبت است، پس کافی است } x^2 - 4 \text{ را تعیین علامت کنیم:}$$

$$x \quad | \quad -\infty \quad -2 \quad 2 \quad +\infty$$

$$y \quad | \quad + \quad - \quad +$$

۱۹۷۲- گزینه ۱) ریشه عبارت را به دست می آوریم:

$$m^2 x + |m| = 0 \Rightarrow x = \frac{-|m|}{m^2} = \frac{-1}{|m|}$$

$$m^2 x + |m| = 0$$

ضرب x عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

$$x \quad | \quad -\infty \quad \frac{-1}{|m|} \quad +\infty$$

$$y \quad | \quad - \quad +$$

۱۹۸۴- گزینه ۲ دو طرف معادله داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^4 + 2x - 5 = (1+x)^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

چون $x^2 + 2 \neq 0$ ، پس $x^2 - 3 = 0$ ، بنابراین $x = \pm\sqrt{3}$.

$x = \sqrt{3}$ در معادله صدق می‌کند، اما $x = -\sqrt{3}$ در معادله صدق نمی‌کند، زیرا به ازای $x = -\sqrt{3}$ سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۸۵- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2x-1} = 2 - 2\sqrt{x} \quad (*)$$

پس دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$2x - 1 = 4 + 4x - 8\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 5 = 8\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4x^2 + 20x + 25 = 64x \Rightarrow 4x^2 - 44x + 25 = 0$$

$$x = \frac{11-4\sqrt{6}}{2}, x = \frac{11+4\sqrt{6}}{2}$$

در معادله (*) طرف راست باید نامنفی باشد، پس

$$2 - 2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

بنابراین جواب $\frac{11+4\sqrt{6}}{2}$ قابل قبول نیست و $\frac{11-4\sqrt{6}}{2}$ جواب معادله است.

۱۹۸۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $x = 8$ در معادله صدق می‌کند:

$$\sqrt{8-4a} + \sqrt{8+a} = \sqrt{24+a} \quad (1)$$

دو طرف معادله بالا را به توان دو می‌رسانیم:

$$8 - 4a + 8 + a + 2\sqrt{(8-4a)(8+a)} = 24 + a$$

$$2\sqrt{64 - 24a - 4a^2} = 4a + 8 \Rightarrow \sqrt{64 - 24a - 4a^2} = 2a + 4$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$64 - 24a - 4a^2 = 4a^2 + 16a + 16$$

$$8a^2 + 40a - 48 = 0 \Rightarrow a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -6$$

جواب $a = -6$ قابل قبول نیست چون در معادله (۱) صدق نمی‌کند. پس a فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

۱۹۸۷- گزینه ۱ معادله را به صورت $(\sqrt[3]{x})^4 - 5(\sqrt[3]{x})^2 + 4 = 0$

می‌نویسیم و فرض می‌کنیم $(\sqrt[3]{x})^2 = a$. در این صورت

$$a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a-1) = 0$$

$$\begin{cases} a=1 \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ a=4 \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=4 \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8 \end{cases}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۶۴ است.

۱۹۸۸- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ ، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 + 1 = 2t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

تنها جواب معادله بالا $t = 1$ است. بنابراین

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{x+1} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x} \quad (1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

با توجه به معادله (۱) باید $x > 1$ و در نتیجه $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ جواب معادله نیست.

پس فقط $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ جواب معادله است.

۱۹۷۸- گزینه ۴ اولاً باید ضریب x^2 منفی باشد. پس $m < 0$ ، ثانیاً باید

$\Delta < 0$ ، پس

$$1 - 4m^2 < 0 \Rightarrow m^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow |m| > \frac{1}{2} \Rightarrow m > \frac{1}{2} \text{ یا } m < -\frac{1}{2}$$

بنابراین نتیجه می‌شود $m < -\frac{1}{2}$.

۱۹۷۹- گزینه ۲ می‌خواهیم به‌ازای هر مقدار x نابرابری

$mx^2 - 2mx + 2 > 0$ برقرار باشد، یعنی $mx^2 - 2mx + 4 > 0$ ، بنابراین

اگر $m \neq 0$ ، باید $m > 0$ و $\Delta < 0$ ، پس

$$\Delta = (-2m)^2 - 16m < 0 \Rightarrow m(m-4) < 0$$

با توجه به جدول زیر، باید $0 < m < 4$.

m	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$m(m-4)$	+	-	+	+

از طرف دیگر، اگر $m = 0$ آن‌گاه عبارت به صورت $y = 2$ است که از -2

بزرگ‌تر است. بنابراین $0 \leq m < 4$.

۱۹۸۰- گزینه ۳ نابرابری را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^2 + mx + m - 3}{x^2 - x + 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + (m+3)x + m - 3}{x^2 - x + 1} \leq 0$$

چون به ازای هر x نابرابری $x^2 - x + 1 > 0$ برقرار است، پس کافی است

نامعادله $-2x^2 + (m+3)x + m - 3 \leq 0$ برای هر x برقرار باشد. بنابراین

$$\Delta = (m+3)^2 - 8(m-3) \leq 0 \Rightarrow m^2 + 14m - 15 \leq 0$$

$$(m-1)(m+15) \leq 0 \Rightarrow -15 \leq m \leq 1$$

پس حداقل مقدار m برابر -15 است.

۱۹۸۱- گزینه ۱ دو طرف معادله را به توان چهار می‌رسانیم:

$$2x + 1 = (2x - 1)^2 \Rightarrow 2x + 1 = 4x^2 + 1 - 4x$$

$$4x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$$

واضح است که $x = 0$ قابل قبول نیست، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کند

ولی $x = \frac{3}{2}$ در معادله اولیه صدق می‌کند. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۸۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که باید $\frac{1}{p}x + 1 \geq 0$ و در نتیجه

$x \geq -2$. همچنین باید $4 - x^2 \geq 0$ و در نتیجه $-2 \leq x \leq 2$. اکنون دو طرف

معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 - x^2 = \left(\frac{1}{p}x + 1\right)^2 \Rightarrow 4 - x^2 = \frac{1}{p^2}x^2 + x + 1$$

$$5x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x+2)(5x-6) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \frac{6}{5}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. پس مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{4}{5}$ است.

۱۹۸۳- گزینه ۲ اگر دو طرف معادله مورد نظر را به توان دو برسانیم،

نتیجه می‌شود

$$4 - 3x - x^2 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 + 11x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4, x = -\frac{3}{2}$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۶ است.

$$3x - 2 = 4 + 4x - 8\sqrt{x} \Rightarrow x + 6 = 8\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x^2 + 36 + 12x = 64x \Rightarrow x^2 - 52x + 36 = 0$$

$$x = 26 - 8\sqrt{10}, x = 26 + 8\sqrt{10}$$

در معادله (*) طرف چپ معادله نامنفی است، پس طرف راست آن نیز نامنفی است، بنابراین

$$3x - 2 \geq 0, 2 - 2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

بنابراین جواب $26 + 8\sqrt{10}$ قابل قبول نیست و $x = 26 - 8\sqrt{10}$ جواب معادله است.

۱۹۹۷- گزینه ۲ یک جواب معادله $x = 2$ است، پس $x = 2$ باید در معادله صدق کند

$$\sqrt{2-1} + \sqrt{a-2} = 3 \Rightarrow \sqrt{a-2} = 2 \Rightarrow a-2 = 4 \Rightarrow a = 6$$

بنابراین معادله به صورت $\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} = 3$ است و در نتیجه

$$\sqrt{x-1} - 3 = -\sqrt{6-x} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x-1+9-6\sqrt{x-1} = 6-x$$

$$x+1 = 3\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 9x - 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۱۹۹۸- گزینه ۳ معادله را به صورت $x^2 + 1 + 6 = 5\sqrt{x^2 + 1}$

می‌نویسیم. اگر فرض کنیم $t = \sqrt{x^2 + 1}$ ، معادله به صورت $t^2 + 6 = 5t$ درمی‌آید که اگر آن را به صورت $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3) = 0$ بنویسیم،

جواب‌های آن $t = 2$ و $t = 3$ هستند. بنابراین

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 9 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۴ است.

۱۹۹۹- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $t = x + \sqrt{x}$ ، معادله به صورت

$$t^2 + t - 2 = (t-1)(t+2) = 0$$

بنویسیم، $t = 1$ و $t = -2$ جواب‌های آن هستند. بنابراین

$$x + \sqrt{x} = -2 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x + \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - x \quad (1)$$

$$x = x^2 + 1 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که معادله $x + \sqrt{x} = -2$ جواب ندارد، زیرا عبارت $x + \sqrt{x}$

همواره نامنفی است. همچنین $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ جواب معادله نیست زیرا در

معادله (۱) باید $0 \leq x \leq 1$ ولی $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ بزرگ‌تر از ۱ است.

۲۰۰۰- گزینه ۳ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^3 + k = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow 3x^2 - 3x + k + 1 = 0$$

برای اینکه معادله بالا دو جواب داشته باشد، باید

$$\Delta > 0 \Rightarrow 9 - 12(k+1) > 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{4}$$

۱۹۸۹- گزینه ۳ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $\sqrt{x} = \frac{4}{x}$. بنابراین

$$x = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16}$$

۱۹۹۰- گزینه ۴ زمانی را که محسن روی خشکی مسیر AD را طی می‌کرده با t_1 و زمان طی کردن مسیر DB روی آب را با t_2 نشان می‌دهیم.

در نتیجه اگر $CD = x$ ، آن‌گاه

$$t_1 = \frac{AD}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5}, t_2 = \frac{DB}{v_2} = \frac{8-x}{3}$$

در نتیجه $t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5} + \frac{8-x}{3} = \frac{8}{3}$ ، بنابراین

$$\frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3\sqrt{x^2 + 16} = 5x \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}$$

$$9(x^2 + 16) = 25x^2 \Rightarrow 16x^2 = 9 \times 16 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

پس $CD = 3 \text{ km}$.

۱۹۹۱- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^2 + 7 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 7 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

با توجه به اینکه $x = \frac{3}{4}$ در معادله اصلی صدق می‌کند، پس جواب معادله در

بازه $(\frac{1}{2}, 1)$ قرار دارد.

۱۹۹۲- گزینه ۱ برای حل معادله $2x + 1 = \sqrt{11x - 2}$ ، دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(2x+1)^2 = (\sqrt{11x-2})^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 11x - 2$$

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}, x = 1$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند. پس قدرمطلق تفاضل دو جواب برابر $\frac{1}{4}$ است.

۱۹۹۳- گزینه ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$1 + 3x - x^2 = 1 - 6x - x^2 + x^3 \Rightarrow x^3 = 9x \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0$$

$$x = 0, x = 3, x = -3$$

جواب $x = -3$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادله اولیه صدق نمی‌کند. بنابراین معادله دو جواب دارد.

۱۹۹۴- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$x^3 + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله $\frac{-3 - \sqrt{21}}{6}$ است.

۱۹۹۵- گزینه ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+1} - 1$ می‌نویسیم و دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x - 2 = x + 1 + 1 - 2\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

$x = 3$ در معادله اصلی صدق می‌کند. بنابراین معادله یک جواب دارد.

۱۹۹۶- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{3x-2} = 2 - 2\sqrt{x} \quad (*)$$

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم

۲۰۰۸- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$2x-1+x^2+2x\sqrt{2x-1}=3x-1\Rightarrow 2x\sqrt{2x-1}=x-x^2$$

چون $x=0$ جواب معادله اصلی نیست، پس

$$2\sqrt{2x-1}=1-x \quad (1)$$

دوباره طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(2x-1)=1+x^2-2x\Rightarrow x^2-10x+5=0\Rightarrow x=5+2\sqrt{5}, x=5-2\sqrt{5}$$

با توجه به تساوی (۱) باید $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ تا هم عبارت زیر رادیکال منفی نشود و

هم حاصل عبارت رادیکالی منفی نشود. بنابراین $x=5+2\sqrt{5}$ قابل قبول نیست و $x=5-2\sqrt{5}$ تنها جواب معادله است.

۲۰۰۹- گزینه ۲ با توجه به اینکه در $x=1$ و $x=3$ ، $P(x)=0$ ، پس

$$P(1)=0\Rightarrow m+(m^2-12)-m-2n=0\Rightarrow m^2-2n-12=0$$

$$P(3)=0\Rightarrow 9m+3(m^2-12)-m-2n=0\Rightarrow 3m^2+8m-2n-36=0$$

اگر طرفین معادله (۱) را از معادله (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$2m^2+8m-24=0\Rightarrow m^2+4m-12=0$$

$$(m+6)(m-2)=0\Rightarrow m=2, m=-6$$

اگر $m=2$ ، آن‌گاه ضریب x^2 در $P(x)$ مثبت است و جدول تعیین علامت آن نمی‌تواند به صورت داده شده باشد. اگر $m=-6$ ، آن‌گاه

$$m^2-2n-12=0\Rightarrow 36-2n-12=0\Rightarrow n=12$$

۲۰۱۰- گزینه ۴ نامعادله داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^2-mx-m}{x^2-x+1}-3\leq 0\Rightarrow \frac{x^2-mx-m-3x^2+3x-3}{x^2-x+1}\leq 0$$

$$\frac{2x^2+(m-3)x+m+3}{x^2-x+1}\geq 0$$

برای عبارت x^2-x+1 مقدار Δ منفی است و مقدار عبارت همواره مثبت است. پس برای اینکه مقدار کسر بالا همواره نامنفی باشد، کافی است صورت آن همواره نامنفی باشد. یعنی برای عبارت $2x^2+(m-3)x+m+3$ ضریب

x^2 مثبت باشد (که هست) و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta=(m-3)^2-8(m+3)\leq 0\Rightarrow m^2-6m+9-8m-24\leq 0$$

$$m^2-14m-15\leq 0\Rightarrow (m-15)(m+1)\leq 0\Rightarrow -1\leq m\leq 15$$

بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۱۵ است.

۲۰۱۱- گزینه ۲ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{17}{3} \\ x_1=3x_2+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\frac{2}{3} \\ x_1=5 \end{cases} \xrightarrow{x_1 x_2=\frac{m}{3}} \frac{10}{3}=\frac{m}{3} \Rightarrow m=10$$

ریاضی - ۸۷

۲۰۱۲- گزینه ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=8, \quad \alpha=\frac{\beta}{2}+5$$

از حل دستگاه معادله‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $\alpha=6$ و $\beta=2$. از طرف دیگر،

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۲۰۰۱- گزینه ۳ اگر $m=0$ ، معادله به صورت $-2x=0$ در می‌آید که یک جواب دارد. اگر $m\neq 0$ ، باید مقدار دلتای معادله برابر صفر باشد، یعنی

$$\Delta=4-16m^2=0\Rightarrow m^2=\frac{1}{4}\Rightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

بنابراین به ازای سه مقدار m ، معادله فقط یک جواب دارد.

۲۰۰۲- گزینه ۳ فرض کنید α عدد بزرگ‌تر و β عدد کوچک‌تر باشد.

در این صورت $\alpha+\beta=4$ و $\alpha\beta=-2$. بنابراین α و β جواب‌های معادله $x^2-4x-2=0$ هستند. در نتیجه $\alpha=2+\sqrt{6}$ و $\beta=2-\sqrt{6}$.

بنابراین

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2+\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}=\frac{(2+\sqrt{6})^2}{(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})}=\frac{10+4\sqrt{6}}{4-6}=-5-2\sqrt{6}$$

۲۰۰۳- گزینه ۲ توجه کنید که $x_1+x_2=-8$ و $x_1x_2=-13$. پس

$$\frac{1}{x_1+2}+\frac{1}{x_2+2}=\frac{(x_1+x_2)+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{-8+4}{-13-16+4}=\frac{4}{25}$$

۲۰۰۴- گزینه ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha+\beta=8$

و $\alpha=2\beta+4$. از حل دستگاه معادله‌های به دست آمده نتیجه می‌شود

$$\alpha=\frac{20}{3} \text{ و } \beta=\frac{4}{3}. \text{ پس } \alpha\beta=m, \text{ پس } m=\frac{80}{9}$$

۲۰۰۵- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $x^2-4=t$ ، آن‌گاه معادله مورد نظر

می‌شود $\frac{4}{t}+\frac{5}{t+1}=2$. اگر دو طرف این معادله را در $t(t+1)$ ضرب کنیم، آن‌گاه

$$4(t+1)+5t=2t(t+1)\Rightarrow 4t+4+5t=2t^2+2t$$

$$2t^2-7t-4=0\Rightarrow t=-\frac{1}{2}, t=4$$

اگر $t=-\frac{1}{2}$ ، آن‌گاه

$$x^2-4=-\frac{1}{2}\Rightarrow x^2=\frac{7}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$$

اگر $t=4$ ، آن‌گاه

$$x^2-4=4\Rightarrow x^2=8\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۸ است.

۲۰۰۶- گزینه ۲ ۲۵ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۷۵ کیلوگرم آن آب است.

اگر یک سوم از آب را تبخیر کنیم، ۵۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، وزن شکر $25+x$ و وزن محلول $75+x$ می‌شود. پس

$$\frac{25+x}{75+x}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}\Rightarrow 50+2x=75+x\Rightarrow x=25$$

یعنی باید ۲۵ کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم.

۲۰۰۷- گزینه ۲ معادله را به صورت $2\sqrt{x-1}=2+\sqrt{x-2}$ می‌نویسیم

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$4x-4=4+x-2+4\sqrt{x-2}\Rightarrow 3x-6=4\sqrt{x-2}$$

دوباره دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$9x^2+36-36x=16x-32\Rightarrow 9x^2-52x+68=0$$

$$(x-2)(9x-34)=0\Rightarrow x=2, x=\frac{34}{9}$$

هر دو جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۲۰۱۸- گزینه ۳ در مخلوط اول که ۱۱ کیلوگرم است، $\frac{4}{100} \times 11 = \frac{44}{100}$

کیلوگرم رنگ و در مخلوط دوم که ۴ کیلوگرم است، $\frac{7}{100} \times 4 = \frac{28}{100}$ کیلوگرم رنگ موجود است.

فرض می‌کنیم که با تبخیر، x کیلوگرم از مواد غیر از رنگ تبخیر شود. در این صورت

$$\frac{4/4 + 2/8}{11 + 4 - x} = \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15 - x} = \frac{1}{20} \Rightarrow 7/2 \times 2 = 15 - x \Rightarrow x = 0/6$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۰۱۹- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $x^2 + 4x + 5 = A$ ، آن‌گاه $A - 2 = \sqrt{A} \xrightarrow{A \geq 2} A^2 - 4A + 4 = A \Rightarrow A^2 - 5A + 4 = 0$

$$\begin{cases} A = 1 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ A = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 5 = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a} = 1} x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

ریاضی - ۹۴

۲۰۲۰- گزینه ۴ از $f(x) > \frac{y}{x}$ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow -1 < x < 5$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازه (a, b) ، همان بازه $(-1, 5)$ است. پس بیشترین

تجربی - ۸۹

مقدار $b - a$ برابر است با $5 - (-1) = 6$.

۲۰۲۱- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $t = x^2 + x$ ، آن‌گاه به دست می‌آید:

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t - 6)(t - 12) = 0$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -1$$

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_3 + x_4 = -1$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

تجربی - ۹۰

۲۰۲۲- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله اول را حساب می‌کنیم:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{3}{5}, \alpha\beta = -\frac{2}{5}$$

اکنون مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله دوم را به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4}$$

$$P = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{25}{4}$$

بنابراین معادله به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 29x + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

راه حل دوم یکی از جواب‌های معادله اول برابر -1 است:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

بنابراین یکی از جواب‌های معادله دوم 1 است:

$$\alpha = -1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow 4 \times 1^2 - k \times 1 + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

ریاضی - ۹۰

۲۰۱۳- گزینه ۴ فرض می‌کنیم x_1 و x_2 جواب‌های معادله مورد نظر

باشند. در این صورت $x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2}$ و $x_1 x_2 = \frac{1}{16}$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 4$$

$$\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m = 6$$

ریاضی - ۹۶

۲۰۱۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ و $\alpha\beta = -2$. بنابراین

مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{-2} + \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

ریاضی - ۹۲

۲۰۱۵- گزینه ۴ برای اینکه معادله دو جواب مثبت باشد، باید

$$\Delta > 0, \quad -\frac{b}{a} > 0, \quad \frac{c}{a} > 0$$

$$\Delta = 4(a-2)^2 - 4(14-a) = 4a^2 - 12a - 4 = 4(a-5)(a+2)$$

از شرط $\Delta > 0$ نتیجه می‌شود $a < -2$ یا $a > 5$. از طرف دیگر،

$$-\frac{b}{a} = 2(a-2) > 0 \Rightarrow a > 2, \quad \frac{c}{a} = 14-a > 0 \Rightarrow a < 14$$

اشتراک ناحیه‌های به دست آمده جواب مسئله است که به صورت $5 < a < 14$ است.

ریاضی - ۹۶

۲۰۱۶- گزینه ۳ حاصل جمع و حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر با

$$\alpha + \beta = -\frac{12}{4} = -3 \text{ و } \alpha\beta = \frac{1}{4} \text{ است. بنابراین}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} &= \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3+1}}{\frac{1}{2}} = 4 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۲۰۱۷- گزینه ۱ برای آنکه، معادله دو جواب مختلف علامت داشته

باشد، باید $\frac{c}{a} < 0$ ، پس

$$\frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۲۰۲۸- گزینه ۴ ابتدا مقدار a را طوری می‌یابیم که $x=4$ جواب معادله باشد:

$$4+a=\sqrt{20-16} \Rightarrow 4+a=2 \Rightarrow a=-2$$

به ازای $a=-2$ ، معادله مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$x-2=\sqrt{5x-x^2} \Rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2$$

$$2x^2-9x+4=0 \Rightarrow x=4, \frac{1}{2}$$

چون $x=\frac{1}{2}$ در معادله $x-2=\sqrt{5x-x^2}$ صدق نمی‌کند، این معادله

تجربی - ۸۷

جواب دیگری ندارد.

۲۰۲۹- گزینه ۲ باید $f(x) < 2$ ، بنابراین

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2 \Rightarrow 3x^2-2x < 2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x-8 < 0 \Rightarrow -2 < x < 4$$

پس $a=-2$ و $b=4$ و در نتیجه $b-a=6$.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۲۰۳۰- گزینه ۲ به‌ازای مقادیری از x ، نمودار تابع زیر محور x است که

داشته باشیم $f(x) < 0$ ، پس

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 = x^2(x-4) - x + 4 = (x-4)(x^2-1)$$

$$= (x-4)(x-1)(x+1) \xrightarrow{f(x) < 0} (x-1)(x+1)(x-4) < 0$$

x	-1	1	4	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

بزرگ‌ترین بازه به‌صورت (a, b) که در آن $f(x)$ منفی است، بازه $(1, 4)$

ریاضی - ۸۸

است، پس $b-a=4-1=3$.

۲۰۲۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم x_1 و x_2 جواب‌های معادله

$$2x^2-x-2=0 \text{ و } \alpha \text{ و } \beta \text{ جواب‌های معادله } 8x^2-mx-8=0 \text{ باشند.}$$

در این صورت

$$x_1+x_2=\frac{1}{2}, \quad x_1x_2=-1$$

$$\alpha+\beta=\frac{m}{8}, \quad \alpha\beta=-1$$

$$\alpha=x_1^2, \quad \beta=x_2^2$$

دو طرف تساوی $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ را به توان سه می‌رسانیم:

$$x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{1}{8}$$

$$\alpha+\beta-3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{m}{8}=\frac{1}{8}+\frac{3}{2} \Rightarrow m=13$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۰۲۴- گزینه ۲ $x=2$ در معادله صدق می‌کند، پس

$$2(4a-2-5)=2 \Rightarrow a=2$$

بنابراین معادله به صورت $2x^3-x^2-5x-2=0$ است. با تقسیم عبارت

سمت چپ معادله بر $x-2$ به‌دست می‌آید:

$$2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(2x^2+3x+1)=0$$

بنابراین دو جواب دیگر از معادله $2x^2+3x+1=0$ به‌دست می‌آیند که

مجموع آن‌ها برابر $-\frac{3}{2}$ است.

۲۰۲۵- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x}$ ، آن‌گاه $t^2-2t+m-1=0$.

برای آنکه دو جواب برای x به‌دست آید، باید این معادله دو جواب نامنفی

داشته باشد:

$$\left. \begin{aligned} \Delta > 0 &\Rightarrow 4-(m-1) > 0 \Rightarrow m < 2 \\ \frac{c}{a} \geq 0 &\Rightarrow \frac{m-1}{1} \geq 0 \Rightarrow m-1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1 \\ -\frac{b}{a} > 0 &\Rightarrow -\frac{-2}{1} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cap} 1 \leq m < 2$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۲۰۲۶- گزینه ۲ برای اینکه همه مقادیر عبارت مورد نظر مثبت باشد، باید

$$1-a > 0 \Rightarrow a < 1$$

$$\Delta = 24+4a(1-a) < 0 \Rightarrow -a^2+a+6 < 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

از اشتراک این ناحیه‌ها به‌دست می‌آید $a < -2$.

۲۰۲۷- گزینه ۴ برای اینکه معادله $\sqrt{4x-3}=2-3x$ جواب داشته

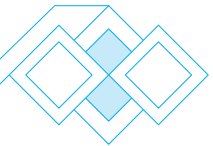
باشد، باید

$$4x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}, \quad 2-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

با اشتراک دو محدوده به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم که معادله جوابی

خارج از کشور تجربی - ۸۷

نمی‌تواند داشته باشد.



۲۰۳۷- گزینه ۲ چون $x < y < 0$ ، پس $2x - y < 0$ و $2y - x > 0$ ، پس

عبارت مورد نظر برابر است با $-(2x - y) - (2y - x) - x + 2y = -2x + y$

۲۰۳۸- گزینه ۴ توجه کنید که $a - 1 < 0$ ، $b + 2 > 0$ و $a + b < 1 - 1 = 0$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $-1 - 1 - 1 = -3$

۲۰۳۹- گزینه ۱ چون $a < 0$ ، پس $|a| = -a$ ، در نتیجه

$$|a|b \leq a \xrightarrow{a \neq 0} b \leq \frac{a}{|a|} \xrightarrow{a < 0} b \leq -1$$

بنابراین هر یک از عددهای $2b - 6$ و $b - 2$ هم منفی هستند، پس

$$|2b - 6| - |b - 2| = -(2b - 6) - (b - 2) = -2$$

۲۰۴۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$

اکنون به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	+	0	-	+
$x^2 - 2$		+	0	-	-	+
y		2	0	0	-2	2

بنابراین y سه مقدار مختلف (0 و ± 2) دارد.

۲۰۴۱- گزینه ۴ معادله را به صورت $x^2 - 5x = \pm 6$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^2 - 5x = 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 6$$

$$x^2 - 5x = -6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۳۶- است.

۲۰۴۲- گزینه ۲ توجه کنید که $|3(x - 6)| = 3|x - 6|$ و $|3x - 18| = |3(x - 6)|$

$$بنابراین $|24 - 4x| = |4x - 24| = |4(x - 6)| = 4|x - 6|$$$

$$7|x - 6| = 28 \Rightarrow |x - 6| = 4 \Rightarrow x = 2, x = 10$$

پس مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر ۱۲ است.

۲۰۴۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $|a| = |b|$ ، آن‌گاه $a = b$ یا

$a = -b$. بنابراین از معادله داده شده نتیجه می‌شود $x^2 - 2x = x^2 + 2x - 4$

یا $x^2 - 2x = -x^2 - 2x + 4$. بنابراین

$$x^2 - 2x = x^2 + 2x - 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 2x = -x^2 - 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۲- است.

۲۰۴۴- گزینه ۳ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $|x| = x$ و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

حالت دوم اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $|x| = -x$ و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{7}, x = 2 - \sqrt{7} \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین معادله مورد نظر سه جواب دارد.

۲۰۳۱- گزینه ۲ اگر $a < -2$ ، آن‌گاه $1 + a < -1 < 0$ ، پس $|1 + a| = -1 - a$

در نتیجه $|2 + a| = |1 + 1 + a| = |1 + a| = -1 - a$ ، از طرف دیگر، چون $a < -2$ ، پس

$$a + 2 < 0 \text{، در نتیجه } |2 + a| = -2 - a$$

۲۰۳۲- گزینه ۴ راه حل اول چون $-1 < x < 2$ ، پس

$$\frac{|x - 2|}{x - 2} = \frac{2 - x}{x - 2} = -1, \quad \frac{x + 1}{|x + 1|} = \frac{x + 1}{x + 1} = 1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-1 - 1 = -2$

راه حل دوم کافی است حاصل عبارت را به ازای $x = 0$ حساب کنیم:

$$A = \frac{|x - 2|}{x - 2} - \frac{x + 1}{|x + 1|} \xrightarrow{x = 0} A = -1 - 1 = -2$$

۲۰۳۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$-3 < x < -2 \Rightarrow -18 < 6x < -12 \Rightarrow 0 < 14 < 6x + 32 < 20$$

در نتیجه $|6x + 32| = 6x + 32$ ، از طرف دیگر،

$$-3 < x < -2 \Rightarrow 3 > -x > 2 \Rightarrow 11 > 8 - x > 10 > 0$$

در نتیجه $|8 - x| = 8 - x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{6x + 32 - 4(8 - x)}{3x} = \frac{6x + 4x - 32 + 32}{3x} = \frac{10}{3}$$

۲۰۳۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$1 < x < 2 \Rightarrow 3 < 3x < 6 \Rightarrow 0 < 3x - 3 < 3 \Rightarrow |3x - 3| = 3x - 3$$

$$\sqrt{4x^2 - 16x + 16} = \sqrt{4(x - 2)^2} = 2|x - 2| = -2x + 4$$

منفی

بنابراین $A = 3x - 3 - (-2x + 4) = 5x - 7$

۲۰۳۵- گزینه ۴ راه حل اول چون x منفی است، عبارت $x + \frac{4}{x}$ منفی

است، پس $|x + \frac{4}{x}| = -x - \frac{4}{x}$ ، از طرف دیگر،

$$|x - \frac{4}{x}| = \frac{|x^2 - 4|}{x} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x}$$

چون $-2 < x < 0$ ، پس $x - 2 < 0$ و $x + 2 > 0$ و چون x منفی است، پس

$$x - \frac{4}{x} \text{ مثبت است، پس } |x - \frac{4}{x}| = x - \frac{4}{x}$$

$$f(x) = -x - \frac{4}{x} + x - \frac{4}{x} = -\frac{8}{x}$$

راه حل دوم حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x = -1$ حساب می‌کنیم:

$$f(x) = |x + \frac{4}{x}| + |x - \frac{4}{x}| \xrightarrow{x = -1} f(-1) = |-5| + |3| = 8$$

فقط مقدار گزینه (۴) به ازای $x = -1$ برابر ۸ می‌شود.

۲۰۳۶- گزینه ۳ چون $a - 6 < 0$ ، پس $|a - 6| = -a + 6$. بنابراین

$$A = |6 - a - |3 + |a - 6|| = |6 - a - |3 - a + 6|| = |6 - a - |9 - a||$$

$$\xrightarrow{9 - a > 0} A = |6 - a - (9 - a)| = |-3| = 3$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(3, +\infty) \cup (-\infty, 0)$ است که شامل عددهای صحیح $0, 1, 2, 3$ نیست.

۲۰۵۰- گزینه ۳ راه‌حل اول می‌دانیم $x^2 = |x|^2$ بنابراین نامعادله به

شکل $|x|^2 - 5|x| + 4 \leq 0$ نوشته می‌شود. اگر فرض کنیم $t = |x|$ ، نامعادله به صورت $t^2 - 5t + 4 \leq 0$ درمی‌آید.

با توجه به جدول زیر، محدوده $1 \leq t \leq 4$ جواب نامعادله است. یعنی

$$1 \leq |x| \leq 4$$

t	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$t^2 - 5t + 4$		+	-	+

راه‌حل دوم عدد صفر در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه (۱) جواب نیست. عدد ۵ هم در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۴) هم جواب نیستند. پس گزینه (۳) جواب است.

۲۰۵۱- گزینه ۲ می‌دانیم اگر $a \geq 0$ ، آن‌گاه جواب‌های معادله $|x| = a$

برابرند با $x = \pm a$. بنابراین

$$||x-4|-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} |x-4|-1=3 \Rightarrow |x-4|=4 \\ |x-4|-1=-3 \Rightarrow |x-4|=-2 \end{cases}$$

معادله $|x-4|=-2$ جواب ندارد. پس

$$|x-4|=4 \Rightarrow \begin{cases} x-4=4 \\ x-4=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=0 \end{cases}$$

بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

۲۰۵۲- گزینه ۳ توجه کنید که $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$|x-1||x-3|-5|x-1|=0 \Rightarrow |x-1|(|x-3|-5)=0$$

$$\begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow x=1 \\ |x-3|=5 \Rightarrow x-3=\pm 5 \Rightarrow x=-2, x=8 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با ۷.

۲۰۵۳- گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که چون سمت چپ معادله

نامنفی است، پس سمت راست آن هم نامنفی است، بنابراین $x \geq 0$. طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$|x^2 - 4| = 3x \Rightarrow (x^2 - 4)^2 = (3x)^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 9x^2$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 16) = 0$$

بنابراین

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$

چون $x \geq 0$ ، پس فقط جواب‌های $x=1$ و $x=4$ قابل قبول هستند که مجموعه آن‌ها برابر است با ۵.

راه‌حل دوم اگر $x < 0$ ، آن‌گاه معادله جواب ندارد، زیرا سمت راست تساوی منفی و

سمت چپ آن نامنفی است. اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 3x \\ x^2 - 4 = -3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -4 \end{cases}$$

۲۰۴۵- گزینه ۲ راه‌حل اول معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - 2x + 1 - |x-1| - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - |x-1| - 2 = 0$$

$$|x-1|^2 - |x-1| - 2 = 0 \xrightarrow{|x-1|=t} t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2)=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow |x-1|=-1 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$t=2 \Rightarrow |x-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \Rightarrow x=3 \\ x-1=-2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر ۲ است.

راه‌حل دوم دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول اگر $x \geq 1$ ، آن‌گاه $|x-1|=x-1$ و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 2x + 1 - (x-1) - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x=0, x=3$$

حالت دوم اگر $x < 1$ ، آن‌گاه $|x-1|=1-x$ و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 2x + 1 - (1-x) - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x=-1, x=2$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با $3-1=2$.

۲۰۴۶- گزینه ۴ نامعادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$3x - 2 \geq 7 \text{ یا } 3x - 2 \leq -7 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -\frac{5}{3}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [3, +\infty)$ یا

$$\mathbb{R} - (-\frac{5}{3}, 3)$$

است. پس $a = -\frac{5}{3}$ و $b = 3$ و در نتیجه $ab = -5$.

۲۰۴۷- گزینه ۱ راه‌حل اول نابرابری $|x| \leq |y|$ با نابرابری

$$(x-y)(x+y) \leq 0$$

$$|x| \leq |y| \Rightarrow x^2 \leq y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 \leq 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) \leq 0$$

در نتیجه نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(a+5-a+5)(a+5+a-5) \leq 0$$

نابرابری بالا به صورت $(2a) \leq 0$ یا $20a \leq 0$ درمی‌آید که مجموعه جواب‌های آن $[-\infty, 0]$ است.

راه‌حل دوم دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادله زیر برسیم:

$$a^2 + 10a + 25 \leq a^2 - 10a + 25 \Rightarrow 20a \leq 0$$

پس مجموعه جواب‌های آن $[-\infty, 0]$ است.

۲۰۴۸- گزینه ۱ نامعادله را به صورت $\frac{|x-6|}{|x-2|} > 3$ می‌نویسیم. چون

$x \neq 2$ ، دو طرف این نامعادله را در عبارت مثبت $|x-2|$ ضرب می‌کنیم:

$$|x-6| > 3|x-2|$$

چون دو طرف نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم:

$$x^2 - 12x + 36 > 9(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow 8(x^2 - 3x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$$

عددهای صحیح ۱ و ۲ در بازه $(0, 3)$ هستند. اما $x=2$ قابل قبول نیست، پس تنها جواب صحیح نامعادله مورد نظر ۱ است.

۲۰۴۹- گزینه ۳ اگر $x < 0$ ، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن

صدق می‌کنند. همچنین $x=0$ جواب نامعادله نیست. اگر $x > 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x^2 - x > 2x \Rightarrow x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 3 \\ x^2 - x < -2x \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \xrightarrow{x>0} x < -1 \end{cases}$$

(غ.ق.) $x < -1$

۲۰۵۹- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $x = |x|$.

$$\text{بنابراین} \quad x < |x| \Rightarrow x < 0.$$

در نتیجه

$$|x| < x^2 \xrightarrow{x < 0} -x < x^2 \Rightarrow x(x+1) > 0 \xrightarrow{x < 0} x+1 < 0.$$

به این ترتیب، $|x+1| = -x-1$ ، $|x| = -x$ و $|1-x| = 1-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-3x$.

راه حل دوم $x = -2$ در نابرابری های $x < |x| < x^2$ صدق می کند. بنابراین کافی است حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x = -2$ به دست آوریم:

$$A = |x+1| + |1-x| + |x| \xrightarrow{x=-2} A = 1+3+2=6$$

فقط مقدار گزینه (۱) به ازای $x = -2$ برابر ۶ است.

۲۰۶۰- گزینه ۴ راه حل اول اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $x+1 > 0$ و نامعادله به

شکل $(x+1)x < x(x+1)$ درمی آید که جواب ندارد. اگر $-1 < x < 0$ ، آن گاه $x+1 > 0$ و نامعادله به شکل $(x+1)x < x(x+1)$ درمی آید، یعنی $2x(x+1) > 0$ که درست نیست. اگر $x \leq -1$ ، آن گاه $x+1 \leq 0$ و نامعادله به شکل $(x+1)x < -x(x+1)$ درمی آید که جواب ندارد. پس مجموعه جواب های نامعادله تهی است.

راه حل دوم معلوم است که $x = 0$ و $x = -1$ جواب های نامعادله نیستند، پس می توانیم نامعادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$(1) \quad \frac{x+1}{|x+1|} < \frac{x}{|x|}$$

می دانیم برای هر $a \neq 0$ ، $\frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$. بنابراین تنها حالتی که

نامعادله (۱) می تواند جواب داشته باشد به صورت زیر است:

$$\frac{x+1}{|x+1|} = -1, \quad \frac{x}{|x|} = 1$$

از معادله اول نتیجه می شود $x+1 < 0$ ، یعنی $x < -1$ و از معادله دوم نتیجه می شود $x > 0$. دو محدوده به دست آمده اشتراک ندارند، پس مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر تهی است.

۲۰۶۱- گزینه ۴ چون از $|A| = -A$ ، نتیجه می شود $A \leq 0$ ، پس از

$$(x^2 - x - 6) = -(x^2 - x - 6) \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) \leq 0$$

مجموعه جواب های نامعادله است، که شامل شش عدد صحیح $(0, \pm 1, \pm 2, 3)$ است.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$		+	-	+

۲۰۶۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$||x^2 - 5| - 2| = 1 \Rightarrow |x^2 - 5| - 2 = \pm 1$$

حالت اول

$$|x^2 - 5| - 2 = -1 \Rightarrow |x^2 - 5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = -1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 5 = 1 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

حالت دوم

$$|x^2 - 5| - 2 = 1 \Rightarrow |x^2 - 5| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = -3 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \\ x^2 - 5 = 3 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm \sqrt{8} \end{cases}$$

بنابراین معادله هشت جواب دارد.

جواب های $x = -1$ و $x = -4$ قابل قبول نیستند، زیرا با شرط $x \geq 0$ معادله را حل کرده ایم. پس جواب های معادله $x = 1$ و $x = 4$ هستند که مجموع آن ها برابر ۵ است.

۲۰۵۴- گزینه ۴ اگر $x \leq -3$ ، آن گاه $|x+3| = -(x+3)$ و معادله می شود

$$x^2 + 2(x+3) - 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x = -1 - \sqrt{13}, \quad x = -1 + \sqrt{13} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

اگر $x > -3$ ، آن گاه $|x+3| = x+3$ و معادله می شود

$$x^2 - 2(x+3) - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x = 6, \quad x = -4 \quad (\text{غ.ق.ق.}) \Rightarrow x = -4$$

بنابراین مجموع جواب های معادله مورد نظر برابر است با $5 - \sqrt{13}$.

۲۰۵۵- گزینه ۴ با توجه به فرض سؤال، هر یک از معادله های

$$x^2 - 6x - a = 0 \quad \text{و} \quad x^2 - 6x + a = 0$$

باید دو جواب داشته باشد. در نتیجه $36 - 4a > 0$ و $36 + 4a > 0$ می دانیم. (زیرا اگر $a < 0$ ، معادله $|x^2 - 6x| = a$ جواب ندارد)، در نتیجه $36 + 4a > 0 \Rightarrow a < 9$

بنابراین $0 < a < 9$.

۲۰۵۶- گزینه ۴ ابتدا باید مجموعه جواب های نامعادله های $|x-3| \geq 2$

و $|2x+1| \leq 5$ را بیابیم. توجه کنید که

$$|x-3| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 2 \Rightarrow x \geq 5 \\ x-3 \leq -2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$|2x+1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x+1 \leq 5 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 2$$

پس مجموعه جواب های اولی برابر با $A = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ و مجموعه جواب های دومی $B = [-3, 2]$ است. بنابراین $A \cap B = [-3, 1]$.

۲۰۵۷- گزینه ۲ راه حل اول برای حل این نامعادله دو طرف آن را به توان

دو می رسانیم تا به نامعادله زیر برسیم:

$$(x+1)^2 \geq (2x-1)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

در نتیجه به نامعادله زیر می رسیم:

$$3x^2 - 6x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

بنابراین $a = 0$ و $b = 2$. در نتیجه $b - a = 2$.

راه حل دوم اگر دو طرف نابرابری $|A| \geq |B|$ را به توان دو برسانیم، نتیجه می شود:

$$A^2 \geq B^2 \Rightarrow A^2 - B^2 \geq 0 \Rightarrow (A-B)(A+B) \geq 0$$

و برعکس. در نتیجه نامعادله مورد نظر معادل است با

$$(x+1-2x+1)(x+1+2x-1) \geq 0 \Rightarrow (-x+2)(3x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

بنابراین $a = 0$ و $b = 2$. در نتیجه $b - a = 2$.

۲۰۵۸- گزینه ۴ ابتدا نامعادله را به صورت $|\frac{x-3}{2-x}| \leq 1$ می نویسیم.

بنابراین

$$\frac{|x-3|}{|2-x|} \leq 1 \Rightarrow |x-3| \leq |2-x|, \quad x \neq 2$$

$$|x-3|^2 \leq |2-x|^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

بنابراین $(\frac{5}{2}, +\infty)$ مجموعه جواب های نامعادله است و در نتیجه $a = 5$.

$b = 2$ پس $a + b = 7$.

راه حل دوم

۲۰۶۳- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x(x^2-3)|=|x| \Rightarrow |x||x^2-3|=|x|$$

واضح است که $x=0$ یک جواب معادله است. با شرط $x \neq 0$ دو طرف معادله را بر $|x|$ تقسیم می‌کنیم:

$$|x^2-3|=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3=-1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ x^2-3=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

بنابراین معادله پنج جواب دارد.

۲۰۶۴- گزینه ۴ با توجه به ریشه عبارت‌های داخل قدرمطلق، سه حالت

زیر را بررسی می‌کنیم

$$x \leq -2 \Rightarrow -2(x-1)-(x+2)=5 \Rightarrow -3x=5 \Rightarrow x=-\frac{5}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

$$-2 < x \leq 1 \Rightarrow -2(x-1)+x+2=5 \Rightarrow -x+4=5 \Rightarrow x=-1$$

$$x > 1 \Rightarrow 2(x-1)+x+2=5 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر $\{-1, \frac{5}{3}\}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{2}{3}$ است.

۲۰۶۵- گزینه ۴ چون صفر جواب معادله مورد نظر نیست، پس $a \neq 0$.همچنین، سمت چپ معادله نامنفی است، پس $a > 0$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{x^2}{x+1}=a \Rightarrow x^2-ax-a=0 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{x+1}=-a \Rightarrow x^2+ax+a=0$$

توجه کنید که معادله $x^2-ax-a=0$ همیشه دو جواب غیرصفر دارد ($\Delta=a^2+4a>0$). بنابراین برای اینکه معادله اصلی دو جواب غیرصفر

داشته باشد، باید معادله $x^2+ax+a=0$ جواب نداشته باشد:

$$\Delta=a^2-4a<0 \Rightarrow 0<a<4$$

بنابراین اگر $0<a<4$ ، معادله مورد نظر دو جواب غیرصفر دارد. توجه کنید که $x=-1$ (ریشه مخرج کسر)، جواب معادله $x^2-ax-a=0$ نیست.

۲۰۶۶- گزینه ۲ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|-4>1 \quad \text{یا} \quad |x|-4<-1$$

پس $|x|<3$ یا $|x|>5$. از نامعادله $|x|<3$ نتیجه می‌شود $-3<x<3$.از نامعادله $|x|>5$ نتیجه می‌شود $x>5$ یا $x<-5$. بنابراین مجموعه

جواب‌های نامعادله به صورت زیر است:

$$(-\infty, -5) \cup (-3, 3) \cup (5, +\infty)$$

که شامل اعداد صحیح ± 5 ، ± 4 و ± 3 نیست. تعداد این اعداد ۶ تا است.

۲۰۶۷- گزینه ۱ راه حل اول نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|(x-5)(x-2)| < |(x-2)(x-3)| \Rightarrow |x-2||x-5| < |x-2||x-3|$$

معلوم است که $x \neq 2$. بنابراین $|x-5| < |x-3|$. چون دو طرف این

نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توان آن‌ها را به توان دو رساند:

$$x^2-10x+25 < x^2-6x+9 \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > 4$$

$$|x^2-7x+10| < |x^2-5x+6|$$

$$x^2-7x+10 < x^2-5x+6 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$$

$$x^2-7x+10 > -x^2+5x-6 \Rightarrow 2x^2-12x+16 > 0 \Rightarrow x^2-6x+8 > 0$$

$$(x-2)(x-4) > 0 \Rightarrow x > 4 \quad \text{یا} \quad x < 2$$

مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر برابر با اشتراک این جواب‌ها است، که برابر $x > 4$ است.

۲۰۶۸- گزینه ۲ نامعادله را به صورت $x^2-2x+1 < 2+|x-1|$ می‌نویسیم.

بنابراین

$$(x-1)^2 < 2+|x-1| \Rightarrow |x-1|^2 < 2+|x-1|$$

اگر فرض کنیم $t=|x-1|$ ، آن‌گاه

$$t^2-t-2 < 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) < 0$$

چون $t \geq 0$ ، بنابراین $t+1 \geq 1$ و در نتیجه باید نامعادله $t-2 < 0$ را حل کنیمکه $t < 2$ جواب است. پس $|x-1| < 2$ و در نتیجه

$$-2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر قرار دارند.

۲۰۶۹- گزینه ۲ ابتدا نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-a^2-2 < |x|-3a < a^2+2 \Rightarrow -a^2+3a-2 < |x| < a^2+3a+2$$

واضح است که اگر $a^2+3a+2 \leq 0$ ، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. پس

$$a^2+3a+2=(a+1)(a+2) \leq 0$$

a	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
a^2+3a+2		+	-	+

با توجه به جدول فوق باید $-2 \leq a \leq -1$.۲۰۷۰- گزینه ۲ اگر $x < 1$ ، آن‌گاه سمت چپ نامعادله منفی وسمت راست آن نامنفی است. پس $x < 1$ جواب نامعادله است. اگر $x > 1$ ،آن‌گاه $|x+1|=x+1$ و در نتیجه

$$\frac{3}{x-1} \leq x+1 \Rightarrow 3 \leq x^2-1 \Rightarrow x^2 \geq 4 \xrightarrow{x>1} x \geq 2$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $\mathbb{R}-[1, 2)$ است و در نتیجه

$$a=1, b=2 \Rightarrow a+b=3$$

۲۰۷۱- گزینه ۴ با جای گذاری $x=\sqrt{2}-1$ در ضابطه تابع به دست می‌آید

$$f(\sqrt{2}-1)=5|3\sqrt{2}-3-1|+3|5\sqrt{2}-5-4|$$

$$=5(3\sqrt{2}-4)-3(5\sqrt{2}-9)=7$$

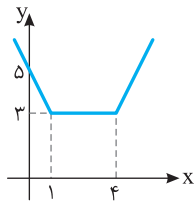
با جای گذاری $x=\sqrt{3}-1$ در ضابطه تابع به دست می‌آید

$$f(\sqrt{3}-1)=5|3\sqrt{3}-3-1|+3|5\sqrt{3}-5-4|$$

$$=5(3\sqrt{3}-4)-3(5\sqrt{3}-9)=7$$

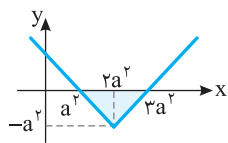
پس

$$f(\sqrt{2}-1)+f(\sqrt{3}-1)=14$$



آوریم. نمودار تابع f در شکل رسم شده است. با توجه به شکل، کمترین مقدار تابع f برابر ۳ است، بنابراین بیشترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{15}{3} = 5$.

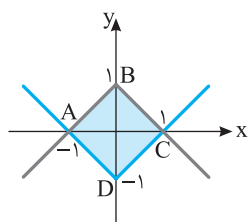
گزینه ۲-۲۰۷۸ اگر نمودار تابع $y = |x|$ را $2a^2$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = |x - 2a^2|$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را a^2 واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2a^2| - a^2$ به دست می‌آید. با توجه به نمودار این تابع، مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با



$$S = \frac{1}{2} a^2 (2a^2) = a^4$$

بنابراین

$$a^4 = 4 \Rightarrow a = \pm \sqrt{2}$$

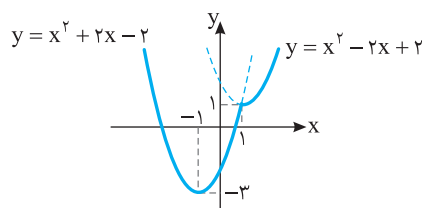


گزینه ۳-۲۰۷۹ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی ABCD مطلوب است. در واقع مساحت مورد نظر از چهار مثلث قائم الزاویه به قاعده یک واحد و ارتفاع یک واحد تشکیل شده است. پس مساحت ABCD برابر است با $4 \times (\frac{1 \times 1}{2}) = 2$.

گزینه ۳-۲۰۸۰ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 2 & x < 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و برد آن بازه $[-3, +\infty)$ است.



گزینه ۱-۲۰۸۱ ابتدا مقادیر $f(2+|a|)$ و $f(2-|a|)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(2-|a|) = |2-|a|| - 2 + 1 = |-|a|| + 1 = |a| + 1$$

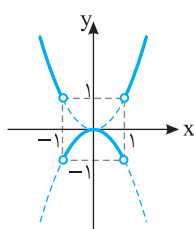
$$f(2+|a|) = |2+|a|| - 2 + 1 = |a| + 1 = |a| + 1$$

$$f(2-|a|) - 2f(2+|a|) + 1 = |a| + 1 - 2|a| - 2 + 1 = -|a|$$

گزینه ۱-۲۰۸۲ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| > 1 \\ -x^2 & |x| < 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به صورت روبه‌رو است و برد تابع f برابر با $(-1, +\infty) \cup (-1, 0)$ است. پس $a = 1$ و $b = 0$ و در نتیجه $a - b = 1$.



گزینه ۳-۲۰۷۲ برای $x > 1$ ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x-1 > 0, x+1 > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1-x}{x-1} = 2$$

به طریق مشابه برای $-1 < x < 1$ به دست می‌آید

$$x-1 < 0, x+1 > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1-x}{-(x-1)} = 0$$

همچنین برای $x < -1$

$$x-1 < 0, x+1 < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-(x+1)}{x+1} - \frac{1-x}{-(x-1)} = -2$$

بنابراین $R_f = \{-2, 0, 2\}$ و برد تابع ۳ عضو دارد.

گزینه ۳-۲۰۷۳ راه حل اول اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$|x| = x \Rightarrow |x - |x|| = |x - x| = 0$$

بنابراین $f(x) = |2x - 0| = |2x| = 2x$ اگر $x < 0$ ، آن‌گاه

$$|x| = -x \Rightarrow |x - |x|| = |x + x| = |2x| = -2x$$

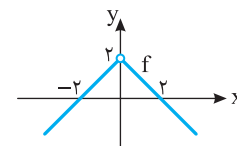
بنابراین $f(x) = |2x - (-2x)| = |4x| = -4x$ در نتیجه

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -4x & x < 0 \end{cases}$$

راه حل دوم توجه کنید که $f(1) = 2$. فقط در تابع گزینه (۳) این شرایط برقرار است.

گزینه ۲-۲۰۷۴ توجه کنید که

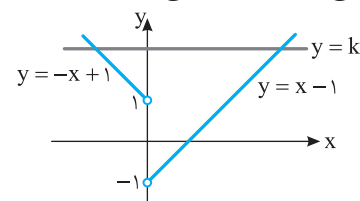
$$f(x) = \frac{2|x| - x^2}{|x|} = \begin{cases} \frac{2x - x^2}{x} & x > 0 \\ \frac{-2x - x^2}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x & x > 0 \\ 2 + x & x < 0 \end{cases}$$



گزینه ۳-۲۰۷۵ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -x(1 - \frac{1}{x}) & x < 0 \\ x(1 - \frac{1}{x}) & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + 1 & x < 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

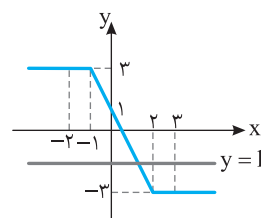
بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که اگر $k > 1$ ، آن‌گاه خط $y = k$ و نمودار تابع f در دو نقطه متقاطع‌اند.



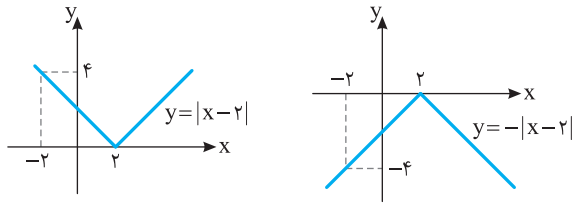
گزینه ۱-۲۰۷۶ نمودار تابع f را

به کمک نقاط $(-1, 3)$ ، $(2, -3)$ ، $(-3, 3)$ و $(3, -3)$ رسم می‌کنیم.

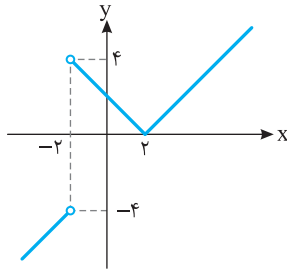
واضح است که اگر خط $y = k$ این نمودار را در یک نقطه با طول مثبت قطع کند، باید $-3 < k < 3$.



ابتدا نمودار توابع $y = |x-2|$ و $y = -|x-2|$ را رسم می‌کنیم.



پس نمودار تابع f به صورت زیر است.



توجه کنید که با توجه به ریشه‌های عبارت‌های داخل

قدرمطلق چهار حالت زیر برای ضابطه تابع وجود دارد:

$$x \leq -1 \Rightarrow f(x) = -x + x - 2 + 2(x+1) = 2x$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow f(x) = -x + x - 2 - 2(x+1) = -2x - 4$$

$$0 < x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x + x - 2 - 2(x+1) = -4$$

$$x > 2 \Rightarrow f(x) = x - (x-2) - 2(x+1) = -2x$$

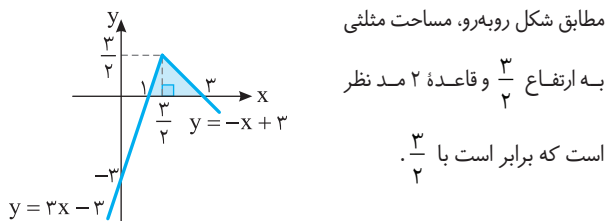
بنابراین روی بازه $[0, 2]$ نمودار تابع یک پاره‌خط افقی است که طول آن برابر

است با ۲.

ضابطه تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و نمودار تابع را

رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = x - (2x - 3) = -x + 3 \\ x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = x + 2x - 3 = 3x - 3 \end{cases}$$

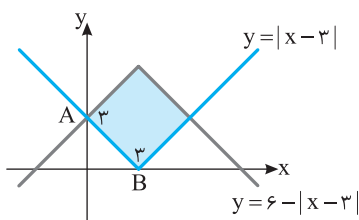


در شکل زیر نمودارها را رسم کرده‌ایم. با توجه به اینکه

شکل حاصل مربع است، کافی است طول ضلع مربع را به دست آوریم:

$$A(0, 3), B(3, 0) \Rightarrow AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $(3\sqrt{2})^2 = 18$.



اگر $0 \leq x \leq 2$ ، آنگاه $x+2 > 0$ و $x-2 \leq 0$ ، پس

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \leq 0$$

$$x^2 - 2x = x(x-2) \leq 0$$

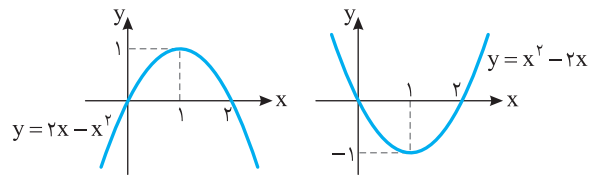
بنابراین $f(x) = -x^2 + 4 + (x^2 - 2x) = -2x + 4$ پس

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 \leq -2x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -2x + 4 \leq 4$$

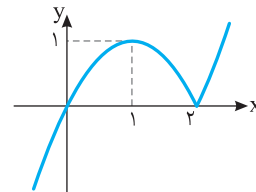
پس حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x \leq 2 \\ x^2 - 2x & x > 2 \end{cases}$$
 ضابطه تابع به شکل

است. نمودار توابع $y = x^2 - 2x$ و $y = 2x - x^2$ به صورت زیر است.



بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



راه‌حل اول ضابطه تابع به صورت زیر است:

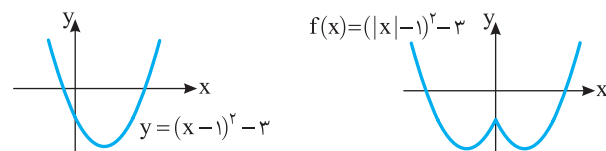
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 2 & x > 0 \end{cases}$$

هر یک از قطعه‌ها بخشی از یک سهمی است (اولی به رأس $(-1, -3)$ و دومی به رأس $(1, -3)$). پس نمودار تابع به صورت گزینه (۳) است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x) = |x|^2 - 2|x| - 2 = (|x| - 1)^2 - 3$$

بنابراین کافی است ابتدا نمودار تابع $y = (x-1)^2 - 3$ را رسم کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست این محور قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم.



راه‌حل سوم چون $f(-x) = f(x)$ ، بنابراین نمودار تابع f نسبت به محور y

متقارن است (توجه کنید که نمودار $y = f(-x)$ از قرینه کردن نمودار تابع f نسبت به محور y به دست می‌آید). بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر، $f(0) = -2$ ، پس گزینه (۱) هم رد می‌شود.

توجه کنید که

$$f(x) = \frac{|x-2||x+2|}{x+2} = \begin{cases} |x-2| & x > -2 \\ -|x-2| & x < -2 \end{cases}$$

راه حل دوم فرض کنید $n=2$. در این صورت $[\sqrt{4n^2-2n+1}]=[\sqrt{13}]=3$ فقط مقدار گزینه (۲) به ازای $n=2$ برابر ۳ می شود.

گزینه ۲ - ۲۰۹۷ اگر $[\frac{5-x}{2}]=-4$ ، آن گاه $-4 \leq \frac{5-x}{2} < -3$ ، بنابراین

$$-8 \leq 5-x < -6 \Rightarrow -13 \leq -x < -11$$

در نتیجه $11 < x \leq 13$. بنابراین $a=11$ ، $b=13$ و $b-a=2$.

گزینه ۲ - ۲۰۹۸ ابتدا توجه کنید که $[x+2]=[x]+2$ و $[x-1]=[x]-1$ ، بنابراین

$$2[x+2]-[x-1]=7 \Rightarrow 2[x]+4-[x]+1=7 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

گزینه ۱ - ۲۰۹۹ اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه $[x+k]=[x]+k$ ، بنابراین

$$[x+[x-3]]=3 \Rightarrow [x]+[x-3]=3 \Rightarrow [x]+[x]-3=3 \Rightarrow [x]=3$$

در نتیجه $3 \leq x < 4$. بنابراین $a=3$ ، $b=4$ و $a+b=7$.

گزینه ۳ - ۲۱۰۰ توجه کنید که $3 \leq [x] \leq 4$ معادل است با $[x]=3$ یا

$$[x]=4$$

$$[x]=3 \Rightarrow 3 \leq x < 4, \quad [x]=4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$

پس مجموعه جواب های نامعادله بازه $(3, 5)$ است.

در نتیجه $a=3$ ، $b=5$ و $a+b=8$.

گزینه ۱ - ۲۱۰۱ ابتدا توجه کنید که

$$[\sqrt[3]{2}]=[\sqrt[3]{3}]=\dots=[\sqrt[3]{7}]=1, \quad [\sqrt[3]{8}]=[\sqrt[3]{9}]=\dots=[\sqrt[3]{26}]=2$$

$$[\sqrt[3]{27}]=[\sqrt[3]{28}]=\dots=[\sqrt[3]{63}]=3$$

بنابراین

$$A = \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{تا } 6} + \underbrace{2+2+\dots+2}_{\text{تا } 19} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{\text{تا } 37} = 6+38+111=155$$

گزینه ۳ - ۲۱۰۲

$$A = [-\sqrt{10}] + [-\sqrt{9}] + [-\sqrt{8}] + \dots + [\sqrt{10}]$$

$$= ([-\sqrt{10}] + [\sqrt{10}]) + ([-\sqrt{9}] + [\sqrt{9}]) + \dots + ([-\sqrt{1}] + [\sqrt{1}])$$

اگر $x \in \mathbb{Z}$ آن گاه $[x]+[-x]=0$ و اگر $x \notin \mathbb{Z}$ آن گاه $[x]+[-x]=-1$. از

$\sqrt{10}$ تا $\sqrt{1}$ اعداد $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{3}$ صحیح هستند و اعداد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{1}$ صحیح هستند. بنابراین

$$A = \underbrace{0+0+\dots+0}_{\text{تا } 4} + \underbrace{(-1)+(-1)+\dots+(-1)}_{\text{تا } 7} = -7$$

گزینه ۴ - ۲۱۰۳ از $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ نتیجه می شود

$$1 < 3x < 2 \Rightarrow [3x]=1, \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 3 \Rightarrow 3 < \frac{1}{x} < 6 \Rightarrow 1 < \frac{1}{3x} < 2 \Rightarrow [\frac{1}{3x}]=1$$

$$[3x] - [\frac{1}{3x}] = 1 - 1 = 0 \quad \text{بنابراین}$$

گزینه ۲ - ۲۱۰۴ از فرض مسئله نتیجه می شود

$$2 \leq x < 3 \xrightarrow{\times 2} 4 \leq 2x < 6, \quad 2 \leq y < 3 \xrightarrow{\times 3} 6 \leq 3y < 9$$

در نتیجه با جمع کردن این دو نابرابری معلوم می شود که

$$10 \leq 2x+3y < 15 \xrightarrow{\div 5} 2 \leq \frac{2x+3y}{5} < 3$$

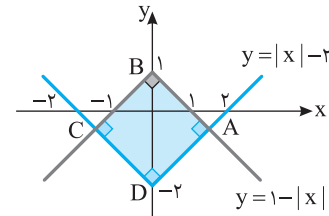
$$[\frac{2x+3y}{5}] = 2 \quad \text{پس}$$

گزینه ۴ - ۲۰۹۰ نمودار دو تابع را رسم می کنیم. مساحت $ABCD$ مطلوب مسئله است. ابتدا طول نقطه های A و C را مشخص می کنیم:

$$|x|-2=1-|x| \Rightarrow |x|=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\pm \frac{3}{2}$$

بنابراین $AC=3$ و $BD=3$. پس چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است

که مساحت آن برابر است با $S=\frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$.



گزینه ۱ - ۲۰۹۱ توجه کنید که

$$x^3 = -20 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{20}$$

همچنین $5 < 2\sqrt[3]{20} < 6$ ، بنابراین

$$-6 < -2\sqrt[3]{20} < -5 \Rightarrow -6 < 2x < -5 \Rightarrow [2x] = -6$$

توجه کنید که $2\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{160}$ و چون $\sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{160} < \sqrt[3]{216}$ ، پس

$$5 < 2\sqrt[3]{20} < 6$$

گزینه ۲ - ۲۰۹۲ توجه کنید که

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2$$

$$9 \leq x < 16 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3$$

$$16 \leq x < 25 \Rightarrow 4 \leq \sqrt{x} < 5 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 4$$

$$x=25 \Rightarrow \sqrt{x}=5$$

بنابراین

$$A = 1+1+1+\underbrace{2+2+\dots+2}_{\text{تا } 5} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{\text{تا } 7} + \underbrace{4+4+\dots+4}_{\text{تا } 9} + 5 = 3+10+21+36+5=75$$

گزینه ۱ - ۲۰۹۳ توجه کنید که

$$[x]=2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow 6 \leq 3x < 9 \Rightarrow 1 \leq 3x-5 < 4$$

بنابراین $[3x-5]$ می تواند مقادیر ۱، ۲ و ۳ را داشته باشد.

گزینه ۱ - ۲۰۹۴ اگر $[\frac{5-x}{2}]=-3$ ، آن گاه $-3 \leq \frac{5-x}{2} < -2$ ، بنابراین

$$-6 \leq 5-x < -4 \Rightarrow -11 \leq -x < -9$$

در نتیجه $9 < x \leq 11$.

گزینه ۱ - ۲۰۹۵ ابتدا توجه کنید که

$$[3x-2]=1 \Rightarrow 1 \leq 3x-2 < 2 \Rightarrow 3 \leq 3x < 4 \Rightarrow 1 \leq x < \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$2 \leq 2x < \frac{8}{3} \Rightarrow -1 \leq 2x-3 < -\frac{1}{3} \Rightarrow [2x-3]=-1$$

گزینه ۲ - ۲۰۹۶ **راه حل اول** توجه کنید که

$$4n^2-4n+1 < 4n^2-2n+1 < (2n)^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2-2n+1 < (2n)^2$$

$$2n-1 < \sqrt{4n^2-2n+1} < 2n$$

$$[\sqrt{4n^2-2n+1}] = 2n-1 \quad \text{بنابراین}$$

۲۱۱۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه
 $[x+k]=[x]+k$ بنابراین

$$f(x+3) = \left[\frac{x+3}{2}\right] - \left[\frac{x+4}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right] + 1 - \left[\frac{x}{2} + 2\right]$$

$$= \left[\frac{x+1}{2}\right] + 1 - \left[\frac{x}{2}\right] - 2 = -f(x) - 1$$

در نتیجه $f(x+3)+f(x)=-1$

۲۱۱۲- گزینه ۲ **راه حل اول** اگر $x \in [1, 2]$ آن گاه $-2 \leq x-3 < -1$

بنابراین $|x-3| = -x+3$ همچنین

$$-1 \leq x-2 < 0 \Rightarrow [x-2] = -1$$

در نتیجه $f(x) = -1 + (-x+3) = -x+2$

راه حل دوم $f(1) = -1 + |-2| = 1$ فقط در گزینه (۲) برقرار است.

۲۱۱۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که باید $9-x^2 \geq 0$ و در نتیجه
 $-3 \leq x \leq 3$ از طرف دیگر،

$$\left[\frac{x}{2}\right] - 1 = 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x < 4$$

بنابراین عددهای بازه $[2, 4]$ در دامنه تابع نیستند و دامنه تابع به صورت
 $[-3, 2]$ است. پس $a = -3$ ، $b = 2$ و $a+b = -1$

۲۱۱۴- گزینه ۲ باید نامعادله‌های $[x]+2 \geq 0$ و $3-[x] \geq 0$ را حل کنیم
 و اشتراک مجموعه جواب‌های آن‌ها را به دست آوریم:

$$[x]+2 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq -2 \Rightarrow x \geq -2, \quad 3-[x] \geq 0 \Rightarrow [x] \leq 3 \Rightarrow x < 4$$

بنابراین $D_f = [-2, 4]$ پس $a = -2$ ، $b = 4$ و $a+b = 2$

۲۱۱۵- گزینه ۱ اگر $-1 \leq x < 0$

$$[x] = -1, |x| = -x \Rightarrow f(x) = -1+x$$

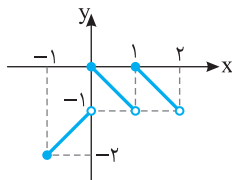
اگر $0 \leq x < 1$

$$[x] = 0, |x| = x \Rightarrow f(x) = -x$$

اگر $1 \leq x < 2$

$$[x] = 1, |x| = x \Rightarrow f(x) = 1-x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و برد تابع به صورت $\{-1\} \cup [-2, 0]$ است.



۲۱۱۶- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = \{x \mid |x+1|-2 > 0\}$ از طرف

دیگر، چون $|x+1|-2$ عددی صحیح است، پس اگر مثبت باشد، بزرگ‌تر یا

مساوی ۱ است: $|x+1|-2 \geq 1$ در نتیجه

$$|x+1|-2 \geq 1 \Rightarrow |x+1| \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2 \\ x+1 \leq -3 \Rightarrow x \leq -4 \end{cases}$$

بنابراین $D_f = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$

۲۱۰۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $x^2-4x = (x-2)^2-4$ پس

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq x-2 < 1 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 < 1$$

$$-4 \leq (x-2)^2 - 4 < -3 \Rightarrow [(x-2)^2 - 4] = -4$$

بنابراین $[x^2-4x]$ فقط می‌تواند مقدار -4 را داشته باشد.

۲۱۰۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$[x^2+x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2+x < 0$$

$$-1 \leq (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq (x+\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4}$$

$$(x+\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow |x+\frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x+\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < x < 0$$

بنابراین $0 < x^1 < 1$ و در نتیجه $[x^1] = 0$

۲۱۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$n^3 < n^3 + 3n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$n^3 < n^3 + 3n^2 + 1 < (n+1)^3 \Rightarrow n < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} < n+1$$

بنابراین $[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}] = n$

۲۱۰۸- گزینه ۳ اگر $-2 < x < -1$ ، آن گاه $[x] = -2$ و $|x| = -x$

بنابراین معادله به شکل زیر است

$$-3x - 4 = 1 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

اگر $-1 \leq x < 0$ ، آن گاه $[x] = -1$ و $|x| = -x$ پس معادله به شکل زیر است

$$-3x - 2 = 1 \Rightarrow x = -1$$

اگر $0 \leq x < 1$ ، آن گاه $[x] = 0$ و $|x| = x$ ، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$3x + 0 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازه $(-2, 1)$ برابر است با

$$-\frac{5}{3} - 1 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

۲۱۰۹- گزینه ۲ توجه کنید که $[x-1] = [x]-1$ ، بنابراین معادله

مورد نظر می‌شود

$$[x]^2 + 5[x] + 6 = 0 \Rightarrow ([x]+2)([x]+3) = 0$$

اکنون توجه کنید که

$$[x]+2=0 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

$$[x]+3=0 \Rightarrow [x]=-3 \Rightarrow -3 \leq x < -2$$

بنابراین مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر می‌شود

$$[-3, -2) \cup [-2, -1) = [-3, -1)$$

در نتیجه $a = -3$ و $b = -1$ ، $b-a = 2$

۲۱۱۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\left[\frac{2[x]+1}{5}\right] = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{2[x]+1}{5} < 4 \Rightarrow 7 \leq [x] < \frac{19}{2}$$

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x] = 7 \Rightarrow 7 \leq x < 8, \quad [x] = 8 \Rightarrow 8 \leq x < 9, \quad [x] = 9 \Rightarrow 9 \leq x < 10$$

بنابراین مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر می‌شود

$$[7, 8) \cup [8, 9) \cup [9, 10) = [7, 10)$$

در نتیجه $a = 7$ و $b = 10$ ، $b-a = 3$

۲۱۲۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(f(x)) = f(x) - [3f(x)]$$

اکنون حاصل $[3f(x)]$ را پیدا می‌کنیم. اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k] = [x] + k$$

در نتیجه

$$[3f(x)] = [3x - 3[x]] = [3x] - 3[3x] = -2[3x]$$

زیرا $(3[3x]) \in \mathbb{Z}$ بنابراین

$$f(f(x)) = f(x) - (-2[3x]) = x - [3x] + 2[3x] = x + [3x]$$

در نتیجه $f(f(x)) - x = [3x]$

۲۱۲۲- گزینه ۲ راه‌حل اول ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$[4-x] + [x-3] = 0 \Rightarrow 4 + [-x] + [x] - 3 = 0$$

$$[x] + [-x] = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

پس عددهای غیر صحیح مخرج کسر را صفر می‌کنند و در دامنه تابع نیستند. بنابراین دامنه تابع $\mathbb{Z}$ است.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0) = f(1) = 1$. بنابراین عددهای صفر و ۱ در دامنه تابع هستند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) رد می‌شوند.

۲۱۲۳- گزینه ۱ اگر x عددی صحیح باشد که در دامنه f نیست، آن‌گاه

$$[|x+1|-2]-5=0 \quad (1)$$

و چون x صحیح است، پس $|x+1|-2$ نیز صحیح است، در نتیجه

$$[|x+1|-2] = |x+1|-2$$

بنابراین معادله (۱) می‌شود

$$|x+1|-2-5=0 \Rightarrow |x+1|=7 \Rightarrow x+1=\pm 7 \Rightarrow x=\pm 7-1$$

بنابراین مجموع عددهای صحیح مورد نظر برابر ۲- است.

۲۱۲۴- گزینه ۳ برای تعیین دامنه تابع f باید نامعادله $\frac{4-[x]}{[x]-1} \geq 0$ را حل

کنیم. اگر فرض کنیم $t=[x]$ ، نامعادله به صورت $\frac{4-t}{t-1} \geq 0$ درمی‌آید که

جواب آن به صورت $1 < t \leq 4$ است.

بنابراین

$$1 < [x] \leq 4 \Rightarrow 2 \leq x < 5$$

بنابراین $D_f = [2, 5)$ و در نتیجه $a=2$ ، $b=5$ و $a+b=7$.

۲۱۲۵- گزینه ۲ باید نامعادله $4[x] - [x]^2 \geq 0$ را حل کنیم. فرض

می‌کنیم $[x]=t$ و در نتیجه

$$4t - t^2 \geq 0 \Rightarrow t(4-t) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq 4$$

بنابراین $0 \leq [x] \leq 4$. در نتیجه $0 \leq x < 5$. پس $D_f = [0, 5)$ و دامنه تابع

شامل ۵ عدد صحیح است.

۲۱۲۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که نابرابری $0 \leq x - [x] < 1$ برای هر

مقدار x برقرار است.

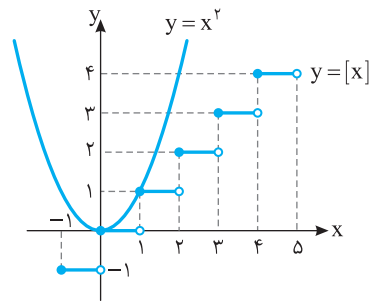
پس

$$-1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -2 < 2[x] - 2x \leq 0 \Rightarrow -2 < f(x) \leq 0$$

بنابراین $R_f = (-2, 0]$

۲۱۱۷- گزینه ۲ نمودار این تابع‌ها را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی

شکل معلوم است که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

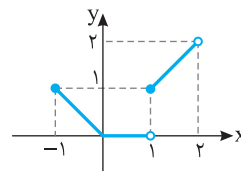


۲۱۱۸- گزینه ۳ ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x, \quad 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



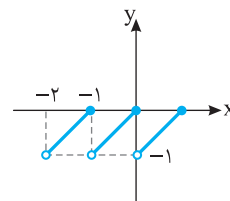
۲۱۱۹- گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$-2 < x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq -x < 2 \Rightarrow [-x] = 1 \Rightarrow f(x) = x+1$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow f(x) = x-1$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



راه‌حل دوم می‌دانیم برای هر عدد حقیقی a ، $[a] \leq a$. بنابراین

$$[-x] \leq -x \Rightarrow x + [-x] \leq 0$$

چون $f(x) = x + [-x]$ ، پس مقادیر تابع f همواره نامثبت هستند، بنابراین گزینه‌های

(۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر $f(0) = 0$ ، پس گزینه (۱) نیز رد می‌شود.

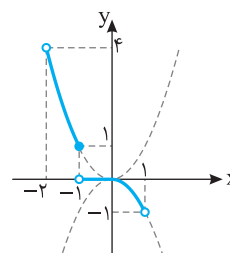
۲۱۲۰- گزینه ۲ ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$-2 < x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq -x < 2 \Rightarrow [-x] = 1 \Rightarrow f(x) = x^2$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x^2$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۱۳۱- گزینه ۲ توجه کنید که $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$|(2x-1)(x+3)| = 2|x+3| \Rightarrow |2x-1| |x+3| = 2|x+3|$$

$$|x+3| (|2x-1| - 2) = 0$$

به این ترتیب

$$|x+3| = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$|2x-1| - 2 = 0 \Rightarrow 2x-1 = \pm 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}$$

در نتیجه، مجموع جواب‌ها برابر با -2 است.

۲۱۳۲- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x^2 - 3 = \pm(x-1)$$

بنابراین

$$x^2 - 3 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 3 = -(x-1) \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \quad (2)$$

هر دو معادله دو جواب دارند و دو معادله جواب یکسان ندارند. مجموع جواب‌های معادله (۱) برابر ۱ و مجموع جواب‌های معادله (۲) برابر -1 است.

بنابراین مجموع جواب‌های معادله اصلی برابر صفر است.

۲۱۳۳- گزینه ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$|4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}| = |4x - \sqrt{(x-4)^2}| = |4x - |x-4||$$

از طرف دیگر،

$$|2x-5| < 3 \Rightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Rightarrow 2 < 2x < 8 \Rightarrow 1 < x < 4 \quad (1)$$

بنابراین $x-4 < 0$ ، در نتیجه $|x-4| = -(x-4)$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $|4x + x - 4| = |5x - 4|$. از طرف دیگر، بنابر نابرابری‌های (۱)،

$$x > 1 \Rightarrow 5x > 5 \Rightarrow 5x - 4 > 1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $5x - 4$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $x=2$ در نامعادله $|2x-5| < 3$ صدق می‌کند.

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر را به ازای $x=2$ به دست می‌آوریم:

$$A = |4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}| \xrightarrow{x=2} A = |8 - \sqrt{4 - 16 + 16}| = 6$$

فقط مقدار گزینه (۳) به ازای $x=2$ برابر ۶ است.

۲۱۳۴- گزینه ۴ نامعادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$|x^2 - 3x| < 2x \Rightarrow |x(x-3)| < 2x \Rightarrow |x| |x-3| < 2x$$

معلوم است که $x=0$ جواب این نامعادله نیست و x نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین $x > 0$ و

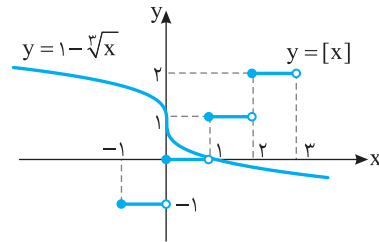
$$x|x-3| < 2x \Rightarrow x(|x-3|-2) < 0 \Rightarrow |x-3|-2 < 0 \Rightarrow |x-3| < 2$$

$$-2 < x-3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر بازه $(1, 5)$ است. یعنی $a=1$ ،

$$b-a=4 \text{ و } b=5$$

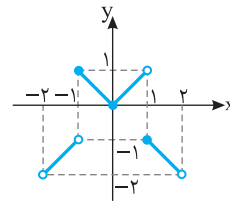
۲۱۲۷- گزینه ۴ نمودار دو تابع $y=1-\sqrt[3]{x}$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



۲۱۲۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه

$(-1)^{[x]} = 1$ و در نتیجه $f(x) = x$. همچنین اگر $[x]$ عددی فرد باشد،

آن‌گاه $(-1)^{[x]} = -1$ و در نتیجه $f(x) = -x$. بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است.



۲۱۲۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر است:

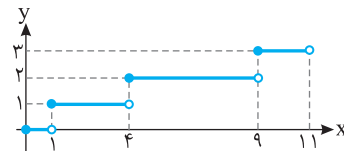
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2 \Rightarrow f(x) = 2$$

$$9 \leq x < 16 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3 \Rightarrow f(x) = 3$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است.



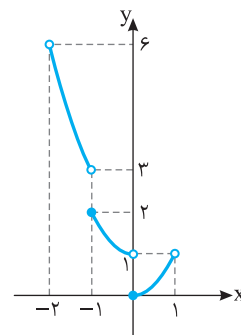
۲۱۳۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$-2 < x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x^2$$

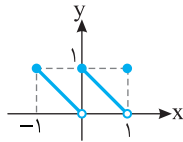
پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



۲۱۳۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -1-(x-1) & -1 \leq x < 0 \\ 0-(x-1) & 0 \leq x < 1 \\ 1+0 & x=1 \end{cases} = \begin{cases} -x & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:



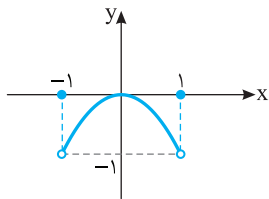
۲۱۳۹- گزینه ۱ راه حل اول اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه

$$[x+k]=[x]+k \text{ بنابرین}$$

$$[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x^2([x]+[-x])$$

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ از طرف دیگر، پس می توان نوشت}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -x^2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ و نمودار تابع } f \text{ به صورت زیر است:}$$



راه حل دوم می دانیم $[x] \leq x$ ، بنابراین تابع $f(x) = x^2([x]-x)$ همواره نامثبت است. بنابراین گزینه های (۳) و (۴) رد می شوند. از طرف دیگر $f(0) = 0$ ، پس گزینه (۲) هم رد می شود.

۲۱۴۰- گزینه ۱ به جای x در ضابطه f قرار می دهیم $x-1$:

$$f(x-1) = 4(x-1) - [x-1] - [3(x-1)] = 4x - 4 - [x] + 1 - [3x] + 3 = 4x - [x] - [3x] = f(x)$$

۲۱۴۱- گزینه ۴ معادله $|x(x-4)| < 2x-5$ را برای $x \geq 0$ و $x < 0$ جداگانه حل می کنیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow (x-4)x < 2x-5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow 1 < x < 5$$

$$x < 0 \Rightarrow (x-4)(-x) < 2x-5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0$$

$$x < 1 - \sqrt{6}, x > 1 + \sqrt{6} \xrightarrow{x < 0} x < 1 - \sqrt{6}$$

پس مجموعه جواب های معادله به صورت $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$ است.

ریاضی - ۹۲

۲۱۴۲- گزینه ۴ راه حل اول واضح است که اگر $x < 0$ ، نامعادله جواب ندارد.

زیرا در این صورت باید $|x^2 - 2x| < 0$ که غیرممکن است. بنابراین باید با شرط $x \geq 0$ نامعادله را حل کنیم. اکنون توجه کنید که نامعادله به صورت زیر ساده می شود:

$$|x^2 - 2x| < x \Rightarrow |x(x-2)| < x \Rightarrow |x||x-2| < x$$

$$x|x-2| < x \Rightarrow |x-2| < 1$$

$$-1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله بازه $(1, 3)$ است.

۲۱۳۵- گزینه ۲ راه حل اول از $-3 \leq x \leq 6$ ، نتیجه می شود

$$-4 \leq x-1 \leq 5$$

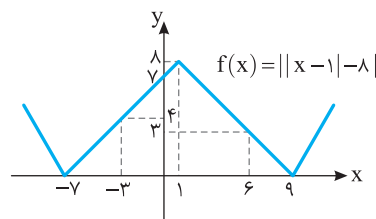
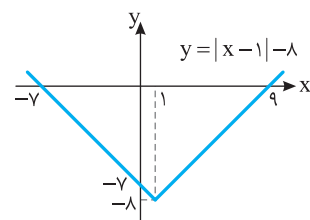
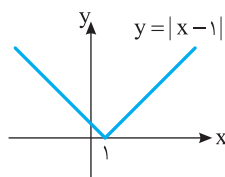
پس $|x-1| \leq 5$ ، بنابراین

$$-8 \leq |x-1| - 8 \leq -3 \Rightarrow 3 \leq ||x-1| - 8| \Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 8$$

پس حداقل مقدار تابع برابر ۳ و حداکثر مقدار آن ۸ است و مجموع آن ها ۱۱ است.

راه حل دوم نمودار تابع را رسم می کنیم. با توجه به شکل تابع، واضح است که

$$\text{وقتی } -3 \leq x \leq 6, 3 \leq f(x) \leq 8.$$

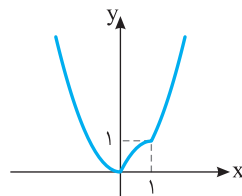


۲۱۳۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + x & x \leq 0 \\ -(x^2 - x) + x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - x + x & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -(x-1)^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است.



۲۱۳۷- گزینه ۳ توجه کنید که $f(120) = \left[\frac{120}{11}\right] - \left[-\frac{120}{17}\right]$

از طرف دیگر،

$$10 < \frac{120}{11} < 11 \Rightarrow \left[\frac{120}{11}\right] = 10, \quad -8 < -\frac{120}{17} < -7 \Rightarrow \left[-\frac{120}{17}\right] = -8$$

$$\text{بنابراین } f(120) = 10 - (-8) = 18$$

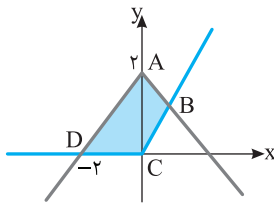
۲۱۴۴- گزینه ۳ با تعیین ضابطه، دو تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:

$$y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & x \geq 0 \\ 2 + x & x < 0 \end{cases}, \quad y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ابتدا مختصات نقطه B را محاسبه می‌کنیم:

$$2 - x_B = 2x_B \Rightarrow 3x_B = 2 \Rightarrow x_B = \frac{2}{3}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\frac{2}{3} \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$



تجربی - ۹۵

۲۱۴۵- گزینه ۴ عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است، پس

$$|x^2 + 1| = x^2 + 1$$

بنابراین

$$2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1 \Rightarrow -x^2 + 2x > |x - 2| \Rightarrow -x(x - 2) > |x - 2|$$

$$x \geq 2: -x(x - 2) > (x - 2) \Rightarrow (x - 2)(-x - 1) > 0$$

$$-x > 1 \Rightarrow x < -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$x < 2: -x(x - 2) > -(x - 2) \Rightarrow (x - 2)(-x + 1) > 0$$

$$-x < -1 \Rightarrow x > 1$$

بنابراین $1 < x < 2$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۲۱۴۶- گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = f(2x - 3) - 2f(x) = 2x - 3 - [2x - 3] - 2x + 2[x]$$

$$= 2x - 3 - [2x] + 3 - 2x + 2[x] \Rightarrow g(x) = 2[x] - [2x]$$

با توجه به اینکه حاصل $g(x) = 2[x] - [2x]$ همواره عددی صحیح است،

گزینه (۳) یعنی $\{-1, 0\}$ یا گزینه (۴) یعنی $\{0, 1\}$ پاسخ صحیح هستند که

با قرار دادن چند مقدار خواهیم داشت:

$$x = \frac{1}{10} \Rightarrow y = 0, \quad x = \frac{9}{10} \Rightarrow y = -1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۱۴۷- گزینه ۲ ابتدا از $[x^2 + x] = -1$ مقادیر x را می‌یابیم:

$$-1 \leq x^2 + x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \\ x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < x < 0$$

تجربی - ۸۸

پس $0 < x^2 < 1$ و حاصل $[x^2]$ برابر صفر است.

راه حل دوم به کمک دو مقدار $x = 1$ و $x = 2$ گزینه صحیح مشخص می‌شود.

$x = 1$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی $x = 2$ در آن صدق می‌کند. تنها

گزینه‌ای که عدد ۲ در آن قرار دارد ولی عدد ۱ در آن قرار ندارد، گزینه (۴)

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

است.

۲۱۴۳- گزینه ۳ راه حل اول اگر $|x + 1| - 1 < 0$ ، آن‌گاه نامعادله جواب

ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^2 - 2| < 0$ که غیرممکن است. بنابراین باید

$$|x + 1| - 1 \geq 0 \text{ و در نتیجه}$$

$$|x + 1| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \\ x + 1 \leq -1 \Rightarrow x \leq -2 \end{cases}$$

اگر $x \leq -2$. آن‌گاه $x + 1 < 0$ و $x^2 - 2 > 0$. پس نامعادله به صورت زیر

خواهد بود:

$$x^2 - 2 < -x - 1 - 1 \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین نامعادله در بازه $(-\infty, -2]$ جواب ندارد. پس باید با فرض $x \geq 0$

آن را حل کنیم. در این حالت $x + 1 > 0$ و نامعادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$|x^2 - 2| < x + 1 - 1 \Rightarrow |x^2 - 2| < x \Rightarrow -x < x^2 - 2 < x$$

$$\text{پس باید دستگاه نامعادله‌های} \begin{cases} (1) \quad x^2 - x - 2 < 0 \\ (2) \quad x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \text{ را حل کنیم. مجموعه}$$

جواب‌های نامعادله (۱) با شرط $x \geq 0$ به صورت $0 \leq x < 2$ و مجموعه

جواب‌های نامعادله (۲) با شرط $x \geq 0$ به صورت $x > 1$ است. اشتراک این

مجموعه جواب‌ها بازه $(1, 2)$ است که وسط بازه نقطه‌ای به طول $1/5$ است.

راه حل دوم ابتدا نمودار توابع $f(x) = |x^2 - 2|$ و $g(x) = |x + 1| - 1$ را رسم

می‌کنیم. توجه کنید جاهایی که $f(x) < g(x)$ ، بازه (a, b) است. از روی

نمودارها معلوم می‌شود که در این بازه $x > 0$. بنابراین در این بازه، ضابطه g

به صورت $g(x) = x + 1 - 1 = x$ ساده می‌شود. اکنون توجه کنید که نامعادله

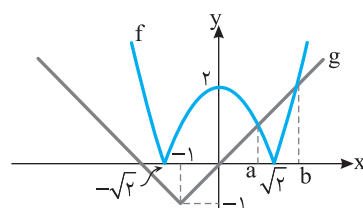
مورد نظر می‌شود:

$$|x^2 - 2| < x \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 < x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 < 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) < 0 \xrightarrow{x > 0} 1 < x < 2$$

بنابراین $a = 1$ و $b = 2$ ، پس بازه مورد نظر به صورت $(1, 2)$ است و وسط بازه

نقطه‌ای به طول $1/5$ است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۲۱۴۸- گزینه ۳ راه حل اول از آنجا که به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$

حاصل، عددی منحصر به فرد است به ازای $n = 3$ این عدد را به دست می آوریم:

$$n = 3: [\sqrt{36-9+1}] - 2[\sqrt{9-6}] = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2 = 3$$

راه حل دوم به ازای $n > 2$.

$$\begin{cases} 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2 \\ 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1 \\ n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \\ n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2 \end{cases}$$

پس $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 4-1 = 3$.

تجربی - ۹۱

۲۱۴۹- گزینه ۱ ضابطه $f(x-f(x))$ را تشکیل می دهیم:

$$f(x) = [x] \Rightarrow f(x-f(x)) = f(x-[x])$$

از طرف دیگر $x-[x]$ همواره در فاصله $[0, 1)$ است، بنابراین $f(x-[x])$

یعنی جزء صحیح آن برابر صفر است، یعنی $f(x-[x]) = 0$.

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۲۱۵۰- گزینه ۱ از نامعادله $x^2 + x < 0$ نتیجه می گیریم $-1 < x < 0$.

پس به ازای $-1 < x < 0$:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1, \quad 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1, \quad 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0$$

$$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

بنابراین

خارج از کشور تجربی - ۸۸

فصل سیزدهم

۲۱۵۱- گزینه ۳ نقاط A و B را معین می‌کنیم

$$y=0 \Rightarrow 2^{x-1}-2=0 \Rightarrow 2^{x-1}=2^1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A=(2,0)$$

$$x=0 \Rightarrow y=2^{-1}-2=-\frac{3}{2} \Rightarrow B=(0, -\frac{3}{2})$$

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(0-(-\frac{3}{2}))^2}=\frac{5}{2}$$

۲۱۵۲- گزینه ۱ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(-\frac{3}{2})=0 \Rightarrow 9^{-\frac{3}{2}+a}-2b=0 \Rightarrow 2b=9^{-\frac{3}{2}+a}$$

$$f(0)=26 \Rightarrow 9^a-2b=26 \Rightarrow 2b=9^a-26$$

بنابراین

$$9^{-\frac{3}{2}+a}=9^a-26 \Rightarrow 9^{-\frac{3}{2}+a}-9^a=-26 \Rightarrow 9^a(1-9^{-\frac{3}{2}})=-26$$

$$9^a(1-\frac{1}{27})=-26 \Rightarrow 9^a=27 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

در نتیجه $2b=9^a-26=1$ ، یعنی $b=\frac{1}{2}$. به این ترتیب، $a+b=2$.

۲۱۵۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(-1)=9 \Rightarrow a^{-1}+1=9 \Rightarrow a^{-1}=8 \Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

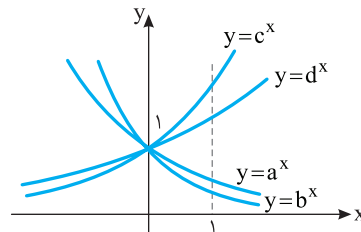
بنابراین $f(x)=(\frac{1}{8})^x+1$. از طرف دیگر

$$f(0)=b \Rightarrow (\frac{1}{8})^0+1=b \Rightarrow b=1+1=2$$

در نتیجه $ab=\frac{1}{4}$.

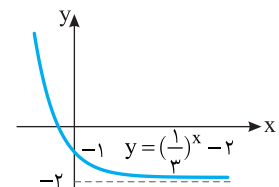
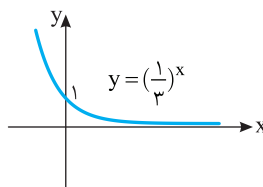
۲۱۵۴- گزینه ۴ چون عرض نقطه برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ به صورت

a, b, c, d است، با توجه به نمودار چهار تابع و مقایسه عرض نقطه برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ معلوم می‌شود $c>d>a>b$.

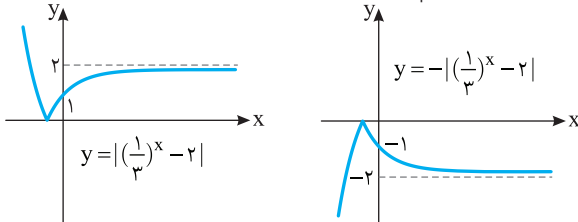


۲۱۵۵- گزینه ۱ توجه کنید که $f(x)=1-|(\frac{1}{3})^x-2|$. ابتدا نمودار

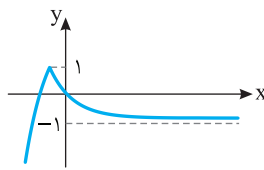
$$y=(\frac{1}{3})^x$$



اکنون نمودار تابع $y=|(\frac{1}{3})^x-2|$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور X قرینه می‌کنیم:



در نهایت، نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



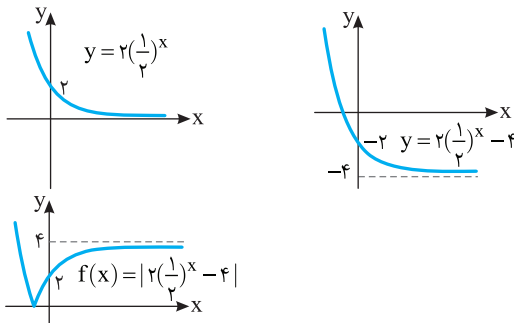
$$f(x)=1-|(\frac{1}{3})^x-2|$$

۲۱۵۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$f(x)=\frac{|2^{x+1}-1|}{2^{x-1}}=\frac{|2^{x+1}-1|}{|2^{x-1}|}=\frac{|2^{x+1}-1|}{2^{x-1}}=\frac{2^{x+1}-1}{2^{x-1}}=\frac{2^{x+1}}{2^{x-1}}-\frac{1}{2^{x-1}}=2^2-\frac{1}{2^{x-1}}=4-\frac{1}{2^{x-1}}$$

$$=|4-\frac{1}{2^{x-1}}|=|4-2(\frac{1}{2})^x|=|2(\frac{1}{2})^x-4|$$

بنابراین نمودار تابع f به ترتیب زیر رسم می‌شود:



۲۱۵۷- گزینه ۲ می‌توان نوشت

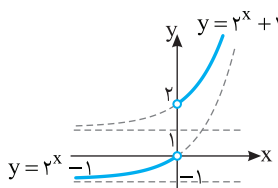
$$(fog)(x)=f(g(x))=3^{g(x)-2}=3^{x+2-2}=3^x$$

$$f(x)=3^{x-2}=\frac{1}{9}\times 3^x \Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}\times (fog)(x) \Rightarrow (fog)(x)=9f(x)$$

۲۱۵۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

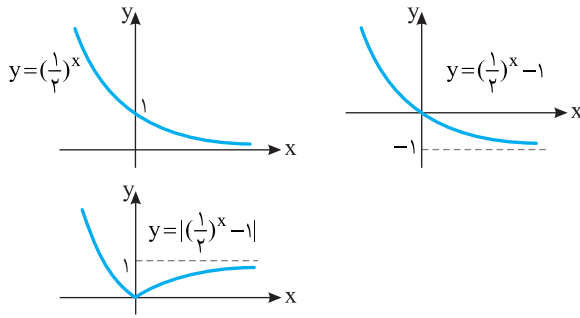
$$f(x)=\begin{cases} 2^x+1 & x>0 \\ 2^x-1 & x<0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



پس برد تابع به صورت $(-1,0) \cup (2,+\infty)$ است.

بنابراین نمودار تابع به ترتیب زیر رسم می‌شود:



۲۱۶۵- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $s = 2^{m-2} + 1$. چون $f^{-1}(s) = 26$.

پس $f(26) = s$. در نتیجه $f(26) = 5(26) - 1 = 129$. اکنون می‌توان نوشت

$$s = 2^{m-2} + 1 = 129 \Rightarrow 2^{m-2} = 128 = 2^7$$

بنابراین $m-2=7$. پس $m=9$.

۲۱۶۶- گزینه ۴ توجه کنید که $g(x+2) = 2^{x+2-1} = 2^{x+1}$. بنابراین

$$f(2^{x+1}) = 2^x + 1$$

$$f(2^{x+1}) = 2^x + 1 \Rightarrow f^{-1}(2^x + 1) = 2^{x+1}$$

$$2^x + 1 = 9 \Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین $f^{-1}(9) = 2^{3+1} = 16$.

۲۱۶۷- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{8} = 2^x, \quad g(x-2) = 2^{2(x-2)+5} = 2^{2x+1}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{x}{3}\right)g(x-2) = 2^x \times 2^{2x+1} = 2^{3x+1} = 2^{3x} \times 2 = 2 \times 8^x = 2f(x)$$

۲۱۶۸- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x + 2} = \frac{2^x + 2}{2^x + 2} - \frac{1}{2^x + 2} = 1 - \frac{1}{2^x + 2}$$

اکنون توجه کنید که برای هر x حقیقی، $2^x > 0$. بنابراین

$$2^x + 2 > 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^x + 2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2^x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2^x + 2} < 1$$

$$\text{در نتیجه } \frac{1}{2} < f(x) < 1.$$

۲۱۶۹- گزینه ۴ می‌دانیم تابع‌های نمایی به شکل $f(x) = ka^x$

($a > 0, a \neq 1$)، یک‌به‌یک هستند. در نتیجه تابع‌های $y = 4^{5-x}$ و $y = 3^{1+2x}$

یک‌به‌یک هستند. تابع $f(x) = 2^{3-|x|}$ ، یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر x حقیقی،

$y = 9^x + 2 \times 3^{x+1}$ اکنون ثابت می‌کنیم تابع $f(x) = f(-x) = 2^{3-|x|}$

یک‌به‌یک است. دقت کنید که $9 - (3^x + 3)^2 = (3^x + 3)^2 - 9$. فرض

می‌کنیم $f(x_1) = f(x_2)$. در نتیجه $9 - (3^{x_1} + 3)^2 = (3^{x_2} + 3)^2 - 9$.

بنابراین $(3^{x_1} + 3)^2 = (3^{x_2} + 3)^2$ ، چون $3^{x_1} + 3, 3^{x_2} + 3 > 0$ ، پس

$$3^{x_1} + 3 = 3^{x_2} + 3 \Rightarrow 3^{x_1} = 3^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

۲۱۵۹- گزینه ۴ در تابع $f(x) = 2^{x^2} + 1$ برای $x = 1$ و $x = -1$ مقدار

تابع برابر ۳ است. پس تابع یک‌به‌یک نیست.

۲۱۶۰- گزینه ۲ توجه کنید که باید $k > 0$ و

$$f(x) = 2 \times 2^x \times \left(\frac{1}{k}\right)^x = 2 \times \left(\frac{2}{k}\right)^x$$

بنابراین، چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$\frac{2}{k} > 1 \xrightarrow{k > 0} k < 2$$

بنابراین $0 < k < 2$.

۲۱۶۱- گزینه ۳ با توجه به فرض مسئله،

$$f(0) = -\frac{21}{4} \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^b - 6 = -\frac{21}{4} \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^b = \frac{3}{4}$$

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^{b-2} = 3 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^{b-3} = 6 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^{b-3} - 6 = 0 \Rightarrow f(-3) = 0$$

بنابراین نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۲۱۶۲- گزینه ۲ چون نمودار تابع‌های f و g در نقطه‌ای به طول ۱-

متقاطع‌اند، پس

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 2^{-a+b} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1-b} = 2^{-2(-1-b)} = 2^{2(1+b)}$$

بنابراین

$$-a+b = 2(1+b) \Rightarrow a+b = -2 \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$f(1)g(1) = 4 \Rightarrow 2^{a+b} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{1-b} = 4 \Rightarrow 2^{a+b} \times 2^{-2(1-b)} = 2^2$$

$$2^{a+3b-2} = 2^2 \Rightarrow a+3b = 4 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = -5$ و $b = 3$ ، بنابراین

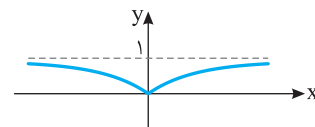
$$f(x) = 2^{-5x+3}. \text{ اکنون فرض کنید } f^{-1}\left(\frac{1}{128}\right) = m. \text{ در این صورت}$$

$$f(m) = \frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-5m+3} = \frac{1}{128} = 2^{-7} \Rightarrow -5m+3 = -7 \Rightarrow m = 2$$

۲۱۶۳- گزینه ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 1-2^x & x \leq 0 \\ 1-2^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$$

فقط گزینه (۴) این شرط را دارد.

۲۱۶۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y = \frac{|1-2^x|}{2^x} = \frac{|1-2^x|}{|2^x|} = \left| \frac{1-2^x}{2^x} \right| = \left| \frac{1}{2^x} - 1 \right| = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \right|$$

۲۱۷۰- گزینه ۱ توجه کنید که

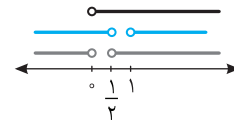
$$f(x) = k \times k^x \times \left(\frac{1}{2k-1}\right)^x = k \left(\frac{k}{2k-1}\right)^x$$

تابع f اکیداً نزولی است، پس باید

$$0 < \frac{k}{2k-1} < 1$$

$$\frac{k}{2k-1} > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{2} \text{ یا } k < 0$$

$$\frac{k}{2k-1} < 1 \Rightarrow \frac{k}{2k-1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-k+1}{2k-1} < 0 \Rightarrow k > 1 \text{ یا } k < \frac{1}{2}$$

پس $k > 1$.۲۱۷۱- گزینه ۱ با فاکتورگیری از 3^x معادله را حل می‌کنیم

$$3^x(3+1) = 108 \Rightarrow 3^x \times 4 = 108 \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

پس معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۲۱۷۲- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$5^{x-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \Rightarrow 5^{x-3} = 5^{-x^2}$$

$$x-3 = -x^2 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر ۱- است.

۲۱۷۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f^{-1}(5) = a \Rightarrow f(a) = 5$$

$$2 + 3^{a-2} = 5 \Rightarrow 3^{a-2} = 3 \Rightarrow a-2 = 1 \Rightarrow a = 3$$

۲۱۷۴- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $2^x = t$ ، معادله مورد نظر می‌شود:

$$t - \frac{2}{t} + 15 = 0 \Rightarrow t^2 + 15t - 2 = 0$$

این معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. از طرف دیگر، معلوم است که معادله $2^x = a$ فقط وقتی جواب دارد که a مثبت باشد و البته اگر a مثبت باشد، این معادله فقط یک جواب دارد (که $\log_2 a$ است). بنابراین معادله اصلی فقط یک جواب دارد.

۲۱۷۵- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می‌توان به شکل

$$3 \times 3^{2x} - 9 \times 3^x + 5 = 0 \text{ نوشت. اگر فرض کنیم } 3^x = t, \text{ این معادله می‌شود } 3t^2 - 9t + 5 = 0$$

$$\text{هر دو جواب این معادله مثبت‌اند و مجموع آن‌ها برابر است با } \frac{9}{3} = 3. \text{ به این ترتیب } t_1 + t_2 = 3 \Rightarrow 3^\alpha + 3^\beta = 3$$

۲۱۷۶- گزینه ۲ از معادله $x+y=5$ به دست می‌آید $y=5-x$ باجای‌گذاری $5-x$ به جای y در معادله $2^x - 2^y = 4$ ، به دست می‌آید

$$2^x - 2^{5-x} = 4 \Rightarrow 2^x - \frac{2^5}{2^x} = 4 \Rightarrow (2^x)^2 - 4(2^x) - 32 = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} 2^x + 4 = 0 \Rightarrow 2^x = -4 \\ 2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \end{array} \right. \text{ (غ.ق.)}$$

$$y = 5 - x \xrightarrow{x=3} y = 2$$

بنابراین $x-y=1$.

۲۱۷۷- گزینه ۲ عددهایی که مخرج کسر را صفر کنند، در دامنه تابع قرار

ندارند. پس

$$|2^x - 4| - 3 = 0 \Rightarrow 2^x - 4 = \pm 3 \Rightarrow 2^x = 7, 2^x = 1$$

هر یک از معادله‌های بالا فقط یک جواب دارند و این دو جواب متمایز هستند پس دامنه تابع شامل دو عدد نیست.

۲۱۷۸- گزینه ۴ چون $\frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$ ، پس نامعادله مورد نظر می‌شود:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1-3x} < \left(\frac{3}{2}\right)^{-(3+x)}$$

اکنون توجه کنید که چون $\frac{3}{2} > 1$ ، پس $1-3x < -(3+x)$ ، بنابراین $x > 2$.

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر بازه $(2, +\infty)$ است.۲۱۷۹- گزینه ۳ باید نامعادله‌های $2^x - 8 \geq 0$ و $81 - 3^x > 0$ را حل

کنیم و اشتراک مجموعه جواب‌های آن‌ها را به دست آوریم

$$2^x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^3 \Rightarrow x \geq 3, \quad 81 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 3^4 \Rightarrow x < 4$$

بنابراین $D_f = [3, 4)$. در نتیجه $a=3$ ، $b=4$ و $a+b=7$.۲۱۸۰- گزینه ۱ دامنه تابع f برابر است با

$$D_f = \{x | -3^{2x+1} + 4 \times 3^x - 1 > 0\}$$

فرض می‌کنیم $3^x = t$ ، در نتیجه باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$-3t^2 + 4t - 1 > 0 \Rightarrow -(t-1)(3t-1) > 0$$

جواب نامعادله بالا به صورت $\frac{1}{3} < t < 1$ است. در نتیجه $\frac{1}{3} < 3^x < 1$. بنابراین

$$-1 < x < 0$$

۲۱۸۱- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$2^x(1+2+2^2) = 5^x(2+5) \Rightarrow 2^x \times 7 = 5^x \times 7$$

$$2^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۸۲- گزینه ۲ معادله را به شکل $|x| = (2^{-1})^{x-x^2} = 2^{x^2-x}$

می‌نویسیم. بنابراین

$$|x| = x^2 - x \quad (1)$$

اگر $x \geq 0$ ، این معادله می‌شود:

$$x = x^2 - x \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x = 2, x = 0$$

اگر $x < 0$ ، معادله (۱) می‌شود:

$$-x = x^2 - x \Rightarrow x^2 = 0$$

که چون $x < 0$ ، جواب ندارد. بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد: $x=2$ و $x=0$.

۲۱۸۳- گزینه ۳ ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $3^x - 1 = 8$ ، یعنی

$3^x = 9$ ، پس $x=2$. به این ترتیب، اگر در تساوی داده شده به جای x قرار

دهیم، ۲ به دست می‌آید $f(2) = 2^3 + 1 = 9$. از طرف دیگر،

$$f^{-1}(2) = a \Rightarrow f(a) = 2$$

$$x^3 + 1 = 2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

پس

$$f(3^1 - 1) = 1^3 + 1 \Rightarrow f(2) = 2$$

در نتیجه $f^{-1}(2) = 2$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $9+2=11$.

۲۱۸۹- گزینه ۳ باید نامعادله $2^{x+1} - 4^x \geq 0$ را حل کنیم تا دامنه تابع

به دست آید

$$2^{x+1} - 4^x \geq 0 \Rightarrow 2 \times 2^x - (2^x)^2 \geq 0 \Rightarrow 2^x(2 - 2^x) \geq 0$$

با توجه به اینکه $2^x > 0$ نتیجه می شود

$$2 - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$$

بنابراین $a = 1$

۲۱۹۰- گزینه ۳ دامنه تابع f مجموعه x هایی است که

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4}{27 - 3^x} \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = -2$$

$$27 - 3^x = 0 \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$	+	0	-	-
$27 - 3^x$	+	+	0	-
$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4}{27 - 3^x}$	+	0	-	+

بنابراین

$$D_f = (-\infty, -2] \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 3]$$

در نتیجه $a = -2$ ، $b = 3$ و $a + b = 1$

۲۱۹۱- گزینه ۱ به کمک ویژگی های لگاریتم می توان نوشت

$$\log 90 = \log(9 \times 10) = \log 9 + \log 10 = \log 3^2 + 1 = 2 \log 3 + 1 = 2a + 1$$

۲۱۹۲- گزینه ۱ با استفاده از ویژگی $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ می توان نوشت

$$\log 6 - \log 2 \times \log_2 3 = \log 6 - \log 2 \times \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$= \log 6 - \log 3 = \log \frac{6}{3} = \log 2$$

۲۱۹۳- گزینه ۱ توجه کنید که $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$ بنابراین

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad \text{در نتیجه}$$

$$\log_{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \log_{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}\left(\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right) = -1$$

۲۱۹۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{3\sqrt{27}\sqrt[3]{81}} = 3^{\frac{1}{4}} \times 27^{\frac{1}{4}} \times 81^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1+3+1}{4}} = 3^{\frac{5}{4}} = 3^1 \times 3^{\frac{1}{4}} = 3 \times 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{5}{4}}$$

بنابراین

$$\log_3 \sqrt[4]{3\sqrt{27}\sqrt[3]{81}} = \log_3 3^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} \log_3 3 = \frac{5}{4}$$

۲۱۸۴- گزینه ۲ توجه کنید که $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$ بنابراین اگر فرض

کنیم $(\sqrt{5} + 2)^x = t$ معادله به شکل زیر درمی آید:

$$t + \frac{1}{t} = 18 \Rightarrow t^2 - 18t + 1 = 0 \Rightarrow t = 9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^x \Rightarrow x = 2$$

$$t = 9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^x \Rightarrow x = -2$$

بنابراین حاصل ضرب جواب های معادله مورد نظر برابر -4 است.

۲۱۸۵- گزینه ۱ معادله مورد نظر را به صورت زیر می نویسیم:

$$2^{2x} + 2^x \times 3^x = 2 \times 3^{2x}$$

اگر فرض کنیم $2^x = a$ و $3^x = b$ این معادله می شود:

$$a^2 + ab = 2b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = b^2 - ab \Rightarrow (a-b)(a+b) = b(b-a)$$

$$(a-b)(a+b+b) = 0 \Rightarrow (a-b)(a+2b) = 0$$

بنابراین

$$a - b = 0 \Rightarrow 2^x = 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$a + 2b = 0 \Rightarrow 2^x + 2 \times 3^x = 0 \quad \text{جواب ندارد.}$$

در نتیجه، معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد: $x = 0$

۲۱۸۶- گزینه ۲ فرض می کنیم $a = 2^x$ و $b = 3^y$ در نتیجه

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -7 \\ ab = \frac{1}{18} \Rightarrow b = \frac{1}{18a} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{\frac{1}{18a}} = -7 \Rightarrow \frac{1}{a} - 18a = -7 \Rightarrow 18a^2 - 7a - 1 = 0$$

$$18a^2 - 7a - 1 = 0 \Rightarrow (9a+1)(2a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{9} = 2^x \\ a = \frac{1}{2} = 2^x \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۲۱۸۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1}$$

بنابراین نامعادله مورد نظر می شود:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1-2x} > (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-x-3}$$

چون $0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$ پس

$$1 - 2x < -x - 3 \Rightarrow x > 4$$

۲۱۸۸- گزینه ۴ نامعادله را به شکل زیر می نویسیم:

$$8(2^x)^2 - 6(2^x) + 1 \geq 0$$

اگر فرض کنیم $2^x = t$ نامعادله به شکل زیر درمی آید:

$$8t^2 - 6t + 1 \geq 0 \Rightarrow (2t-1)(4t-1) \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{1}{2} \text{ یا } t \leq \frac{1}{4}$$

$$t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \geq 2^{-1} \Rightarrow x \geq -1$$

$$t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq 2^{-2} \Rightarrow x \leq -2$$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله $(-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$ است که همان

$$\mathbb{R} - (-2, -1) \text{ است. پس } a = -2, b = -1 \text{ و در نتیجه } a + b = -3$$

۲۱۹۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\log_4 5 = \frac{\log 5}{\log 4} = \frac{\log 5}{2 \log 2} = \frac{1}{2} \times \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1}{2} \log_2 5$$

در نتیجه باید حاصل عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2} \log_2 5} = (2^{-1})^{\frac{1}{2} \log_2 5} = 2^{-\frac{1}{2} \log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۲۱۹۶- گزینه ۲ توجه کنید که $216 = 6^3 = 2^3 \times 3^3$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \log 216 &= \log(2^3 \times 3^3) = \log 2^3 + \log 3^3 \\ &= 3 \log 2 + 3 \log 3 = 3x + 3y \end{aligned}$$

۲۱۹۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log 5 + \log 20 = \log(5 \times 20) = \log 100 = 2$$

بنابراین $\log 20 = 2 - \log 5 = 2 - a$ ۲۱۹۸- گزینه ۲ از دو طرف تساوی $2^x = 3^y$ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log 2^x = \log 3^y \Rightarrow x \log 2 = y \log 3$$

بنابراین

$$\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{x}{y} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{x}{y}$$

در نتیجه $\log_8 9 = \log_{2^3} 3^2 = \frac{2}{3} \log_2 3 = \frac{2x}{3y}$ ۲۱۹۹- گزینه ۱ از تساوی $3^{\log_5 2} = b$ نتیجه می‌شود

$$\log_3 b = \log_3 5$$

از تساوی $2^{\log_5 3} = a$ نتیجه می‌شود

$$3^{\log_5 2} = a \Rightarrow \log_3 a = \log_5 2$$

بنابراین $\log_3 a \times \log_3 b = \log_5 2 \times \log_5 3 = 1$ ۲۲۰۰- گزینه ۴ معادله را به صورت $2 \times 2^x = 5^x$ بازنویسی می‌کنیم. درنتیجه $2 = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ بنابرین با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت

$$x = \log_{\frac{5}{2}} 2 = \frac{1}{\frac{\log 5}{\log 2}} = \frac{1}{\log_2 5 - \log_2 2} = \frac{1}{\log_2 5 - 1}$$

۲۲۰۱- گزینه ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$A = \log(2 \times 3 \times 5) = \log(3 \times 10) = \log 3 + \log 10 = a + 4$$

۲۲۰۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{1}{\log_6 18} = \log_{18} 6, \quad \frac{1}{\log_3 18} = \log_{18} 3$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\log_{18} 6 + \log_{18} 3 = \log_{18} (3 \times 6) = 1$$

۲۲۰۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2}) &= \log(\sqrt{2}-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 \\ &= 2 \log(\sqrt{2}-1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) = -2 \end{aligned}$$

۲۲۰۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \log_7 \sqrt[4]{4\sqrt{4}\sqrt{2}} &= \log_7 (4^{\frac{1}{4}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}}) \\ &= \log_7 2^{\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}} = \log_7 2^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} \log_7 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_7 \sqrt{2\sqrt{4}\sqrt[4]{4}} &= \log_7 (2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times 4^{\frac{1}{4}}) \\ &= \log_7 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \log_7 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_7 2 \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{5}{3}$

۲۲۰۵- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \frac{1}{3} \log_2 3$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$3^3 + \log_8 3 = 2^{\frac{3}{3} + \frac{1}{3} \log_2 3} = 2^{\frac{3}{3} \times 2^{\frac{1}{3} \log_2 3}} = 8 \times (2^{\log_2 3})^{\frac{1}{3}} = 8 \times (3)^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{3}$$

راه حل دوم

$$2^3 \times 2^{\log_8 3} = 8 \times 2^{\log_8 2} = 8 \times 2^{\log_{2^3} 2} = 8 \times 2^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{2}$$

۲۲۰۶- گزینه ۴ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{6/4} &= \log \sqrt[3]{\frac{6}{4}} = \log \sqrt[3]{\frac{3 \times 2}{2^2}} = \log \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \log \frac{3}{2} = \frac{1}{3} (\log 3 - \log 2) \\ &= \frac{1}{3} (\log 2^5 - \log \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} (5 \log 2 - (\log 10 - \log 2)) \\ &= \frac{1}{3} (6 \log 2 - \log 10) = \frac{1}{3} (6a - 1) = 2a - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۲۲۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\log_5 2 = a \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 5} = a \Rightarrow \log 2 = a \log 5$$

$$\log_3 5 = b \Rightarrow \frac{\log 5}{\log 3} = b \Rightarrow \log 3 = \frac{\log 5}{b}$$

بنابراین

$$\log_{15} 4 = \frac{\log 4}{\log 15} = \frac{2 \log 2}{\log 3 + \log 5} = \frac{2a \log 5}{\frac{\log 5}{b} + \log 5} = \frac{2a}{\frac{1}{b} + 1} = \frac{2ab}{b+1}$$

۲۲۰۸- گزینه ۲ چون $385 = 5 \times 7 \times 11$ پس طرفین سه تساوی داده

شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\log 11 + \log 5 + \log 5 + \log 7 + \log 7 + \log 11 = a + b + c$$

$$2(\log 11 + \log 5 + \log 7) = a + b + c$$

$$2 \log(11 \times 5 \times 7) = a + b + c \Rightarrow \log 385 = \frac{a+b+c}{2}$$

۲۲۰۹- گزینه ۱ با توجه به خاصیت $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \log_3 3} + \frac{1}{1 - \log_3 2} &= \frac{1}{1 - \log_3 3} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\log_3 3}} \\ &= \frac{1}{1 - \log_3 3} + \frac{\log_3 3}{\log_3 3 - 1} = \frac{1 - \log_3 3}{1 - \log_3 3} = 1 \end{aligned}$$

۲۲۱۷- گزینه ۲ چون $\log_a x = \frac{1}{x} \log_a b$ پس

$$\log_a 10 = a \Rightarrow \log_{r^2} (r \times 5) = a \Rightarrow \frac{1}{r^2} \log_r (r \times 5) = a$$

$$\frac{1}{r^2} (\log_r r + \log_r 5) = a \Rightarrow 1 + \log_r 5 = ra \Rightarrow \log_r 5 = ra - 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log_{r^2} 5 &= \frac{\log_r 5}{\log_r r^2} = \frac{\log_r (r \times 5)}{\log_r (r^2 \times 5)} = \frac{\log_r r + \log_r 5}{\log_r r^2 + \log_r 5} \\ &= \frac{1 + \log_r 5}{2 + \log_r 5} = \frac{1 + r(a-1)}{2 + r(a-1)} = \frac{ra-1}{ra+2} \end{aligned}$$

۲۲۱۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad \log_{ab} x = \frac{\log x}{\log(ab)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\log_a x}{\log_{ab} x} &= 3 \Rightarrow \frac{\frac{\log x}{\log a}}{\frac{\log x}{\log(ab)}} = 3 \Rightarrow \frac{\log(ab)}{\log a} = 3 \\ \frac{\log a + \log b}{\log a} &= 3 \Rightarrow 1 + \frac{\log b}{\log a} = 3 \Rightarrow \log_a b = 2 \end{aligned}$$

بنابراین $\log_a b + \log_b a = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. در نتیجه $\log_b a = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{2}$

۲۲۱۹- گزینه ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0$$

بنابراین $(2^x - 5)(2^x - 3) = 0$ ، پس

$$\begin{cases} 2^x - 3 = 0 \Rightarrow 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3 \\ 2^x - 5 = 0 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5 \end{cases}$$

چون $\log_2 5 > \log_2 3$ پس $f(x) = \log_2 x$ تابعی اکیداً صعودی است.

در نتیجه بزرگترین جواب معادله مورد نظر $\log_2 5$ است.

۲۲۲۰- گزینه ۱ راه حل اول از دو طرف معادله $2^x = 3^y$ در پایه ۳

لگاریتم می گیریم:

$$\log_3 2^x = \log_3 3^y \Rightarrow x \log_3 2 = y \log_3 3 \Rightarrow y = x \log_3 2$$

در معادله $x + y = 1$ به جای y قرار می دهیم $x \log_3 2$ ، در نتیجه

$$x + x \log_3 2 = 1 \Rightarrow x(1 + \log_3 2) = 1$$

$$x(\log_3 3 + \log_3 2) = 1 \Rightarrow x \log_3 6 = 1$$

$$x = \frac{1}{\log_3 6} \Rightarrow x = \log_6 3$$

راه حل دوم

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$2^x = 3^{1-x} \Rightarrow 2^x = \frac{3}{3^x} \Rightarrow 6^x = 3 \Rightarrow x = \log_6 3$$

۲۲۱۰- گزینه ۱ معادله را به صورت $(3^x)^2 - 3^x - 2 = 0$ می نویسیم.

در نتیجه $(3^x - 2)(3^x + 1) = 0$ ، چون عبارت $3^x + 1$ همواره مثبت است،

نتیجه می شود

$$3^x - 2 = 0 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2$$

۲۲۱۱- گزینه ۱ راه حل اول با توجه به اینکه

$$\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$$

داریم

$$\begin{aligned} A &= \log_{\Delta} \left(\frac{\Delta}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{124}{125} \right) = \log_{\Delta} \frac{\Delta}{125} = \log_{\Delta} \frac{1}{125} = \log_{\Delta} \Delta^{-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

۲۲۱۲- گزینه ۱ با توجه به تساوی $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ می توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \log_{\Delta} \Delta - \log_{\Delta} 6 + \log_{\Delta} 6 - \log_{\Delta} 7 + \log_{\Delta} 7 - \log_{\Delta} 8 \\ &+ \dots + \log_{\Delta} 124 - \log_{\Delta} 125 = \log_{\Delta} \Delta - \log_{\Delta} 125 = 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

۲۲۱۳- گزینه ۱ چون $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ پس

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_2 3}} &= \frac{1}{1 + \log_2 2} = \frac{1}{\log_2 3 + \log_2 2} = \frac{1}{\log_2 (3 \times 2)} = \frac{1}{\log_2 6} \\ &= \log_6 2 \end{aligned}$$

۲۲۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2 \log(3 + \sqrt{5}) = \log(3 + \sqrt{5})^2 = \log(9 + 5 + 6\sqrt{5}) = \log(14 + 6\sqrt{5})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log(28 + 12\sqrt{5}) - 2 \log(3 + \sqrt{5}) &= \log(28 + 12\sqrt{5}) - \log(14 + 6\sqrt{5}) \\ &= \log \frac{28 + 12\sqrt{5}}{14 + 6\sqrt{5}} = \log 2 = k \end{aligned}$$

۲۲۱۵- گزینه ۲ به کمک تساوی $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ می توان نوشت

$$\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8 = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 5}{\log 3} \times \frac{\log 8}{\log 5} = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3$$

۲۲۱۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} a &= 5^{\log 20} = 5^{\log 10 + \log 2} = 5^{1 + \log 2} = 5 \times 5^{\log 2} = 5 \times 2^{\log 5} \\ b &= 2^{\log 50} = 2^{\log 10 + \log 5} = 2^{1 + \log 5} = 2 \times 2^{\log 5} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{5 \times 2^{\log 5}}{2 \times 2^{\log 5}} = \frac{5}{2}$$

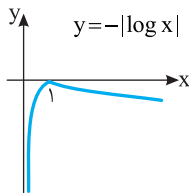
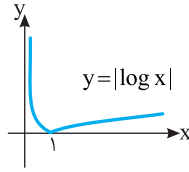
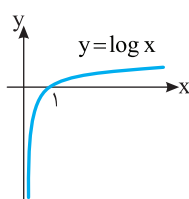
۲۲۱۷- گزینه ۲ توجه کنید که $\log_{15} 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 15} = 1$ از طرف دیگر

$$\log_3 15 = \log_3 (3 \times 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + b$$

$$\log_3 10 = \log_3 (2 \times 5) = \log_3 2 + \log_3 5$$

$$= \frac{1}{\log_3 2} + \log_3 5 = \frac{1}{a} + b = \frac{1 + ab}{a}$$

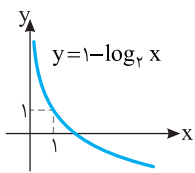
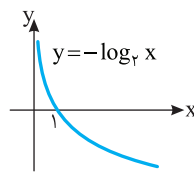
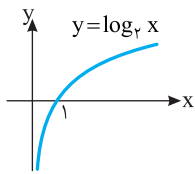
$$\log_{15} 15 = \frac{1 + b}{1 + ab} = \frac{a(1 + b)}{1 + ab}$$



۲۲۲۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x} = \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} x = 1 - \log_{\frac{1}{2}} x$$

بنابراین نمودار تابع به ترتیب زیر رسم می‌شود:



۲۲۲۷- گزینه ۲ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1, \quad x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2, \quad x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$$

پس دامنه تابع $\{3\} - (2, 1)$ است که شامل شش عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است.

۲۲۲۸- گزینه ۳ باید همواره $x^2 - 2mx + 4 > 0$ ، چون ضریب x^2 مثبت است، باید $\Delta < 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-2m)^2 - 4 \times (1) \times 4 < 0$$

$$4m^2 - 16 < 0 \Rightarrow 4(m^2 - 4) < 0 \Rightarrow |m| < 2 \Rightarrow -2 < m < 2$$

۲۲۲۹- گزینه ۳ با تغییرات دو مرحله اول به تابع $f(x) = 2^{x-1} + 1$

می‌رسیم. با قرینه کردن نمودار تابع نسبت به خط $y = x$ ، به تابع وارون f می‌رسیم. ضابطه تابع وارون f به صورت زیر پیدا می‌شود:

$$y = 1 + 2^{x-1} \Rightarrow 2^{x-1} = y - 1 \Rightarrow x - 1 = \log_2(y - 1) \Rightarrow x = \log_2(y - 1) + 1$$

$$\text{در نتیجه } f^{-1}(x) = \log_2(x - 1) + 1$$

۲۲۳۰- گزینه ۳ راه حل اول فرض می‌کنیم $y = -\log_2(x - 1) + 2$.

در نتیجه

$$2 - y = \log_2(x - 1) \Rightarrow 2^{2-y} = x - 1$$

بنابراین $x = 2^{2-y} + 1$ پس $f^{-1}(x) = 2^{2-x} + 1$.

راه حل دوم توجه کنید که $f(3) = -\log_2 2 + 2 = 1$ ، بنابراین $f^{-1}(1) = 3$. فقط گزینه (۳) در این شرط صدق می‌کند.

۲۲۲۱- گزینه ۴ اگر $f^{-1}(8) = t$ ، آنگاه $f(t) = 8$ ، بنابراین

$$3 + 5 \log(2t - 3) = 8 \Rightarrow \log(2t - 3) = 1 \Rightarrow 2t - 3 = 10 \Rightarrow t = \frac{13}{2}$$

۲۲۲۲- گزینه ۲ چون نمودار تابع f از نقطه‌های $(2, 3)$ و $(3, 4)$

می‌گذرد، پس

$$f(2) = 3 \Rightarrow a + \log_{\frac{1}{2}}(2b + 1) = 3 \quad (1)$$

$$f(3) = 4 \Rightarrow a + \log_{\frac{1}{2}}(3b + 1) = 4 \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به دست می‌آید:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2b + 1) - \log_{\frac{1}{2}}(3b + 1) = -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2b + 1}{3b + 1} = -1 \Rightarrow \frac{2b + 1}{3b + 1} = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید:

$$a = 3 - \log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 3 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

۲۲۲۳- گزینه ۴ با توجه به شکل دامنه تابع به صورت $(-3, +\infty)$

است. پس دامنه تابع باید به شکل $(-\frac{b}{a}, +\infty)$ باشد. بنابراین

$$-\frac{b}{a} = -3 \Rightarrow b = 3a$$

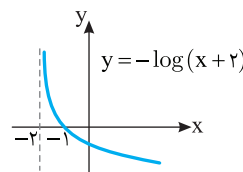
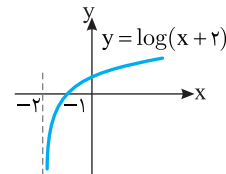
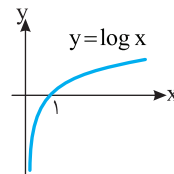
همچنین، نمودار تابع از نقطه $(0, -2)$ می‌گذرد. بنابراین

$$f(0) = \log_{\frac{1}{3}} b = -2 \Rightarrow b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$$

در نتیجه $a = 3$. بنابراین $ab = 27$.

۲۲۲۴- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع $y = \log x$ را دو واحد به چپ انتقال

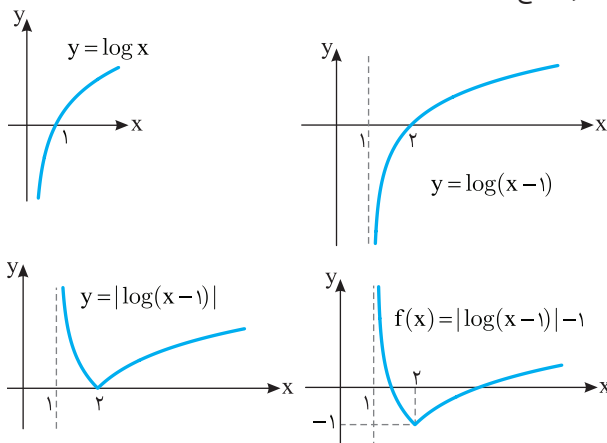
می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \log(x + 2)$ به دست آید. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -\log(x + 2)$ به دست آید.



۲۲۲۵- گزینه ۱ ابتدا نمودار $y = \log x$ را رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی

از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمت‌های پایین محور طول‌ها را حذف می‌کنیم. تا نمودار $y = |\log x|$ به دست آید. سپس نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -|\log x|$ رسم شود.

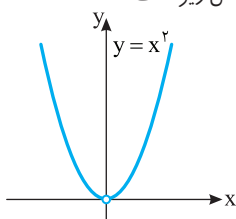
گزینه ۱ - ۲۲۳۶ ابتدا نمودار تابع $y = \log x$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \log(x-1)$ به دست بیاید. سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = |\log(x-1)|$ به دست آید و آن قسمت‌ها را حذف می‌کنیم. در آخر نمودار به دست آمده را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به دست آید.



گزینه ۱ - ۲۲۳۷ ابتدا توجه کنید که دامنه تابع مجموعه عددهای حقیقی مخالف صفر است و با توجه به اینکه $a^{\log_a g(x)} = g(x)$

$$f(x) = {}^2\log {}^2 x^2 = x^2, \quad x \neq 0$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



گزینه ۳ - ۲۲۳۸ برای اینکه عبارت $\log_{(x-1)}(16-x^2)$ معنادار باشد، باید

$$16-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4, \quad x-1 > 0 \Rightarrow x > 1, \quad x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$$

بنابراین دامنه تابع به صورت $D_f = (1, 4) - \{2\}$ است، پس $a=1$ ، $b=4$ و $c=2$ و در نتیجه $a+b+c=7$.

گزینه ۴ - ۲۲۳۹ توجه کنید که

$$y = \frac{4-2^{x+1}}{2^x-1} \Rightarrow y \times 2^x - y = 4 - 2^{x+1}$$

$$2^x(y+2) = 4+y \Rightarrow 2^x = \frac{4+y}{y+2} \Rightarrow x = \log_2 \left(\frac{4+y}{y+2} \right)$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{4+x}{x+2} \right)$

گزینه ۲ - ۲۲۴۰ برای محاسبه ضابطه تابع وارون تابع داده شده، x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{\log x}{1+\log x} \Rightarrow y + y \log x = \log x \Rightarrow (y-1) \log x = -y$$

$$\log x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x = 10^{\frac{y}{1-y}}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = 10^{\frac{x}{1-x}}$

گزینه ۴ - ۲۲۳۱ چون $f^{-1}(3) = 29$ ، پس $f(29) = 3$ در نتیجه

$$\log_3(2 \times 29 - k) = 3 \Rightarrow 58 - k = 3^3 = 27 \Rightarrow k = 31$$

گزینه ۲ - ۲۲۳۲ نمودار تابع f نیمساز ناحیه اول را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس از نقطه $(2, 2)$ می‌گذرد. همچنین نمودار تابع f نیمساز ناحیه دوم را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس از نقطه $(-1, 1)$ می‌گذرد. به این ترتیب

$$f(2) = 2 \Rightarrow \log_2(2a+b) = 2 \Rightarrow 2a+b=4 \quad (1)$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow \log_2(-a+b) = 1 \Rightarrow -a+b=2 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $b = \frac{4}{3}$ و $a = \frac{2}{3}$.

گزینه ۴ - ۲۲۳۳ توجه کنید که $D_f = (-2, +\infty)$ ، پس $x = -2$ باید ریشه عبارت $bx+c$ باشد. بنابراین

$$-2b+c=0 \quad (1)$$

از طرف دیگر $f(0) = -1$ و $f(-1) = 0$ ، پس

$$f(0) = \log_a c = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{a} \quad (2)$$

$$f(-1) = \log_a(-b+c) = 0 \Rightarrow -b+c=1 \quad (3)$$

از معادلات (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $b=1$ و $c=2$. همچنین از معادله (۲) نتیجه می‌شود $a = \frac{1}{2}$ و در نتیجه $a+b+c = \frac{3}{2}$.

گزینه ۲ - ۲۲۳۴ نقطه برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها از معادله $f(x) = 0$ به دست می‌آید:

$$f(x) = \log_2(3x-5) = 0 \Rightarrow 3x-5=1 \Rightarrow x=2$$

پس نقطه برخورد نمودار f با محور طول‌ها $A(2, 0)$ است. بنابراین نقطه برخورد نمودار تابع f با محور عرض‌ها $B(0, 2)$ است. بنابراین

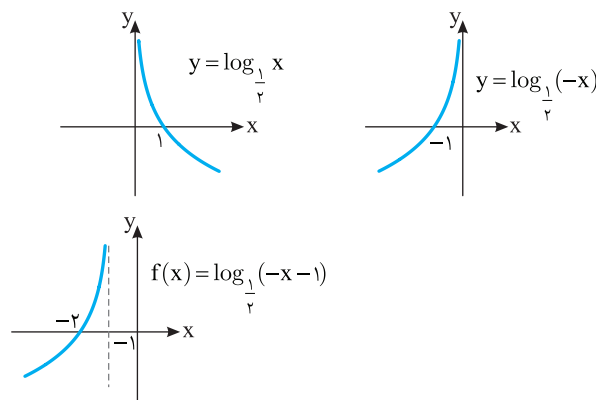
$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۳ - ۲۲۳۵ ابتدا نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم می‌کنیم. سپس

آن را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ به دست بیاید.

سپس آن را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-(x+1)) = \log_{\frac{1}{2}}(-x-1)$ به دست آید. مراحل رسم نمودار

تابع f را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم:



۲۲۴۷- گزینه ۳ دامنه توابع f و g به شکل زیر هستند:

$$x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ طبق تعریف به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x | x \neq 0, \log x^2 \neq 1\} \\ &= \{x | x \neq 0, x \neq \pm \sqrt{10}\} = \mathbb{R} - \{0, \pm \sqrt{10}\} \end{aligned}$$

بنابراین ۳ عدد در دامنه تابع $g \circ f$ قرار ندارند.

۲۲۴۸- گزینه ۲ از نامعادله $\log(x+1) > \log 3$ نتیجه می‌شود

$x+1 > 3$ و در نتیجه $x > 2$. واضح است که عبارت $\log(x+1)$ به ازای $x > -1$ بامعنا است. پس مجموعه جواب‌های نامعادله بازه $(2, +\infty)$ است.

۲۲۴۹- گزینه ۴ برای اینکه $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ بامعنا باشد، باید $x-1 > 0$.

یعنی $x > 1$ از طرف دیگر،

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Rightarrow x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

بنابراین $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$.

۲۲۵۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که باید $16 - x^2 > 0$ تا عبارت

$\log(16 - x^2)$ معنادار باشد. بنابراین

$$x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4$$

از طرف دیگر،

$$\log(16 - x^2) < \log 15 \Rightarrow 16 - x^2 < 15 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $(-4, -1) \cup (1, 4)$ است که چهار عدد صحیح ± 2 و ± 3 در آن قرار دارند.

۲۲۵۱- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_9(2x+1) - \log_9(x-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_9\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x+1}{x-1} = 9^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow 2x+1 = 3x-3 \Rightarrow x=4$$

۲۲۵۲- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log\left(\frac{x}{x+1}\right) = \log(\log 2)$$

در نتیجه

$$\frac{x}{x+1} = \log 2 \Rightarrow x = x \log 2 + \log 2$$

$$x(1 - \log 2) = \log 2 \Rightarrow x(\log 10 - \log 2) = \log 2 \Rightarrow x \log 5 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 5} \Rightarrow x = \log_5 2$$

۲۲۵۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\log_7(14 + \log_7(x-1)) = 4 \Rightarrow 14 + \log_7(x-1) = 7^4 = 16$$

$$\log_7(x-1) = 2 \Rightarrow x-1 = 7^2 = 49 \Rightarrow x = 50$$

۲۲۴۱- گزینه ۳ کافی است معادله $x^2 - 3x = x$ را حل کنیم:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

واضح است که $x = 0$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود.

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۲۴۲- گزینه ۱ معادله را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_7(12b-21) - \log_7(b^2-3) = \log_7\left(\frac{12b-21}{b^2-3}\right) = 2$$

در نتیجه

$$\frac{12b-21}{b^2-3} = 7^2 = 49 \Rightarrow 4b^2 - 12 = 12b - 21$$

بنابراین

$$4b^2 - 12b + 9 = (2b-3)^2 = 0$$

بنابراین $b = \frac{3}{2}$. اما به ازای $b = \frac{3}{2}$ هیچ‌یک از عبارت‌های $\log_7(12b-21)$

و $\log_7(b^2-3)$ معنادار نیست، بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۲۴۳- گزینه ۱ طبق تعریف لگاریتم

$$\log_7(\log_7(x-1)) = 5 \Rightarrow \log_7(x-1) = 7^5 = 32$$

$$x-1 = 3^{32} \Rightarrow x = 3^{32} + 1$$

۲۲۴۴- گزینه ۴ چون $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$ پس معادله مورد نظر

می‌شود

$$\log_{7^2} x + \log_{7^4} x^2 + \log_{7^6} x^3 = 9$$

$$\frac{1}{2} \log_7 x + \frac{2}{4} \log_7 x + \frac{3}{6} \log_7 x = 9$$

$$\frac{3}{2} \log_7 x = 9 \Rightarrow \log_7 x = 6 \Rightarrow x = 7^6 = 64$$

۲۲۴۵- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $\log_3 x = t$ ، در نتیجه $\log_x 3 = \frac{1}{t}$.

بنابراین به معادله زیر می‌رسیم:

$$t - \frac{6}{t} + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+3) = 0 \Rightarrow t = -3, t = 2$$

پس

$$\log_7 x = -3 \Rightarrow x = 7^{-3}$$

$$\log_7 x = 2 \Rightarrow x = 7^2$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$ است.

۲۲۴۶- گزینه ۱ باید هر دو عبارت $\log(3-x)$ و $\log(x+2)$ بامعنا

باشند و نیز $\log(3-x) \neq 0$ ، پس

$$D_f = \{x | x+2 > 0, 3-x > 0, \log(3-x) \neq 0\}$$

اگر $\log(3-x) = 0$ ، آن‌گاه $x = 2$. بنابراین دامنه تابع f به صورت

$$\{2\} - (-2, 3)$$

اکنون توجه کنید که

$$\log_3 9 = 2 \leq \log_3 (2x-1) \leq 3 = \log_3 27$$

$$9 \leq 2x-1 \leq 27 \xrightarrow{+1} 10 \leq 2x \leq 28 \xrightarrow{\div 2} 5 \leq x \leq 14$$

بنابراین $5 \leq x \leq 14$ (توجه کنید که در این محدوده $(2x-1) > 0$). تعداد عددهای صحیح در این محدوده ده تا $(5, 6, 7, \dots, 14)$ است.

گزینه ۴ - ۲۲۵۹ توجه کنید که

$$\log_2 (1+3x) < \log_2 (x+7) \Rightarrow 1+3x < x+7 \Rightarrow x < 3$$

از طرف دیگر، باید $1+3x > 0$ و $x+7 > 0$. در نتیجه $x > -\frac{1}{3}$. بنابراین

مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر برابر $(-\frac{1}{3}, 3)$ است.

گزینه ۲ - ۲۲۶۰ برای اینکه $\log_3 (x+2)$ با معنا باشد، باید $x+2 > 0$.

یعنی $x > -2$. از طرف دیگر، باید

$$1 - \log_3 (x+2) \geq 0 \Rightarrow \log_3 (x+2) \leq 1 = \log_3 3 \Rightarrow x+2 \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$$

پس دامنه f بازه $[-2, 1]$ است.

گزینه ۴ - ۲۲۶۱ توجه کنید که $\log_5 25 = 2$. در نتیجه معادله داده

شده به صورت زیر درمی‌آید

$$\log_5 (28x-6) - \log_5 (x-1) = 2 \Rightarrow \log_5 \left(\frac{28x-6}{x-1} \right) = 2$$

در نتیجه

$$\frac{28x-6}{x-1} = 4^2 = 16 \Rightarrow 28x-6 = 16x-16 \Rightarrow 12x = -10 \Rightarrow x = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$$

اما به ازای $x = -\frac{5}{6}$ هیچ یک از دو عبارت $\log_5 (28x-6)$ و $\log_5 (x-1)$

معنادار نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

گزینه ۱ - ۲۲۶۲ توجه کنید که

$$2 \log_x (2x-1) = 1 \Rightarrow \log_x (2x-1)^2 = 1$$

بنابراین

$$(2x-1)^2 = x \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow (4x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = 1$$

اکنون توجه کنید که اگر $x = 1$ ، پایه لگاریتم داده شده در صورت مسئله برابر ۱

می‌شود که ممکن نیست و اگر $x = \frac{1}{4}$ ، آن‌گاه $2x-1 = -\frac{1}{2}$ ، که باز هم ممکن

نیست، زیرا لگاریتم عددهای منفی تعریف نمی‌شود. بنابراین هیچ یک از مقدارهای به دست آمده برای x قابل قبول نیستند و معادله مورد نظر جواب ندارد.

گزینه ۱ - ۲۲۶۳ توجه کنید که

$$\log_5 (x^2 - 6x + 9) = \log_5 (x-3)^2 = \frac{2}{5} \log_5 |x-3| = \log_5 |x-3|$$

در نتیجه مسئله به حل معادله زیر منجر می‌شود

$$\log_5 (x+3) + \log_5 |x-3| = \log_5 (x+3) |x-3| = 4$$

بنابراین $|x-3| = 16 = 2^4$. اکنون می‌توان گفت

$$x > 3 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 16 \Rightarrow x^2 - 9 = 16$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5, x = -5 \text{ (غ.ق.)}$$

$$x < 3 \Rightarrow (x+3)(3-x) = 16 \Rightarrow 9 - x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = -7 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

گزینه ۲ - ۲۲۵۴ چون $\log_a b = \frac{1}{k} \log_a b$ ، پس معادله مورد نظر

می‌شود

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{4}} x + \log_{\sqrt{6}} x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{6} \log_2 x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{12} \log_2 x = \frac{11}{3} \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$$

گزینه ۲ - ۲۲۵۵ فرض می‌کنیم $\log_3 x = t$. در این صورت

$\log_x 3 = \frac{1}{t}$. در نتیجه $\frac{1}{\log_x 3} = \log_3 x = t$. بنابراین، معادله داده شده

به صورت زیر درمی‌آید

$$t - \frac{12}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - 12 = t \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0$$

$$(t-4)(t+3) = 0 \Rightarrow t = 4, t = -3$$

در نتیجه

$$\log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 = 81, \log_3 x = -3 \Rightarrow x = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

گزینه ۲ - ۲۲۵۶ اگر فرض کنیم $\log_3 x = t$ ، آن‌گاه

$$\log_8 x = \log_{3^2} x = \frac{1}{2} \log_3 x = \frac{1}{2} t$$

$$\log_{\frac{1}{8}} x = \log_{3^{-2}} x = -\log_3 x = -\frac{1}{2} t$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$t \left(\frac{1}{2} t \right) - t + \frac{1}{2} t - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t - 1 = 0$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1, t = 3$$

بنابراین

$$t = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$t = 3 \Rightarrow \log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$$

در نتیجه، حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر ۴ است.

گزینه ۱ - ۲۲۵۷ دستگاه به شکل $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - 3 \log y = 1 \end{cases}$ است. طرفین

معادله اول را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین دو معادله را جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3 \log x + 3 \log y = 9 \\ 2 \log x - 3 \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow 5 \log x = 10 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

بنابراین

$$\log x + \log y = 3 \Rightarrow 2 + \log y = 3 \Rightarrow \log y = 1 \Rightarrow y = 10$$

در نتیجه $x - 2y = 100 - 20 = 80$.

گزینه ۲ - ۲۲۵۸ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{3}} (2x-1) = \log_{3^{-1}} (2x-1) = -\log_3 (2x-1)$$

بنابراین نامعادله‌های مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-3 \leq -\log_3 (2x-1) \leq -2 \Rightarrow 2 \leq \log_3 (2x-1) \leq 3$$

۲۲۶۴- گزینه ۲ نامعادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{1-\log x + 1 + \log x}{(1-\log x)(1+\log x)} > 2 \Rightarrow \frac{2}{1-(\log x)^2} > 2 \Rightarrow \frac{1}{1-(\log x)^2} > 1$$

$$\frac{1}{1-(\log x)^2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1-(\log x)^2}{1-(\log x)^2} > 0 \Rightarrow \frac{(\log x)^2}{1-(\log x)^2} > 0$$

بنابراین باید $(\log x)^2 \neq 0$ و $1-(\log x)^2 > 0$:

$$(\log x)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, \quad (\log x)^2 < 1 \Rightarrow |\log x| < 1$$

$$-1 < \log x < 1 \Rightarrow \frac{1}{10} < x < 10$$

پس مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر $\{x \mid (\frac{1}{10}, 10) - \{1\}\}$ است.

۲۲۷۰- گزینه ۴ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid x \neq -3, \frac{3x-1}{x+3} > 0, \log(\frac{3x-1}{x+3}) \geq 0\}$$

اکنون توجه کنید که

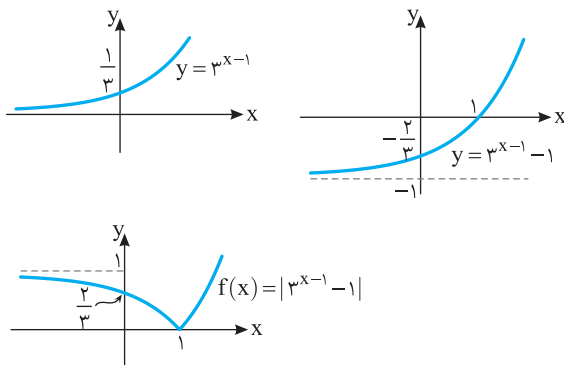
$$\frac{3x-1}{x+3} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$\log(\frac{3x-1}{x+3}) \geq 0 \Rightarrow \frac{3x-1}{x+3} \geq 1 \Rightarrow \frac{2(x-2)}{x+3} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$$

بنابراین $D_f = (-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$. در نتیجه عددهای صحیحی که در دامنه تابع f نیستند، -3 ، -2 ، -1 ، 0 و 1 هستند.

۲۲۷۱- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = 3^x$ را یک واحد به سمت راست

انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 3^{x-1}$ به دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 3^{x-1} - 1$ به دست بیاید. سپس قرینه قسمتی از این نمودار را که پایین محور x است، نسبت به محور x رسم و قسمتی را که زیر محور x است، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.



۲۲۷۲- گزینه ۴ فرض می‌کنیم $2^x = t$. در این صورت معادله مورد نظر

$$4^x - 3 \times 2^{x+2} + 27 = (2^x)^2 - 12 \times 2^x + 27 = t^2 - 12t + 27 = (t-3)(t-9) = 0$$

بنابراین

$$t = 3 \Rightarrow 2^x = 3 \quad (1), \quad t = 9 \Rightarrow 2^x = 9 \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید $2^{x_1+x_2} = 27$.

بنابراین $2^4 < 2^{x_1+x_2} < 2^5$. در نتیجه $4 < x_1 + x_2 < 5$.

۲۲۶۴- گزینه ۲ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_5 x + \log_{\frac{1}{5}} x - 2 \log_{\frac{1}{5}} x = \log_5 5^2$$

$$\log_5 x + 2 \log_5 x - 2 \times \frac{1}{2} \log_5 x = 2 \log_5 5$$

$$\log_5 x = \log_5 5 \Rightarrow x = 5^{\log_5 5}$$

۲۲۶۵- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $\log_5 x = t$ ، آن‌گاه $\log_5 x^2 = 2t$ و

معادله مورد نظر می‌شود

$$\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+2t} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1+2t-(1+t)}{(1+t)(1+2t)} = \frac{1}{6}$$

$$6t = 1 + 3t + 2t^2 \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1, t = \frac{1}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$t = 1 \Rightarrow \log_5 x = 1 \Rightarrow x = 5$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_5 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

بنابراین مجموع مربعات جواب‌های معادله مورد نظر برابر $5 + \sqrt{5} = 6$ است.

۲۲۶۶- گزینه ۲ راه‌حل اول از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم:

$$\log x^{(\lambda - \log x)} = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow (\lambda - \log x) \log x = -2 \log x$$

$$\begin{cases} \log x = 0 \Rightarrow x = 10^0 = 1 \\ \lambda - \log x = -2 \Rightarrow \log x = 10^0 \Rightarrow x = 10^1 \end{cases}$$

راه‌حل دوم معادله را به صورت $x^{\lambda - \log x} = x^2$ یا $x^{10 - \log x} = 1$

می‌نویسیم. با توجه به اینکه x عددی مثبت است، دو حالت وجود دارد: پایه در عبارت سمت چپ ۱ باشد، یعنی $x = 1$ یا توان در عبارت سمت چپ صفر باشد، یعنی $\log x = 10^0$. پس $x = 10^1$.

۲۲۶۷- گزینه ۲ از معادله $\log_7 x + \log_7 y = 4$ به دست می‌آید

$$\log_7(xy) = 4 \Rightarrow xy = 7^4 = 2401$$

از معادله $x + y = 10$ به دست می‌آید

$$y = 10 - x$$

با جای‌گذاری $10 - x$ به جای y در معادله $xy = 2401$ نتیجه می‌شود

$$x(10 - x) = 2401 \Rightarrow x^2 - 10x + 2401 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-8) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 8, \quad x = 8 \Rightarrow y = 2$$

در هر صورت $x^2 + y^2 = 68$.

۲۲۶۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \Rightarrow 2x-1 < x+1 \Rightarrow x < 2$$

از طرف دیگر، عبارت $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ به ازای $x > \frac{1}{2}$ و عبارت $\log(x+1)$

به ازای $x > -1$ معنادار است. بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر

بازه $(\frac{1}{2}, 2)$ است.

۲۲۷۹- گزینه ۱ راه حل اول از دو طرف معادله مورد نظر در مبنای ۱۰

لگاریتم می گیریم:

$$(x+1) \log 2 = (x-1) \log 5 \Rightarrow x(\log 5 - \log 2) = \log 2 + \log 5$$

$$x \log \frac{5}{2} = \log 10 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log \frac{5}{2}} = \frac{1}{\log 5 - \log 2} = \frac{1}{1 - 2 \log 2}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$2^{x+1} = 5^{x-1} \Rightarrow 2^x \times 2 = 5^x \times 5^{-1} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 10$$

از دو طرف این معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم:

$$x \log \frac{5}{2} = \log 10 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log \frac{5}{2}} = \frac{1}{\log 5 - \log 2}$$

$$= \frac{1}{\log 10 - \log 4} = \frac{1}{1 - 2 \log 2}$$

۲۲۸۰- گزینه ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+3)$ و $\log(2-x)$ بامعنی

باشند و نیز $\log(2-x) \neq 0$:

$$D_f = \{x | x+3 > 0, 2-x > 0, \log(2-x) \neq 0\}$$

از $x+3 > 0$ نتیجه می شود $x > -3$ و از $2-x > 0$ نتیجه می شود $x < 2$. از

طرف دیگر اگر $\log(2-x) = 0$ ، آن گاه $2-x=1$ ، در نتیجه $x=1$. بنابراین

دامنه تابع f به صورت $\{1\} - (-3, 2)$ است.

۲۲۸۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{3^x}$

اکنون نقطه تقاطع نمودارها را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$3^x + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3^x} \xrightarrow{t=3^x} t + \frac{1}{3} = \frac{1}{t}$$

$$\xrightarrow{\times 3t} 3t^2 + 8t + 1 = 0 \Rightarrow 3t^2 + 8t + 1 = 0$$

$$(3t-1)(t+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ t = -3 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

$A(-1, 3)$ نقطه مورد نظر است. بنابراین باید فاصله نقاط $A(-1, 3)$ و

$B(-1, 1)$ را به دست آوریم که برابر است با $AB = \sqrt{(-1+1)^2 + (3-1)^2} = 2$

ریاضی-۹۶

۲۲۸۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \frac{1}{2^{2x}} = \frac{1}{4^x}$

را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2} \Rightarrow 4^x = \frac{1}{4^x} + \frac{3}{2} \xrightarrow{t=4^x} t = \frac{1}{t} + \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2t} 2t^2 = 2 + 3t \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$(2t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \text{ (غ.ق.ق.)} \\ t = 2 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ نقطه مورد نظر است. بنابراین باید فاصله نقاط $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ و $B\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

را به دست آوریم که برابر است با $AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$

خارج از کشور ریاضی-۹۶

۲۲۷۳- گزینه ۳ با توجه به فرض های مسئله،

$$f(1)=1 \Rightarrow a+b=1, \quad f(2)=7 \Rightarrow a^2+b=7$$

اگر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به دست می آید:

$$a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3, \quad a = -2$$

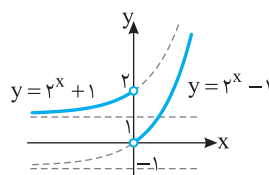
چون a باید مثبت باشد، پس $a = 3$. در نتیجه $b = 1 - a = -2$. به این ترتیب

$$f(x) = 3^x - 2. \text{ اکنون توجه کنید که اگر } f^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = m, \text{ آن گاه}$$

$$f(m) = -\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m - 2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m = -\frac{5}{3} + 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & x < 0 \\ 2^x - 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{ابتدا توجه کنید که}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



پس برد تابع به صورت $(0, +\infty)$ است.

۲۲۷۵- گزینه ۳ نمودار تابع از نقطه $(5, 0)$ می گذرد، پس

$$f(5) = 0 \Rightarrow \log_a(\delta b - 3) = 0 \Rightarrow \delta b - 3 = 1 \Rightarrow b = \frac{4}{\delta}$$

به این ترتیب $f(x) = \log_a\left(\frac{4}{\delta}x - 3\right)$. نمودار تابع از نقطه $(15, 2)$ می گذرد، پس

$$f(15) = 2 \Rightarrow \log_a\left(\frac{4}{\delta} \times 15 - 3\right) = 2 \Rightarrow \log_a 9 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{بنابراین } ab = \frac{12}{\delta}$$

۲۲۷۶- گزینه ۱ با استفاده از ویژگی های لگاریتم می توان نوشت

$$\log \sqrt[4]{72} = \log 72^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log 72 = \frac{1}{4} \log (2^3 \times 3^2)$$

$$= \frac{1}{4} (\log 2^3 + \log 3^2) = \frac{1}{4} (3 \log 2 + 2 \log 3) = \frac{1}{4} (3b + 2a)$$

$$\text{چون } \frac{1}{\log_a b} = \log_b a, \text{ پس}$$

$$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 3} = \log_3 2 + \log_2 3 + \log_5 3$$

$$= \log_3 (2 \times 3 \times 5) = \log_3 30 = 1$$

۲۲۷۸- گزینه ۱ معادله را به صورت $\log \frac{x-1}{x} = \log(\log 2)$ می نویسیم.

بنابراین

$$\frac{x-1}{x} = \log 2 \Rightarrow x-1 = x \log 2 \Rightarrow x = \frac{1}{1 - \log 2} = \frac{1}{\log 10 - \log 2}$$

$$= \frac{1}{\log \frac{10}{2}} = \frac{1}{\log 5} = \frac{\log 10}{\log 5} = \frac{\log 2 + \log 5}{\log 5} = \frac{\log 2}{\log 5} + 1 = \log_5 2 + 1$$

۲۲۸۸- گزینه ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x > \frac{5}{3}$ از

معادله داده شده مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\log_5(2x-1) + \log_5(3x-5) = 1 \Rightarrow \log_5((2x-1)(3x-5)) = 1$$

$$(2x-1)(3x-5) = 5 \Rightarrow 6x^2 - 13x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (غ.ق.)}, x = \frac{13}{6}$$

$$\text{بنابراین } \log_7(6x+3) = \log_7(13+3) = \log_7 2^4 = 4$$

ریاضی - ۸۶

۲۲۸۹- گزینه ۳ مقدار x را از معادله داده شده به دست می‌آوریم:

$$\log_3(x^2-1) = 1 + \log_3(x+3) \Rightarrow \log_3(x^2-1) - \log_3(x+3) = 1$$

$$\log_3\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+3} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

اگر $x = -2$ ، آن‌گاه $x-3 < 0$ و $\log_4(x-3)$ تعریف نمی‌شود و اگر

$$x = 5 \text{، آن‌گاه } \log_4(x-3) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

ریاضی - ۸۸

۲۲۹۰- گزینه ۳ از معادله $\log y = 2 \log 3 + \log x$ به دست می‌آید

$$\log y - \log x = \log 9 \Rightarrow \log \frac{y}{x} = \log 9 \Rightarrow \frac{y}{x} = 9 \Rightarrow y = 9x$$

در معادله $2^x - 7 \times 4^{x+y} = 1$ به جای y قرار می‌دهیم $9x$ ، در نتیجه

$$2^{x-7} \times 4^{x+9x} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times 2^{20x} = 1 \Rightarrow 2^{21x-7} = 1$$

$$21x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3$$

تجربی - ۹۶

۲۲۹۱- گزینه ۲ دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند، پس

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{b-a} = 9 = 3^2 \Rightarrow b-a = 2 \quad (1)$$

از طرف دیگر $f(2) = \frac{1}{3}$ ، پس

$$3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a+b = -1 \quad (2)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = -1$ و $b = 1$. پس

$$f(x) = 3^{-x+1} \text{ اکنون فرض می‌کنیم } f^{-1}(27) = m$$

در این صورت

$$f(m) = 27 \Rightarrow 3^{-m+1} = 27 \Rightarrow -m+1 = 3 \Rightarrow m = -2$$

ریاضی - ۹۵

۲۲۹۲- گزینه ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow ab^0 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2b^2} = \frac{3}{32} \Rightarrow b^2 = 16$$

چون مقدار مثبت b مورد نظر است، پس $b = 4$ و $f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x$

بنابراین

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

تجربی - ۹۱

۲۲۸۳- گزینه ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از نقاط $(2, 6)$ و $(12, 10)$

می‌گذرد، پس $f(2) = 6$ و $f(12) = 10$. بنابراین

$$f(2) = a + \log_7(2b-4) = 6 \Rightarrow \log_7(2b-4) = 6-a$$

$$f(12) = a + \log_7(12b-4) = 10 \Rightarrow \log_7(12b-4) = 10-a$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_7(12b-4) - \log_7(2b-4) = 4 \Rightarrow \log_7\left(\frac{12b-4}{2b-4}\right) = 4$$

$$\frac{12b-4}{2b-4} = 16 \Rightarrow 12b-4 = 32b-64 \Rightarrow 20b = 60 \Rightarrow b = 3$$

$$\log_7(2b-4) = \log_7(6-4) = 1 = 6-a \Rightarrow a = 5$$

بنابراین

ریاضی - ۹۶

۲۲۸۴- گزینه ۱ دامنه تابع به صورت $\{x | ax+b > 0\}$ است. جواب

نامعادله اخیر به صورت $(-\infty, -\frac{b}{a})$ یا $(-\frac{b}{a}, +\infty)$ است. چون تابع فقط در

بازه $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ تعریف شده است، پس $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \quad (1)$

از طرف دیگر، $f(4) = 2 \Rightarrow \log_3(4a+b) = 2 \Rightarrow 4a+b = 9 \quad (2)$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = 2$ و $b = 1$. به این ترتیب

$$f(x) = \log_3(2x+1)$$

و در نتیجه $f(-\frac{4}{9}) = \log_3(-\frac{4}{9}+1) = \log_3 \frac{1}{3} = -1 = -2$

ریاضی - ۹۴

۲۲۸۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{1}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{6}}$$

از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A = \log_3(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}) = \log_3(2 \times 2^{-\frac{1}{6}}) = \log_3 2 + \log_3 2^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log_3 2 = \frac{1}{9}$$

$$\log_6\left(\frac{1}{A}-1\right) = \log_6(9-1) = \log_6 8 = \log_6 2^3 = \frac{3}{2} \log_6 2 = \frac{3}{2}$$

بنابراین

ریاضی - ۹۰

۲۲۸۶- گزینه ۲ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log(6-2\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5}) &= \log(6-2\sqrt{5}) + \log(1+\sqrt{5})^2 \\ &= \log(6-2\sqrt{5}) + \log((6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})) \\ &= \log(36-20) = \log 16 = 4 \log 2 = 4k \end{aligned}$$

تجربی - ۹۰

۲۲۸۷- گزینه ۴ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x > 2$. معادله

را ساده می‌کنیم:

$$2\log(x-2) = \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10)$$

$$(x-2)^2 = x+10 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (غ.ق.)}, x = 6$$

بنابراین $\log_4(x+2) = \log_4 8 = \log_4 2^3 = \frac{3}{2} \log_4 2 = \frac{3}{2}$

ریاضی - ۸۵

۲۲۹۷- گزینه ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_x (3x+8) = 2 - \log_x (x-6) \Rightarrow \log_x (3x+8) + \log_x (x-6) = 2$$

$$\log_x ((3x+8)(x-6)) = 2 \Rightarrow (3x+8)(x-6) = x^2$$

$$3x^2 - 10x - 48 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$(x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 8$$

به ازای $x = -3$ عبارت‌های $\log_x (3x+8)$ و $\log_x (x-6)$ بی‌معنی

هستند، بنابراین $x = 8$ و مقدار لگاریتم x در پایه ۴ برابر است با

$$\log_4 x = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}$$

خارج از کشور تجربی-۹۳

۲۲۹۸- گزینه ۴ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_3 (2x^2+1) - \log_3 (x+2) = 1 \Rightarrow \log_3 \frac{2x^2+1}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 3$$

$$2x^2+1 = 3x+6 \Rightarrow 2x^2-3x-5 = 0 \Rightarrow x = -1, x = \frac{5}{2}$$

اکنون به محاسبه مقدار $\log_3 (2x-1)$ می‌پردازیم. با توجه به محدوده

تعریف این لگاریتم $(x > \frac{1}{2})$ ، تنها $x = \frac{5}{2}$ قابل قبول است. پس

$$\log_3 (2x-1) = \log_3 (2 \times \frac{5}{2} - 1) = \log_3 4 = \log_{3^{\frac{2}{3}}} 2^2 = \frac{2}{3} \log_3 2 = \frac{2}{3}$$

تجربی-۹۵

۲۲۹۹- گزینه ۲ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log (x^2 - x - 6) - \log (x - 3) = \log (2x - 5)$$

$$\log \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \right) = \log (2x - 5) \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 2x-5$$

$$\frac{x+2}{1} = 2x-5 \Rightarrow x+2 = 2x-5 \Rightarrow x = 7$$

بنابراین $\log_4 \sqrt[3]{x+1} = \log_4 \sqrt[3]{8} = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$

خارج از کشور تجربی-۹۵

۲۳۰۰- گزینه ۱ برای اینکه لگاریتم‌ها با معنی باشند باید $x > 0$ و $y > 0$.

توجه کنید که

$$\log_3 x + \log_3 y = 2 \Rightarrow \log_3 xy = 2 \Rightarrow xy = 9$$

$$x^2 + y^2 = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 18 = 46$$

$$(x+y)^2 = 64 \xrightarrow{x>0, y>0} x+y = 8$$

بنابراین

$$\log_4 (x+y) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

تجربی-۸۹

۲۲۹۳- گزینه ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از دو نقطه $(5, 11)$ و

$(21, 15)$ می‌گذرد، پس $f(5) = 11$ و $f(21) = 15$. بنابراین

$$f(5) = a + \log_7 (15+b) = 11 \Rightarrow a + 2 \log_7 (15+b) = 11$$

$$\log_7 (15+b) = \frac{11-a}{2}$$

$$f(21) = a + \log_7 (63+b) = 15 \Rightarrow a + 2 \log_7 (63+b) = 15$$

$$\log_7 (63+b) = \frac{15-a}{2}$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_7 (63+b) - \log_7 (15+b) = 2 \Rightarrow \log_7 \left(\frac{63+b}{15+b} \right) = 2$$

$$\frac{63+b}{15+b} = 49 \Rightarrow 63+b = 60+49b \Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین

$$a + \log_7 (15+1) = 11 \Rightarrow a = 3$$

خارج از کشور ریاضی-۹۶

۲۲۹۴- گزینه ۱ نمودار تابع محور x را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع می‌کند،

پس از نقطه $(-1, 0)$ عبور می‌کند. همچنین نمودار تابع نیمساز ناحیه چهارم را در

نقطه‌ای به عرض ۱- قطع می‌کند، پس از نقطه $(1, -1)$ عبور می‌کند. در نتیجه

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (-a+b) = 0 \Rightarrow -a+b = 1 \quad (1)$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (a+b) = -1 \Rightarrow a+b = 2 \quad (2)$$

بنابراین از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$.

خارج از کشور ریاضی-۹۴

۲۲۹۵- گزینه ۴ از معادله داده شده مقدار x را می‌یابیم:

$$\log (x-2) = 2 \log 2 - \log (x-4) \Rightarrow \log (x-2) + \log (x-4) = \log 4$$

$$\log ((x-2)(x-4)) = \log 4 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 4$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = 3 - \sqrt{5} \text{ (غ.ق.)}, x = 3 + \sqrt{5}$$

بنابراین $\log_8 (x-3) = \log_8 (3 + \sqrt{5} - 3) = \log_8 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

ریاضی-۸۷

۲۲۹۶- گزینه ۱ **راهحل اول** ابتدا توجه کنید که $A^2 = (3^a)^2 = 3^{2a}$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log_3 (9A^2) &= \log_3 (3^2 \times 3^{2a}) = \log_3 3^{(2+2a)} \\ &= (2+2a) \log_3 3 = 2+2a \end{aligned}$$

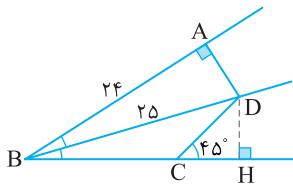
راهحل دوم از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\log_3 A = a$. پس

$$\begin{aligned} \log_3 (9A^2) &= \log_3 (3^2 A^2) = \log_3 (3A)^2 = 2 \log_3 (3A) \\ &= 2(\log_3 3 + \log_3 A) = 2(1+a) = 2+2a \end{aligned}$$

ریاضی-۹۱

فصل چهاردهم

بنابراین $BH=AB=24$. در نتیجه $BC=BH-HC=24-7=17$.



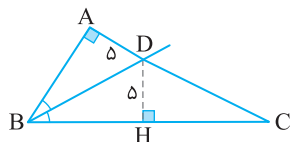
گزینه ۴ - ۲۳۰۸ ارتفاع BH را در مثلث ABD رسم می‌کنیم. چون مثلث‌های قائم‌الزاویه BCD و BHD همنهشت‌اند، پس $BH=BC=4$ و $HD=CD=11$. بنابراین $AH=23-11=12$. در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AHB،

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 144 + 16 = 160 \Rightarrow AB = 4\sqrt{10}.$$

گزینه ۴ - ۲۳۰۹ به شکل زیر توجه کنید. چون نقطه D روی نیمساز زاویه B است، پس $DA=DH=5$. از طرف دیگر، چون مثلث‌های قائم‌الزاویه ABD و HBD همنهشت‌اند، پس $AB=HB$. بنابراین $BC-AB=10 \Rightarrow BC-HB=10 \Rightarrow HC=10$.

اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه DHC،

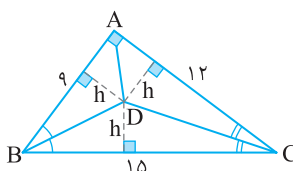
$$DC^2 = DH^2 + HC^2 = 25 + 100 = 125 \Rightarrow DC = 5\sqrt{5}$$



گزینه ۲ - ۲۳۱۰ چون D روی نیمساز زاویه B قرار دارد، پس فاصله‌اش از ضلع‌های AB و BC برابر است. همین‌طور، چون D روی نیمساز زاویه C قرار دارد، پس فاصله‌اش از ضلع‌های AC و BC برابر است. فرض کنید این فاصله برابر h باشد. اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$. پس $BC=15$. مساحت مثلث ABC از یک طرف برابر است با $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$ و از طرف دیگر برابر است با مجموع مساحت‌های سه مثلث ADB و BDC و ADC:

$$\frac{1}{2} h \times 9 + \frac{1}{2} h \times 15 + \frac{1}{2} h \times 12 = 54 \Rightarrow \frac{1}{2} h (9 + 15 + 12) = 54 \Rightarrow h = 3$$

بنابراین $\text{مساحت}(BDC) = \frac{1}{2} h \times BC = \frac{1}{2} \times 3 \times 15 = 22\frac{1}{2}$.



گزینه ۴ - ۲۳۰۱

گزینه ۴ - ۲۳۰۲

گزینه ۱ - ۲۳۰۳

با توجه به شکل مقابل، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABD،

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 \Rightarrow 25^2 = 24^2 + BD^2$$

$BD^2 = 25^2 - 24^2 = (25-24)(25+24) = 49$
بنابراین $BD=7$. از طرف دیگر، چون D روی نیمساز زاویه A قرار دارد، پس $DE=DB=7$.

گزینه ۳ - ۲۳۰۴

چون D روی نیمساز زاویه C قرار دارد، پس فاصله آن از دو ضلع این زاویه برابر است. بنابراین با توجه به شکل مقابل $DH=DB=4$ در نتیجه

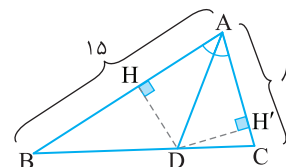
$$\text{مساحت}(ADC) = \frac{1}{2} DH \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$$

گزینه ۴ - ۲۳۰۵ چون نقطه D روی نیمساز زاویه A است، پس فاصله آن از AB و AC برابر است، یعنی با توجه به شکل زیر $DH=DH'$. بنابراین

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2} DH \times AB + \frac{1}{2} DH' \times AC$$

$$46 = \frac{1}{2} DH' \times 15 + \frac{1}{2} DH' \times 8 \Rightarrow DH' = 4$$

در نتیجه $S_{ADC} = \frac{1}{2} DH' \times AC = 16$.



گزینه ۳ - ۲۳۰۶

چون C روی نیمساز زاویه O قرار دارد، پس فاصله‌اش تا ضلع‌های این زاویه برابر است، بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو $CH=CB=2$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} \text{مساحت}(AOC) - \text{مساحت}(BOC) &= \frac{1}{2} CH \times OA - \frac{1}{2} CB \times OB \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times OA - \frac{1}{2} \times 2 \times OB = OA - OB = 4 \end{aligned}$$

گزینه ۲ - ۲۳۰۷ از نقطه D بر امتداد BC عمود می‌کشیم تا آن را در H قطع کند. چون D روی نیمساز زاویه B است، پس $AD=DH$. توجه کنید

که $DH=7$. در نتیجه $AD = \sqrt{BD^2 + AB^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$. بنابراین در مثلث CHD، $DH=CH=7$ (زیرا $\hat{C}=45^\circ$) و مثلث CHD قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است). دو مثلث ABD و HBD به حالت وتر و یک زاویه حاده همنهشت هستند.

۲۳۱۸- گزینه ۴ اگر تناسب $\frac{4x-y}{2x+y} = \frac{1}{5}$ را طرفین - وسطین کنیم،

به دست می آید

$$5(4x-y) = 2x+y \Rightarrow 20x-5y = 2x+y \Rightarrow 18x = 6y \Rightarrow 3x = y$$

$$\frac{6x+y}{x+y} = \frac{6x+3x}{x+3x} = \frac{9x}{4x} = \frac{9}{4}$$

۲۳۱۹- گزینه ۱ فرض می کنیم $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ در نتیجه $a = kb$ و

$$c = kd \text{ بنابرین } \frac{a+yc}{b+yd} = \frac{kb+vk d}{b+yd} = \frac{k(b+vd)}{b+yd} = k = \frac{3}{2}$$

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k + k = 2k = 3$$

۲۳۲۰- گزینه ۱ تناسب داده شده را تفصیل در صورت می کنیم:

$$\frac{3a+10-(10+2a)}{10+2a} = \frac{3b+7-(7+2b)}{7+2b} \Rightarrow \frac{a}{10+2a} = \frac{b}{7+2b}$$

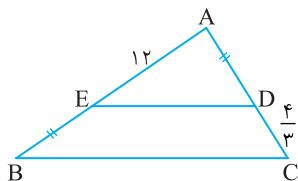
اگر این تناسب را طرفین - وسطین کنیم، به دست می آید

$$a(7+2b) = b(10+2a) \Rightarrow 7a+2ab = 10b+2ab \Rightarrow 7a = 10b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{7}$$

۲۳۲۱- گزینه ۲ مطابق شکل زیر، چون $ED \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \xrightarrow{AD=EB} \frac{12}{EB} = \frac{EB}{\frac{4}{3}} \Rightarrow EB = 4$$

در نتیجه $AB = AE + EB = 12 + 4 = 16$



۲۳۲۲- گزینه ۱ چون $EF \parallel AB$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث MAB،

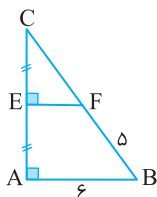
$$\frac{MF}{FA} = \frac{ME}{EB} \quad (1)$$

همین طور، $DF \parallel AC$ و بنابر قضیه تالس در مثلث MAC،

$$\frac{MD}{DC} = \frac{MF}{FA} \quad (2)$$

از تساوی های (۱) و (۲) به دست می آید

$$\frac{ME}{EB} = \frac{MD}{DC} \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$



۲۳۲۳- گزینه ۱ با توجه به شکل مقابل، چون

$EF \parallel AB$ و نقطه E وسط ضلع AC است، پس بنابر

قضیه تالس در مثلث CAB، نقطه F نیز وسط ضلع

BC است. بنابرین $CF = 5$. همچنین در مثلث

CAB، EF میان خط است، پس $EF = \frac{AB}{2} = 3$ به

این ترتیب، از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه EFC نتیجه می شود

$$FC^2 = EF^2 + EC^2 \Rightarrow 25 = 9 + EC^2 \Rightarrow EC = 4$$

بنابرین، مساحت مثلث CEF برابر است با $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$

۲۳۱۱- گزینه ۱ تساوی $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$ را طرفین - وسطین می کنیم

$$2m = 3n \Rightarrow m = \frac{3n}{2}$$

$$\frac{2m+n}{m-n} = \frac{2(\frac{3n}{2})+n}{\frac{3n}{2}-n} = \frac{4n}{\frac{1}{2}n} = 8 \text{ بنابرین}$$

۲۳۱۲- گزینه ۱ توجه کنید که بنابر فرض تست و ویژگی (ج) تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{a+d}{b+c} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a+d}{b+c} \Rightarrow \frac{b+c}{a+d} = 2$$

۲۳۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x, \quad \frac{x}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow z = \frac{5}{3}x$$

بنابرین

$$2x - 3y + z = -2 \Rightarrow 2x - 3(\frac{4}{3}x) + \frac{5}{3}x = -2 \Rightarrow -\frac{1}{3}x = -2 \Rightarrow x = 6$$

۲۳۱۴- گزینه ۲ توجه کنید که $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ پس $y = \frac{3}{2}x$ از طرف دیگر،

$$\frac{x}{2} = \frac{2x-ky}{7} \Rightarrow 7x = 4x - 2ky \Rightarrow 3x = -2ky$$

$$3x = -2k(\frac{3}{2}x) \Rightarrow k = -1$$

۲۳۱۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{a}{-5} = c \Rightarrow a = -5c, \quad \frac{4}{b} = c \Rightarrow b = \frac{4}{c}$$

بنابرین

$$a+b+c = 0 \Rightarrow -5c + \frac{4}{c} + c = 0 \Rightarrow -4c + \frac{4}{c} = 0 \Rightarrow -4c^2 + 4 = 0 \Rightarrow c^2 = 1$$

۲۳۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{z} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(\frac{z}{4}) = \frac{z}{8}$$

بنابرین

$$x+y+z = 33 \Rightarrow \frac{z}{8} + \frac{z}{4} + z = 33 \Rightarrow \frac{z+2z+8z}{8} = 33$$

$$\frac{11z}{8} = 33 \Rightarrow z = 24$$

۲۳۱۷- گزینه ۴ راه حل اول با توجه به فرض مسئله

$$a = \delta k, \quad b = \gamma k, \quad c = \epsilon k$$

$$\frac{3a+2b+mc}{\delta^3} = \frac{15k+14k+4mk}{\delta^3} = \frac{29k+4mk}{\delta^3} = k \text{ بنابرین}$$

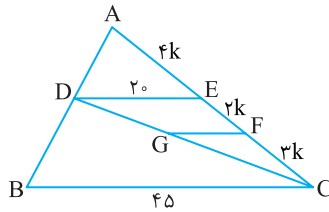
$$29k+4mk = \delta^3 k \Rightarrow 4mk = 24k \Rightarrow m = 6$$

راه حل دوم عددهای ۳، ۲ و m را به ترتیب در صورت و مخرج نسبت های داده

شده ضرب می کنیم: $\frac{3a}{3 \times 5} = \frac{2b}{2 \times 7} = \frac{mc}{m \times 4} = k$ اکنون با توجه به ویژگی (ج)

تناسب،

$$\frac{3a+2b+mc}{15+14+4m} = k \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 29+4m = \delta^3 \Rightarrow m = 6$$



۲۳۲۴- گزینه ۴ راه حل اول چون BEFD متوازی الاضلاع است،

EF=BD=۶ و EF||BC، پس بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{4}{4+EB} = \frac{6}{45}$$

$$32 = 24 + 6EB \Rightarrow EB = \frac{4}{3}$$

۲۳۲۹- گزینه ۲ بنابر قضیه تالس در مثلث CAB،

$$\frac{CF}{FA} = \frac{CD}{DB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FA}{CF} = 3 \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون EF||BC، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{(1)} \frac{4}{EB} = 3 \Rightarrow EB = \frac{4}{3}$$

۲۳۲۵- گزینه ۳ چون EF||BC، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{4}{2} = 2 \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون FK||AD، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث CAD،

$$\frac{CF}{CA} = \frac{FK}{AD} \quad (2)$$

اکنون توجه کنید که اگر تناسب (۱) را ترکیب در صورت کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{AF+FC}{FC} = \frac{3+1}{1} \Rightarrow \frac{AC}{FC} = 4 \Rightarrow \frac{FC}{AC} = \frac{1}{4}$$

بنابراین از تناسب (۲) به دست می‌آید

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{AD} \Rightarrow AD = 12$$

۲۳۲۶- گزینه ۴ چون ED||AC، بنابر قضیه تالس در مثلث BAC،

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BD}{DC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون EF||BD، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABD،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BD} \quad (2)$$

اکنون توجه کنید که اگر تناسب (۱) را ترکیب در صورت کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{BE+EA}{EA} = \frac{4+3}{3} \Rightarrow \frac{AB}{EA} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{3}{7}$$

بنابراین از تناسب (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{3}{7} = \frac{EF}{8} \Rightarrow EF = \frac{24}{7}$$

۲۳۲۷- گزینه ۲ توجه کنید که NM||HC، در نتیجه طبق تعمیم

قضیه تالس در مثلث BHC، $\frac{BM}{BC} = \frac{NM}{HC} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ ، بنابراین

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BM}{BM+MC} = \frac{20}{20+x} = \frac{2}{3}$$

۲۳۲۸- گزینه ۱ فرض کنید $EF=4k$ ، $FC=3k$ ، $AE=4k$ ، در نتیجه

$$EF=2k, \quad FC=3k, \quad AE=4k$$

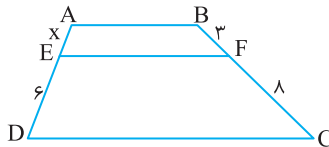
طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{45} = \frac{4k}{9k} \Rightarrow DE=20$$

اکنون طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث CED،

$$\frac{GF}{DE} = \frac{CF}{CE} = \frac{3k}{5k} \Rightarrow \frac{GF}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow GF=12$$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$



۲۳۳۰- گزینه ۴ از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌های EF

و CD را به ترتیب در نقطه‌های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این

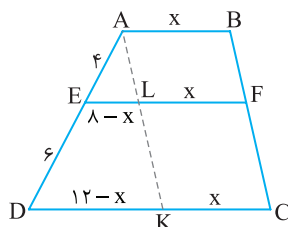
صورت چهارضلعی‌های ABFL و LFCK متوازی الاضلاع هستند، پس

KC=LF=AB=x. اکنون توجه کنید که چون EL||DK، در مثلث

ADK، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{EL}{DK} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{8-x}{12-x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$40-5x=24-2x \Rightarrow 3x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{3}$$



۲۳۳۱- گزینه ۲ بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{10}{BC} \Rightarrow BC=16$$

۲۳۳۲- گزینه ۲ چون EF||CD، بنابر قضیه تالس در مثلث ADC،

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EC} \quad (1)$$

چون DE||BC، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AD}{DB} \quad (3)$$

اگر فرض کنیم $DF=x$ ، تساوی (۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{2}{x} = \frac{2+x}{12} \Rightarrow x^2+2x-24=0$$

$$(x-4)(x+6)=0 \Rightarrow x=4$$

بنابراین $AB=2+4+12=18$

روش دوم چون $ED \parallel AC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث BAC.

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{4}{EA} = \frac{3}{12} \Rightarrow EA = 16$$

بنابراین محیط متوازی الاضلاع AEDF برابر است با

$$2(ED + FD) = 2 \times 20 = 40$$

از نقطه D خطی موازی FE رسم می کنیم تا ضلع AB را

در K قطع کند (شکل زیر را ببینید). طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث BKD.

$$ED \parallel KD \Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{EF}{KD}$$

در نتیجه

$$\frac{BF}{BF + FD} = \frac{6}{KD} \quad (1)$$

توجه کنید که با توجه به فرض سؤال.

$$\frac{BF}{FD} = 3 \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BF}{BF + FD} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می شود $KD = 8$. اکنون طبق تعمیم قضیه

تالس در مثلث ABC.

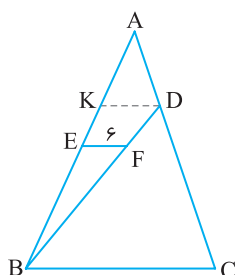
$$KD \parallel BC \Rightarrow \frac{KD}{BC} = \frac{AD}{AC} \quad (3)$$

همچنین طبق فرض سؤال.

$$\frac{DC}{AD} = 5 \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AD + DC}{AD} = \frac{1+5}{1} = 6$$

$$\frac{AC}{AD} = 6 \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{6}$$

بنابراین از تساوی (۳) نتیجه می شود $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{6}$. پس $BC = 48$.

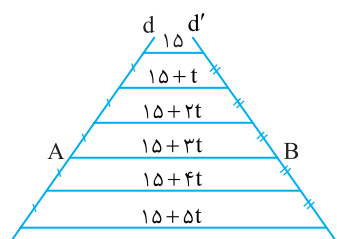


گزینه ۱-۲۳۳۹ چون پاره خط های افقی موازی اند، بنابر قضیه تالس در

دو زنقه، پاره خط هایی که روی خط d' تشکیل شده اند نیز برابر هستند، در

نتیجه از روی شکل زیر معلوم می شود که $15 + 5t = 75$ ، پس $t = 12$.

بنابراین $AB = 15 + 36 = 51$.



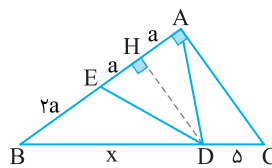
گزینه ۲-۲۳۳۳ مثلث ADE متساوی الساقین است، پس میانه وارد بر

قاعده AE در آن ارتفاع نیز هست (به شکل زیر توجه کنید). از طرف دیگر، اگر

$AH = a$ ، آن گاه $EH = a$ و $BE = EA = 2a$ ، همچنین، چون $HD \parallel AC$ ،

بنابر قضیه تالس،

$$\frac{BH}{HA} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{2a}{a} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 10$$



چون BFED لوزی است، پس

$$DE = EF = BF = DB = x$$

چون $DE \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{9}{9+x} = \frac{x}{x+4} \Rightarrow 9x + 36 = x^2 + 4x \Rightarrow 36 = x^2 \Rightarrow x = 6$$

در نتیجه، بنابر قضیه تالس، $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث DAB،

$$\frac{DK}{DB} = \frac{EK}{AB} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BDC،

$$\frac{BK}{BD} = \frac{KF}{DC} \quad (2)$$

از تناسب (۱) نتیجه می شود

$$\frac{DK}{DB} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{DB - DK}{DB} = \frac{4-3}{4} \Rightarrow \frac{BK}{DB} = \frac{1}{4}$$

بنابراین از تناسب (۲) نتیجه می شود $\frac{1}{4} = \frac{2}{DC}$ ، پس $DC = 8$.

تذکر برای به دست آوردن نسبت $\frac{BK}{DB}$ می توانیم از تناسب (۱) به صورت زیر

استفاده کنیم:

$$\frac{DK}{DB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{DK}{DB} + \frac{BK}{DB} = \frac{3}{4} + \frac{BK}{DB} \Rightarrow 1 = \frac{3}{4} + \frac{BK}{DB} \Rightarrow \frac{BK}{DB} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۴-۲۳۳۶ فرض کنید $EF = x$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث

CAB،

$$\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{CF}{CB} \quad (1)$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BCD،

$$\frac{EF}{DC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{BF}{BC} \quad (2)$$

با جمع کردن تناسب های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{3} = \frac{CF + BF}{BC} \Rightarrow \frac{x + 2x}{6} = 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

گزینه ۲-۲۳۳۷ چون $ED \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{ED}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{ED}{20} = \frac{3}{15} \Rightarrow ED = 4$$

برای به دست آوردن طول ضلع بزرگ متوازی الاضلاع AEDF می توانیم یکی

از دو روش زیر را به کار ببریم:

روش اول چون $FD \parallel AB$ ، پس باز هم بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{FD}{AB} = \frac{CD}{CB} \xrightarrow{AE=FD} \frac{FD}{FD+4} = \frac{12}{15}$$

$$15FD = 12FD + 48 \Rightarrow 3FD = 48 \Rightarrow FD = 16$$

۲۳۴۴- گزینه ۳ راه‌حل اول فرض کنید $AE=s$ و $AF=t$ ، (شکل

زیر را ببینید). چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{s}{s+x} = \frac{t}{t+y} = \frac{2}{5}$$

بنابراین

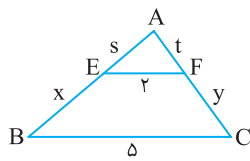
$$\frac{s}{s+x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5s = 2s + 2x \Rightarrow 3s = 2x$$

$$\frac{t}{t+y} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5t = 2t + 2y \Rightarrow 3t = 2y$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم:

$$3(s+t) = 2(x+y) \xrightarrow{x+y=9} s+t=6$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $s+t+2=8$.



راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن $s+t$ ، تناسب $\frac{s}{s+x} = \frac{t}{t+y} = \frac{2}{5}$ را تفصیل

در مخرج می‌کنیم

$$\frac{s}{s+x-s} = \frac{t}{t+y-t} = \frac{2}{5-2} \Rightarrow \frac{s}{x} = \frac{t}{y} = \frac{2}{3}$$

اکنون از خاصیت‌های تناسب (خاصیت ج) استفاده می‌کنیم

$$\frac{s}{x} = \frac{t}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{s+t}{x+y} = \frac{2}{3} \xrightarrow{x+y=9} \frac{s+t}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow s+t=6$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $s+t+2=8$.

راه‌حل سوم چون $EF \parallel BC$ ، پس مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند. در

نتیجه نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست. در نتیجه، با نمادگذاری شکل راه‌حل اول،

$$\frac{s+t+2}{s+x+5+t+y} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{s+t+2}{s+t+9+5} = \frac{2}{5} \Rightarrow s+t=6$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $s+t+2=8$.

۲۳۴۵- گزینه ۱ راه‌حل اول چون $EF \parallel BD$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس

در مثلث ABD،

$$\frac{AF}{AD} = \frac{EF}{BD} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون $FK \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث DAC،

$$\frac{FK}{AC} = \frac{DF}{DA} \xrightarrow{\text{تفصیل در صورت}} \frac{12-x}{12} = \frac{DA-DF}{DA} = \frac{AF}{DA} \xrightarrow{(1)} \frac{12-x}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(12-x) = 3 \times 12 \Rightarrow x=3$$

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن x ، از تناسب (۱) به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AF}{AD} + \frac{FD}{AD} = \frac{3}{4} + \frac{FD}{AD} \Rightarrow 1 = \frac{3}{4} + \frac{FD}{AD} \Rightarrow \frac{FD}{AD} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر چون $FK \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث DAC،

$$\frac{FK}{AC} = \frac{DF}{DA} \xrightarrow{(1)} \frac{x}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow x=3$$

۲۳۴۰- گزینه ۱ از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های EF و

CD را به‌ترتیب در L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت چون ABFL و LFCK متوازی‌الاضلاع هستند، پس $KC=LF=AB=5$ ، اکنون

توجه کنید که چون $EL \parallel DK$ ، در مثلث ADK، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EL}{DK} \quad (1)$$

از طرف دیگر طبق فرض سؤال، $\frac{AE}{DE} = \frac{1}{2}$ و اگر این تناسب را ترکیب در مخرج

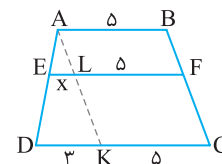
کنیم به‌دست می‌آید

$$\frac{AE}{DE+AE} = \frac{1}{2+1} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$$

بنابراین از تناسب (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow x=1$$

بنابراین $EF=1+5=6$.

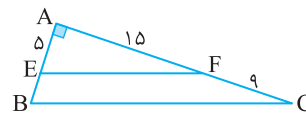


۲۳۴۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{5}{EB} = \frac{15}{9} \Rightarrow EB = \frac{5 \times 9}{15} = 3$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

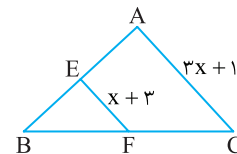
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 24^2 = 8^2(1+3^2) = 8^2 \times 10 \Rightarrow BC = 8\sqrt{10}$$



۲۳۴۲- گزینه ۳ پاره‌خط EF میان‌خط است، پس طول آن برابر با نصف

طول AC است. بنابراین $x+3 = \frac{1}{2}(3x+1) \Rightarrow x=5$

بنابراین $EF=5+3=8$.



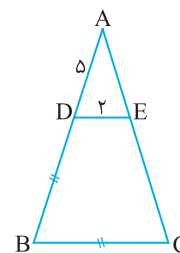
۲۳۴۳- گزینه ۳ چون $DE \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس، $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

از طرف دیگر، $BC=DB$ ، در نتیجه

$$\frac{5}{5+DB} = \frac{2}{DB} \Rightarrow 5DB = 2DB + 10 \Rightarrow 3DB = 10 \Rightarrow DB = \frac{10}{3}$$

بنابراین $DB = \frac{10}{3}$. اکنون بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{5}{\frac{10}{3}} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$$



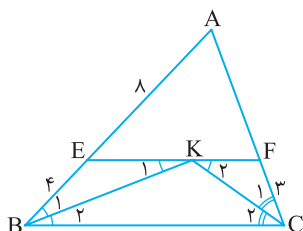
۲۳۴۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، از قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{K}_1 = \hat{B}_1$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر، $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ پس $\hat{K}_1 = \hat{B}_1$ ، و در نتیجه مثلث BEK متساوی الساقین است، پس $EK = EB = 4$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که $KF = FC = 3$ ، به این ترتیب $EF = 4 + 3 = 7$. اکنون توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC ،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{8}{8+4} = \frac{7}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{7}{BC} \Rightarrow 2BC = 21 \Rightarrow BC = \frac{21}{2}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC ،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{AF}{3} \Rightarrow AF = 6$$

بنابراین محیط مثلث ABC برابر است با $8 + 4 + \frac{21}{2} + 3 + 6 = 31\frac{1}{2}$.

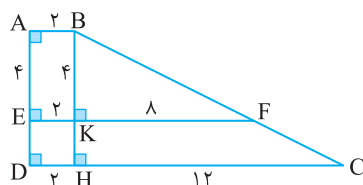


۲۳۵۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $AB \parallel EF \parallel DC$. از نقطه B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا پاره‌های EF و CD را به ترتیب در K و H قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BHC ،

$$KF \parallel CH \Rightarrow \frac{BK}{BH} = \frac{KF}{HC} \Rightarrow \frac{4}{KH+4} = \frac{8}{12} \Rightarrow KH = 2$$

بنابراین $BH = 4 + 2 = 6$. در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BHC ،

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = 6^2 + 12^2 = 6^2 \times 5 \Rightarrow BC = 6\sqrt{5}$$



۲۳۵۱- گزینه ۲ زاویه‌های ACB و ECD متقابل به رأس هستند، پس برابرند. بنابراین مثلث‌های ACB و ECD متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 12$$

۲۳۵۲- گزینه ۳ توجه کنید که در مثلث‌های ABD و CBA زاویه B مشترک است و $\hat{BAD} = \hat{ACB}$. بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند (ز.ز). در

نتیجه $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ، بنابراین $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{BC}$ ، در نتیجه $BC = 9\sqrt{2}$. پس

$$DC = 9\sqrt{2} - \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

۲۳۵۳- گزینه ۲ توجه کنید که $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{BD}{3} = \frac{11}{5} \Rightarrow BD = \frac{33}{5}$$

۲۳۴۶- گزینه ۲ از تعمیم قضیه تالس در مثلث‌های ABC و BAD استفاده می‌کنیم:

$$FH \parallel BC \Rightarrow \frac{FH}{BC} = \frac{AF}{AB}$$

$$FE \parallel AD \Rightarrow \frac{FE}{AD} = \frac{BF}{AB}$$

با جمع کردن دو تساوی بالا معلوم می‌شود که

$$\frac{FH}{BC} + \frac{FE}{AD} = \frac{AF+BF}{AB} = 1$$

$$\frac{6}{BC} + \frac{2}{5} = 1$$

$$\frac{6}{BC} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow BC = 10$$

۲۳۴۷- گزینه ۳ چون در لوزی همه ضلع‌ها برابرند، پس

$$AD = AB = BC = CD = 6$$

از طرف دیگر، چون $FC \parallel AD$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث EAD ،

$$\frac{FC}{AD} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow \frac{FC}{6} = \frac{6}{12}$$

پس $FC = 3$. بنابراین $BF = 6 - 3 = 3$. اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AFB ،

$$AB^2 = AF^2 + FB^2$$

$$36 = AF^2 + 9$$

$$AF = 3\sqrt{3}$$

به این ترتیب، مساحت مثلث ABF برابر است با

$$\frac{1}{2} AF \times BF = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

تذکر برای به دست آوردن FC ، چون AD موازی است و C وسط DE است، بنابر قضیه تالس نتیجه می‌گیریم F نیز وسط AE است. در نتیجه FC مثلث EAD میان خط است پس می‌توان FC را به صورت زیر به دست آورد:

$$FC = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

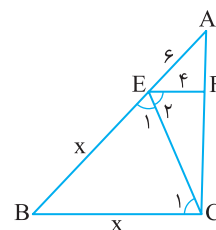
۲۳۴۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، از قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{E}_2 = \hat{C}_1$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر،

$\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ پس $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$. بنابراین مثلث EBC متساوی الساقین است و در نتیجه $EB = BC = x$. اکنون توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، از تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{6}{6+x} = \frac{4}{x}$$

$$6x = 24 + 4x \Rightarrow x = 12$$

در نتیجه، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC ، $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.



۲۳۵۷- گزینه ۱ توجه کنید که $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{2}$ همچنین $\hat{A} = \hat{A}$.

بنابراین $\triangle ABC \sim \triangle AED$ (ض.ض). در نتیجه $\frac{BC}{DE} = \frac{1}{2}$.

۲۳۵۸- گزینه ۴ توجه کنید که $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ و $\hat{A} = \hat{A}$. در نتیجه،

دو مثلث ADE و ACB به حالت (ض.ض) متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{DE}{BC} = \frac{6}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 12$$

۲۳۵۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BEF ،

$$BF^2 = BE^2 + EF^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BF = 5$$

از طرف دیگر مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و FBE که یک زاویه حاده مشترک دارند، متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{(ABC)_{\text{محیط}}}{(FBE)_{\text{محیط}}} = \frac{AB}{FB} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\frac{(ABC)_{\text{محیط}}}{12} = 2 \Rightarrow (ABC)_{\text{محیط}} = 24$$

۲۳۶۰- گزینه ۴ چون $EF \parallel BC$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{(AEF)_{\text{مساحت}}}{(ABC)_{\text{مساحت}}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

اگر این تناسب را تقضیل در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{(AEF)_{\text{مساحت}}}{(ABC)_{\text{مساحت}} - (AEF)_{\text{مساحت}}} = \frac{(AEF)_{\text{مساحت}}}{(BEFC)_{\text{مساحت}}} = \frac{4}{25-4} = \frac{4}{21}$$

۲۳۶۱- گزینه ۲ راه حل اول با توجه به شکل معلوم می‌شود

$$\triangle ADB \sim \triangle ABC \text{ (ز.ز)}$$

بنابراین

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{4}{AB} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = 9$$

در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC ،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 9^2 = 6^2 + BC^2 \Rightarrow BC = 3\sqrt{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = 9\sqrt{5} \text{ بنابراین}$$

راه حل دوم بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ADB ،

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow 6^2 = 4^2 + DB^2 \Rightarrow DB = 2\sqrt{5}$$

در نتیجه $S_{ADB} = \frac{1}{2} AD \times DB = 4\sqrt{5}$. اکنون توجه کنید که مثلث‌های

ADB و ABC متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADB}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{4\sqrt{5}} = \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow S_{ABC} = 9\sqrt{5}$$

۲۳۶۲- گزینه ۲ فرض کنید $DC = x$. مثلث‌های ABD و CBA به

حالت (ز.ز) متشابه‌اند ($\hat{A}_1 = \hat{C}$ و زاویه B مشترک). بنابراین

$$\frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{6}{4+x} \Rightarrow 16 = 4+x \Rightarrow x = 12$$

۲۳۵۴- گزینه ۳ راه حل اول چون $EF \parallel BC$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و مورب $\hat{F}_1 = \hat{C}$ (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه

AHF و FKC که یک زاویه حاده برابر دارند، متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

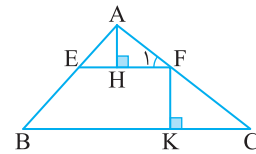
$$\frac{AF}{FC} = \frac{AH}{FK} = \frac{2}{3}$$

اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{AF}{AF+FC} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{2}{5}$$

بنابراین از تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{6}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 15$$



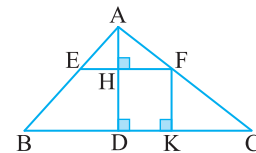
راه حل دوم از نقطه H عمود HD را بر ضلع BC رسم می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). واضح است که $FK = HD$. از طرف دیگر چون $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه هستند و AH و AD به ترتیب ارتفاع‌های آن‌ها هستند. از طرف دیگر

$$\frac{AH}{HD} = \frac{AH}{FK} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AH}{AH+HD} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{2}{5}$$

بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث AEF و ABC است، پس

نسبت تشابه این دو مثلث نیز $\frac{2}{5}$ است، در نتیجه

$$\frac{EF}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{6}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 15$$



۲۳۵۵- گزینه ۴ چون $AB \parallel DE$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

مورب $\hat{B} = \hat{D}$ و $\hat{A} = \hat{E}$. بنابراین مثلث‌های ABC و EDC به حالت (ز.ز) متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{9}{ED} = \frac{6}{10} \Rightarrow ED = 15$$

همین‌طور $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. اگر این تناسب را ترکیب در صورت کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{BC+DC}{DC} = \frac{3+5}{5} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{32}{DC} = \frac{8}{5} \Rightarrow DC = 20$$

بنابراین محیط مثلث CDE برابر است با $20+10+15=45$.

۲۳۵۶- گزینه ۳ توجه کنید $\hat{AEB} = \hat{CED}$ (زاویه‌های متقابل به

رأس). همچنین $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{1}{2}$. بنابراین دو مثلث AEB و CED به حالت

(ض.ض) متشابه هستند. در نتیجه $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$ پس $x = CD = 20$.

۲۳۶۸- گزینه ۱ چون $AB \parallel CD$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{3}{4} \text{ همچنین } \hat{BAC} = \hat{ACD} \text{ بنابرین}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle CAD \text{ (ض.ض.)}$$

در نتیجه

$$\frac{BC}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow BC = \frac{3}{4} AD = \frac{3}{4} (24) = 18$$

۲۳۶۹- گزینه ۴ مثلث‌های ABC و DAC به حالت (ز.ز) متشابه‌اند،

زیرا $\hat{B} = \hat{A}_1$ و زاویه C در آن‌ها مشترک است. بنابرین

$$\frac{(ABC) \text{ محیط}}{(DAC) \text{ محیط}} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{(ABC) \text{ محیط}}{15} = \frac{6}{5} \Rightarrow (ABC) \text{ محیط} = 18$$

۲۳۷۰- گزینه ۴ مثلث‌های ABC و DBE قائم‌الزاویه‌اند و زاویه B در

آن‌ها مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز.ز). بنابرین

$$\frac{(ABC) \text{ مساحت}}{(DBE) \text{ مساحت}} = \left(\frac{AB}{DB}\right)^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} \text{مساحت } (ABC) &= \text{مساحت } (DBE) + \text{مساحت } (ACDE) \\ &= 2(\text{مساحت } (DBE)) \end{aligned}$$

در نتیجه، تناسب (۱) می‌شود

$$2 = \left(\frac{AB}{x}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{64}{x^2} \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$$

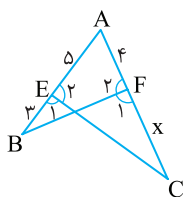
۲۳۷۱- گزینه ۴ فرض کنید $CF = x$ ، چون $\hat{E}_1 = \hat{F}_1$ ، پس زاویه‌های

E_F و F_P نیز که مکمل این دو زاویه برابر هستند، برابرند (شکل زیر را

ببینید). بنابرین مثلث‌های ABF و ACE به حالت (ز.ز) متشابه‌اند

($\hat{F}_P = \hat{E}_P$ و زاویه A مشترک). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{8}{4+x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 40 = 16 + 4x \Rightarrow x = 6$$

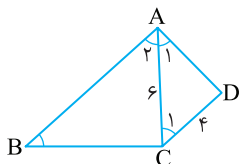


۲۳۷۲- گزینه ۲ چون $AB \parallel CD$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

مورب $\hat{A}_P = \hat{C}_1$ (شکل زیر را ببینید). بنابرین مثلث‌های ABC و CAD به

حالت (ز.ز) متشابه‌اند ($\hat{B} = \hat{A}_1$ و $\hat{A}_P = \hat{C}_1$). در نتیجه

$$\frac{AB}{CA} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{6} = \frac{6}{4} \Rightarrow AB = 9$$



۲۳۶۳- گزینه ۲ مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و EFC که یک زاویه حاده

مشترک دارند، متشابه‌اند (ز.ز). بنابرین

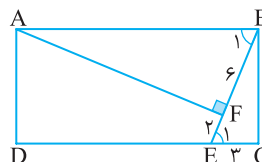
$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{EF} \Rightarrow \frac{AC}{6} = \frac{10}{4} \Rightarrow AC = 15$$

۲۳۶۴- گزینه ۲ چون $AB \parallel CD$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

مورب $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (شکل زیر را ببینید). بنابرین مثلث‌های قائم‌الزاویه AFB و

BCE که یک زاویه حاده برابر دارند، متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BF}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{8} = \frac{6}{3} \Rightarrow AB = 16$$



۲۳۶۵- گزینه ۲ در مثلث AEF ، $\hat{A} + \hat{E}_1 = 90^\circ$ و در مثلث DCE ،

$\hat{D} + \hat{E}_P = 90^\circ$ از طرف دیگر $\hat{E}_1 = \hat{E}_P$ ، پس $\hat{A} = \hat{D}$. در نتیجه مثلث‌های

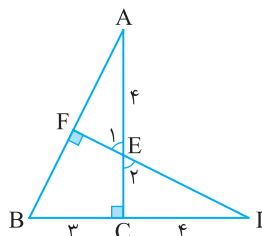
قائم‌الزاویه ABC و DEC متشابه‌اند (ز.ز). بنابرین

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{4+EC}{4}$$

$$12 = 4EC + EC^2$$

$$EC^2 + 4EC - 12 = 0$$

$$(EC-2)(EC+6) = 0 \Rightarrow EC = 2$$



۲۳۶۶- گزینه ۴ چون $DE \parallel AB$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه

مثلث‌های DEF و BAF متشابه‌اند. بنابرین

$$\frac{DE}{BA} = \frac{DF}{BF} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{2}{9} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون $DC \parallel AB$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های

BAK و DCK متشابه‌اند. بنابرین

$$\frac{DC}{BA} = \frac{DK}{BK} \Rightarrow \frac{x+y}{4} = \frac{6}{5} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{\frac{x}{4}}{\frac{x+y}{4}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{5}} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{5}{27}$$

۲۳۶۷- گزینه ۳ توجه کنید که $\hat{AEB} = \hat{CED}$ (زاویه‌های متقابل به

رأس). همچنین $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{1}{3}$. بنابرین دو مثلث AEB و CED به حالت

(ض.ض) متشابه هستند. در نتیجه

$$\frac{AB}{CD} = \frac{10}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 30$$

۲۳۷۹- گزینه ۳ توجه کنید که بنابر قضیه اساسی تشابه،

$$\triangle AEF \sim \triangle AMN \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \left(\frac{AE}{AM}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AEF} + 33} = \frac{25}{36} \Rightarrow S_{AEF} = 75$$

همچنین بنابر قضیه اساسی تشابه،

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$$

$$\frac{75}{S_{ABC}} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = 192$$

۲۳۸۰- گزینه ۲ بنابر قضیه اساسی تشابه چون مثلث‌های AEF و

AMN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \left(\frac{AF}{AN}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

اگر این تناسب را تفصیل در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN} - S_{AEF}} = \frac{9}{64 - 9} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{EFNM}} = \frac{9}{55} \quad (1)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AF}{AC}\right)^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{S_{EFNM}}{S_{ABC}} = \frac{55}{100} = 0.55$$

۲۳۸۱- گزینه ۱ چون $AB \parallel CD$ ، پس بنابر قضیه خطوط موازی و

مورب $\hat{B} = \hat{C}$ و $\hat{A} = \hat{D}$ ، بنابراین مثلث‌های ABE و DCE متشابه‌اند

(ز.ز). در نتیجه

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{BE}{CE}$$

اگر این تناسب را ترکیب در صورت کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{5+2}{2} = \frac{BE+CE}{CE} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{28}{CE} \Rightarrow CE = 8$$

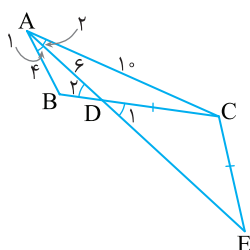
۲۳۸۲- گزینه ۳ چون $CD = CE$ ، پس مثلث CDE متساوی‌الساقین

است و در نتیجه $\hat{D}_1 = \hat{E}$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$

(متقابل به رأس)، پس $\hat{D}_2 = \hat{E}$ ، بنابراین مثلث‌های ABD و ACE به حالت

(ز.ز) متشابه‌اند ($\hat{D}_2 = \hat{E}$ و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$). در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{6}{6+DE} \Rightarrow DE = 9$$



۲۳۷۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث

قائم‌الزاویه CDE،

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 \Rightarrow 5^2 = CE^2 + 3^2 \Rightarrow CE = 4$$

مثلث‌های قائم‌الزاویه ABE و DCE که یک زاویه حاده برابر دارند (زاویه E)، متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{BE}{4} \Rightarrow BE = 8$$

بنابراین $BC = 8 + 4 = 12$. اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 12^2 = 6^2(1+2^2) = 6^2 \times 5 \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}$$

۲۳۷۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $BE = 10 - 6 = 4$. از طرف دیگر،

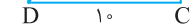
$\hat{E}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ$ و $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ$ ، پس $\hat{D}_1 = \hat{E}_2$ (شکل زیر را ببینید).

بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه ADE و BEF که یک زاویه حاده برابر دارند،

متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{AE}{BF} = \frac{AD}{BE} \Rightarrow \frac{6}{BF} = \frac{8}{4} \Rightarrow BF = 3$$

در نتیجه $FC = 8 - 3 = 5$.



۲۳۷۵- گزینه ۲ توجه کنید که $\frac{BC}{CD} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

بنابراین مثلث‌های ABC و ACD متشابه‌اند (ض.ض).

در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 12$$

۲۳۷۶- گزینه ۳ در دو مثلث ABC و EDC، $\frac{AC}{EC} = \frac{12}{3} = 4$ ،

چون زاویه C هم در این دو مثلث مشترک است، پس این دو

مثلث متشابه‌اند (ض.ض)، بنابراین

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{12}{3} = \frac{AB}{6} \Rightarrow AB = 24$$

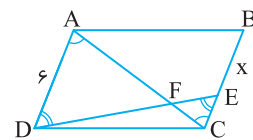
۲۳۷۷- گزینه ۳ چون $AD \parallel BC$ ، پس مثلث‌های ADF و CEF

متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CE} \Rightarrow \frac{3}{CF} = \frac{6}{CE} \Rightarrow 3 = \frac{6}{CE} \Rightarrow CE = 2$$

از طرف دیگر، چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس

$$AD = BC \Rightarrow 6 = x + 2 \Rightarrow x = 4$$



۲۳۷۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون

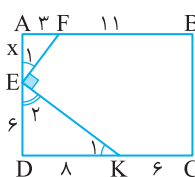
$DC = AB = 14$ ، پس $AF = 3$. از طرف

دیگر، چون $\hat{K}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ$ و $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ$ ، پس $\hat{K}_1 = \hat{E}_1$

بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه

AEF و DKE متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

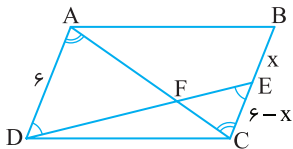
$$\frac{AE}{DK} = \frac{AF}{DE} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{3}{6} \Rightarrow x = 4$$



۲۳۸۷- گزینه ۲ چون در متوازی الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس $AD = x + 6 - x = 6$ از طرف دیگر چون $AD \parallel BC$ ، پس مثلث‌های ADF و CEF متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CE} \xrightarrow{\frac{AF}{CF}=2} 2 = \frac{6}{CE} \Rightarrow CE = 3$$

در نتیجه $6 - x = 3$ پس $x = 3$.



۲۳۸۸- گزینه ۱ توجه کنید که $\frac{EC}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{DC}{CB} = \frac{1}{2}$ بنابراین

مثلث‌های EDC و ACB متشابه‌اند (ض.ض.ض). در نتیجه

$$\hat{ABC} = \hat{DCE} = 35^\circ$$

به این ترتیب، $\hat{BAC} = 180^\circ - (65^\circ + 35^\circ) = 80^\circ$.

۲۳۸۹- گزینه ۱ توجه کنید که بنابر قضیه اساسی تشابه،

$$\triangle AMF \sim \triangle ANC \Rightarrow \frac{S_{AMF}}{S_{ANC}} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$$

$$\triangle AEM \sim \triangle ABN \Rightarrow \frac{S_{AEM}}{S_{ABN}} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$$

بنابراین

$$\frac{S_{AMF}}{S_{ANC}} = \frac{S_{AEM}}{S_{ABN}} \Rightarrow \frac{18}{18+22} = \frac{S_{AEM}}{S_{AEM}+48} \Rightarrow S_{AEM} = 27$$

۲۳۹۰- گزینه ۴ مثلث‌های ABC و DBE قائم‌الزاویه‌اند و زاویه B در آن‌ها مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}(ABC)}{\text{مساحت}(DBE)} = \left(\frac{AB}{DB}\right)^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$\text{مساحت}(ABC) = \text{مساحت}(DBE) + \text{مساحت}(ACDE)$$

$$\text{مساحت}(DBE) = \frac{5}{2} \text{مساحت}(DBE) + \frac{3}{2} \text{مساحت}(DBE)$$

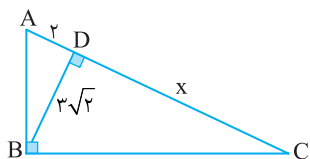
در نتیجه، تناسب (۱) می‌شود $\frac{5}{2} = \left(\frac{AB}{DB}\right)^2$ پس $AB = 5\sqrt{10}$.

۲۳۹۱- گزینه ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^2 = CH \times CB = 6 \times 9 \Rightarrow AC = 3\sqrt{6}$$

۲۳۹۲- گزینه ۴ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$BD^2 = AD \times DC \Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = 2x \Rightarrow x = 9$$



۲۳۹۳- گزینه ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 12 = x(2x+2) \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

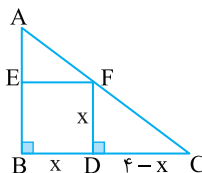
پس $BC = 2x + 2 = 6$.

۲۳۸۳- گزینه ۳ فرض کنید طول ضلع مربع BEFD برابر x باشد.

مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و FDC که یک زاویه حاده برابر دارند (زاویه C)، متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{4}{4-x} \Rightarrow 3(4-x) = 4x \Rightarrow x = \frac{12}{7}$$

بنابراین محیط مربع BEFD برابر است با $4x = \frac{48}{7}$.



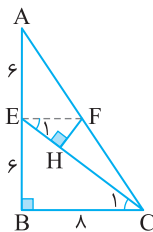
۲۳۸۴- گزینه ۳ چون نقطه‌های E و F به ترتیب وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC هستند، در نتیجه EF در مثلث ABC میان‌خط است،

پس $EF = \frac{BC}{2} = 4$. همچنین می‌توان نتیجه گرفت $EF \parallel BC$ موازی است.

بنابراین طبق قضیه خطوط موازی و مورب $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$. اکنون توجه کنید که

مثلث‌های قائم‌الزاویه EFH و CEB متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{EF}{CE} = \frac{FH}{EB} \xrightarrow{CE=10 \text{ (فیناغورس)}} \frac{4}{10} = \frac{FH}{6} \Rightarrow FH = \frac{2}{5}$$



۲۳۸۵- گزینه ۱ بنابر قضیه تالس در مثلث DEC .

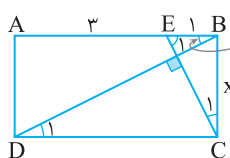
$$FG \parallel EC \Rightarrow \frac{DF}{FE} = \frac{DG}{GC} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{DG}{9} \Rightarrow DG = 6$$

بنابر قضیه اساسی تشابه $\triangle AEB \sim \triangle DEC$ ، پس

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{3}{EC} \Rightarrow EC = 7.5$$

در نتیجه با استفاده از تعمیم قضیه تالس در مثلث DEC .

$$\frac{GF}{EC} = \frac{DG}{DC} \Rightarrow \frac{GF}{7.5} = \frac{6}{15} \Rightarrow GF = 3$$



۲۳۸۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

چون $AD \parallel BC$ ، بنابر قضیه خطوط

موازی و مورب، $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (شکل روبه‌رو را

ببینید). از طرف دیگر،

$$\begin{cases} \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه BEC و CBD که یک

زاویه حاده برابر دارند، متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

۲۳۹۹- گزینه ۳ راه حل اول بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه

AHC

$$HC^2 = CK \times CA \Rightarrow y^2 = 7 \times 10 = 70 \Rightarrow y = \sqrt{70}$$

همین‌طور در مثلث قائم الزاویه ABC

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow 100 = \sqrt{70} \times (x + \sqrt{70})$$

$$100 = \sqrt{70}x + 70 \Rightarrow \sqrt{70}x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{70}}$$

بنابراین $xy = 30$

۲۴۰۰- گزینه ۱ راه حل دوم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه ABC

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow AH^2 = xy \quad (1)$$

برای به دست آوردن AH، از رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه HAC استفاده می‌کنیم

$$AH^2 = AK \times AC \Rightarrow AH^2 = 3 \times 10 = 30$$

در نتیجه با استفاده از تساوی (۱)، $xy = 30$

۲۴۰۰- گزینه ۱ در مثلث قائم الزاویه FDC، بنابر رابطه‌های طولی،

$$FC^2 = EC \times DC \xrightarrow{DC=2EC} FC^2 = 2EC^2$$

همچنین در مثلث قائم الزاویه ABC، $AD^2 = BD \times DC$ ، یعنی

$$EC = \frac{DC}{2} = 4 \text{ در نتیجه } DC = 8 \text{ بنابرین } 16 = 2 \times DC$$

$$FC^2 = 2EC^2 = 2 \times 4^2 \Rightarrow FC = 4\sqrt{2}$$

۲۴۰۱- گزینه ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$CD^2 = BD \times AD \Rightarrow x^2 = 16 \times 9 = 144 \Rightarrow x = 12$$

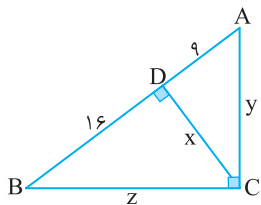
همچنین

$$y^2 = AD \times AB = 9 \times 25 \Rightarrow y = 15$$

و

$$z^2 = BD \times AB = 16 \times 25 \Rightarrow z = 20$$

در نتیجه $x + y + z = 47$



۲۴۰۲- گزینه ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$BH^2 = AH \times CH \Rightarrow (x+4)^2 = 9(x+2)$$

$$x^2 + 8x + 16 = 9x + 18 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$$

به این ترتیب اگر $x = 2$ ، آن‌گاه

$$(ABC) \text{ مساحت} = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} (6) (13) = 39$$

$$\text{و اگر } x = -1 \text{، آن‌گاه } (ABC) \text{ مساحت} = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} (3) (10) = 15$$

بنابراین مساحت مثلث ABC می‌تواند برابر ۱۵ یا ۳۹ باشد.

۲۴۰۳- گزینه ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه BCD،

$$CH^2 = HB \times HD = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$$

بنابراین $CH = 2$ در نتیجه

$$(BCD) \text{ مساحت} = \frac{1}{2} CH \times BD = \frac{1}{2} (2) (\sqrt{2} + \sqrt{8}) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

به این ترتیب $(ABCD) \text{ مساحت} = 2 \times (BCD) \text{ مساحت} = 6\sqrt{2}$

۲۳۹۴- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $CE = x$. از E پاره خط EF را عمود بر

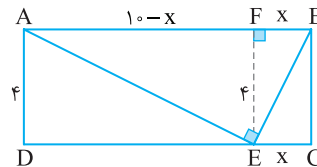
AB رسم می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). در این صورت $FA = 10 - x$ ، $FB = x$

و $EF = 4$. بنابراین در مثلث قائم الزاویه AEB، بنابر رابطه‌های طولی،

$$EF^2 = FB \times FA \Rightarrow 4^2 = x(10 - x) \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x - 2)(x - 8) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 8$$

چون $CE < DE$ ، پس $CE = x = 2$.



۲۳۹۵- گزینه ۲ راه حل اول در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر

مثلث را به دو مثلث کوچک متشابه تقسیم می‌کند. بنابراین مثلث‌های AHB

و CHA متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{2BH}{AC} = \frac{BH}{2\sqrt{3}} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

به این ترتیب، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AHC

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 4^2 \times 3 = 2^2 \times 3 + HC^2$$

$$HC^2 = 4^2 \times 3 - 2^2 \times 3 = 36 \Rightarrow HC = 6$$

۲۴۰۰- گزینه ۲ راه حل دوم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 4BH^2 = BH \times BC \Rightarrow 4BH = BC$$

$$4BH - BH = BC - BH \Rightarrow 3BH = CH$$

از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

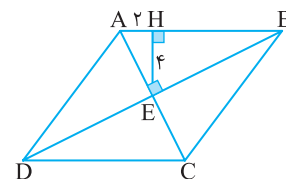
$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow 12 = \frac{CH}{3} \times CH \Rightarrow CH^2 = 36 \Rightarrow CH = 6$$

۲۳۹۶- گزینه ۲ در لوزی قطرهای بر هم عمودند، بنابراین مثلث AEB

قائم الزاویه است. در این مثلث قائم الزاویه از رابطه‌های طولی نتیجه می‌شود

$$EH^2 = AH \times HB \Rightarrow 16 = 2 \times HB \Rightarrow HB = 8$$

بنابراین $AB = 2 + 8 = 10$



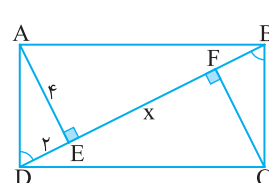
۲۳۹۷- گزینه ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه ABC،

$$AH^2 = HB \times HC \Rightarrow 16 = HB \times 8 \Rightarrow HB = 2$$

همین‌طور در مثلث قائم الزاویه BDC

$$DH'^2 = H'B \times H'C = 4 \times 6 \Rightarrow DH' = 2\sqrt{6}$$

۲۳۹۸- گزینه ۳ چون $AD \parallel BC$ ، پس $\angle CBF = \angle ADE$ ، بنابراین



مثلث‌های قائم الزاویه AED و CFB

همنهشت‌اند (به حالت وتر و یک زاویه

حاده). بنابراین $BF = DE = 2$

اکنون در مثلث قائم الزاویه ABD،

بنابر رابطه‌های طولی،

$$AE^2 = DE \times EB \Rightarrow 16 = 2 \times (x + 2) \Rightarrow x = 6$$

۲۴۰۹- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $BH=a$ و $HE=b$ ، در این صورت

$$a+b=BE=2EC \Rightarrow EC=\frac{a+b}{2}$$

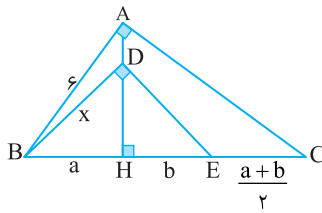
بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC ،

$$AB^2=BH \times BC \Rightarrow 36=a(a+b+\frac{a+b}{2})=\frac{3}{2}a(a+b)$$

$$a(a+b)=24$$

همین‌طور، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه BDE ،

$$BD^2=BH \times BE \Rightarrow x^2=a(a+b)=24 \Rightarrow x=2\sqrt{6}$$



۲۴۱۰- گزینه ۳ در مثلث قائم‌الزاویه ADC ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AC^2=AD^2+DC^2=4+16=20 \Rightarrow AC=2\sqrt{5}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ADC ، بنابر رابطه‌های طولی

$$DE \times AC=AD \times DC \Rightarrow DE \times 2\sqrt{5}=2 \times 4 \Rightarrow DE=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

۲۴۱۱- گزینه ۱ چون پاره‌خط EF وسط ضلع‌های BA و BC را به هم

وصل کرده است، میان‌خط مثلث BAC است، پس طول آن برابر با نصف

طول ضلع سوم است. بنابراین

$$x+4=\frac{1}{2}(4x+6) \Rightarrow x+4=2x+3 \Rightarrow x=1$$

بنابراین $EF=1+4=5$.

۲۴۱۲- گزینه ۲ فرض کنید $EF=x$ ، چون $DE \parallel AF$ ، بنابر قضیه

تالس در مثلث BAF ،

$$\frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EF} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون $FD \parallel AC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث BAC ،

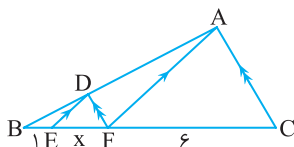
$$\frac{BD}{DA}=\frac{BF}{FC} \quad (2)$$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{BE}{EF}=\frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1+x}{6}$$

بنابراین $x(1+x)=6$ ، یعنی $x^2+x-6=0$. این معادله دو جواب دارد:

$x=-3$ و $x=2$ ، که چون $x>0$ ، پس $x=2$.



۲۴۰۴- گزینه ۳ در مثلث قائم‌الزاویه BDE ، بنابر رابطه‌های طولی،

$$DH^2=HB \times HE=9 \times 4=36$$

پس $DH=6$. بنابراین $AH=12+6=18$. از طرف دیگر، در مثلث

قائم‌الزاویه BAC ، بنابر رابطه‌های طولی،

$$AH^2=HB \times HC \Rightarrow 18^2=9(4+x) \Rightarrow x=32$$

۲۴۰۵- گزینه ۲ بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC ،

$$AC^2=AB^2+BC^2=27+9=36$$

بنابراین $AC=6$. از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC ،

$$BH \times AC=AB \times BC \Rightarrow x \times 6=3\sqrt{3} \times 3 \Rightarrow x=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۲۴۰۶- گزینه ۴ راه‌حل اول بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ACD ،

$$AD^2=AC^2+CD^2 \Rightarrow 100=64+CD^2 \Rightarrow CD=6$$

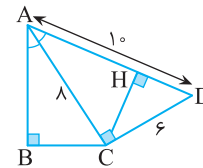
ارتفاع CH را در مثلث CAD رسم می‌کنیم. توجه کنید که چون نقطه C روی

نیمساز زاویه A است، پس $CB=CH$. از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در

مثلث قائم‌الزاویه ACD ،

$$AC \times CD=CH \times AD \Rightarrow 6 \times 6=CH \times 10 \Rightarrow CH=4/8$$

بنابراین $CB=CH=4/8$.



راه‌حل دوم چون $\hat{CAB}=\hat{DAC}$ ، دو مثلث قائم‌الزاویه CAB و DAC

متشابه هستند (ز.ز). بنابراین

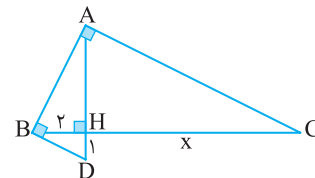
$$\frac{CD}{BC}=\frac{AD}{AC} \xrightarrow{CD=6} \frac{6}{BC}=\frac{10}{8} \Rightarrow BC=4/8$$

۲۴۰۷- گزینه ۳ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD ،

$$BH^2=AH \times HD \Rightarrow 4=AH \times 1 \Rightarrow AH=4$$

همین‌طور، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC ،

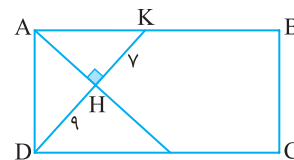
$$AH^2=BH \times HC \Rightarrow 16=2 \times x \Rightarrow x=8$$

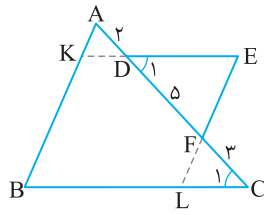


۲۴۰۸- گزینه ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه DAK ،

$$AD^2=DH \times DK=9 \times 16=144$$

بنابراین $AD=12$.



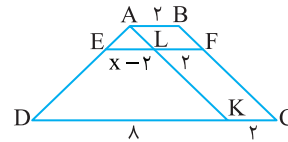


۲۴۱۳- گزینه ۲ از نقطه A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های

DC و EF را به ترتیب در نقطه‌های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). چون $ABFL$ و $ABCK$ متوازی‌الاضلاع‌اند، پس $AB = LF = KC$. اکنون توجه کنید که چون $EL \parallel DK$ ، پس در مثلث ADK ، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{EL}{DK} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{x-2}{8} = \frac{AE}{AE+ED} = \frac{AE}{AE+3AE} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x-2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow x=4$$

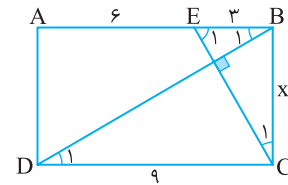


۲۴۱۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون $AB \parallel CD$ ، بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (شکل را ببینید). از طرف دیگر،

$$\begin{cases} \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه BEC و CBD که یک زاویه حاده برابر دارند، متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{x}{9} \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$$

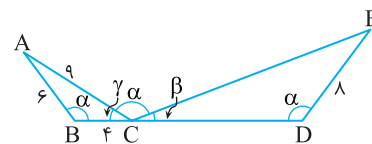


۲۴۱۵- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $\hat{ACE} = \alpha$ ، $\hat{ECD} = \beta$ ، $\hat{ACB} = \gamma$ و $\hat{BCE} = \gamma$ چون $\hat{BCE}$ زاویه خارجی مثلث ECD است، پس $\hat{E} = \gamma$. به طور مشابه $\hat{A} = \beta$. بنابراین مثلث‌های ABC و CDE متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{EC}{AC} = \frac{CD}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{EC}{9} = \frac{CD}{6} = \frac{8}{4} = 2$$

بنابراین

$$EC = 18, CD = 12 \Rightarrow EC \times CD = 216$$



۲۴۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که با نمادگذاری شکل زیر

$$DE \parallel BC \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$$

و چون $BKEL$ متوازی‌الاضلاع است، پس $\hat{E} = \hat{B}$. بنابراین مثلث‌های ABC و FED متشابه‌اند (ز.ز) و نیز نسبت محیط‌های این مثلث‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست:

$$\frac{\text{محیط } (ABC)}{\text{محیط } (FED)} = \frac{CA}{DF} = \frac{10}{5} = 2$$

از طرف دیگر $DF + DE + EF = 5 + 9 = 14$ (محیط (FED)). در نتیجه

$$\text{محیط } (ABC) = 2 \times 14 = 28$$

۲۴۱۷- گزینه ۴ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه

$$AH^2 = BH \times CH = 2 \times 6 = 12$$

بنابراین $AH = 2\sqrt{3}$. از طرف دیگر، باز هم بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه $AB \times AC = AH \times BC = 2\sqrt{3} \times 8 = 16\sqrt{3}$.

۲۴۱۸- گزینه ۱ چون مثلث‌های HKB و HCD متشابه‌اند (ز.ز)، پس

$$\frac{HB}{HD} = \frac{HK}{HC} \Rightarrow \frac{HB}{27} = \frac{8}{HC} \Rightarrow HB \times HC = 8 \times 27 \quad (1)$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه BCK

$$BH^2 = HC \times HK \Rightarrow BH^2 = 8 \times HC$$

اگر دو طرف این تساوی را در HB ضرب و از تساوی (۱) استفاده کنیم، به دست می‌آید

$$BH^3 = 8 \times 8 \times 27 \Rightarrow BH = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

۲۴۱۹- گزینه ۱ در لوزی قطرها بر هم عمودند، بنابراین مثلث AFB قائم‌الزاویه است و در این مثلث بنابر رابطه‌های طولی

$$BF^2 = EB \times AB = 3AE(AE + 3AE) = 12AE^2$$

بنابراین $BF = 2\sqrt{3}AE$. همین‌طور

$$AF^2 = AE \times AB = AE(AE + 3AE) = 4AE^2$$

بنابراین $AF = 2AE$. چون در لوزی قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند، پس

$$\frac{BD}{AC} = \frac{2BF}{2AF} = \frac{BF}{AF} = \frac{2\sqrt{3}AE}{2AE} = \sqrt{3}$$

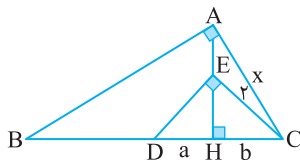
۲۴۲۰- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $DH = a$ و $CH = b$. در این صورت $BD = DC = a + b$ (شکل را ببینید). بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه DEC

$$EC^2 = CH \times CD \Rightarrow 4 = b(a + b)$$

همین‌طور، در مثلث قائم‌الزاویه ABC

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow x^2 = b(2a + 2b) = 2b(a + b) = 2 \times 4 = 8$$

بنابراین $x = 2\sqrt{2}$.



۲۴۲۱- گزینه ۴ مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC برابر مجموع مساحت دو مثلث ABD و ADC است. پس

$$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{ABD} \Rightarrow \frac{AB \times AC}{2} = \frac{DN \times AC}{2} + \frac{DM \times AB}{2}$$

هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه، به یک فاصله است، پس $DM = DN = x$.

$$3 \times 7 = x \times 7 + x \times 3 \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = 2.1$$

در نتیجه

۲۴۲۵- گزینه ۱ بنابر قضیه تالس در مثلث OBD.

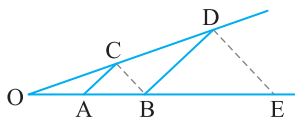
$$AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \quad (1)$$

بنابر قضیه تالس در مثلث OED.

$$BC \parallel ED \Rightarrow \frac{OB}{BE} = \frac{OC}{CD} \quad (2)$$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{8}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۲۴۲۶- گزینه ۲ بنابر قضیه تالس در مثلث MAC.

$$EB \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{EA} = \frac{MB}{BC} \quad (1)$$

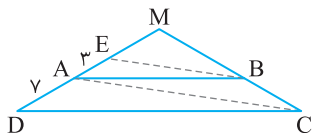
بنابر قضیه تالس در مثلث MDC.

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \quad (2)$$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{ME}{EA} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{ME}{3} = \frac{ME+3}{7} \Rightarrow 7ME = 3ME + 9 \Rightarrow ME = 2/25$$

پس $MD = 2/25 + 3 + 7 = 12/25$



خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۲۴۲۷- گزینه ۱ راه حل اول از نماد گذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.

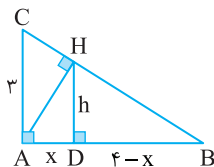
بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABH.

$$h^2 = x(4-x) \Rightarrow h = \sqrt{x(4-x)}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه اساسی تشابه، دو مثلث BAC و BDH متشابه هستند. از تشابه این دو مثلث قائم‌الزاویه نتیجه می‌شود

$$\frac{h}{3} = \frac{4-x}{4-x+x} \Rightarrow \frac{\sqrt{x(4-x)}}{3} = \frac{4-x}{4} \Rightarrow \frac{x(4-x)}{9} = \frac{(4-x)^2}{16}$$

$$\frac{x}{9} = \frac{4-x}{16} \Rightarrow 16x = 36 - 9x \Rightarrow x = \frac{36}{25} = 1/44$$



راه حل دوم چون $AB = x + 4 - x = 4$ ، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC.

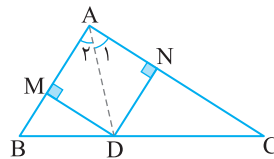
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC.

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 5 = 4 \times 3 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

توجه کنید که $\hat{A}_1 = 45^\circ$ ، پس مثلث ADN قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. یعنی $AN = DN = x$ ، پس بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ADN.

$$AD^2 = AN^2 + DN^2 = 2x^2 \Rightarrow AD = x\sqrt{2} = 2/1\sqrt{2}$$



تجربی - ۹۵

۲۴۲۲- گزینه ۴ محل تلاقی امتداد ساق‌های دوزنقه ABCD را M

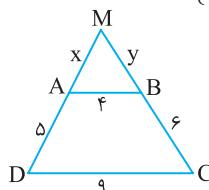
می‌نامیم، با توجه به تعمیم قضیه تالس در مثلث MDC.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{4}{9}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{5+x} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 20 \Rightarrow x = 4 \\ \frac{y}{6+y} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 24 + 4y \Rightarrow y = 4/8 \end{cases}$$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با

$$P = x + y + 4 = 4 + 4/8 + 4 = 12/8$$



تجربی - ۹۴

۲۴۲۳- گزینه ۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیه

اساسی تشابه، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند، پس

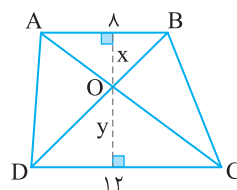
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2y \\ x + y = 10 \Rightarrow 3x + 3y = 30 \end{cases} \Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow y = 6, x = 4$$

بنابراین مساحت مثلث OCD برابر است با $S_{OCD} = \frac{y \times 12}{2} = 36$

توجه کنید که ارتفاع مثلث ADC نیز برابر ۱۰ است، در نتیجه

$$S_{ADC} = \frac{10 \times 12}{2} = 60$$

$$S_{ADO} = S_{ADC} - S_{OCD} = 60 - 36 = 24$$



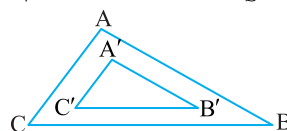
تجربی - ۹۵

۲۴۲۴- گزینه ۳ این دو مثلث که اضلاعی موازی دارند، متشابه هستند.

نسبت تشابه آن‌ها، برابر نسبت دو ضلع بزرگ‌تر یعنی $\frac{9}{6}$ یا $\frac{3}{2}$ است. اگر

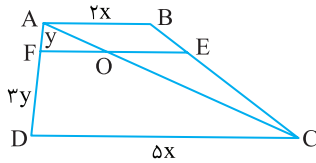
مساحت مثلث ABC و A'B'C' را به ترتیب S و S' بنامیم، به دست می‌آید

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S-S'}{S'} = \frac{9-4}{4} = \frac{5}{4} = 1/25$$



خارج از کشور تجربی - ۹۵

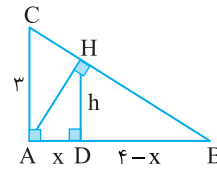
بنابراین $\frac{EF}{CD} = \frac{\frac{11}{4}x}{5x} = \frac{11}{20}$ پس $EF = OF + OE = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}x = \frac{11}{4}x$



خارج از کشور تجربی - ۹۷

اکنون از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه AHB نتیجه می‌شود

$$AH^2 = AD \times AB \Rightarrow \frac{144}{25} = x \times 4 \Rightarrow x = \frac{144}{100} = 1/44$$



ریاضی - ۸۹

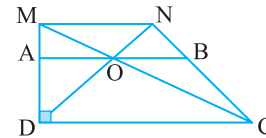
شکل سؤال به صورت زیر است. توجه کنید که

$$\triangle MDC: OA \parallel DC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیه}} \frac{MA}{MD} = \frac{OA}{DC}$$

$$\triangle NDC: OB \parallel DC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیه}} \frac{NB}{NC} = \frac{OB}{DC}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه تالس در دوزنقه MNCD، $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$ پس

$$\frac{OA}{OB} = 1 \text{ و } OA = OB, \frac{OA}{DC} = \frac{OB}{DC}$$



تجربی - ۹۷

از فرض‌های مسئله شکل زیر به دست می‌آید. از قضیه

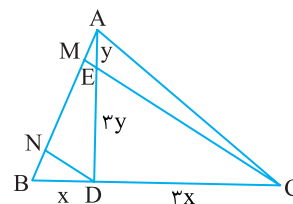
تالس نتیجه می‌شود

$$\triangle BMC: DN \parallel CM \Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{BD}{DC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow BN = \frac{1}{3} MN$$

$$\triangle AND: ME \parallel DN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{3} MN$$

بنابراین $AM = BN = \frac{1}{3} MN$ پس

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AM + MN + BN} = \frac{AM}{AM + 3AM + AM} = \frac{1}{5} \Rightarrow AB = 5AM$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۷

بنابر فرض سؤال اگر $AB = 2x$ ، آن‌گاه $CD = 5x$ و اگر

$AF = y$ ، آن‌گاه $DF = 3y$ ، قطر AC را رسم می‌کنیم. بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\triangle ADC: OF \parallel DC \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} = \frac{1}{4} \xrightarrow{CD=5x} OF = \frac{5}{4}x$$

$$\triangle CAB: OE \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{AB}$$

$$\xrightarrow{\frac{CE}{CB} = \frac{DF}{DA} = \frac{3}{4} \text{ (قضیه تالس در دوزنقه)}} \frac{3}{4} = \frac{OE}{AB}$$

$$\xrightarrow{AB=2x} OE = \frac{3}{2}x$$

گزینه ۱ - ۲۴۳۰

فصل پانزدهم

گزینه ۲-۲۴۳۶ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}} = 2 \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} = 2 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow a^{\frac{2}{3}} = 2$$

$$\Rightarrow a^2 = 2^3 = 8 \Rightarrow a = \sqrt[3]{8}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8}$$

گزینه ۱-۲۴۳۷ ابتدا توجه کنید که

$$a - \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = 4 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 6$$

بنابراین

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 8 \Rightarrow (a + \frac{1}{a})^2 = 8 \Rightarrow |a + \frac{1}{a}| = \sqrt{8}$$

با توجه به اینکه a عددی منفی است، پس $a + \frac{1}{a} = -\sqrt{8}$. در نتیجه

$$(a - \frac{1}{a})(a + \frac{1}{a}) = 2(-\sqrt{8}) \Rightarrow a^2 - \frac{1}{a^2} = -4\sqrt{2}$$

گزینه ۳-۲۴۳۸ عبارت مورد نظر را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 + xy - 2y^2 = x^2 - y^2 + xy - y^2 = (x-y)(x+y) + y(x-y)$$

$$= (x-y)(x+y+y) = (x-y)(x+2y)$$

بنابراین عامل $x+2y$ در تجزیه عبارت وجود دارد.

گزینه ۱-۲۴۳۹ ابتدا توجه کنید که

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4})} + \frac{5}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{16}+1-\sqrt[3]{4})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1} + \frac{5}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1} \right)$$

اکنون مخرج هر یک از کسرها را به کمک اتحاد چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}^3-1} + \frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt[3]{2}^3-1} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1} + \frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{4+1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{4}+1) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) = 1+\sqrt[3]{2}$$

گزینه ۳-۲۴۴۰ اولاً نمودار از نقطه $(m, 0)$ می‌گذرد و با توجه به شکل m

عددی مثبت است. با این شرایط حاصل ضرب صفهای تابع منفی است که در نمودار همین وضعیت وجود دارد. ثانیاً طول رأس سهمی عددی منفی است.

بنابراین

$$-\frac{2m-1}{2(-1)} < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

بنابراین اگر $0 < m < \frac{1}{2}$ ، نمودار تابع f به صورت رسم شده است.

گزینه ۲-۲۴۳۱ اگر اشتراک دو بازه $(-1, 3)$ و $[a, a+1]$ تهی باشد،

یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:



$$a+1 \leq -1 \Rightarrow a \leq -2$$

$$a \geq 3$$

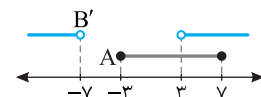
بنابراین اگر اشتراک دو بازه، تهی نباشد باید $-2 < a < 3$. پس به ازای مقادیر صحیح $-1, 0, 1, 2$ برای a اشتراک دو بازه تهی نیست.

گزینه ۳-۲۴۳۲ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که

$$B' = (-\infty, -7) \cup (3, +\infty)$$



بنابراین، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A \cap B' = (3, 7]$.



گزینه ۳-۲۴۳۳ فرض می‌کنیم دنباله حاصل $2^0, a_1, \dots, a_n, 8^0$

باشد. در این صورت قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$d = \frac{8^0 - 2^0}{n+1} = \frac{6^0}{n+1}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2^0+d}{8^0-d} = \frac{1}{3} \Rightarrow 6^0+3d=8^0-d \Rightarrow d=5$$

پس $\frac{6^0}{n+1} = 5$ ، یعنی $n=11$.

گزینه ۴-۲۴۳۴ جمله دهم دنباله هندسی مورد نظر برابر $2^{10} = 1024$

است و جمله n ام دنباله حسابی مورد نظر برابر $8+4(n-1)$ است. بنابراین

$$8+4n-4=1024 \Rightarrow 4n=1020 \Rightarrow n=255$$

پس جمله دویست و پنجاه و پنجم دنباله حسابی $8, 12, 16, \dots$ با جمله دهم

دنباله هندسی $2, 4, 8, \dots$ برابر است.

گزینه ۴-۲۴۳۵ فرض کنید a و b دو عدد مورد نظر باشند طوری که

$$0 < a < b$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{5}{3} \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{25}{9} ab \Rightarrow 9a^2 + 9b^2 + 18ab = 25ab$$

$$9a^2 + 9b^2 - 8ab = 0 \Rightarrow (a-9b)(9a-b) = 0$$

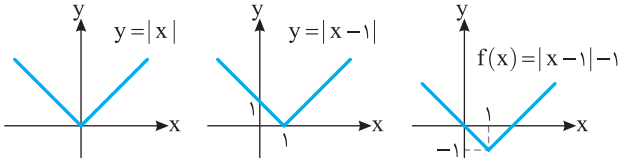
$$\begin{cases} a=9b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{9} \text{ (غ.ق.ق.)} \\ b=9a \Rightarrow \frac{b}{a} = 9 \end{cases}$$

بنابراین

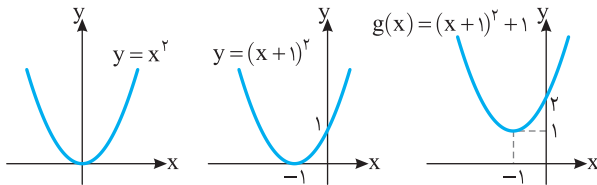
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

گزینه ۲-۲۴۴۵ اگر نمودار تابع $y = |x|$ را یک واحد به راست منتقل

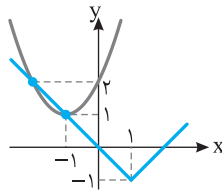
کنیم، نمودار تابع $y = |x-1|$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع $f(x) = |x-1| - 1$ به دست می‌آید.



اگر نمودار تابع $y = x^2$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y = (x+1)^2$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به بالا منتقل کنیم نمودار تابع $y = (x+1)^2 + 1$ به دست می‌آید.



اگر نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که در دو نقطه متقاطع‌اند.



گزینه ۳-۲۴۴۶ توجه کنید که $x^2 = |x|^2$. اکنون نامعادله را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$|x|^2 \leq 4|x| \Rightarrow |x|^2 - 4|x| \leq 0 \Rightarrow |x|(|x| - 4) \leq 0$$

چون $|x| \geq 0$ پس

$$|x| - 4 \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

بنابراین نه عدد صحیح ± 4 ، ± 3 ، ± 2 ، ± 1 و ۰ در نامعادله صدق می‌کنند.

گزینه ۲-۲۴۴۷ برای اینکه عبارت $\sqrt{4x+1}$ با معنی باشد باید $x \geq -\frac{1}{4}$.

بنابراین $x+1$ مثبت است و $|x+1| = x+1$ پس معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{4x+1} = 2x + x + 1 \Rightarrow \sqrt{4x+1} = 3x + 1$$

اکنون طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را حل می‌کنیم:

$$4x+1 = 9x^2 + 6x + 1 \Rightarrow 9x^2 + 2x = 0$$

$$x(9x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{2}{9}$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند و معادله دو جواب دارد.

گزینه ۱-۲۴۴۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = 6$ و $\alpha\beta = 2$. اگر x_1 و

x_2 جواب‌های معادله مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$S = x_1 + x_2 = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 6 + \frac{6}{2} = 9$$

$$P = x_1 x_2 = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta} = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

پس معادله مورد نظر به صورت زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 18x + 9 = 0$$

گزینه ۲-۲۴۴۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \sin x = \frac{3 \cos x}{1} \Rightarrow \sin^2 x = 9 \cos^2 x$$

می‌دانیم $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 1$ پس

$$1 - \cos^2 x = 9 \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

از طرف دیگر،

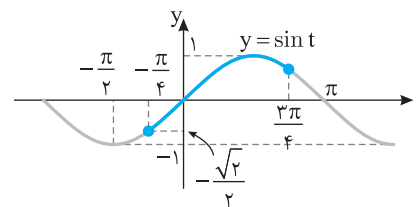
$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cos x = AB \Rightarrow AB = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

گزینه ۲-۲۴۴۳ ابتدا توجه کنید که اگر $0 \leq x \leq \pi$ آن‌گاه

$$-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

و با توجه به نمودار زیر نتیجه می‌شود

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$



بنابراین

$$-1 \leq -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 \leq 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq f(x) \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R_f = \left[0, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right] \text{ پس}$$

گزینه ۱-۲۴۴۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x, \quad \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

بنابراین

$$-2 \cos x = 3 \sin x \Rightarrow \tan x = -\frac{2}{3}$$

از طرف دیگر،

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{4}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{13}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه x در ناحیه دوم قرار دارد، پس $\cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$.

حد چپ و حد راست تابع f را در نقطه $x = -2$ به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-2a - 12x) = -2a + 24$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-3a - 15x) = -3a + 30$$

برای اینکه تابع f در $x = -2$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه با هم برابر باشند. پس

$$-2a + 24 = -3a + 30 \Rightarrow a = 6$$

بنابراین

$$f(x) = 6[x] + 3x[2x] \Rightarrow f(-2) = 6(-2) + 3(-2)(-4) = 12$$

گزینه ۱ - ۲۴۵۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0$ ، آن گاه $x^2 \rightarrow 0^+$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x^2)}{3 - f(x^2)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{3 - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)} = \frac{2}{3 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ - ۲۴۵۵ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L_1$ آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1 L_2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1 - L_2 = \frac{7}{2} \Rightarrow L_1 = L_2 + \frac{7}{2}$$

بنابراین

$$(L_2 + \frac{7}{2})L_2 = 2 \Rightarrow L_2^2 + \frac{7}{2}L_2 - 2 = 0 \Rightarrow 2L_2^2 + 7L_2 - 4 = 0$$

$$(L_2 + 4)(2L_2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_2 = -4 \Rightarrow L_1 = -\frac{1}{2} \\ L_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow L_1 = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{8} \text{ یا } 8$$

گزینه ۳ - ۲۴۵۶ با توجه به شرطهای مسئله، باید رقم وسط ۵ باشد، چهار رقم نخست ۱، ۲، ۳، ۴ باشند و چهار رقم آخر ۶، ۷، ۸، ۹ باشند.

$$\underbrace{\square \square \square \square}_{1, 2, 3, 4} \quad 5 \quad \underbrace{\square \square \square \square}_{6, 7, 8, 9}$$

بنابراین پاسخ برابر است با $4! \times 4! = 24^2 = 2^6 \times 3^2$

گزینه ۳ - ۲۴۵۷ فرض کنید پیشامد مورد نظر A باشد. در این صورت A' پیشامد این است که دو نفر انتخاب شده کنار هم ننشسته باشند. بنابراین $n(A') = 6$ و در نتیجه

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{\binom{7}{2}} = \frac{5}{7}$$

گزینه ۲ - ۲۴۵۸ باید تا لامپ سالم یا ۳ تا سالم و یکی خراب انتخاب کنیم. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{\binom{5}{4} + \binom{5}{3} \binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{5 + 10 \times 3}{70} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ - ۲۴۴۸ توجه کنید که $f(0) = -2$ و $f(\log_a 3) = 0$. بنابراین

$$f(0) = 1 - b = -2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = a^{3x} - 3$$

$$f(\log_a 3) = a^{3 \log_a 3} - 3 = 0 \Rightarrow a^{\log_a 3} = 3$$

$$\log_a 3 = \log_a 3 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $a = 2$ و $b = 3$ پس $ab = 6$.

گزینه ۲ - ۲۴۴۹ ابتدا طرفین تساویهای داده شده را در هم ضرب می کنیم

$$2a^{2b+1} = 3a^{3b} \Rightarrow 2^{a+b+1} = 3^{a+b}$$

بنابراین

$$2 \times 2^{a+b} = 3^{a+b} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{a+b} = 2 \Rightarrow a+b = \log_{\frac{3}{2}} 2$$

گزینه ۲ - ۲۴۵۰ ابتدا توجه کنید که

$$64 < 120 < 128 \Rightarrow 2^6 < 120 < 2^7$$

بنابراین

$$\log_2 2^6 < \log_2 120 < \log_2 2^7 \Rightarrow 6 < \log_2 120 < 7 \Rightarrow [\log_2 120] = 6$$

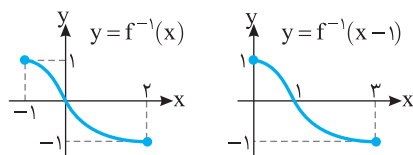
گزینه ۱ - ۲۴۵۱ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم،

نمودار تابع f^{-1} به دست می آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به

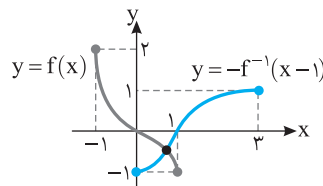
سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f^{-1}(x-1)$ به دست می آید و اگر

نمودار اخیر را نسبت به محور طولها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -f^{-1}(x-1)$

به دست می آید.



مطابق شکل زیر دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.



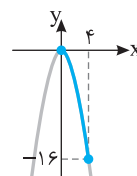
گزینه ۳ - ۲۴۵۲ ابتدا دامنه تابعهای f و g را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = [0, 4]$$

بنابراین $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [0, 4]$ از طرف دیگر،

$$(f \times g)(x) = f(x)g(x) = (\sqrt{4x - x^2} - 2\sqrt{x})(\sqrt{4x - x^2} + 2\sqrt{x}) = 4x - x^2 - 4x = -x^2$$

بنابراین نمودار تابع $f \times g$ به صورت زیر است و برد آن بازه $[-16, 0]$ است.



اگر $r = \frac{2}{5}$ ، جمله‌ها می‌شوند $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$ و اگر $r = \frac{5}{2}$ ، جمله‌ها می‌شوند $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$. بنابراین، در هر صورت، بزرگ‌ترین جمله در میان این سه جمله برابر $\frac{5}{2}$ است.

گزینه ۳ - ۲۴۶۳ ابتدا توجه کنید که

$$A = ((x-2)(x^2+2x+4))(x^3+8)+64 = (x^3-8)(x^3+8)+64 \\ = x^6 - 64 + 64 = x^6$$

بنابراین مقدار A به ازای $x = \sqrt{2}$ برابر است با $A = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$.

گزینه ۳ - ۲۴۶۴ تساوی‌های داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a^3 + a^2b + 2ab^2 = 2 \quad (1)$$

$$b^3 + 2a^2b + ab^2 = 7 \quad (2)$$

اگر طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = 27 \Rightarrow (a+b)^3 = 27 \Rightarrow a+b = 3$$

اگر طرفین تساوی (۲) را از طرفین تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^3 - b^3 - a^2b + ab^2 = 13 \Rightarrow (a^3 - a^2b) + (-b^3 + ab^2) = 13$$

$$a^2(a-b) + b^2(a-b) = 13 \Rightarrow (a-b)(a^2 + b^2) = 13$$

چون $a+b=3$ ، پس

$$(a+b)(a-b)(a^2 + b^2) = 13 \times 3 = 39 \Rightarrow a^4 - b^4 = 39$$

گزینه ۱ - ۲۴۶۵ ابتدا توجه کنید که

$$a^5 b^6 = \sqrt[5]{4-\sqrt{15}} \times \sqrt[6]{4+\sqrt{15}} = \sqrt[5]{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})} = \sqrt[5]{16-15} = 1$$

بنابراین

$$(ab)^5 b = 1 \Rightarrow (ab)^5 = \frac{1}{b}$$

پس

$$(ab)^{21} = ((ab)^5)^4 = \left(\frac{1}{b}\right)^4 = \left(\frac{1}{b^4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt[5]{4+\sqrt{15}}}\right)^4 = \frac{1}{4+\sqrt{15}} = 4-\sqrt{15}$$

گزینه ۳ - ۲۴۶۶ چون معادله جواب دارد، پس

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4k^2 - 4(k^2 + k + 20) \geq 0 \Rightarrow 40k + 80 \leq 0 \Rightarrow k \leq -2$$

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آنگاه $\alpha + \beta = 2k$.

و در نتیجه

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 - 2k^2 - 20k - 40$$

$$= 2k^2 - 20k - 40 = 2(k-5)^2 - 90$$

بنابراین

$$k \leq -2 \Rightarrow k-5 \leq -7 \Rightarrow (k-5)^2 \geq 49$$

$$2(k-5)^2 \geq 98 \Rightarrow 2(k-5)^2 - 90 \geq 8$$

بنابراین کمترین مقدار مجموع مربعات جواب‌ها برابر ۸ است.

گزینه ۲ - ۲۴۶۷ اولاً چون معادله دو جواب دارد، پس

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4k > 0 \Rightarrow k < 4$$

ثانیاً اختلاف جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است. پس

$$\frac{\sqrt{16-4k}}{1} < 1 \Rightarrow 16-4k < 1 \Rightarrow 4k > 15 \Rightarrow k > \frac{15}{4}$$

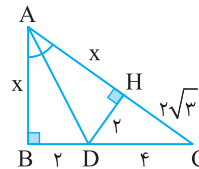
بنابراین $\frac{15}{4} < k < 4$.

گزینه ۳ - ۲۴۵۹ اگر ارتفاع DH در مثلث ADC را رسم کنیم، چون D روی نیمساز زاویه BAC است، نتیجه می‌گیریم $DH = DB = 2$ ، بنابراین، از قضیه فیثاغورس در مثلث DHC نتیجه می‌شود

$$DC^2 = HC^2 + HD^2 \Rightarrow 16 = HC^2 + 4 \Rightarrow HC = 2\sqrt{3}$$

همچنین از همبستگی مثلث‌های ABD و AHD نتیجه می‌شود $AH = AB = x$. اکنون از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC نتیجه می‌شود

$$(x+2\sqrt{3})^2 = x^2 + 36 \Rightarrow x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 = x^2 + 36 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$



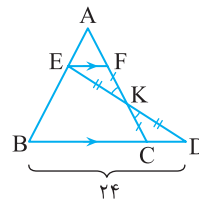
گزینه ۳ - ۲۴۶۰ ابتدا توجه کنید که مثلث‌های EFC و DCK همبسته‌اند (ز ض ز). بنابراین $CD = EF$. از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC ،

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = \frac{1}{3} BC$$

در نتیجه $CD = \frac{1}{3} BC$ ، یعنی $BC = 3CD$. اکنون توجه کنید که

$$BD = 24 \Rightarrow BC + CD = 24 \Rightarrow 3CD + CD = 24$$

$$4CD = 24 \Rightarrow CD = 6$$



گزینه ۱ - ۲۴۶۱ فرض می‌کنیم قدرنسبت دنباله حسابی d باشد. در این صورت

$$a_1 = a_1 + 7d, \quad a_4 = a_1 + 14d, \quad a_{13} = a_1 + 12d$$

از طرف دیگر، چون a_1, a_4, a_{13} دنباله‌ای هندسی است، پس

$$a_4^2 = a_{13} \times a_1 \Rightarrow (a_1 + 14d)^2 = (a_1 + 12d)(a_1 + 7d)$$

$$a_1^2 + 16a_1d + 64d^2 = a_1^2 + 19a_1d + 84d^2$$

$$3a_1d = -20d^2 \Rightarrow a_1 = -\frac{20}{3}d$$

بنابراین

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{a_1 + 14d}{a_1 + 7d} = \frac{-\frac{20}{3}d + 14d}{-\frac{20}{3}d + 7d} = \frac{\frac{2}{3}d}{\frac{1}{3}d} = 2$$

گزینه ۴ - ۲۴۶۲ جمله‌های مورد نظر را $\frac{a}{r}, a, ar$ می‌گیریم. در این صورت

$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین جمله‌ها می‌شوند $1, r, \frac{1}{r}$. از طرف دیگر، طبق فرض،

$$\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{39}{10} \Rightarrow 10r^2 - 29r + 10 = 0 \Rightarrow (5r-2)(2r-5) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{5}, r = \frac{5}{2}$$

۲۴۷۱- گزینه ۲ نامعادله مورد نظر را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\left| \frac{1+|x|-|x|}{1+|x|} \right| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{1}{1+|x|} \right| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+|x|} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

پس مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر بازه $[-1, 1]$ است. بنابراین $b-a=2$ و $b=1$ ، $a=-1$

۲۴۷۲- گزینه ۳ اگر $x \neq 5$ ، نامعادله مورد نظر را می توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{|3|}{|5-x|} < \frac{1}{2} \Rightarrow |x-5| > 6$$

بنابراین $(x \neq 5)$

$$\begin{cases} x-5 > 6 \\ x-5 < -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 11 \\ x < -1 \end{cases}$$

به این ترتیب، مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر برابر است با $(-\infty, -1) \cup (11, +\infty)$

در نتیجه $a=-1$ و $b=11$ پس $b-a=12$

۲۴۷۳- گزینه ۲ اگر $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، آن گاه $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ و در نتیجه

$$0 < 2 \sin \alpha < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < 2 \sin \alpha - \sqrt{2} < 0$$

۲۴۷۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{5}$$

$$\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$$

بنابراین

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{5} + \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{2 \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) - 2 \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}}{-3 \sin \frac{\pi}{5} + 2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{3 \sin \frac{\pi}{5}}{-\sin \frac{\pi}{5}} = -3$$

۲۴۷۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{2}{3} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$\sin^6 x + \cos^6 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

۲۴۷۶- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t=2^x$ ، معادله به صورت زیر درمی آید

$$t^2 + (k-3)t + k - 4 = 0$$

بنابراین $t^2 + (k-3)t + k - 4 = (t+k-4)(t+1)$ پس جواب های این

معادله $t=-1$ و $t=4-k$ هستند. بنابراین

$$2^x = -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$2^x = 4-k \Rightarrow x = \log_2(4-k), k < 4$$

۲۴۶۸- گزینه ۳ نمودار تابع f محور طول ها را در $x=4$ و $x=-1$ قطع

کرده است. پس $f(x) = a(x+1)(x-4)$. نمودار تابع f محور عرض ها را در

$y=2$ قطع کرده است. پس

$$f(0) = 2 \Rightarrow a(0+1)(0-4) = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

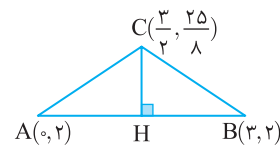
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$$

بنابراین نقطه $C\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)$ رأس سهمی است و

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 3$$

پس $CH = \frac{25}{8} - 2 = \frac{9}{8}$ و $AB=3$. در نتیجه

$$S_{ABC} = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{3 \times \frac{9}{8}}{2} = \frac{27}{16}$$



۲۴۶۹- گزینه ۴ باید با شرط $x > 0$ نامعادله $f(x) < 0$ را حل کنیم:

$$x + \frac{1}{x+2} - 5 < 0 \Rightarrow x(x+2) + 1 - 5(x+2) < 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 9 < 0$$

ریشه های چندجمله ای $x^2 - 3x - 9$ به صورت $\frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$

هستند. پس

$$\frac{3-3\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$$

از طرف دیگر $x > 0$ ، پس $0 < x < \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ بنابراین حداکثر مقدار a برابر

$$\frac{3+3\sqrt{5}}{2} \text{ است.}$$

۲۴۷۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که باید $2x - x^2 \geq 0$ تا عبارت

$$\sqrt{2x - x^2}$$
 در معادله با معنی باشد. پس $0 \leq x \leq 2$

اگر $x=2$ ، آن گاه سمت چپ معادله برابر صفر و سمت راست آن برابر ۲

است. پس $x=2$ جواب معادله نیست.

اگر $0 \leq x < 1$ ، آن گاه $[x]=0$ و معادله به صورت $2\sqrt{2x-x^2}=0$ در می آید

که $x=0$ جواب آن است ولی مدنظر مسئله نیست.

اگر $1 \leq x < 2$ ، آن گاه $[x]=1$ و معادله به صورت $2\sqrt{2x-x^2}=1$ در می آید

که به صورت زیر آن را حل می کنیم:

$$4(2x-x^2)=1 \Rightarrow 4x^2-8x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2+\sqrt{3}}{2}, x=\frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

توجه کنید که $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ در بازه $[1, 2]$ قرار ندارد بنابراین قابل قبول نیست.

پس جواب مثبت معادله $x=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ است.

چون جواب معادله نباید مثبت باشد، پس

$$\log_2(4-k) \leq 0 \Rightarrow \log_2(4-k) \leq \log_2 1 \Rightarrow 4-k \leq 1 \Rightarrow k \geq 3$$

در نتیجه $3 \leq k < 4$.

۲۴۷۷- گزینه ۲ از طرفین معادله در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم. معادله

به صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3(9x) \Rightarrow (\log_3 x)(\log_3 x) = \log_3 9 + \log_3 x$$

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0 \Rightarrow (\log_3 x + 1)(\log_3 x - 2) = 0$$

بنابراین

$$\log_3 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, \quad \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$$

پس حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۳ است.

۲۴۷۸- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_2 x \left(\frac{1}{2} \log_2 x \right) = \frac{1}{2} \log_2 x \Rightarrow \log_2 x \left(\frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2 \\ \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \end{cases}$$

پس جواب بزرگ‌تر معادله برابر $\sqrt[3]{4}$ است.

۲۴۷۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$. بنابراین $x = 2$

باید تنها ریشهٔ مخرج $g(x)$ باشد. یعنی مخرج $g(x)$ باید به صورت

$$(x-2)^2 \text{ باشد که در این صورت } b = -4. \text{ از طرف دیگر}$$

$$g(x) = \frac{ax-b}{x^2+bx+4} = \frac{ax+4}{(x-2)^2}$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \frac{ax+4}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x-2} \Rightarrow ax+4 = -2(x-2)$$

$$ax+4 = -2x+4$$

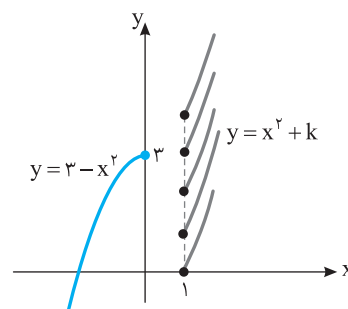
پس $a = -2$ ، $b = -4$ و در نتیجه $ab = 8$.

۲۴۸۰- گزینه ۱ نمودار تابع به ازای چند مقدار مختلف k در شکل زیر

رسم شده است. واضح است که اگر $f(1) > 3$ ، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک خواهد

بود. پس

$$1+k > 3 \Rightarrow k > 2$$



۲۴۸۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x \leq 0 \text{ یا } x \geq 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 6x - x^2 = 2x$$

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + 6x - x^2 = -2x^2 + 10x$$

بنابراین دامنهٔ تابع f باید $[4, +\infty)$ و برد آن $[8, +\infty)$ باشد. پس

$$f(x) = y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2}, \quad D_{f^{-1}} = [8, +\infty)$$

۲۴۸۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که حد صورت کسر $\frac{x^3-a^3}{2x-8}$ در نقطهٔ

$x=a$ ، صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز صفر باشد. در غیر این صورت

حاصل حد کسر برابر صفر خواهد بود که چنین نیست. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} (2x-8) = 0 \Rightarrow 2a-8=0 \Rightarrow a=4$$

پس مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$b = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{2x-8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{2(x-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+4x+16}{2} = \frac{16+16+16}{2} = 24$$

در نتیجه $a+b=28$.

۲۴۸۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $1 < x < 2$ ، آن‌گاه $[x] = 1$ و در

نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-b}{x} = -b$. از طرف دیگر حد صورت کسر

در $x=1$ برابر صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز در این نقطه

صفر باشد. در غیر این صورت حد چپ تابع f در $x=1$ برابر صفر می‌شود که

در نتیجه برای پیوستگی تابع در $x=1$ باید حد راست آن یعنی $-b$ هم برابر

صفر شود که مخالف فرض سؤال است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b=0 \Rightarrow a=-b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{-bx+b} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-b(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{-b} = -\frac{2}{b}$$

برای اینکه تابع f در $x=1$ حد داشته باشد باید

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow -\frac{2}{b} = -b \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm \sqrt{2}$$

برای اینکه تابع f در $x=1$ پیوسته باشد، باید

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow c = -b = \pm \sqrt{2}$$

۲۴۸۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $f(2) = bc$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax+b) = 2a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{32(x-2)}{(x-a)(x+a)}$$

چون a و b مثبت‌اند، پس حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=2$ برابر صفر نیست و

در نتیجه حد راست آن هم برابر صفر نیست. پس حد مخرج عبارت

در $x=2$ باید صفر باشد. در غیر این صورت حد راست

تابع f در $x=2$ برابر صفر می‌شود. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} ((x-a)(x+a)) = 0 \Rightarrow (2-a)(2+a) = 0 \Rightarrow a=2, a=-2 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{32(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{32}{x+2} = 8$$

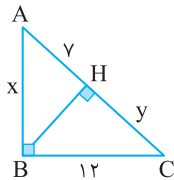
۲۴۹۰- گزینه ۴ فرض می‌کنیم $HC=y$. در این صورت، بنابر

رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه، $x^2 = y(y+y)$. از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC ،

$$(y+y)^2 = x^2 + 12^2 = y(y+y) + 12^2 \Rightarrow y^2 + 14y + y^2 = y^2 + 7y + 12^2$$

$$(غ.ق.ق.) \quad y^2 + 7y - 144 = 0 \Rightarrow (y+16)(y-9) = 0 \Rightarrow y=9, y=-16$$

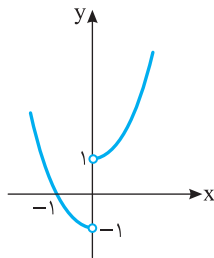
در نتیجه $x^2 = y(y+y) = 7 \times 16$ ، پس $x = 4\sqrt{7}$.



۲۴۹۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^3+1} & x > 0 \\ \frac{x}{x^3+1} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3+1 & x > 0 \\ -x^3-1 & x < 0 \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است. بنابراین اگر نمودار تابع f خط $y=k$ را در دو نقطه قطع کند، حدود k ، به صورت $k > 1$ است.



۲۴۹۲- گزینه ۲ با توجه به زوج مرتب‌های $(0, x^3)$ ، $(-1, x^2-x)$

می‌توان نوشت:

$$0 > -1 \Rightarrow x^3 \geq x^2 - x$$

$$x^3 - x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x(x^2 - x + 1) \geq 0$$

چون در چندجمله‌ای درجه دوم $x^2 - x + 1$ ، $\Delta < 0$ و $a > 0$ ، پس همواره $x^2 - x + 1 > 0$. بنابراین $x \geq 0$. با توجه به زوج مرتب‌های $(x^2, 8)$ و $(x^3, 0)$ می‌توان نوشت:

$$x^2 > 0 \Rightarrow 8 \geq x^3 \Rightarrow 2 \geq x$$

با توجه به اینکه x باید عددی صحیح باشد، از اشتراک شرایط به دست آمده نتیجه می‌شود $x \in \{1, 2\}$ ، پس دو مقدار صحیح برای x وجود دارد.

توجه کنید که $x=0$ قابل قبول نیست چرا که در این صورت $f = \{(-1, 0), (0, 0), (0, 8)\}$ ، که تابع نیست.

۲۴۹۳- گزینه ۱ با توجه به اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، پس

$$\begin{cases} x > 3 \Rightarrow f(x) < f(3) \Rightarrow f(x) < 0 \\ x < 3 \Rightarrow f(x) > f(3) \Rightarrow f(x) > 0 \end{cases}$$

چون f در $x=2$ پیوسته است، پس باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع f در این نقطه با هم برابر باشند:

$$2a+b=8 \xrightarrow{a=2} 4+b=8 \Rightarrow b=4, \quad bc=8 \xrightarrow{b=4} c=2$$

۲۴۸۵- گزینه ۲ حالت‌های زیر ممکن است:

حالت اول یک توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{1} \binom{6}{2} = 3 \times 15 = 45$$

حالت دوم دو توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{2} \binom{6}{1} = 3 \times 6 = 18$$

حالت سوم سه توپ قرمز انتخاب شود. در این صورت

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{3} \binom{6}{0} = 1$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $45+18+1=64$.

۲۴۸۶- گزینه ۲ فرض کنید پیشامد مورد نظر A باشد. در این صورت

$A = X \cup Y$ ، که در آن X پیشامد این است که از جعبه اول مهره قرمز و از جعبه دوم مهره آبی بیرون بیاید و Y پیشامد این است که از جعبه اول مهره آبی و از جعبه دوم مهره قرمز بیرون بیاید. بنابراین

$$P(A) = P(X) + P(Y) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{8} \times \frac{6}{10} = \frac{21}{40}$$

۲۴۸۷- گزینه ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که شماره کارت ۲ باشد

و B پیشامد این باشد که رنگ کارت آبی است. در این صورت

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

۲۴۸۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{6}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

۲۴۸۹- گزینه ۳ اگر پاره‌خط EF را رسم کنیم، از عکس قضیه تالس نتیجه

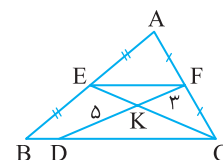
می‌شود که $EF \parallel BC$ و بنابر تعمیم قضیه تالس، $EF = \frac{1}{2} BC$. از طرف دیگر، چون $EF \parallel BC$ ، پس مثلث‌های EKF و CKD متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{EF}{DC} = \frac{FK}{DK} = \frac{3}{5} \Rightarrow EF = \frac{3}{5} DC$$

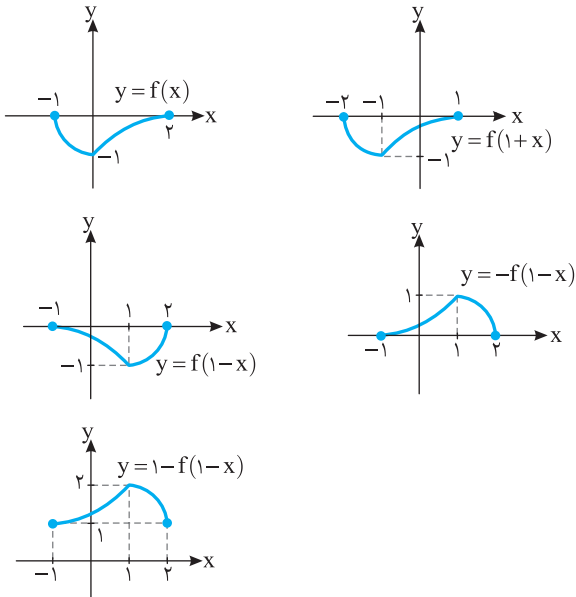
به این ترتیب

$$\frac{1}{2} BC = \frac{3}{5} DC \Rightarrow BC = \frac{6}{5} DC \xrightarrow{-DC} BC - DC = \frac{1}{5} DC = DC$$

$$BD = \frac{1}{5} DC \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{1}{5}$$



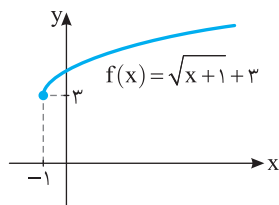
گزینه ۴ - ۲۴۹۹ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1+x)$ رسم شود. اکنون نمودار این تابع را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1-x)$ حاصل شود. سپس نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(1-x)$ به دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=1-f(1-x)$ به دست آید.



گزینه ۲ - ۲۵۰۰ اگر نمودار تابع $g(x)=3f(2x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=3f(2(x+1))=3f(2x+2)$ به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را سه واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=3f(2x+2)+3$ به دست می‌آید. در نهایت اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=3f(2(\frac{1}{2}x)+2)+3=3f(x+2)+3$ به دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را یک سوم کنیم، نمودار تابع $y=\frac{1}{3}x(3f(x+2)+3)=f(x+2)+1$ به دست می‌آید.

گزینه ۴ - ۲۵۰۱ ضابطه تابع وارون تابع f را به دست می‌آوریم:
 $y=1-\sqrt{3+x} \Rightarrow \sqrt{3+x}=1-y \Rightarrow 3+x=(1-y)^2 \Rightarrow x=(1-y)^2-3$
 بنابراین $f^{-1}(x)=(1-x)^2-3$ پس
 $f^{-1}(x)=(1-x)^2-3=1+x^2-2x-3=x^2-2x-2=ax+b$
 در نتیجه $a=-2, b=-2 \Rightarrow 2a+3b=-10$.

گزینه ۱ - ۲۵۰۲ برای هر $x \in R_f$ تساوی $(f \circ f^{-1})(x)=x$ برقرار است. با توجه به نمودار تابع f ، $R_f=[3, +\infty)$ ، پس برای هر $x \geq 3$ ، بنابراین $g(x)=x-2$
 $x \geq 3 \Rightarrow x-2 \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq 1 \Rightarrow R_g=[1, +\infty)$

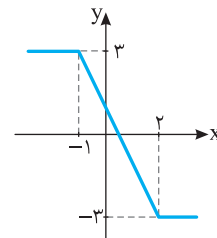


اکنون باید دامنه تابع g را مشخص کنیم. برای این کار نامعادله $(x^2-9)f(x) \geq 0$ را حل می‌کنیم.

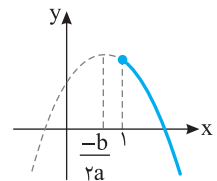
x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
x^2-9		+	-	+
$f(x)$		+	+	-
$(x^2-9)f(x)$		+	-	-

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق $\{-\infty, -3\} \cup \{3\}$ است. بنابراین تنها یک عدد طبیعی (عدد ۳) جزء دامنه تابع g است.

گزینه ۳ - ۲۴۹۴ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی نمودار مشخص است که تابع روی بازه $[-1, 2]$ و هر بازه‌ای به صورت $[c, d]$ که در آن $d \leq 2$ و $c \geq -1$ اکیداً نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=-1$ و $b=2$ ، در این صورت $b-a=2-(-1)=3$.



گزینه ۲ - ۲۴۹۵ تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ با شرط $a < 0$ روی بازه $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ صعودی و روی بازه $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ نزولی است. بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشد تا تابع f روی بازه $[1, +\infty)$ نزولی باشد (به شکل زیر توجه کنید):
 $k < 1 \Rightarrow k < 1$
 $\frac{-1}{2(k-1)} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2(k-1)} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{-1-2k+2}{2(k-1)} \leq 0$
 $\frac{-2k+1}{2(k-1)} \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$ یا $k > 1$
 از اشتراک شرط‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $k \leq \frac{1}{2}$.



گزینه ۴ - ۲۴۹۶ توجه کنید که
 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x))$

$$2(a-x)-3=a-(2x-3) \Rightarrow 2a-2x-3=a-2x+3 \Rightarrow a=6$$

گزینه ۴ - ۲۴۹۷ توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{x}{2x-1} \Rightarrow \frac{1}{g(x)+1} = \frac{x}{2x-1}$$

$$xg(x)+x=2x-1 \Rightarrow xg(x)=x-1 \Rightarrow g(x)=\frac{x-1}{x}$$

گزینه ۳ - ۲۴۹۸ می‌دانیم $D_{f \circ f} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_f\}$

$$\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \\ f(x) \in D_f \Rightarrow -1 \leq 2x-5 \leq 3 \Rightarrow 4 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده به صورت $2 \leq x \leq 3$ است، پس $D_{f \circ f} = [2, 3]$

از طرف دیگر با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر $\frac{45}{7} - \frac{3}{7} = 6$ است. پس

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{b}\right|} = 6 \Rightarrow |b| = 6 \Rightarrow b = \pm 6$$

اگر $b = -6$ ، آن گاه $f(x) = 1 + 2\sin\left(-\frac{2\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right)$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=0$ نزولی باشد که این طور نیست. پس $b=6$ و در نتیجه $ab=2$.

۲۵۰۹- گزینه ۴ توجه کنید که α در ناحیه سوم قرار دارد، پس $\cos \alpha < 0$. از طرف دیگر،

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow |\cos \alpha| = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{5}$$

می دانیم $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، پس

$$\sin 2\alpha = 2 \times \left(\frac{-4}{5}\right) \times \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \left(\frac{-3}{5}\right)^2 - \left(\frac{-4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{-7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{-7}{24}$$

۲۵۱۰- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{1 + \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1 + (2 \cos^2 20^\circ - 1)}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2 \cos^2 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \cot 20^\circ$$

۲۵۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$A = \tan 23^\circ - \tan 4^\circ = \tan(18^\circ + 5^\circ) - \tan(9^\circ - 5^\circ)$$

$$= \tan 5^\circ - \cot 5^\circ = \frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ} - \frac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ} = \frac{\sin^2 5^\circ - \cos^2 5^\circ}{\cos 5^\circ \sin 5^\circ}$$

چون $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ و $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ ، پس

$$A = \frac{-\cos 10^\circ}{\frac{1}{2} \sin 10^\circ} = -2 \cot 10^\circ = -2 \cot(9^\circ + 1^\circ) = 2 \tan 1^\circ$$

۲۵۱۲- گزینه ۳ معادله را به صورت $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ می نویسیم.

بنابراین جوابها به صورت زیر هستند: $(k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = -\frac{1}{4} \quad (\text{غ.ق.}) \\ x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

۲۵۱۳- گزینه ۱ ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 5 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 3 = 0$$

۲۵۰۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = 3(x+m) - 4 = 3x + 3m - 4$$

از طرف دیگر،

$$(f \circ g)^{-1}(8) = -1 \Rightarrow (f \circ g)(-1) = 8$$

$$3 \times (-1) + 3m - 4 = 8 \Rightarrow 3m - 7 = 8 \Rightarrow m = 5$$

۲۵۰۴- گزینه ۳ اگر (m, n) نقطه برخورد نمودار تابع های f و f^{-1}

باشد، نتیجه می شود $f(n) = m$ و $f(m) = n$ پس

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + b = 2 \\ -1 + 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین $ab = -1$.

۲۵۰۵- گزینه ۴ دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 4$$

کمترین مقدار تابع f برابر $a^2 - |b|$ است. بنابراین

$$a^2 - |b| = -4 \Rightarrow 16 - |b| = -4 \Rightarrow |b| = 20.$$

بیشترین مقدار تابع f برابر $a^2 + |b|$ است که برابر است با $16 + 20 = 36$.

۲۵۰۶- گزینه ۱ تابع $y = \tan x$ روی بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ اکیداً صعودی

است، پس $\tan x \geq \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ و در نتیجه $\tan x \geq -1$. بنابراین

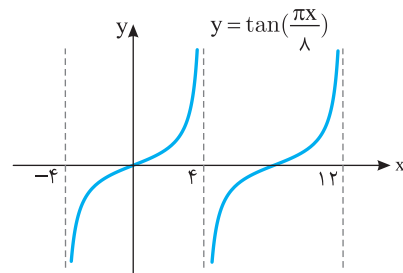
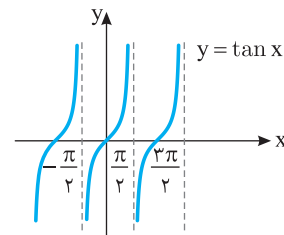
$$2m^2 - 5 \geq -1 \Rightarrow 2m^2 \geq 4 \Rightarrow m^2 \geq 2 \Rightarrow |m| \geq \sqrt{2}$$

پس حداقل مقدار $|m|$ برابر $\sqrt{2}$ است.

۲۵۰۷- گزینه ۲ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y = \tan x$ را

رسم می کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{\lambda}{\pi}$ ضرب می کنیم. نمودار

تابع به شکل زیر است. پس حداقل مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه اش یعنی بازه $(a, 12)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۴ است.



۲۵۰۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $3a - 2$

است که با توجه به نمودار تابع برابر -1 است. پس

$$3a - 2 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

۲۵۱۸- گزینه ۲ چون حد صورت در نقطه $x=2$ برابر ۳ است. باید حد مخرج کسر در این نقطه برابر صفر باشد، تا حد مورد نظر نامتناهی شود. همچنین، چون حد چپ و حد راست کسر هر دو $+\infty$ شده‌اند، پس باید مقادیر $ax-b$ و $3x^2$ در یک همسایگی محذوف نقطه $x=2$ مثبت باشند. در نتیجه $x=2$ ریشه مضاعف معادله $3x^2+ax-b=0$ است، یعنی $3x^2+ax-b$ باید به صورت $3(x-2)^2$ باشد.

در نتیجه

$$3x^2+ax-b=3(x-2)^2=3x^2-12x+12$$

پس $a=-12$ ، $b=-24$ ، یعنی $a+b=-36$.

۲۵۱۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. از طرف دیگر اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $f(x) < -3$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-3)^-} f(t) = -\infty$$

۲۵۲۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله‌ای شامل x^4 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^4 در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $a=2$ ، $b=-4$. به این ترتیب

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3-1}{12x^3+2x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{12x^3} = \frac{1}{3}$$

در نتیجه $ab = \frac{2}{3}$.**۲۵۲۱- گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-k}{x+2}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x)-kf(x)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)(f(x)-k)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-k}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x-2} = f'(-2) \times \frac{f(-2)}{-4} = \frac{k^2}{-4} \end{aligned}$$

بنابراین $\frac{k^2}{-4} = -2$ ، در نتیجه $k^2 = 8$.

۲۵۲۲- گزینه ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x=0$ را به کمک تعریف به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt[3]{x^2+1}-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt[3]{x^2+1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^2+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\sqrt[3]{x^2+1}-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt[3]{x^2+1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt[3]{x^2+1}) = -1 \end{aligned}$$

بنابراین $2f'_+(0)-f'_-(0)=3$.

اگر فرض کنیم $t = \sin x$ ، معادله به صورت $2t^2-5t+3=0$ در می‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t_1 = \frac{3}{2}$ و $t_2 = 1$. چون $\sin x = \frac{3}{2}$ قابل قبول نیست، پس

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad x \in (0, 2\pi) \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادله داده شده تنها یک جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۲۵۱۴- گزینه ۳ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1 \xrightarrow{2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha} 1 - \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 4\pi]$ عبارت‌اند از $x=0$ ، $x=\pi$ ، $x=2\pi$ ، $x=3\pi$ و $x=4\pi$. ولی توجه کنید که جواب‌های $x=\pi$ و $x=2\pi$ در معادله اصلی صدق نمی‌کنند و قابل قبول نیستند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم تولید شده‌اند. بنابراین معادله در بازه $[0, 4\pi]$ سه جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر 7π است.

۲۵۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 1$ برابر صفر است، بنابراین باید حد صورت کسر نیز وقتی $x \rightarrow 1$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-ax+b) = 1-a+b=0 \Rightarrow b-a=-1$$

راه‌حل اول چون $b=a-1$ ، پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-ax+b}{2x^2-3x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-ax+a-1}{(2x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1-a)}{(2x-1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1-a)}{(2x-1)} = \frac{2-a}{2-1} = 2-a \end{aligned}$$

طبق فرض مسئله حاصل حد برابر ۳ است، پس $2-a=3$ ، یعنی $a=-1$. بنابراین $b=a-1=-2$. در نتیجه $a+b=-3$.

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-ax+b}{2x^2-3x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-a}{4x-3} = \frac{2-a}{1} = 2-a$$

پس $2-a=3$ ، بنابراین $a=-1$. چون $b-a=-1$ ، پس $b=-2$. بنابراین $a+b=-3$.

۲۵۱۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x+2}-x} \times \frac{\sqrt{3x-2}+2}{\sqrt{3x-2}+2} \times \frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{x+2}+x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-2-4}{x+2-x^2} \times \frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{3x-2}+2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3(x-2)}{(2-x)(x+1)} \times \frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{3x-2}+2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{-(x+1)} \times \frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{3x-2}+2} \right) = \frac{3}{-3} \times \frac{2+2}{2+2} = -1$$

۲۵۱۷- گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 3^+$ ، آن‌گاه $[x]=3$ و $f(x) = \frac{1}{x-3}$ در

نتیجه $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$. اگر $x \rightarrow 3^-$ ، آن‌گاه $[x]=2$ و $f(x) = \frac{-1}{x-3}$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$.

۲۵۲۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = (8x^3 + 10x)(ax^2 + 1) + (2ax)(2x^2 + 5x - 3)$$

بنابراین

$$f'(1) = (8 + 10)(a + 1) + (2a)(2 + 5 - 3) = 18a + 18 + 8a = 26a + 18$$

چون $f'(1) = -8$ ، پس

$$26a + 18 = -8 \Rightarrow 26a = -26 \Rightarrow a = -1$$

۲۵۲۴- گزینه ۳ چون تابع در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، پس در این

نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$8a + 4 = 4 + 2b \Rightarrow 4a - b = 0$$

$$\text{از طرف دیگر، } f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2 & x > 2 \\ 2x + b & x < 2 \end{cases} \text{ بنابراین}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3ax^2 + 2) = 12a + 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + b) = 4 + b$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 12a + 2 = 4 + b \Rightarrow 12a - b = 2$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات } \begin{cases} 4a - b = 0 \\ 12a - b = 2 \end{cases} \text{ نتیجه می شود } a = \frac{1}{4} \text{ و } b = 1$$

$$\text{پس } a + b = \frac{5}{4}$$

۲۵۲۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$g(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow g'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\text{بنابراین } g'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{2 \times \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{4}}} f'\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) = -4f'(2) \text{ از طرف دیگر}$$

$$g'\left(\frac{1}{4}\right) = (-4)(-5) = 20 \text{ در نتیجه } f'(2) = \frac{4+1}{2-3} = -5$$

۲۵۲۶- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6x, \quad f''(x) = 6x^2 + 6ax + 6$$

پس معادله $6x^2 + 6ax + 6 = 0$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta = 36a^2 - 144 < 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2$$

۲۵۲۷- گزینه ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, 1]$ برابر است با

$$\frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = \frac{0 - (a - 2)\sqrt{1 - a}}{1 - a} = \frac{2 - a}{\sqrt{1 - a}}$$

بنابراین

$$\frac{2 - a}{\sqrt{1 - a}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{(2 - a)^2}{1 - a} = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{4 + a^2 - 4a}{1 - a} = \frac{25}{4}$$

$$4a^2 - 16a + 16 = 25 - 25a$$

$$4a^2 + 9a - 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}, a = -3$$

با توجه به گزینه های داده شده جواب -3 است.

۲۵۲۸- گزینه ۲ فرض کنید نقطه مورد نظر (x_0, y_0) باشد. شیب خط

مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_0)$ است که چون خط مماس

موازی محور x است، پس $f'(x_0) = 0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 3(x_0 - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

بنابراین $y_0 = f(x_0) = f(2) = 6$

۲۵۲۹- گزینه ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطه (x_0, y_0) بر نمودار

تابع f مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق تابع f به ازای $x = x_0$ برابر با

شیب خط $y = 2x + 4$ یعنی ۲ است. بنابراین

$$f'(x) = 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x_0) = 2 \Rightarrow 6x_0^2 - 4 = 2$$

$$x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ یا } x_0 = -1$$

چون نقطه (x_0, y_0) روی نمودار تابع f است، پس

$$y_0 = f(1) = 2 - 4 + 6 = 4 \text{ یا } y_0 = f(-1) = -2 + 4 + 6 = 8$$

بنابراین خط های مورد نظر از نقطه $(1, 4)$ یا نقطه $(-1, 8)$ می گذرند و شیب آن ها ۲

است. پس معادله این دو خط به صورت $y = 2x + 2$ یا $y = 2x + 10$ است.

۲۵۳۰- گزینه ۴ خط $y = 4x + 2$ در نقطه $A(1, 6)$ بر نمودار تابع f

مماس است. بنابراین $f(1) = 6$ و $f'(1) = 4$. در نتیجه چون

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 - a + b = 6 \\ f'(1) = 3 - 2a = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{9}{2} \Rightarrow a + b = 4$$

۲۵۳۱- گزینه ۱ باید تابع مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	+

بنابراین تابع f روی بازه $[0, 1]$ نزولی است. می دانیم در صورتی که $c \geq 0$ و $d \leq 1$ ،

تابع f روی بازه $[c, d]$ نزولی است اما بیشترین مقدار $b - a$ زمانی است که

$$a = 0 \text{ و } b = 1 \text{ پس } b - a = 1 - 0 = 1$$

۲۵۳۲- گزینه ۱ مشتق تابع f برابر است با $f'(x) = -6x^2 + 2ax - 6$

برای آنکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد باید همواره $f' \leq 0$ پس

$$a < 0, \Delta \leq 0 \Rightarrow -6 < 0, \Delta = 4a^2 - 144 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 6$$

۲۵۳۳- گزینه ۲ ابتدا تابع f' را تعیین علامت می کنیم

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	-	+	+
$f(x)$		↘	↘	↗	↘	↗

تابع f' در نقطه های $-2, 0, 1$ هم برابر صفر است و هم در اطراف این

نقطه ها تغییر علامت می دهد. بنابراین تابع f در این نقطه ها اکسترمم نسبی

دارد. پس مجموع طول این نقطه ها برابر $-2 + 0 + 1 = -1$ است.

۲۵۳۹- گزینه ۴ فرض کنید نقطه B روی سهمی به معادله $y=2x^2$

باشد. بنابراین مختصات آن به صورت $B(x, 2x^2)$ است. پس

$$AB = \sqrt{(x-9)^2 + (2x^2-0)^2} = \sqrt{x^2 - 18x + 81 + 4x^4}$$

اگر $f(x) = \sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}$ آن گاه

$$f'(x) = \frac{4x^3 + x - 9}{\sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}}$$

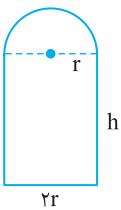
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + x - 9 = 0 \Rightarrow (4x^3 - 8) + (x - 1) = 0$$

$$4(x-1)(x^2+x+1) + (x-1) = (x-1)(4x^2+4x+9) = 0 \Rightarrow x=1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x=1$ به دست می آید. پس نقطه B (۱، ۲) و عرض آن برابر ۲ است.

۲۵۴۰- گزینه ۴ در واقع باید مساحت پنجره

بیشترین مقدار ممکن باشد. پس



$$\text{محیط} = \Delta \Rightarrow 2h + 2r + \left(\frac{2\pi r}{2}\right) = 2h + 2r + r\pi = \Delta$$

$$h = \frac{\Delta - 2r - r\pi}{2} = \frac{\Delta}{2} - r - \frac{r\pi}{2}$$

نیم دایره $S_{\text{دایره}}$ + مستطیل $S_{\text{مستطیل}}$ = مساحت پنجره

$$S(r) = (h \times 2r) + \left(\frac{r \times r \times \pi}{2}\right) = \left(\frac{\Delta}{2} - r - \frac{r\pi}{2}\right) \times 2r + \frac{r^2\pi}{2} = -2r^2 - \frac{r^2\pi}{2} + \Delta r$$

$$S'(r) = -4r - r\pi + \Delta, S'(r) = 0 \Rightarrow -4r - r\pi + \Delta = 0 \Rightarrow r = \frac{\Delta}{4 + \pi}$$

۲۵۴۱- گزینه ۳ حجم جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع ۸ و ارتفاع ۳

است که استوانه‌ای به شعاع ۳ و ارتفاع ۳ از آن حذف شده است. بنابراین حجم جسم حاصل برابر با $V = (8 \times 8 \times \pi) \times 3 - (3 \times 3 \times \pi) \times 3 = 165\pi$ است.

۲۵۴۲- گزینه ۱ با توجه به اینکه BB' قطر کوچک بیضی است و روی

محور y قرار دارد، مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است. پس $b = OB = 4\sqrt{2}$

و $c = OF' = 2$ ، در نتیجه

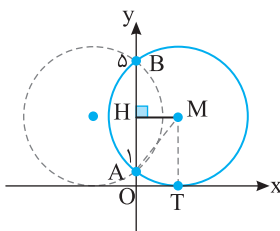
$$a^2 = b^2 + c^2 = (4\sqrt{2})^2 + 2^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

$$S_{ABF'} = \frac{BO \times AF'}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times (6+2)}{2} = 16\sqrt{2}$$

توجه کنید که $AF' = OA + OF' = a + c = 6$

۲۵۴۳- گزینه ۲ فرض کنید نقطه M مرکز دایره مورد نظر باشد و این دایره در

نقطه T بر محور x مماس شده باشد. با توجه به نام گذاری‌های روی شکل $AB = 5 - 1 = 4$ ، پس $AH = 2$. بنابراین $TM = OH = 3$ ، یعنی شعاع این دایره برابر ۳ است.



۲۵۳۶- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = x^2 - 2x - 8$ و

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x=4, x=-2$$

با توجه به آنکه $f(4) = -\frac{83}{3}$ و $f(-2) = \frac{25}{3}$ ، پس نقاط $(-2, \frac{25}{3})$ و

$(4, -\frac{83}{3})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند، بنابراین فاصله آنها برابر است با

$$\sqrt{(4 - (-2))^2 + (-\frac{83}{3} - \frac{25}{3})^2} = \sqrt{6^2 + 36^2} = 6\sqrt{37}$$

۲۵۳۵- گزینه ۲ تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، برای آنکه تابع

در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(2) = 0$ پس

$$f'(x) = \sqrt[3]{x+a} + \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(x+a)^2}}, f'(2) = 0$$

$$f'(2) = \sqrt[3]{2+a} + \frac{3}{3\sqrt[3]{(2+a)^2}} = \frac{2(2+a)+3}{3\sqrt[3]{(2+a)^2}} = 0 \Rightarrow 9+3a=0 \Rightarrow a=-3$$

۲۵۳۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

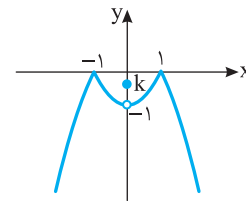
$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & \text{یا } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x^3 - 2x & \text{یا } -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 3x^2 & \text{یا } x < -\sqrt{2} \\ 3x^2 - 2 & \text{یا } -\sqrt{2} < x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

همچنین در نقاط $x = -\sqrt{2}$ و $x = \sqrt{2}$ ، $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست تابع برابر نیستند، پس تابع در این نقطه‌ها مشتق پذیر نیست. بنابراین تابع f، پنج نقطه بحرانی دارد.

۲۵۳۷- گزینه ۴ به نمودار تابع f



توجه کنید. واضح است که اگر تابع f در نقطه $x=0$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، اما ماکزیمم مطلق نداشته باشد، باید $-1 < k < 0$. توجه کنید که اگر $k \geq 0$ ، آن گاه تابع f در نقطه $x=0$ ماکزیمم مطلق تابع f دارد و اگر $k \leq -1$ ، در نقطه $x=0$ مینیمم نسبی دارد.

۲۵۳۸- گزینه ۱ تابع f در تمام نقطه‌های دامنه‌اش مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1-a}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

اگر $f'(x) = 0$ ، آن گاه $a=1$ که در این صورت $f(x)=1$. چون کمترین مقدار

تابع f روی بازه $[0, 4]$ برابر $\frac{4}{3}$ است، پس $a=1$ قابل قبول نیست. پس

$f'(x) \neq 0$ ، بنابراین نقاط ابتدا و انتهای بازه را بررسی می کنیم: $f(0)=a$ و

$$f(4) = \frac{2+a}{3} = \frac{4}{3} \text{ اگر } a = \frac{4}{3}, f(0) = a = \frac{4}{3} \text{ و اگر } a = \frac{4}{3} \text{ و } f(4) = \frac{2+a}{3} = \frac{4}{3}$$

آن گاه $a=2$. بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$ است.

۲۵۴۶- گزینه ۱ در دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$ مرکز دایره نقطه

$O(1, -2)$ و شعاع دایره $r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4 \times (-8)} = \sqrt{13}$ و در

دایره $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ مرکز دایره نقطه $O'(2, -1)$ و شعاع دایره $r' = 3$ است. پس

$$OO' = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{2}$$

$$r + r' = \sqrt{13} + 3$$

$$|r - r'| = \sqrt{13} - 3$$

$$|r - r'| < OO' < r + r'$$

بنابراین دو دایره متقاطع اند.

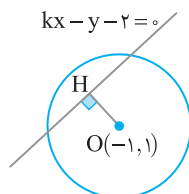
۲۵۴۷- گزینه ۲ در این دایره شعاع برابر ۱ و مرکز نقطه $O(-1, 1)$

است. چون خط $kx - y - 2 = 0$ ، دایره را در دو نقطه قطع کرده است باید فاصله مرکز دایره از خط کمتر از شعاع دایره باشد، پس

$$OH = \frac{|k(-1) - 1 - 2|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} < 1 \Rightarrow \frac{|-k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} < 1$$

$$\frac{(k+3)^2}{k^2 + 1} < 1 \Rightarrow k^2 + 6k + 9 < k^2 + 1$$

$$6k < -8 \Rightarrow k < -\frac{4}{3}$$



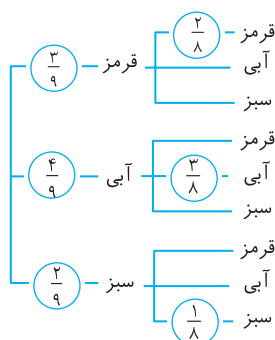
۲۵۴۸- گزینه ۳ A را پیشامد هم‌رنگ بودن هر دو مهره در نظر می‌گیریم.

پس A' پیشامد غیرهم‌رنگ بودن مهره‌ها است. با توجه به نمودار درختی زیر، احتمال هم‌رنگ بودن مهره‌ها برابر است با

$$P(A) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

بنابراین احتمال هم‌رنگ نبودن مهره‌ها برابر است با

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{13}{18}$$



بنابراین $AM = 3$. با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AHM،

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + HM^2 \Rightarrow HM = \sqrt{5}$$

پس مرکز این دایره نقطه $(\sqrt{5}, 3)$ و شعاع آن برابر ۳ است. پس معادله‌اش

به صورت $(x - \sqrt{5})^2 + (y - 3)^2 = 9$ است. دقت داشته باشید که دایره‌ای

به معادله $(x + \sqrt{5})^2 + (y - 3)^2 = 9$ نیز می‌تواند پاسخ این سؤال باشد.

۲۵۴۴- گزینه ۴ مرکز این دایره نقطه $(1, -4)$ است. پس شیب خطی که

شعاع نظیر نقطه $(2, -3)$ روی آن است، برابر است با $m = \frac{-3 - (-4)}{2 - 1} = 1$.

چون خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع عمود است، پس شیب خط

مماس مورد نظر برابر با $m' = -1$ است. پس برای نوشتن معادله خط مورد نظر،

معادله خطی با شیب -1 و گذرنده از نقطه $(2, -3)$ را می‌نویسیم:

$$y + 3 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x - 1$$

۲۵۴۵- گزینه ۲ راه‌حل اول فرض کنید نقاط A و B محل برخورد خط

با دایره و O مرکز دایره باشد. ابتدا توجه کنید که مرکز دایره مورد نظر نقطه

$O(-1, -2)$ است و شعاع این دایره برابر است با

$r = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 4^2 - 4 \times (-4)} = 3$. از طرف دیگر طول پاره‌خط OH برابر با

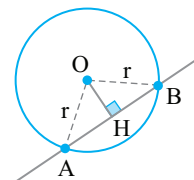
فاصله مرکز دایره از خط است. پس

$$OH = \frac{|2 \times (-1) + 1 \times (-2) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OHA،

$$r^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 3^2 = 5 + AH^2 \Rightarrow AH = 2$$

بنابراین طول وتر مورد نظر برابر با $AB = 2AH = 4$ است.



راه‌حل دوم ابتدا محل‌های برخورد خط و دایره را مشخص می‌کنیم، سپس

فاصله بین این دو نقطه را به دست می‌آوریم که برابر با طول وتر مورد نظر است:

$$2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 2x$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + (1 - 2x)^2 + 2x + 4(1 - 2x) - 4 = 0$$

$$5x^2 - 10x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{10}, x_2 = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{10}$$

$$A(x_1, y_1) = \left(\frac{10 + 4\sqrt{5}}{10}, \frac{10 - 8\sqrt{5}}{10} \right) = \left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, -1 - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$B(x_2, y_2) = \left(\frac{10 - 4\sqrt{5}}{10}, \frac{10 + 8\sqrt{5}}{10} \right) = \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}, -1 + \frac{4\sqrt{5}}{5} \right)$$

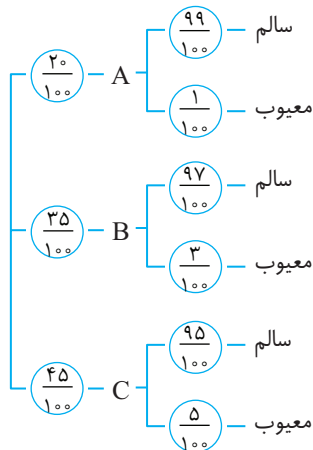
$$AB = \sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} - \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \right)^2 + \left(-1 - \frac{4\sqrt{5}}{5} - \left(-1 + \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{5}}{5} \right)^2 + \left(\frac{-8\sqrt{5}}{5} \right)^2} = 4$$

حالت دوم

دو بار سیاه و یک بار قرمز $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4^3}$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{12}{4^3} + \frac{12}{4^3} = \frac{24}{4^3} = \frac{3}{8}$

۲۵۵۰- گزینه ۴ توجه کنید که



اگر X پیشامد معیوب بودن محصول انتخاب شده باشد، آنگاه

$$P(X) = \frac{20}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{5}{100}$$

$$= \frac{20}{10000} + \frac{105}{10000} + \frac{225}{10000} = \frac{350}{10000} = 0.35\%$$

۲۵۵۱- گزینه ۱ a باید از -2 کمتر نباشد:

$$a \geq -a - 2 \Rightarrow a \geq -1$$

a باید از $-3a + 2$ کمتر باشد:

$$a < -3a + 2 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$$

بنابراین $-1 \leq a < \frac{1}{2}$ و در نتیجه بازه $\left[-1, \frac{1}{2}\right)$ مجموعه مقادیر ممکن برای a است.

۲۵۵۲- گزینه ۲ تساوی داده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{f(a+d)}{a} = \frac{d(a+2d)}{a+d} + 2 \Rightarrow f(a+d)^2 = da(a+2d) + 2a(a+d)$$

$$3a^2 + 4ad - 4d^2 = 0 \Rightarrow \frac{3a^2}{d^2} + \frac{4ad}{d^2} - \frac{4d^2}{d^2} = 0 \Rightarrow 3\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 4\left(\frac{a}{d}\right) - 4 = 0$$

اگر فرض کنیم $k = \frac{a}{d}$ ، آنگاه

$$3k^2 + 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \text{ یا } k = -2$$

۲۵۵۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{5^4 \sqrt{5^3 \sqrt{5}}} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{8}} \times 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{12+3+4}{24}} = 5^{\frac{19}{24}}$$

$$\sqrt[4]{5^6 \sqrt{5}} = 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{8}} = 5^{\frac{2+1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

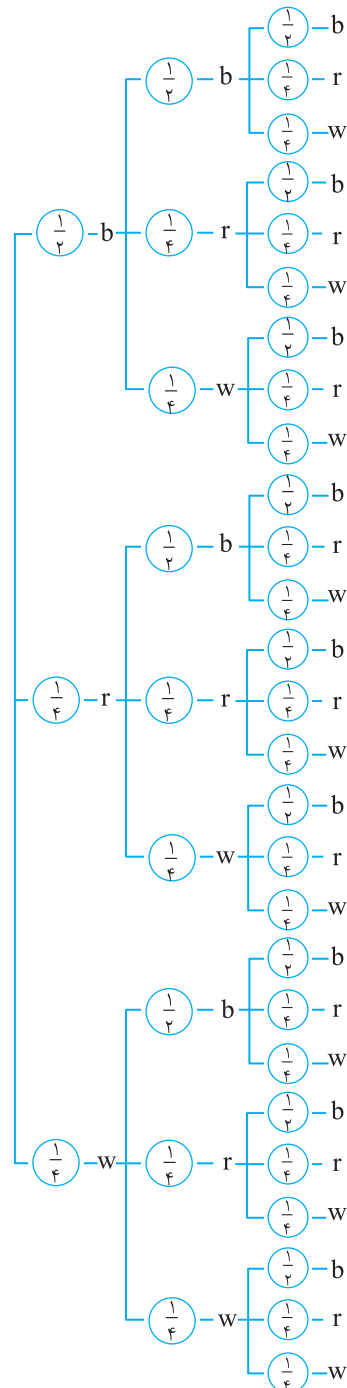
$$\frac{5^{\frac{19}{24}}}{5^{\frac{3}{4}}} = 5^{\frac{19}{24} - \frac{9}{12}} = 5^{\frac{19-18}{24}} = 5^{\frac{1}{24}} = \sqrt[24]{5}$$

۲۵۴۹- گزینه ۲ راه حل اول نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید.

از روی نمودار معلوم می‌شود احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$



(دقت کنید که b ، r و w به ترتیب نماد سیاه، قرمز و سفید هستند.)

راه حل دوم عقربه باید دقیقاً دو بار روی سیاه و یک بار روی قرمز یا سفید قرار گیرد. بنابراین دو حالت رخ می‌دهد.

حالت اول

$$\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4^3}$$

دو بار سیاه و یک بار سفید

۲۵۶۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \sin x + 8 \cos x = \cos x - \sin x$$

$$5 \sin x = -7 \cos x \Rightarrow \tan x = -\frac{7}{5}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2(-\frac{7}{5})}{1 + (-\frac{7}{5})^2} = -\frac{35}{37}$$

۲۵۶۱- گزینه ۲ در نقاطی نمودار تابع f محور طول‌ها را قطع می‌کند که $f(x) = 0$ پس

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

چون جواب‌های واقع در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ را می‌خواهیم، پس

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{(2k+1)\pi}{6} < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow 3 < 2k+1 < 21 \Rightarrow 1 < k < 10$$

بنابراین به ازای $k=2, 3, \dots, 9$ برای x هشت مقدار به دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور طول‌هاست.

۲۵۶۲- گزینه ۲ اگر $x < 0$ ، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن صدق می‌کنند. اگر $x > 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x^2 - x > 2x \Rightarrow x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ \text{یا} \\ x^2 - x < -2x \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

واضح است که $x=0$ نیز جواب نامعادله نیست. بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ است که می‌توانیم آن را به صورت $\mathbb{R} - [0, 3]$ بنویسیم. پس $a=0$ و $b=3$ و در نتیجه $a+b=3$.

۲۵۶۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [0, 4]$$

بنابراین

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq \sqrt{4x - x^2} + 3 \leq 4\}$$

از طرف دیگر

$$-3 \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 1 \Rightarrow 4x - x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 3$$

$$(x-2)^2 \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq \sqrt{3} \\ x-2 \leq -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2+\sqrt{3} \\ x \leq 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

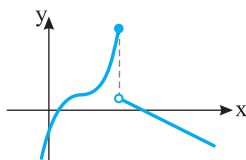
بنابراین

$$D_{f \circ f} = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \geq 2+\sqrt{3} \text{ یا } x \leq 2-\sqrt{3}\} \\ = [0, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, 4]$$

$$\text{پس } ab = 4 - 3 = 1 \text{ و } b = 2 + \sqrt{3}, a = 2 - \sqrt{3}$$

۲۵۶۴- گزینه ۳ اگر $m \neq 0$ ، هر یک از بخش‌های تابع یک‌به‌یک هستند.

اگر $m < 0$ ، نمودار بخش دوم خطی با شیب منفی می‌شود که در این صورت یک‌به‌یک بودن تابع نقض می‌شود. زیرا شکل کلی آن به صورت زیر می‌شود:



۲۵۵۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$a^2 + ab - 6b^2 = 0 \Rightarrow (a-2b)(a+3b) = 0$$

چون $a+3b \neq 0$ ، پس $a-2b=0$ و در نتیجه $a=2b$. پس $\frac{a-4b}{a+3b} = \frac{2b-4b}{2b+3b} = \frac{-2}{5}$ توجه کنید که $b \neq 0$ ، زیرا در غیر این صورت $a=0$ و در نتیجه $a+3b=0$ که تناقض است.

۲۵۵۵- گزینه ۱ طول رأس سهمی برابر $\frac{5}{2}$ است، پس

$$-\frac{a}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = -5$$

مقدار $f(0)$ مساوی ۴ است، پس

$$f(0) = -b \Rightarrow -b = 4 \Rightarrow b = -4$$

بنابراین $f(x) = x^2 - 5x + 4$. مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله $f(x) = 0$ به ترتیب برابر ۵ و ۴ هستند، پس مجموع جواب‌ها یک واحد بیشتر از حاصل ضرب آن‌هاست.

۲۵۵۶- گزینه ۴ فرض می‌کنیم $x^2 + x = t$ و معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1, t = 6$$

اگر $t = -1$

$$x^2 + x = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

این معادله جواب حقیقی ندارد. اگر $t = 6$

$$x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

معادله بالا یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. پس معادله مورد نظر هم یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

۲۵۵۷- گزینه ۲ معادله را به صورت $\sqrt{3-x} = 2 - \sqrt{x}$ می‌نویسیم و

طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$3-x = 4+x-4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 1+x$$

مجدداً طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$16x = 1 + 4x + 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 1 = 0$$

مجموع جواب‌های معادله بالا مورد نظر است که برابر ۳ است (توجه کنید که معادله درجه دوم فوق دو جواب دارد که در معادله اصلی صدق می‌کنند).

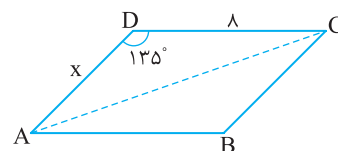
۲۵۵۸- گزینه ۱ مطابق شکل، مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD

دو برابر مساحت مثلث ADC است.

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \times \frac{1}{2} \times x \times 8 \sin 135^\circ = 4\sqrt{2}x$$

بنابراین

$$4\sqrt{2}x = 24\sqrt{2} \Rightarrow x = 6$$



۲۵۵۹- گزینه ۳ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - 2 \sin(2\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi - \alpha)} = 3 \Rightarrow \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{-\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 3$$

$$\cos \alpha - 2 \sin \alpha = -3 \sin \alpha + 6 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = 5 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 5$$

$$\text{بنابراین } \tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{5}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x - \sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2 - \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}}} = \frac{2}{2 - \frac{3}{2}} = 4$$

۲۵۶۹- گزینه ۴ اگر $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+$ ، آن‌گاه $\cos x \rightarrow 0^-$ و در نتیجه

$[\cos x] = -1$. پس باید مقدار عبارت زیر را به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{-1}{\sin x - \sin^2 x}$$

حد مخرج کسر صفر است و مقدار عبارت مخرج مثبت است، زیرا در یک همسایگی راست $\frac{\pi}{2}$ ، نابرابری $0 < \sin x < 1$ برقرار است. بنابراین

$$\sin x - \sin^2 x = \sin x(1 - \sin x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{-1}{\sin x - \sin^2 x} = -\infty$$

۲۵۷۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $f(2) = a$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$$

پس به ازای هیچ مقدار a حد چپ و حد راست تابع نمی‌توانند با مقدار تابع در نقطه $x = 2$ برابر باشند.

۲۵۷۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})(\sqrt{x+6+1}) - \frac{1}{2\sqrt{x+6}}(\sqrt{x+1+2})}{(\sqrt{x+6+1})^2}$$

$$f'(3) = \frac{\frac{1}{2 \times 2}(\sqrt{3+1}) - \frac{1}{2 \times 3}(\sqrt{3+2})}{(\sqrt{3+6+1})^2} = \frac{1}{48}$$

در نتیجه

۲۵۷۲- گزینه ۴ شرط لازم برای مشتق پذیری تابع در یک نقطه پیوستگی

آن است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - a\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx^2 + x)$$

$$1 - a = b + 1 \Rightarrow b = -a$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x = 1$ با هم برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{2\sqrt{x}} & x > 1 \\ 2bx + 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\frac{a}{2}, \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2b + 1$$

$$2b + 1 = -\frac{a}{2} \xrightarrow{b = -a} -2a + 1 = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۲۵۷۳- گزینه ۳ با توجه به تعریف مشتق، از $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{2}{3}$

نتیجه می‌شود $f'(2) = \frac{2}{3}$ و $f(2) = 9$. از طرف دیگر،

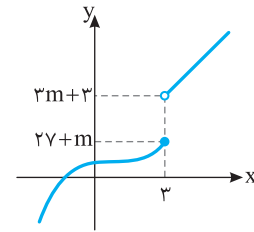
$$g'(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$g'(2) = \sqrt{f(2)} + \frac{2f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = 3 + \frac{2}{6} = \frac{19}{6}$$

بنابراین

اگر $m > 0$ ، نمودار تابع شبیه شکل زیر می‌شود. برای اینکه تابع یک به یک باشد، کافی است عرض نقطه توخالی بیشتر یا مساوی عرض نقطه توپر باشد. در نتیجه

$$27 + m \leq 3m + 3 \Rightarrow m \geq 12$$



۲۵۶۵- گزینه ۴ ابتدا ضابطه تابع وارون f را پیدا می‌کنیم

$$y = 2 - \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 0$$

$$\sqrt{4 - x^2} = 2 - y \Rightarrow 4 - x^2 = (2 - y)^2$$

$$x^2 = 4 - (2 - y)^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{4 - (2 - y)^2} = \sqrt{4y - y^2}$$

چون $-2 \leq x \leq 0$ ، پس $x = -\sqrt{4y - y^2}$ و در نتیجه

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{4x - x^2}$$

بنابراین $a = -1$ و $b = 0$ و در نتیجه $a + b = -1$.

۲۵۶۶- گزینه ۳ اگر نمودار تابع $y = 4f(2x)$ را یک واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع مقابل به دست می‌آید: $y = 4f(2(x-1)) = 4f(2x-2)$

اگر این نمودار را دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = 4f(2x-2) + 2$

به دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع

$y = 4f(2(2x)-2) + 2 = 4f(4x-2) + 2$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را نصف

کنیم، نمودار تابع بازه $y = \frac{1}{2}(4f(4x-2) + 2)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطه

تابعی که نمودار آن رسم شده است به صورت $y = 2f(4x-2) + 1$ است.

۲۵۶۷- گزینه ۴ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$\log_{5/4}(x-3) \geq 1 \Rightarrow \log_{5/4}(x-3) \geq \log_{5/4} 5/4$$

$$x - 3 \leq 5/4 \Rightarrow x \leq 19/4$$

بنابراین دامنه تابع بازه $[3, 19/4]$ است. پس $a = 3$ و $b = 3/5$ و در نتیجه

$$b - a = \frac{1}{5}$$

۲۵۶۸- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

اکنون اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(2x-\sqrt{3x^2+1})(2x+\sqrt{3x^2+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{4x^2 - 3x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{x+1} = \frac{2(2+2)}{2} = 4$$

۲۵۷۹- گزینه ۱ بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$EX \parallel BM \Rightarrow \frac{EX}{BM} = \frac{AX}{AM} \quad (1)$$

$$XY \parallel MN \Rightarrow \frac{AX}{AM} = \frac{XY}{MN} \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{EX}{BM} = \frac{XY}{MN} \xrightarrow{BM=XY} \frac{EX}{XY} = \frac{XY}{9} \Rightarrow XY=6$$

بنابراین تساوی (۲) می‌شود $\frac{AX}{AM} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. اکنون چون $XF \parallel MC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث AMC،

$$\frac{AX}{AM} = \frac{XF}{MC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{8}{9+NC} \Rightarrow NC=3$$

۲۵۸۰- گزینه ۳ طبق فرض

$$\frac{3+0+a+a+4+a+6+a+3}{9} = 4 \Rightarrow \frac{16+4a}{9} = 4 \Rightarrow 16+4a=36$$

$$4a=20 \Rightarrow a=5$$

در نتیجه مرتب شده داده‌ها به صورت ۰، ۳، ۴، ۵، ۵، ۵، ۵، ۶ است. چون تعداد داده‌ها برابر ۹ است، پس میانه برابر داده پنجم یعنی برابر ۵ است.

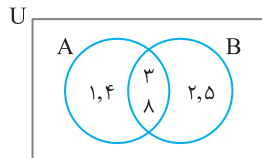
۲۵۸۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $U=\{1, 2, \dots, 8\}$ و $(X')'=X$.

بنابراین

$$A \cap B = ((A \cap B)')' = \{3, 8\}$$

$$A \cup B = ((A \cup B)')' = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

و چون $B-A=\{2, 5\}$ ، پس نمودار ون زیر به دست می‌آید. بنابراین $A=\{1, 3, 4, 8\}$ و مجموع اعضای A برابر ۱۶ است.



۲۵۸۲- گزینه ۱ چون $a+b$ واسطه هندسی $a-b$ و $2a-b$ است، پس

$$(a+b)^2 = (a-b)(2a-b) \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 - 2ab = 0 \Rightarrow a(a-2b) = 0$$

چون $a \neq 0$ ، پس $a-2b=0$ ، در نتیجه $a=2b$ و $r = \frac{a+b}{a-b} = \frac{2b+b}{2b-b} = \frac{3}{2}$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{a_1 r^3}{a_1} = r^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

بنابراین

۲۵۸۳- گزینه ۴ اعداد را با توان‌های گویا می‌نویسیم:

$$\sqrt[6]{12} = 12^{\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[6]{54} = 54^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt[6]{6}} = (2 \times 6^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{3}} = (2 \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{12}} \times 3^{\frac{1}{12}}$$

بنابراین

$$\sqrt[6]{12} \times \sqrt[6]{54} \times \sqrt[3]{2\sqrt[6]{6}} = 2^{\frac{2}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{12}} \times 3^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}} \times 3^{\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{12}} = 2^{\frac{5}{4}} \times 3^{\frac{5}{4}} = 2 \times 3 = 6$$

۲۵۷۴- گزینه ۲ ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+4) - 3x^4}{(x^3+4)^2} = \frac{x(8-x^3)}{(x^3+4)^2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{4}$	۰	۲	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\frac{0}{0}$	-	+	-

بنابراین تابع f روی بازه $[0, 2]$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۲۵۷۵- گزینه ۴ تعداد راه‌های انتخاب سه نقطه از ده نقطه مشخص شده

برابر با $\binom{10}{3}$ است. از این سه‌تایی‌ها، با آن‌هایی که روی یک خط راست هستند، نمی‌توان مثلث رسم کرد. بنابراین تعداد مثلث‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{10}{3} - \binom{5}{3} - \binom{6}{3} = 120 - 10 - 20 = 90$$

۲۵۷۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$$

از طرف دیگر،

$$P(B) = P(A' \cap B) + P(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{7} = P(A' \cap B) + \frac{1}{14}$$

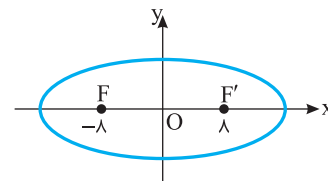
$$P(A' \cap B) = \frac{3}{7} - \frac{1}{14} = \frac{5}{14}$$

۲۵۷۷- گزینه ۱ فاصله کانونی بیضی مورد نظر برابر است با $FF' = 16$.

پس $2c = 16$ ، یعنی $c = 8$. از طرف دیگر، طول قطر بزرگ بیضی برابر است با $2a$. پس $2a = 20$ ، یعنی $a = 10$. اکنون توجه کنید که

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 64 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $2b = 12$.



۲۵۷۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که چون طول ضلع‌های لوزی برابرند،

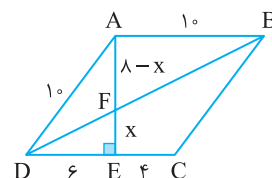
پس $AB = AD = DC = 10$. از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AED،

$$AD^2 = DE^2 + AE^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + AE^2 \Rightarrow AE = 8$$

فرض کنید $EF = x$. در این صورت، از تشابه مثلث‌های AFB و EFD (زز)

نتیجه می‌شود

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AF}{EF} \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{8-x}{x} \Rightarrow 10x = 48 - 6x \Rightarrow 16x = 48 \Rightarrow x = 3$$



گزینه ۱ - ۲۵۹۰ طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + ab$ برابر $-\frac{b}{2a}$ است. پس

عرض رأس این سهمی برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است. پس

$$\frac{-\Delta}{4a} = -2 \Rightarrow \frac{b^2 - 4a^2b}{4a} = 2 \quad (*)$$

اگر در تساوی (*) به جای b قرار دهیم $-2a$ نتیجه می‌شود

$$\frac{4a^2 + 8a^3}{4a} = 2 \Rightarrow a + 2a^2 = 2 \Rightarrow 2a^2 + a - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, & b = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \\ a = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, & b = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad (\text{غ.ق.})$$

این سهمی در نقطه $(0, ab)$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند و عرض این نقطه برابر است با $ab = \frac{-(1 + \sqrt{17})^2}{8} = -\frac{9 + \sqrt{17}}{4}$

گزینه ۲ - ۲۵۹۱ توجه کنید که $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ بنابراین

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | x \neq -2, \frac{2x-3}{x+2} \neq 1\}$$

$$\frac{2x-3}{x+2} \neq 1 \Rightarrow 2x-3 \neq x+2 \Rightarrow x \neq 5$$

از طرف دیگر

پس $D_{f \circ g} = \{x | x \neq -2, x \neq 5\} = \mathbb{R} - \{-2, 5\}$ بنابراین -2 و 5 در دامنه تابع $f \circ g$ قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر ۳ است.

گزینه ۳ - ۲۵۹۲ چون این دو نمودار در نقطه $(1, 2)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(1, 2) \in f \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{a+b} = 2 \Rightarrow a+b = 8$$

$$(1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 1) \in f \Rightarrow f(2) = 1$$

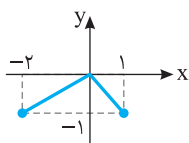
$$\sqrt[3]{2a+b} = 1 \Rightarrow 2a+b = 1$$

در نتیجه

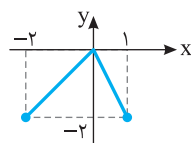
$$\begin{cases} a+b=8 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-7, b=15$$

بنابراین $3a+b = -6$

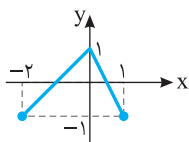
گزینه ۲ - ۲۵۹۳ **راه حل اول** اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f(-x)$ به دست می‌آید. اگر عرض نقاط نمودار به دست آمده را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2f(-x)$ به دست می‌آید. نمودار اخیر را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 1 + 2f(-x)$ به دست آید که به صورت شکل (۲) خواهد بود.



$y = f(-x)$



$y = 2f(-x)$



$y = 1 + 2f(-x)$

گزینه ۲ - ۲۵۸۴ توجه کنید که $a-c = (a-b) + (b-c) = 8$ ، همچنین،

$$\frac{ab-ac+bc-b^2}{a-c} = \frac{-ac+b(a+c)-b^2}{a-c} = \frac{-(b^2-b(a+c)+ac)}{a-c} = \frac{-(b-a)(b-c)}{a-c} = \frac{-(-4)(4)}{8} = 2$$

گزینه ۳ - ۲۵۸۵ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 3$ و $x_1 x_2 = 2m+1$ ، بنابراین

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

در نتیجه

$$x_1 x_2 = 2 \Rightarrow 2m+1 = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ - ۲۵۸۶ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$(x-1)(x-5)(x-2)(x-4) = 4 \Rightarrow (x^2-6x+5)(x^2-6x+8) = 4$$

اکنون فرض می‌کنیم $t = x^2 - 6x + 5$ و معادله به صورت $t(t+3) = 4$ درمی‌آید. بنابراین

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t+8)(t-5) = 0 \Rightarrow t = -8, t = 5$$

اگر $t = 5$ ، آن‌گاه

$$x^2 - 6x + 5 = 5 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$$

اگر $t = -8$ ، آن‌گاه

$$x^2 - 6x + 5 = -8 \Rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0$$

معادله جواب ندارد $\Delta < 0$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۶ است.

گزینه ۱ - ۲۵۸۷ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{x+3} < \frac{x-5}{9} \Rightarrow \frac{9}{x+3} + 5 - x < 0 \Rightarrow \frac{9 + (5-x)(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 24}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x+4)}{x+3} > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-4, -3) \cup (6, +\infty)$ است.

x	$-\infty$	-4	-3	6	$+\infty$
$\frac{(x-6)(x+4)}{x+3}$		-	+	-	+

پس $a = -4$ و $b = 6$ و $ab = -24$

گزینه ۳ - ۲۵۸۸ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin x + 1 - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2\pi \\ \sin \frac{x}{2} = -\cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

گزینه ۱ - ۲۵۸۹ توجه کنید که

$$x \in [-4, -1] \cup [1, 4] \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 4 \\ \text{و} \\ x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \end{cases}$$

پس $1 \leq |x| \leq 4$

۲۵۹۷- گزینه ۳ اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل x^3 وجود داشته باشد، مقدار حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. بنابراین باید ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر باشد، یعنی $a+1=0$ ، پس $a=-1$. در این صورت حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + x}{(b+1)x^2 - 4} = \frac{-2}{b+1}$$

بنابراین $\frac{-2}{b+1} = 2$ ، یعنی $b = -2$. به این ترتیب $a+b = -3$.

۲۵۹۸- گزینه ۲ با توجه به رابطه

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

تابع g همان تابع ثابت $g(x) = -1$ است که روی بازه $[-4, 4]$ فقط در نقطه‌های -4 و 4 ناپیوسته است.

۲۵۹۹- گزینه ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x=1$ همان $f'(1)$ است. پس،

$$f'(x) = 4x^3 + 2mx + 1 \Rightarrow f'(1) = 4 + 2m + 1 = 2 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

۲۶۰۰- گزینه ۲ تابع در نقطه $x=3$ پیوسته است و

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & x > 3 \\ 1 & x < 3 \end{cases}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{4}, \quad f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1$$

بنابراین

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = f'_+(3) + f'_-(3) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

توجه کنید که می‌توانیم از قاعده هوییتال نیز استفاده کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(3+h) + f'(3-h)}{1} = f'_+(3) + f'_-(3) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

۲۶۰۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{x^3} x^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$ و $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} x\sqrt{x}$$

بنابراین

$$f''(4) = -\frac{1}{4} \times 4 \times 2 = -2$$

۲۶۰۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $y' = x^2 + 2x + k$. برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن به ازای هر x نامنفی باشد:

$$x^2 + 2x + k \geq 0$$

بنابراین

$$\Delta = 4 - 4k \leq 0 \Rightarrow k \geq 1$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(-1) = f(2) = -1$. اگر شکل (۲) مربوط به

تابع g باشد، آن‌گاه $g(-2) = g(1) = -1$ از طرف دیگر،

$$g(x) = 1 + 2f(-x) \Rightarrow g(-2) = 1 + 2f(2) = 1 - 2 = -1$$

$$g(1) = 1 + 2f(-1) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین شکل (۲) متعلق به تابع $g(x) = 1 + 2f(-x)$ است.

۲۵۹۴- گزینه ۲ با توجه به شکل، دامنه تابع به صورت $(-\infty, 3)$ است.

از طرف دیگر، با توجه به ضابطه تابع، دامنه تابع به صورت $(-\infty, -\frac{b}{a})$ است که در آن $a < 0$. بنابراین

$$-\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow b = -3a$$

در نتیجه $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(ax - 3a)$. اکنون توجه کنید که نمودار تابع f از

نقطه $(\frac{3}{2}, 0)$ گذشته است. بنابراین

$$f(\frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}a - 3a) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(-\frac{3}{2}a) = 0$$

در نتیجه $a = 1$ ، یعنی $a = -\frac{2}{3}$ ، پس $b = 2$. بنابراین

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}x + 2)$$

در نتیجه اگر $f^{-1}(-2) = m$ آن‌گاه

$$f(m) = -2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}m + 2) = -2$$

$$(\frac{1}{2})^{-2} = -\frac{2}{3}m + 2 \Rightarrow 4 = -\frac{2}{3}m + 2 \Rightarrow m = -3$$

بنابراین $f^{-1}(-2) = -3$.

۲۵۹۵- گزینه ۳ از تساوی $\log \sqrt{\lambda} = a$ نتیجه می‌شود

$$\log \sqrt{\lambda} = a \Rightarrow \frac{1}{2} \log \lambda = a \Rightarrow \log \lambda = 2a$$

بنابراین

$$\log 125 = \log 5^3 = 3 \log 5 = 3 \log \frac{1}{2} = 3(\log 10 - \log 2) = 3(1 - \log 2) = 3 - 3 \log 2$$

$$= 3 - 3 \log 2 = 3 - 3 \log 2$$

۲۵۹۶- گزینه ۲ چون حد مخارج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس

حد صورت هم باید صفر باشد تا حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + b) = 0 \Rightarrow 1 - a + b = 0 \Rightarrow b = a - 1$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + a - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a+1)}{(x-1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a+1}{2x-1} = \frac{2-a}{1}$$

بنابراین

$$2-a = a-4 \Rightarrow a = 3$$

پس $b = 2$ و در نتیجه $a+b = 5$.

۲۶۰۸- گزینه ۲ چون $EF \parallel AC$ ، بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ و $\hat{C}_1 = \hat{F}_1$. بنابراین مثلث‌های AKC و FEK متشابه‌اند (زز). در نتیجه

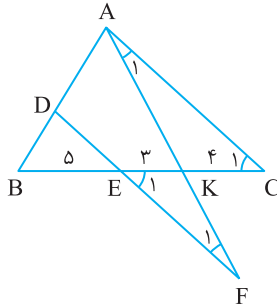
$$\frac{AC}{FE} = \frac{KC}{KE} \quad (1)$$

همچنین، چون $DE \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BAC .

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم به دست می‌آید

$$\frac{AC}{FE} \times \frac{DE}{AC} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{DE}{FE} = \frac{5}{9}$$



۲۶۰۹- گزینه ۲ چون $EF \parallel BC$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه مثلث‌های ABC و AEF متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{AB}\right)^2 = \frac{1}{AB^2}$$

اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{S_{AEF}}{S_{BEFC}} = \frac{1}{AB^2 - 1} \quad (1)$$

اما طبق فرض، $S_{AEF} = S_{BEFC}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{AB^2 - 1} = 1 \Rightarrow AB^2 - 1 = 1 \Rightarrow AB^2 = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

۲۶۱۰- گزینه ۳ ابتدا میانگین داده‌های جدید را به دست می‌آوریم

$$\bar{y} = \frac{18 \times 25 + 20 \times 27 + 28}{18 + 3} \Rightarrow \bar{y} = 25$$

برای محاسبه واریانس از فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 9 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{18} - 625$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 18 \times 634 = 11412$$

بنابراین مجموع مربعات داده‌های قبلی برابر ۱۱۴۱۲ است. مجموع مربعات داده‌های جدید برابر است با

$$A = 11412 + 20^2 + 27^2 + 28^2 = 13325$$

$$\sigma^2_{\text{جدید}} = \frac{A}{21} - (25)^2 = \frac{13325}{21} - 625 = 9/52$$

۲۶۱۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$n(A) + n(A') = n(U) = 56, \quad n(B) + n(B') = n(U) = 56$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم به دست می‌آید:

$$n(A) + n(B) + n(A') + n(B') = 112$$

$$62 + n(A') + n(B') = 112 \Rightarrow n(A') + n(B') = 50$$

$$n(A' \cap B') = n(A') + n(B') - n(A' \cup B') = 50 - 44 = 6$$

۲۶۰۳- گزینه ۱ مقدار تابع f' در نقطه‌های ۱- و ۵ برابر صفر است.

پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول ۱- و ۵ موازی محور x است.

روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(5, +\infty)$ علامت f' منفی است، پس

تابع f روی این بازه‌ها اکیداً نزولی است. روی بازه $(-1, 5)$ علامت f'

مثبت است، پس تابع f روی این بازه اکیداً صعودی است. توجه کنید که فقط

نمودار گزینه (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

۲۶۰۴- گزینه ۳ اگر دایره‌ها بر هم مماس درونی باشند، طول خط‌المركزین

آن‌ها برابر با اختلاف شعاع‌های دایره‌هاست. مرکز دایره‌ها، نقطه‌های $(k, 2)$ و

$(-1, -3)$ و شعاع‌های آن‌ها ۹ و ۲ است.

بنابراین

$$\text{طول خط‌المركزین} = \sqrt{(k+1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(k+1)^2 + 25}$$

در نتیجه

$$\sqrt{(k+1)^2 + 25} = 9 - 2 = 7 \Rightarrow (k+1)^2 + 25 = 49$$

$$(k+1)^2 = 24 \Rightarrow k = \pm\sqrt{24} - 1$$

بنابراین مجموع مقادیر k برابر ۲- است.

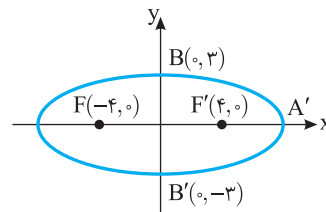
۲۶۰۵- گزینه ۱ چون کانون‌های بیضی روی محور x و دو سر قطر کوچک

بیضی روی محور y هستند، پس مبدأ مختصات مرکز بیضی است (شکل رسم

شده را ببینید). از طرف دیگر، $a = BF = \sqrt{(0+4)^2 + (3-0)^2} = 5$

نتیجه، مرکز دایره مورد نظر نقطه $(0, 0)$ و شعاع آن برابر ۵ است، پس

معادله اش $x^2 + y^2 = 25$ است.



۲۶۰۶- گزینه ۴ فرض کنید تعداد مهره‌های آبی برابر n باشد. در این

صورت تعداد مهره‌های قرمز برابر $2n$ است. اکنون توجه کنید که بنابر فرض،

$$\frac{\binom{n}{1} \binom{2n}{1}}{\binom{3n}{2}} = \frac{y}{15} \Rightarrow \frac{n(2n)}{3n(3n-1)} = \frac{y}{15}$$

$$\frac{4n}{3(3n-1)} = \frac{y}{15} \Rightarrow 20n = 21n - y \Rightarrow n = y$$

۲۶۰۷- گزینه ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که شخص سرطان

داشته باشد، B پیشامد این باشد که جواب آزمایش مثبت باشد و شخص

سرطان داشته باشد و C پیشامد این باشد که جواب آزمایش مثبت باشد و

شخص سرطان نداشته باشد. اگر جواب آزمایش مثبت باشد، یا شخص سرطان

دارد یا ندارد. بنابراین پیشامد مورد نظر $(A \cap B) \cup (A' \cap C)$ است.

همچنین پیشامدهای $A \cap B$ و $A' \cap C$ ناسازگارند. بنابراین احتمال

مورد نظر برابر است با $P(A \cap B) + P(A' \cap C)$. همچنین، پیشامدهای A و B

و نیز A و C ، و در نتیجه A' و C ، مستقل‌اند. بنابراین

$$P(A \cap B) + P(A' \cap C) = P(A)P(B) + P(A')P(C)$$

$$= 0.2 \times 0.95 + (1 - 0.2) \times (0.3) = 0.48$$

۲۶۱۲- گزینه ۴ اگر a, b, c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند،

آنگاه a, b, c هم جملات متوالی دنباله حسابی اند و چون a, b, c جملات متوالی دنباله‌ای هندسی هم هستند، پس $a=b=c$. بنابراین

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{12} \Rightarrow b = 36$$

۲۶۱۳- گزینه ۲ ابتدا مخرج کسرها را با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{3(\sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{3(\sqrt[3]{2} + 1)}{2 + 1} = \sqrt[3]{2} + 1$$

بنابراین $A = \sqrt[3]{2} - 1 + \sqrt[3]{2} + 1 = 2\sqrt[3]{2}$

۲۶۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$a^3 - a - (b^3 - b) = 0 \Rightarrow a^3 - b^3 - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a - b) = 0 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0$$

و چون $a - b \neq 0$ ، پس $a^2 + ab + b^2 = 1$

۲۶۱۵- گزینه ۳ اگر α و β جواب‌های معادله زیر باشند،

$$x^2 - (2m - 3)x + 2n + 2 = 0$$

آن‌گاه

$$\alpha + \beta = 2m - 3, \quad \alpha\beta = 2n + 2$$

همچنین اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - nx + m + 1 = 0$ باشند، آن‌گاه

$$x_1 + x_2 = n, \quad x_1 x_2 = m + 1$$

با توجه به $\alpha = x_1 + 1$ و $\beta = x_2 + 1$ نتیجه می‌شود

$$\alpha + \beta = x_1 + x_2 + 2$$

$$\alpha\beta = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1$$

بنابراین

$$\begin{cases} 2m - 3 = n + 2 \\ 2n + 2 = m + 1 + n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m - 5 = n \\ m = n \end{cases}$$

پس

$$2m - 5 = m \Rightarrow m = 5, \quad n = 5$$

بنابراین $m + n = 10$

۲۶۱۶- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm\sqrt{t}$ ، $t \geq 0$ و معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2 + 2mt + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

در این معادله

$$\Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 1) = 4 > 0$$

بنابراین معادله (*) به ازای هر مقدار m دو جواب دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادله اولیه جواب نخواهد داشت. بنابراین اگر

t_1 و t_2 جواب‌های معادله (*) باشند، باید

$$t_1 + t_2 < 0 \Rightarrow -2m < 0 \Rightarrow m > 0$$

$$t_1 t_2 > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1$$

بنابراین اگر $m > 1$ ، آن‌گاه معادله اولیه جواب ندارد.

طرف تساوی یکسان نیست و معادله جواب ندارد. پس با شرط $x \geq -\frac{1}{2}$ ،

طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$3x + 2 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 + x - 1 = 0$$

پس

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{8}$$

واضح است که $-\frac{1}{2} < \frac{-1 - \sqrt{17}}{8}$ و تنها جواب معادله $\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$ است.

بنابراین $a = -1$ و $b = 1$ و در نتیجه $a + b = 0$.

۲۶۱۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\cos^2 x - \cos^4 x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x) = \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}$$

بنابراین

$$\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

صورت کسر بالا را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$$

۲۶۱۹- گزینه ۲ باید ببینیم معادله $3\cos^4 x + 1 = 1$ در بازه $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ،

چند جواب دارد. یعنی $\cos^4 x = 0$ چند بار در این بازه اتفاق می‌افتد.

$$4x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{8} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8}, \quad k = 2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{8} > \frac{\pi}{2} \text{ (غ.ق.)}$$

پس دو بار خط $y = 1$ نمودار تابع f را در بازه $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ قطع می‌کند.

۲۶۲۰- گزینه ۴ می‌دانیم اگر $-1 \leq a \leq 1$ ، آن‌گاه $|a| \leq 1$. بنابراین

$$\text{نامعادله را به صورت } \left| \frac{x-2}{x-3} \right| \leq 1 \text{ می‌نویسیم. بنابراین}$$

$$\left| \frac{x-2}{x-3} \right| \leq 1 \Rightarrow |x-2| \leq |x-3|, \quad x \neq 3$$

$$|x-2|^2 \leq |x-3|^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

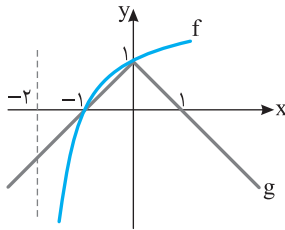
بنابراین $(-\infty, \frac{5}{2}]$ مجموعه جواب‌های نامعادله است و در نتیجه $a = 5$.

پس $b = 2$ و $a + b = 7$.

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$ است. که

همان $f^{-1}(x) = \frac{4x+2|x|}{3}$ است. بنابراین $a=4$ ، $b=3$ و $a+b=7$.

گزینه ۴ - ۲۶۲۵ به نمودار این توابع توجه کنید. نقاط مشترک f و g به صورت $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ هستند که فاصله آنها برابر $\sqrt{2}$ است.



گزینه ۴ - ۲۶۲۶ معادله داده شده را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{2}}(xy) + \log_{\sqrt{2}} \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(xy) + \frac{1}{3} \log_{\sqrt{2}} \frac{x}{y} = 0$$

$$3 \log_{\sqrt{2}}(xy) + 2 \log_{\sqrt{2}} \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}(xy)^3 + \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 0$$

$$\log_{\sqrt{2}}((x^3 y^3) \left(\frac{x}{y}\right)^2) = 0 \Rightarrow x^5 y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$$

بنابراین $\log_x y = \log_x x^{-5} = -5 \log_x x = -5$

گزینه ۳ - ۲۶۲۷ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ و حد مورد نظر

به صورت $\frac{0}{0}$ است. اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^2(x) - 1}{2f^2(x) - 3f(x) + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f(x) - 1)(f(x) + 1)}{(f(x) - 1)(2f(x) - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 1}{2f(x) - 1} = \frac{1 + 1}{2 - 1} = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۳ - ۲۶۲۸ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

پس $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$

گزینه ۲ - ۲۶۲۹ تابع f باید در نقطه $x=6$ پیوسته باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$$

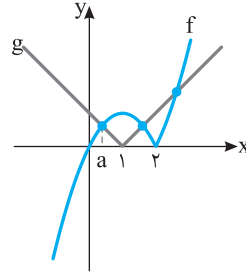
$$a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

گزینه ۲ - ۲۶۳۰ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با -1 .

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x=2$ برابر -1 است. یعنی $f'(2) = -1$. بنابراین

$$g(x) = f^2(x) \Rightarrow g'(x) = 2f(x)f'(x)$$

$$g'(2) = 2f(2)f'(2) = 2 \times 3 \times (-1) = -6$$



گزینه ۲ - ۲۶۳۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x \leq 2 \end{cases}$$

نمودار تابع‌های f و g به صورت مقابل است. کمترین طول نقطه‌های برخورد برابر a است. چون $a < 1$ ، پس

$$g(x) = -x + 1 \text{ و } f(x) = -x^2 + 2x$$

مقدار a از حل معادله

$$-x^2 + 2x = -x + 1 \Rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ (غ.ق.)، } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

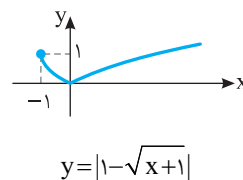
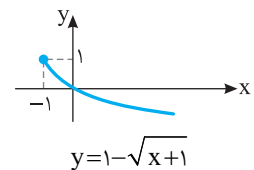
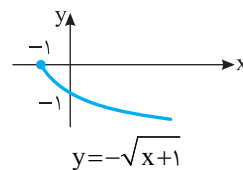
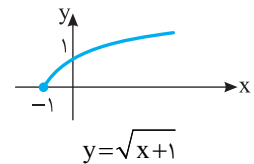
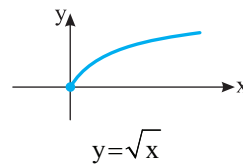
گزینه ۳ - ۲۶۳۲ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$f(x) = [-2x] + 3 \text{ . بنابراین } [x+k] = [x] + k$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x = 0 \\ -1 + 3 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -2 + 3 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -3 + 3 & 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ -4 + 3 & \frac{3}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

بنابراین $R_f = \{3, 2, 1, 0, -1\}$ و برد تابع f پنج عضو دارد.

گزینه ۱ - ۲۶۳۳ مراحل رسم نمودار به صورت زیر است.



گزینه ۳ - ۲۶۳۴ اگر $x < 0$ ، باید وارون تابع $g(x) = \frac{2x+x}{2}$ را پیدا کنیم:

$$g(x) = \frac{3x}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x}{3}, \quad x < 0$$

اگر $x \geq 0$ ، باید وارون تابع $h(x) = \frac{2x-x}{2}$ را پیدا کنیم:

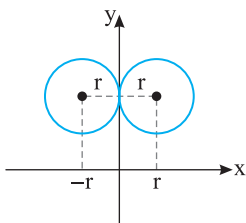
$$h(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = 2x, \quad x \geq 0$$

۲۶۳۶- گزینه ۱ اگر دایره‌ای بر محور y مماس باشد، شعاعش برابر با قدرمطلق طول مرکز آن است (شکل زیر را ببینید). طول مرکز این دایره برابر

است با $2 = -\frac{4}{2}$ و شعاعش برابر است با

$$\frac{1}{2} \sqrt{16 + 4a^2 - 4(4)} = |a|$$

بنابراین $|a| = 2$.



۲۶۳۷- گزینه ۱ چون $EK \parallel AB$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث DAB،

$$\frac{EK}{AB} = \frac{DK}{DB} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{DK}{DB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{DK}{DB} \Rightarrow \frac{3-2}{3} = \frac{DB-DK}{DB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{BK}{BD}$$

اکنون، چون $KF \parallel DC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BDC،

$$\frac{KF}{DC} = \frac{BK}{BD} \Rightarrow \frac{5}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DC = 15$$

۲۶۳۸- گزینه ۴ مساحت مثلث قائم الزاویه ABC برابر مجموع مساحت

دو مثلث ABD و ADC است. پس

$$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{ABD} \Rightarrow \frac{AB \times AC}{2} = \frac{DN \times AC}{2} + \frac{DM \times AB}{2}$$

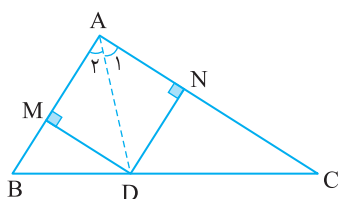
هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه، به یک فاصله است. پس در نتیجه $DM = DN = x$

$$3 \times 7 = x \times 7 + x \times 3 \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = 2.1$$

توجه کنید که $\hat{A}_1 = 45^\circ$ ، پس مثلث ADN قائم الزاویه متساوی الساقین

است. بنابراین

$$AD = x\sqrt{2} \Rightarrow AD = 2.1\sqrt{2}$$



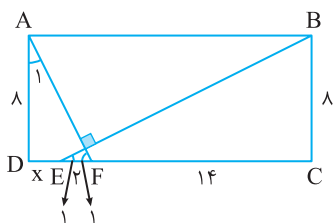
۲۶۳۹- گزینه ۲ فرض کنید $DE = x$. توجه کنید که زاویه‌های E_1 و

F_1 متمم یکدیگرند، همین‌طور زاویه‌های A_1 و F_1 متمم یکدیگرند. بنابراین

$\hat{A}_1 = \hat{E}_1$. در نتیجه، مثلث‌های قائم الزاویه ADF و EBC متشابه‌اند (زز).

به این ترتیب،

$$\frac{DF}{CB} = \frac{AD}{EC} \Rightarrow \frac{x+2}{8} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 2$$



۲۶۳۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{\Delta h} = \frac{3}{\Delta h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} = \frac{3}{\Delta h} f'(2)$$

از طرف دیگر، $f'(x) = 3x^2 - 2$ ، پس $f'(2) = 10$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $\frac{3}{\Delta} \times 10 = 6$.

۲۶۳۲- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = [3, 5]$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} = \sqrt{5-x}$$

$$x-3=5-x \Rightarrow x=4$$

پس $(4, 2)$ نقطه بحرانی تابع f است و مجموع طول و عرض آن برابر ۶ است.

۲۶۳۳- گزینه ۳ توجه کنید که $n > 4$ و

$$\binom{n-2}{n-4} < 45 \Rightarrow \frac{(n-2)!}{(n-4)!(n-2-n+4)!} < 45$$

$$\frac{(n-4)!(n-3)(n-2)}{(n-4)!2!} < 45$$

$$(n-3)(n-2) < 90 \Rightarrow n^2 - 5n - 84 < 0$$

$$(n-12)(n+7) < 0 \Rightarrow n-12 < 0 \Rightarrow n < 12$$

بنابراین $4 < n < 12$ ، بنابراین n یکی از عددهای ۵، ۶، ... و ۱۱ است، که تعداد آن‌ها ۷ تا است.

۲۶۳۴- گزینه ۲ اگر پیشامد «پیروزی بر تیم A» و پیشامد «پیروزی بر

تیم B» را به ترتیب با A و B نشان دهیم، A و B مستقل از هم هستند.

همچنین A و B' و A' و B مستقل از هم هستند. بنابراین احتمال پیروزی فقط بر یکی از دو تیم را به این صورت حساب می‌کنیم:

احتمال پیروزی بر A و شکست از B:

$$P(A \cap B') = P(A)P(B') = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5}{32}$$

احتمال پیروزی بر B و شکست از A:

$$P(A' \cap B) = P(A')P(B) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{3}{8} = \frac{9}{32}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{5}{32} + \frac{9}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$. توجه کنید که

$$(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \emptyset \text{ زیرا } A' \cap B \text{ و } A \cap B' \text{ ناسازگارند.}$$

۲۶۳۵- گزینه ۱ برحسب اینکه رأس مثلث متساوی الساقین کدام نقطه

باشد، سه حالت پیش می‌آید.

حالت اول نقطه $A(\alpha, 6)$ رأس مثلث باشد. در این صورت

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(\alpha+5)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{(\alpha-5)^2 + (6-0)^2}$$

$$(\alpha+5)^2 + 6^2 = (\alpha-5)^2 + 6^2 \Rightarrow |\alpha+5| = |\alpha-5| \Rightarrow \alpha = 0$$

حالت دوم نقطه $B(-5, 0)$ رأس مثلث باشد. در این صورت

$$BA = BC \Rightarrow \sqrt{(-5-\alpha)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(-5-5)^2 + (0-0)^2}$$

$$(\alpha+5)^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow (\alpha+5)^2 = 8^2 \Rightarrow \alpha = 3, \alpha = -13$$

حالت سوم نقطه $C(5, 0)$ رأس مثلث باشد. در این صورت

$$CA = CB \Rightarrow \sqrt{(5-\alpha)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(5+5)^2 + (0-0)^2}$$

$$(5-\alpha)^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow (5-\alpha)^2 = 8^2 \Rightarrow \alpha = -3, \alpha = 13$$

بنابراین مجموع قدرمطلق‌های مقادیر ممکن α برابر است با

$$0 + 2 \times 3 + 2 \times 13 = 32$$

۲۶۴۰- گزینه ۲ با افزودن مقدار ثابتی به هر داده، انحراف معیار تغییری نمی‌کند ولی میانگین به همان مقدار افزایش پیدا می‌کند.

$$(CV)' = \frac{\sigma'}{\bar{x} + \Delta \bar{x}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{CV}{\frac{\bar{x} + \Delta \bar{x}}{\bar{x}}} = \frac{CV}{1 + \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}}} = \frac{1}{3}$$

۲۶۴۱- گزینه ۱ تعداد دایره‌های رنگی در شکل‌ها، مطابق جدول زیر است:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد کل دایره‌ها	۴	۹	۱۶	۲۵
تعداد دایره‌های رنگی	۲	۵	۸	۱۳

تعداد کل دایره‌ها در شکل n ام برابر $(n+1)^2$ است و اگر n عددی فرد باشد، تعداد دایره‌های رنگی $\frac{(n+1)^2}{2}$ است. پس در شکل سیزدهم $\frac{14^2}{2}$ یعنی ۹۸ دایره رنگی وجود دارد.

۲۶۴۲- گزینه ۳ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته است، برای نوشتن ۲۹ دسته نخست از $1+2+3+\dots+29$ عدد استفاده شده است. چون $\frac{29 \times 30}{2} = 435$ پس برای نوشتن ۲۹ دسته نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جمله اول دسته سی‌ام، 436 مین عدد فرد و جمله آخر آن $(436+29)$ مین عدد فرد است. از طرف دیگر، جمله عمومی عددهای فرد به صورت $a_n = 2n-1$ است، پس

$$a_{465} + a_{436} = 2(465) - 1 + 2(436) - 1 = 2(465 + 436 - 1) = 2(900) = 1800$$

۲۶۴۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{5}\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{5 \times 3} \Rightarrow \sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{3} \Rightarrow 5^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان ۸ برسانیم، معلوم می‌شود که

$$5^4 \times 3^4 = 5^2 \times 3^2 \times x \Rightarrow x = 5^2 \times 3^2 = 75$$

۲۶۴۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{3}{abc} \xrightarrow{\times abc} ab - bc - ca = 3$$

از طرف دیگر،

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc - ca)$$

بنابراین

$$4^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

۲۶۴۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $x_1 + x_2 = -6$ و $x_1 x_2 = -3$.

بنابراین

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{x_2} + x_2\right) \left(\frac{x_2}{x_1} + x_1\right) &= 1 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + x_1 x_2 = 1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + x_1 x_2 \\ &= 1 + \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} + x_1 x_2 \\ &= 1 + \frac{(-6)^2 - 2(-3)}{-3} - 3 = 88 \end{aligned}$$

۲۶۴۶- گزینه ۲ چون $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است پس $P(1) = 0$ و

$$a = -28 \text{ پس } a + 4 + 14 + 10 = 0$$

۲۶۴۷- گزینه ۳ طرفین تساوی داده شده را بر $\sin^2 \alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{4 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

$$4 - \cot^2 \alpha + \cot \alpha = 2(1 + \cot^2 \alpha)$$

$$3 \cot^2 \alpha - \cot \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \cot \alpha = 1 \text{ یا } \cot \alpha = -\frac{2}{3}$$

با توجه به اینکه انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه دوم قرار دارد، پس

$$\cot \alpha = -\frac{2}{3} \text{ بنابراین } \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha = \frac{2}{3}$$

۲۶۴۸- گزینه ۲ از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ نتیجه می‌شود

$$\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12}$$

پس

$$\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

۲۶۴۹- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \quad x = \frac{4\pi}{3}$$

پس مجموع جواب‌های بالا برابر است با 4π .

۲۶۵۰- گزینه ۲ ابتدا مجموعه جواب‌های نامعادله داده شده را می‌یابیم

$$x^2 \leq |x| \Rightarrow |x|^2 \leq |x| \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

بنابراین $-1 \leq x^2$ پس

$$A = -(x^2 - 1) - |x| = -|x|^2 - |x| + 1 = \frac{5}{4} - \left(|x| + \frac{1}{4}\right)^2$$

اکنون محدوده عبارت فوق را می‌یابیم

$$0 \leq |x| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq |x| + \frac{1}{4} \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \left(|x| + \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$-\frac{9}{4} \leq -\left(|x| + \frac{1}{4}\right)^2 \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow -1 \leq \frac{5}{4} - \left(|x| + \frac{1}{4}\right)^2 \leq 1$$

بنابراین $-1 \leq A \leq 1$ و کمترین مقدار A برابر -1 است.

۲۶۵۱- گزینه ۳ دامنه تابع مجموعه جواب‌های نامعادله $4x - x^2 - 3 \geq 0$

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

است:

$$D_f = [1, 3] \text{ در نتیجه } a = 1, b = 3, \text{ و } 2a + b = 5$$

۲۶۵۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(g(x)) = \frac{3x-2}{2x-1} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2x}\right) = \frac{3x-2}{2x-1}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $\frac{3}{2x}$ ، به دست می‌آید

$$f(x) = \frac{3 \times \frac{3}{2x} - 2}{2 \times \frac{3}{2x} - 1} = \frac{9 - 4x}{6 - 2x}$$

$$\text{در نتیجه } (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{9-4x}{6-2x} + \frac{3}{2x} = \frac{4x^2 - 6x - 9}{2x^2 - 6x}$$

۲۶۵۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{(a+2)x^2} = \frac{a}{a+2}$$

پس

$$\frac{a}{a+2} = 3 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 + x + 4}{-x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-3x+4)}{(x+1)(-x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x+4}{-x-2} = -7 \end{aligned}$$

۲۶۵۹- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه [-1, 2] برابر است با

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{f(2)-f(-1)}{3} = \frac{6-0}{3} = 2$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه a برابر f'(a) است.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 - 1$$

بنابراین

$$3a^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس نقطه x=1 جواب مسئله است.

۲۶۶۰- گزینه ۴ با استفاده از قواعد مشتق‌گیری، مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} \sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{(x^2+1)^2}} \sqrt{x^3+1}}{\sqrt{(x^2+1)^2}}$$

بنابراین $f'(0) = \frac{0-0}{1} = 0$.

۲۶۶۱- گزینه ۲ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 4$$

بنابراین کمترین مقدار تابع بین مقادیر زیر است:

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = -\frac{3}{4}, \quad f(4) = -32$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع برابر -32 است.

۲۶۶۲- گزینه ۲ اگر مطابق شکل مستطیل را به ابعاد a و b در نظر

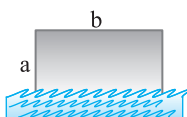
بگیریم، آن‌گاه $2a + b = 48$ و می‌خواهیم $S = ab$ ماکزیمم شود. توجه کنید که $b = 48 - 2a$ و در نتیجه

$$S = a(48 - 2a) = 48a - 2a^2 \Rightarrow S' = 48 - 4a$$

$$S' = 0 \Rightarrow a = 12$$

بنابراین بیشترین مقدار S به ازای $a = 12$ به دست می‌آید و برابر است با

$$12 \times 24 = 288$$



۲۶۵۳- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ را دو واحد به چپ منتقل

کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-(x+2)} = \sqrt{-x-2}$ به دست می‌آید. اگر نمودار

به دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-2}$

به دست می‌آید و اگر این نمودار را مجدداً دو واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار

تابع $y = \sqrt{(x+2)-2} = \sqrt{x}$ به دست می‌آید.

۲۶۵۴- گزینه ۲ قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع f^{-1}

است. پس باید f و f^{-1} برابر باشند. ضابطه f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt[3]{a+bx^3} \Rightarrow y^3 = a+bx^3 \Rightarrow x^3 = \frac{y^3-a}{b}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{b}y^3 - \frac{a}{b}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{b}x^3 - \frac{a}{b}}$$

از تساوی $f(x) = f^{-1}(x)$ نتیجه می‌شود $\sqrt[3]{a+bx^3} = \sqrt[3]{-\frac{a}{b} + \frac{1}{b}x^3}$.

پس $a = -\frac{a}{b}$ و $\frac{1}{b} = b$ و در نتیجه $b = \pm 1$. اگر $b = 1$ ، آن‌گاه $a = 0$ که

قابل قبول نیست. پس $b = -1$.

۲۶۵۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$2^a = 3 \Rightarrow a = \log_2 3 \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_3 2$$

$$3^b = 8 \Rightarrow b = \log_3 8$$

بنابراین $b + \frac{1}{a} = \log_3 8 + \log_3 2 = \log_3 16$ و در نتیجه

$$3^{b + \frac{1}{a}} = 3^{\log_3 16} = 16$$

۲۶۵۶- گزینه ۱ با استفاده از خاصیت $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ معادله را

حل می‌کنیم:

$$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log x}{\log 5} = 2 \Rightarrow \log x \left(\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 5} \right) = 2$$

$$\log x \left(\frac{\log 5 + \log 2}{\log 2 \times \log 5} \right) = 2 \Rightarrow \log x \left(\frac{1}{\log 2 \times \log 5} \right) = 2$$

$$\log x = 2 \log 2 \times \log 5 = \log 4 \times \log 5$$

$$x = 10^{\log 4 \times \log 5} = (10^{\log 4})^{\log 5} = 4^{\log 5}$$

۲۶۵۷- گزینه ۴ برای اینکه تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته باشد، باید

حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{x}}}{x-1} \times \frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x-1}}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطه 1 حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

۲۶۶۳- گزینه ۲ تساوی داده شده را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{(n+2)!}{(n+2-4)!} = 24 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{(n-2)!} = 24$$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} \cdot n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} \cdot n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)! \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (n-2)!} = 24 \Rightarrow \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (n-2)!} = 24$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{n+1-(n-2)} = 24 \Rightarrow (n+1)(n+2) = 72$$

$$n^2 + 3n - 7 = 0 \Rightarrow (n-7)(n+1) = 0 \Rightarrow n = 7$$

۲۶۶۴- گزینه ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که سمانه استخدام شود

B پیشامد این باشد که سمیرا استخدام شود. پیشامد مورد نظر $(A \cap B) \cup (A' \cap B)$ است و چون $A \cap B'$ و $A' \cap B$ ناسازگارند، پس

احتمال مورد نظر برابر است با $P(A \cap B') + P(A' \cap B)$.

از طرف دیگر، چون A و B مستقل‌اند، پس A و B' و نیز A' و B هم مستقل‌اند. بنابراین

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A)P(B') + P(A')P(B)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

۲۶۶۵- گزینه ۴ نقطه تقاطع دو قطر با معادلات $y = 2x - 1$ و

$y = x + 2$ را از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$ به دست می‌آوریم که همان مرکز دایره است:

$$2x - 1 = x + 2 \Rightarrow x = 3, y = 5$$

پس $O(3, 5)$ مرکز دایره و $A(0, 1)$ نقطه‌ای روی دایره است، در نتیجه

$$r = OA = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = 5$$

۲۶۶۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که O وسط AB است. بنابراین

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2b + a}{2} \Rightarrow 2b + a = 2$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{3a + 3b - 1}{2} \Rightarrow 3a + 3b = -3$$

در نتیجه $a = -4$ و $b = 3$. پس کافی است فاصله نقطه‌های $O(1, -2)$ و $A(6, -12)$ را حساب کنیم تا طول شعاع دایره به دست آید:

$$OA = \sqrt{(6-1)^2 + (-12+2)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

۲۶۶۷- گزینه ۳ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی تا کانون‌های

بیضی برابر ۲a است. در نتیجه

$$2a = \sqrt{(3+3)^2 + (\frac{16}{5}-0)^2} + \sqrt{(3-3)^2 + (\frac{16}{5}-0)^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + \frac{16^2}{5}} + \frac{16}{5} = \frac{2}{5} \sqrt{15^2 + 8^2} + \frac{16}{5} = \frac{2 \times 17}{5} + \frac{16}{5} = 10$$

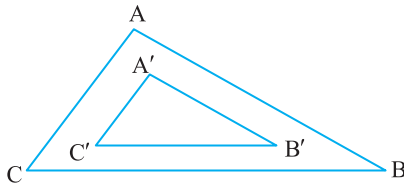
پس $a = 5$. از طرف دیگر $c = OF = 3$ ، در نتیجه خروج از مرکز بیضی

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

۲۶۶۸- گزینه ۳ این دو مثلث که اضلاعی موازی دارند، متشابه هستند.

نسبت تشابه آن‌ها، برابر نسبت دو ضلع بزرگ‌تر یعنی $\frac{9}{6}$ یا $\frac{3}{2}$ است. اگر مساحت مثلث ABC و $A'B'C'$ را به ترتیب S و S' بنامیم، به دست می‌آید

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{S-S'}{S'} = \frac{9-4}{4} = \frac{5}{4} = 1/25$$



۲۶۶۹- گزینه ۴ راه حل اول ارتفاع DH را در مثلث BCD رسم

می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویه ABC است، پس $DH = AD = 2\sqrt{3}$. در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه DHC،

$$DC^2 = DH^2 + HC^2 \Rightarrow 16 = 12 + HC^2 \Rightarrow HC = 2$$

اکنون توجه کنید که بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$DH^2 = HC \times HB \Rightarrow 12 = 2 \times HB \Rightarrow HB = 6$$

پس $BC = 6 + 2 = 8$. به این ترتیب، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BDC،

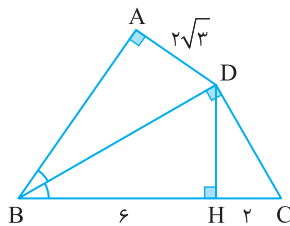
$$BC^2 = BD^2 + DC^2 \Rightarrow 64 = BD^2 + 16 \Rightarrow BD = 4\sqrt{3}$$

راه حل دوم مثلث‌های ABD و DBC متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BDC،

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 \Rightarrow \frac{4}{3} BD^2 = BD^2 + 16 \Rightarrow BD = 4\sqrt{3}$$



۲۶۷۰- گزینه ۴ با توجه به $n = 25$ ، $\bar{x} = 30$ و $s = 8$ ،

$$\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها} = 25$$

$$\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها} = 25 \times 64 = 1600$$

از طرفی داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ دارای میانگین ۳۰ هستند. در نتیجه

x_i	۱۰	۱۵	۴۵	۵۰
$x_i - 30$	-۲۰	-۱۵	۱۵	۲۰

مجموع مربعات اختلاف از میانگین داده‌ها برابر است با

$$400 + 225 + 225 + 400 = 1250$$

حال واریانس ۲۱ داده باقی‌مانده به صورت زیر به دست می‌آید

$$s^2 = \frac{64 \times 25 - 1250}{25 - 4} = \frac{1600 - 1250}{21} = \frac{350}{21} = 16/3$$

۲۶۸۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4) + (3ax + 6a)}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2) + 3a(x + 2)}{x + 2}$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2 + 3a)}{x + 2} = x + 3a - 2, \quad x \neq -2$$

برای اینکه تابع همانی باشد، باید $f(x) = x$ ، پس $3a - 2 = 0$ و در نتیجه $a = \frac{2}{3}$. بنابراین $f(3a) = 3a = 2$.

۲۶۸۳- گزینه ۳ می‌دانیم

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

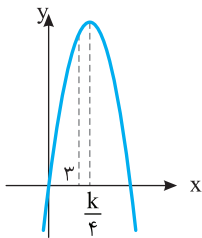
پس $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(f(x)) = g(0) = -2$

$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow g(f(x)) = g(-1) = -2$

بنابراین به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $g(f(x)) = -2$.

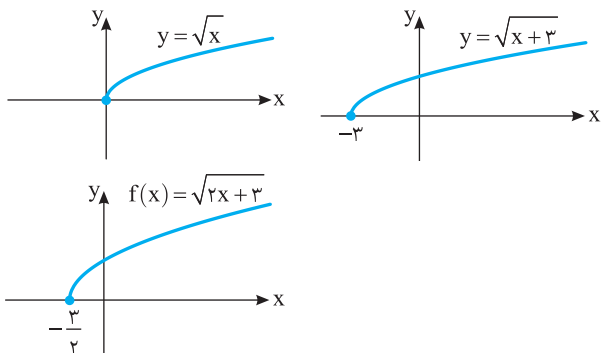
۲۶۸۴- گزینه ۳ نمودار تابع

$y = -2x^2 + kx$ به شکل مقابل است. اگر $x = 3$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع یک به یک است. بنابراین $\frac{k}{4} \geq 3$ ، پس $k \geq 12$.

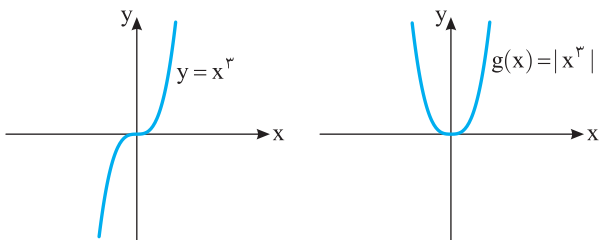


۲۶۸۵- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را سه واحد به چپ منتقل

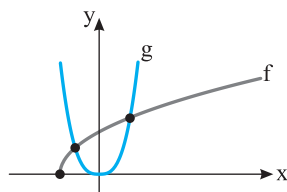
کنیم نمودار تابع $y = \sqrt{x+3}$ به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2x+3}$ به دست می‌آید.



برای رسم نمودار تابع $g(x) = |x^3|$ ، کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را رسم کنیم و قسمتی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد، نسبت به این محور قرینه کنیم.



بنابراین نمودار توابع f و g مطابق شکل زیر در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۶۷۸- گزینه ۳ اگر در صورت و مخرج به جای $\cos^2 10^\circ$ قرار دهیم

$1 - \sin^2 10^\circ$ نتیجه می‌شود

$$\frac{7 + 5 \sin^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ}{3 \sin^2 10^\circ + 2 \cos^2 10^\circ - 1} = \frac{7 + 5 \sin^2 10^\circ - (1 - \sin^2 10^\circ)}{3 \sin^2 10^\circ + 2(1 - \sin^2 10^\circ) - 1}$$

$$= \frac{6 + 6 \sin^2 10^\circ}{\sin^2 10^\circ + 1} = \frac{6(1 + \sin^2 10^\circ)}{1 + \sin^2 10^\circ} = 6$$

۲۶۷۹- گزینه ۲ نمودار تابع از نقطه $(0, 2)$ عبور می‌کند یعنی $f(0) = 2$.

بنابراین

$$f(0) = 4a - 2b \sin 0^\circ = 2 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2 - 2b \sin x$ است. بیشترین مقدار تابع برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x = 1$ به دست می‌آید یا به ازای $\sin x = -1$ (بستگی به علامت b دارد). اگر $b > 0$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x = -1$ به دست می‌آید که برابر است با $2 + 2b$. بنابراین

$$2 + 2b = 6 \Rightarrow b = 2$$

و در نتیجه $f(x) = 2 - 4 \sin x$. اگر $b < 0$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x = 1$ به دست می‌آید که برابر است با $2 - 2b$. بنابراین

$$2 - 2b = 6 \Rightarrow b = -2$$

و در نتیجه $f(x) = 2 + 4 \sin x$. با توجه به اینکه برای x هایی که کمی بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطه $f(x) = 2 + 4 \sin x$ قابل قبول نیست. بنابراین $b = 2$ و در نتیجه $ab = 1$.

۲۶۸۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^6 x + \cos^6 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow 3(\sin x \cos x)^2 = \frac{4}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{1}{15} \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{15}$$

$$\text{بنابراین } \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2\left(\frac{4}{15}\right) = \frac{7}{15}$$

۲۶۸۱- گزینه ۳ اگر $|x+1| \leq 7$ ، آن‌گاه $-7 \leq x+1 \leq 7$ ، یعنی

$-8 \leq x \leq 6$. اگر $0 \leq x \leq 6$ ، آن‌گاه عبارت مورد نظر برابر است با

$$A = x^2 - 4x \text{ که حدود آن به صورت زیر به دست می‌آید:}$$

$$A = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

$$0 \leq x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x-2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq A \leq 12$$

اگر $-8 \leq x \leq 0$ ، آن‌گاه عبارت مورد نظر برابر است با $A = -x^2 - 4x$ که حدود آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A = -x^2 - 4x = -(x+2)^2 + 4$$

$$-8 \leq x \leq 0 \Rightarrow -6 \leq x+2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (x+2)^2 \leq 36$$

$$-36 \leq -(x+2)^2 \leq 0 \Rightarrow -32 \leq A \leq 4$$

پس بیشترین مقدار A برابر ۱۲ و کمترین مقدار آن برابر -۳۲ است و مجموع این دو مقدار برابر -۲۰ است.

۲۶۸۶- گزینه ۳ می توان نوشت

$$y = 3^{\frac{2-x}{2}} - 1 \Rightarrow y+1 = 3^{\frac{2-x}{2}} \Rightarrow \log_3(y+1) = \frac{2-x}{2}$$

$$x = 2 - 2 \log_3(y+1) = \log_3 3^2 - \log_3(y+1)^2 = \log_3 \left(\frac{3}{y+1}\right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \log_3 \left(\frac{3}{x+1}\right)^2$$

بنابراین

۲۶۸۷- گزینه ۲ توجه کنید که $\log_8 9 = \log_3 3^2 = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3}$

پس

$$4^{1+\log_8 9} = 4 \times 4^{\frac{2}{3} \log_3 3} = 4 \times 4^{\frac{2}{3}} = 4 \times (2^{\log_3 3})^{\frac{2}{3}} = 4 \times (2^1)^{\frac{2}{3}} = 4 \times 2^{\frac{2}{3}} = 4 \times \sqrt[3]{2^2} = 4 \times \sqrt[3]{4}$$

$$= 4 \times 2^{\frac{2}{3}} = 4 \times \sqrt[3]{2^2} = 4 \times \sqrt[3]{4}$$

۲۶۸۸- گزینه ۳ راه حل اول چون حد مورد نظر وجود دارد و حد مخرج

برابر صفر است، باید حد صورت هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+a} + 1) = 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{2+a} + 1 = 0 \Rightarrow a = 7$$

اگر $a = 7$ ، حد مورد نظر می شود

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} + 1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} - \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \right) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{48}$$

بنابراین $b-a=41$ و $b=48$

راه حل دوم توجه کنید که حاصل حد را می توانیم به کمک قاعده هوییتال نیز به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+7}}}{2x} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{48}$$

۲۶۸۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2$$

بنابراین به ازای هر مقدار a ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2$

۲۶۹۰- گزینه ۴ چون -1 و 5 صفرهای تابع درجه دوم f هستند، پس

$$f(x) = a(x+1)(x-5) = ax^2 - 4ax - 5a$$

$$f'(1) = -2a \text{ و } f'(-3) = -10a \text{ در نتیجه } f'(x) = 2ax - 4a$$

همچنین، $f(1) = -8a$ ، بنابراین

$$f'(-3)f'(1) = \Delta f(1) \Rightarrow (-10a)(-2a) = -4a \Rightarrow a = -2$$

به این ترتیب $f(2) = 18$ و $f(x) = -2(x+1)(x-5)$

۲۶۹۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $g'(x) = 1 + 3x^2 f'(x^3)$

$$g'(2) = 1 + 3 \times 4 f'(8) = 1 + 12 \times 2 = 25$$

۲۶۹۲- گزینه ۱ در $x=0$ تابع مشتق دارد، زیرا

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

اگر $x \neq 0$ ، آن گاه مشتق تابع به صورت $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ محاسبه می شود.

بنابراین مشتق تابع به ازای هر x حقیقی تعریف می شود و در نتیجه $D_{f'} = \mathbb{R}$.

۲۶۹۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4, \quad 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c = 3$$

در نتیجه $FF' = 2c = 6$. از طرف دیگر، چون مجموع فاصله های هر نقطه از بیضی

تا کانون های بیضی برابر $2a$ است، پس $KF + KF' = 2a = 10$ ، به این ترتیب،

$$KFF' \text{ مثلث } = KF + KF' + FF' = 10 + 6 = 16$$

۲۶۹۴- گزینه ۴ در صورت گسترده دایره، ضرایب x^2 و y^2 برابرند.

پس $a = 3$. بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - by + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - \frac{b}{3}y + 1 = 0$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با $\frac{|b|}{6}$ ، $r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + \frac{b^2}{9}} - 4(1) = \frac{|b|}{6}$ ، طبق فرض

$$r = 2, \text{ در نتیجه } \frac{|b|}{6} = 2 \text{ پس } |b| = 12$$

۲۶۹۵- گزینه ۴ تعداد نقطه های مشخص شده ۹ تا است. تعداد راه های

انتخاب ۴ نقطه از این ۹ نقطه برابر است با $\binom{9}{4} = 126$. تعداد راه های انتخاب

به طوری که دست کم دو تا از آن ها از رأس های مثلث باشند، برابر است با

$$\binom{3}{2} \binom{6}{2} + \binom{3}{3} \binom{6}{1} = 3 \times 15 + 1 \times 6 = 51$$

$$\frac{51}{126} = \frac{17}{42}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{17}{42}$.

۲۶۹۶- گزینه ۱ چون یکی از سه ظرف به تصادف انتخاب می شود،

احتمال انتخاب هر یک برابر $\frac{1}{3}$ است. اگر از ظرف A ، ۴ مهره به تصادف

خارج کنیم، احتمال آنکه ۲ مهره سفید باشد برابر است با

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{6 \times 10}{126} = \frac{10}{21}$$

اگر از هر یک از دو ظرف B یا C ، ۴ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آنکه ۲ مهره سفید باشند برابر است با

$$\frac{\binom{6}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{15 \times 3}{126} = \frac{5}{14}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با

A B C

$$P = \left(\frac{1}{3} \times \frac{10}{21}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{14}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{14}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10}{21} + \frac{5}{14} + \frac{5}{14}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10}{21} + \frac{10}{14}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10}{21} + \frac{15}{21}\right) = \frac{25}{63}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{10+15}{21}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{25}{21} = \frac{25}{63}$$

گزینه ۳ - ۲۷۰۲ فرض کنید سرعت آب برابر ۷ باشد. در این صورت، سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب ۱۰۰+۷ و در جهت مخالف حرکت آب برابر ۱۰۰-۷ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{1200}{100-7} - \frac{1200}{100+7} &= 5 \Rightarrow \frac{240}{100-7} - \frac{240}{100+7} = 1 \\ 240 \left(\frac{1}{100-7} - \frac{1}{100+7} \right) &= 1 \Rightarrow 240 \left(\frac{27}{100^2 - 7^2} \right) = 1 \\ 100^2 - 7^2 &= 4807 \Rightarrow 7^2 + 4807 - 100^2 = 0 \\ (7-20)(7+500) &= 0 \Rightarrow 7=20 \end{aligned}$$

گزینه ۱ - ۲۷۰۳ راهحل اول توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x+1} > 1 &\Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \Rightarrow x > 4 \text{ یا } x < -1 \quad (1) \\ \frac{2x-3}{x+1} < 3 &\Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x+6}{x+1} > 0 \\ x < -6 \text{ یا } x > -1 &\quad (2) \end{aligned}$$

مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.



راهحل دوم اعداد ۵ و -۷ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$1 < \frac{2 \times 5 - 3}{5 + 1} = \frac{7}{6} < 3, \quad 1 < \frac{2 \times (-7) - 3}{-7 + 1} = \frac{17}{6} < 3$$

بنابراین گزینه (۱) جواب نامعادله است.

گزینه ۳ - ۲۷۰۴ باید دسته‌های چهارتایی، پنج‌تایی یا شش‌تایی از هشت شیء متمایز انتخاب کند. تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 70 + 56 + 28 = 154$$

گزینه ۴ - ۲۷۰۵ توجه کنید که

$$\begin{aligned} 3a + \sqrt{2a^2 + 4a} &= 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \Rightarrow 2a^2 + 4a = 4 - 12a + 9a^2 \\ 7a^2 - 16a + 4 &= 0 \Rightarrow (7a-2)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{7}, a = 2 \end{aligned}$$

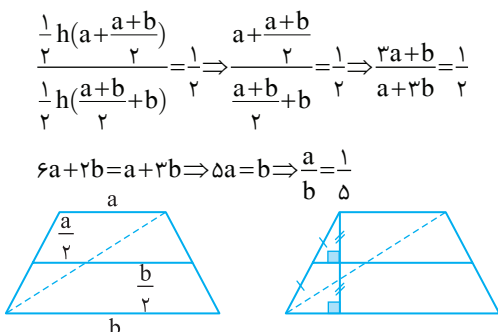
توجه کنید که اگر $a=2$ ، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر

از ۲ است). بنابراین $a = \frac{2}{7}$. در نتیجه $\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$.

گزینه ۲ - ۲۷۰۶ فرض کنید طول قاعده‌ها a و b باشد (شکل رسم شده را

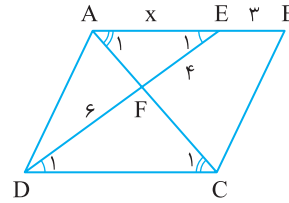
ببینید). در این صورت طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌ها را به هم وصل می‌کند برابر $\frac{a+b}{2}$ است. توجه کنید که ارتفاع دوزنقه بالایی و پایینی برابر

است. در نتیجه اگر این ارتفاع برابر h باشد، آن‌گاه



گزینه ۳ - ۲۶۹۷ فرض کنید $AE=x$. چون $AE \parallel DC$ ، بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{E}_1 = \hat{D}_1$ و $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$. بنابراین مثلث‌های AEF و CDF متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{AE}{CD} = \frac{EF}{DF} \Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{4}{6} \Rightarrow 6x = 4x + 12 \Rightarrow x = 6$$



گزینه ۱ - ۲۶۹۸ طبق تعمیم قضیه تالس در دو مثلث ODE و OBD ،

$$\begin{cases} AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD} \end{cases} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OE} \Rightarrow \frac{3}{3+5} = \frac{3+5}{OE}$$

$$3OE = 64 \Rightarrow OE = \frac{64}{3} \Rightarrow OE = OB + BE \Rightarrow$$

$$8 + BE = \frac{64}{3} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

گزینه ۴ - ۲۶۹۹ فرض کنید $DE=x$. مثلث‌های AEF و DEC متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AF}{DC} = \frac{EF}{ED} \quad (1)$$

چون $FB \parallel DC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث KDC ،

$$\frac{FB}{DC} = \frac{KF}{KD} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$\frac{AF+FB}{DC} = \frac{4}{x} + \frac{5}{9+x} \Rightarrow \frac{DC}{DC} = \frac{4}{x} + \frac{5}{9+x} \Rightarrow 1 = \frac{4}{x} + \frac{5}{9+x}$$

$$x(9+x) = 4(9+x) + 5x \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

گزینه ۴ - ۲۷۰۰ میانگین ۳ داده ۱۶، ۲۴ و ۲۶ برابر است با

$$\frac{16+24+26}{3} = 22$$

واریانس آن‌ها صفر است پس تمام آن‌ها با هم برابرند و ۲۲ هستند.

بنابراین واریانس این ۱۴ داده برابر است با

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(22-22)^2 + \dots + (22-22)^2}{14} + \frac{(16-22)^2 + (24-22)^2 + (26-22)^2}{14} \\ &= \frac{36+4+16}{14} = 4 \end{aligned}$$

بنابراین انحراف معیار ۱۴ داده برابر $\sigma=2$ است.

گزینه ۴ - ۲۷۰۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x} \quad (\pi < x < \frac{3\pi}{2})$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{1+\tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) = -\frac{1}{\cos x} (2 \times \frac{1}{2} - \sin^2 x)$$

$$= -\frac{1}{\cos x} (1 - \sin^2 x) = -\frac{1}{\cos x} \times \cos^2 x = -\cos x$$

۲۷۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(0/4)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x} \Rightarrow 2x-1 = -3x$$

بنابراین

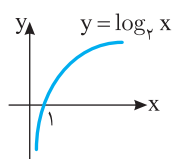
$$2x-1 = -3x \Rightarrow 2x+3x = 1 \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

به ازای $x = -1$ مقدار $9x+1$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸

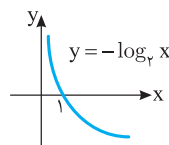
تعریف نمی‌شود. بنابراین $x = \frac{1}{5}$ و

$$\log_8(9x+1) = \log_8(3+1) = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$$

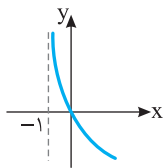
۲۷۱۲- گزینه ۲ نمودار تابع $y = \log_3 x$ به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع $y = -\log_3 x$ به صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع $y = -\log_3(x+1)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:



توجه کنید که $y = -\log_3(x+1) = \log_3(x+1)^{-1}$ بنابراین

$$U(x) = (x+1)^{-1}$$

۲۷۱۳- گزینه ۱ برای اینکه تابع f در نقطه $x = -2$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2)$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq f(-2)$ اکنون

توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1+x^2}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(1+x)(1-x)}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-(1-x)}{1} = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-(1-x)) = -(1-(-2)) = -3$$

چون $f(-2) = a$ پس باید $a = -3$.

توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 12$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq f(-2)$.

۲۷۱۴- گزینه ۱ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای قبولی این فرد در آزمون‌های اول و دوم باشند. در این صورت $P(A) = 0/7$ ، $P(B) = 0/6$ و

$P(B|A) = 0/8$ اکنون توجه کنید که

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0/8 = \frac{P(A \cap B)}{0/7} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/56$$

در نتیجه،

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/7 + 0/6 - 0/56 = 0/74$$

۲۷۰۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (3\sqrt{5})^2 + 6^2 = 81 \Rightarrow BC = 9$$

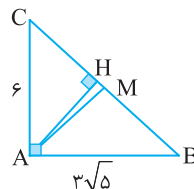
از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow 36 = CH \times 9 \Rightarrow CH = 4$$

$$HM = CM - CH = \frac{BC}{2} - CH = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

اکنون توجه کنید که

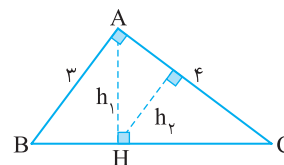
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{BC}{HM} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18$$



۲۷۰۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که طول ضلع دیگر مثلث ABC برابر

$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ است. از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث متشابه با مثلث اصلی ایجاد می‌کند. بنابراین، با نمادگذاری شکل زیر، مثلث‌های ABC و AHC متشابه‌اند. در نتیجه نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$



۲۷۰۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(5\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -(-\sin\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + (-1) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$.

۲۷۱۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار

تابع $y = \sin x$ با تبدیلات به‌دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطه صفر بالای محور x هستند،

پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

برابر $a + b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر

$\sqrt{3}$ است، پس $a + b = \sqrt{3}$. از طرف دیگر، چون نقطه $\left(\pi, -\frac{3}{2}\right)$ روی

نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow b + b\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

$$b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

راه حل دوم با استفاده از قاعده هویتنال به دست می‌آید

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{-16 + 10}{6 \times \frac{1}{3 \times (-2)^2}} = \frac{-6}{2} = -3$$

۲۷۱۹- گزینه ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطه صفر تعریف نشده است، پس درباره حد چپ آن در نقطه صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1$ و در یک همسایگی راست نقطه

صفر مقادیر $2x$ مثبت‌اند، پس $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = -\infty$

۲۷۲۰- گزینه ۳ خارج از برنامه دسی

۲۷۲۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$ از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\Delta - 2x) - (-2)(1 + \sqrt{x})}{(\Delta - 2x)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(-3) + 2(3)}{(-3)^2} = \frac{5}{12}$$

۲۷۲۲- گزینه ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x = 2$ پیوسته و مشتق پذیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 1}$$

$$-4 + 2a + b = \frac{1}{2 - 1} = 1 \Rightarrow 2a + b = 5$$

همچنین،

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x - 1)^2} \Rightarrow -4 + a = -1 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین $b = 5 - 2a = -1$

۲۷۲۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) \times f'(g(2)) \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$g'(x) = \frac{2(x - 1) - (1)(2x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2} \Rightarrow g'(2) = -3$$

همچنین، $g(2) = 5$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $6 = (-3)f'(5)$ پس $f'(5) = -2$

۲۷۲۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{8 - \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(2)$$

از طرف دیگر، $f'(x) = x + \frac{1}{x^2}$ پس $f'(2) = \frac{9}{4}$. بنابراین اختلاف مورد نظر

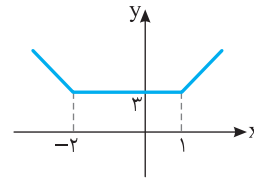
$$\frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ می‌شود}$$

۲۷۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\bar{x} = 80, \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5, CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

$$\bar{x} = 72, \sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4, CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است، پس گروه دوم بهتر است. البته بهتر است که در صورت سؤال پرسیده شود «پراکندگی مسئولیت پذیری در کدام گروه کمتر است».



۲۷۱۶- گزینه ۱ نمودار تابع f

به صورت روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است.

۲۷۱۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$ بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k\pi - \frac{\pi}{12} \leq 2\pi$$

$$\frac{1}{12} \leq k \leq 2 + \frac{1}{12} \Rightarrow k = 1, 2$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{12}, x = 2\pi - \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k\pi + \frac{7\pi}{12} \leq 2\pi$$

$$-\frac{7}{12} \leq k < 2 - \frac{7}{12} \Rightarrow k = 0, 1$$

$$x = \frac{7\pi}{12}, x = \pi + \frac{7\pi}{12} \quad (2)$$

مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با $4\pi + \frac{14\pi - 2\pi}{12} = 5\pi$

۲۷۱۸- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + 2)(x + 8)}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(x + 2)(x + 8)}{2 + \sqrt[3]{x}} \times \frac{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + 2)(x + 8)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{2^3 + \sqrt[3]{x^3}}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + 2)(x + 8)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{8 + x}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}))$$

$$= \frac{1}{6} (-8 + 2)(4 - 2(-2) + 2^2) = -12$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x) = (x-1)^2 - 4$. طول نقطه برخورد نمودار

تابع های f^{-1} و g جواب معادله $f^{-1}(x) = g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(g(x)) \Rightarrow x = f(g(x))$$

$$x = (g(x)-1)^2 - 4 \Rightarrow x+4 = \left(\frac{x-9}{2}-1\right)^2 \Rightarrow x+4 = \left(\frac{x-11}{2}\right)^2$$

$$4x+16 = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$(x-5)(x-21) = 0 \Rightarrow x=5, x=21$$

اکنون توجه کنید که $R_{f^{-1}} = D_f = [1, +\infty)$ ، پس مقادیر f^{-1} مثبت اند. اما

$g(5) < 0$ ، پس $x=5$ جواب معادله $f^{-1}(x) = g(x)$ نیست. بنابراین $x=21$.

گزینه ۲ فرض کنید A_1 پیشامد این باشد که مهره خارج شده

سفید باشد و A_2 پیشامد این باشد که مهره خارج شده سیاه باشد. در این

صورت اگر B پیشامد مورد نظر باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$= \frac{5}{11} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{6}{11} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} \\ = \frac{5}{11} \times \frac{6}{45} + \frac{6}{11} \times \frac{1}{45} = \frac{9}{11 \times 45} = \frac{2}{11}$$

گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x} \quad \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) = \frac{\tan x}{-\frac{1}{\cos x}} \left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\right) \\ = -\tan x \cos x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

گزینه ۴ فرض می کنیم سرعت پرنده در هوای آرام برابر v باشد.

چون سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت است، پس سرعت پرنده در جهت موافق

باد برابر $v+5$ و در جهت مخالف باد برابر $v-5$ است. چون پرنده یک

کیلومتر رفته و یک کیلومتر برگشته است، پس مدت زمان رفت $\frac{1}{v+5}$ و مدت

زمان برگشت $\frac{1}{v-5}$ کیلومتر بر ساعت است. به این ترتیب،

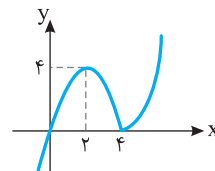
$$\frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{2v}{v^2-25} = \frac{3}{20}$$

$$3v^2 - 40v - 75 = 0 \Rightarrow (3v+5)(v-15) = 0 \Rightarrow v=15$$

گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & x \leq 4 \\ x^2 - 4x & x > 4 \end{cases}$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این شکل معلوم می شود که نقطه مینیمم نسبی تابع f و نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

فاصله این نقطه ها برابر است با $\sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.



گزینه ۳ اگر مطابق شکل داده شده، طول یکی از ضلع های

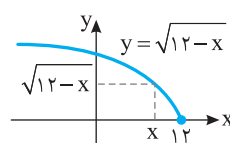
مستطیل برابر x باشد، طول ضلع دیگرش می شود $\sqrt{12-x}$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل} = x\sqrt{12-x}$$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = x\sqrt{12-x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = (1)\sqrt{12-x} + x\left(\frac{-1}{2\sqrt{12-x}}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{12-x}(2\sqrt{12-x}) = x \Rightarrow 2(12-x) = x \Rightarrow x=8$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی

بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر

به ازای $x=8$ به دست می آید و برابر است

$$\text{با } 8\sqrt{4} = 16 \text{ .}$$

گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$FF' = 2c \Rightarrow 8 = 2c \Rightarrow c = 4$$

از طرف دیگر، $2b = 6$ ، پس $b = 3$ و در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{به این ترتیب } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

گزینه ۱ توجه کنید که شکل n ام از مربعی با n^2 دایره و

ردیف هایی از ۱، ۲، ... و $n-1$ دایره درست شده است. بنابراین

$$9^2 + 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 81 + \frac{8 \times 9}{2} = 117$$

گزینه ۴ **راه حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow f(x) + 4 = (x-1)^2$$

$$x = \sqrt{f(x) + 4} + 1$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$. در نتیجه طول نقطه تقاطع نمودار تابع های

f^{-1} و g جواب معادله زیر است:

$$\sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} + 2 = x-9 \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x-11 \quad (1)$$

$$4(x+4) = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-21) = 0$$

$$x=5, x=21$$

توجه کنید که $x=5$ جواب نیست، زیرا به ازای $x=5$ سمت چپ معادله (۱)

مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x=21$.

۲۷۳۳- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{7x-8}{(x+1)(x-2)} - \frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{7x-8-x(x+1)}{(x+1)(x-2)} > 0$$

$$\frac{-x^2+6x-8}{(x+1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{-(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$\frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}$		+	-	-	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر $(-1, 2) \cup (2, 4)$ می‌شود.

راه حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{-8}{-2} > \frac{0}{-2} \Rightarrow 4 > 0, \quad \frac{21-8}{9-3-2} > \frac{3}{3-1} \Rightarrow \frac{13}{4} > \frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه (۳) جواب نامعادله است.

۲۷۳۴- گزینه ۴ باید سه مدرسه از پنج مدرسه انتخاب کنیم (به $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ طریق)

و از هر کدام از آن‌ها یک نفر را انتخاب کنیم (هر کدام به $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ طریق). بنابراین پاسخ

$$\cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

۲۷۳۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2a + \sqrt{3a+16} = 1 \Rightarrow \sqrt{3a+16} = 1-2a \Rightarrow \sqrt{3a+16}^2 = (1-2a)^2$$

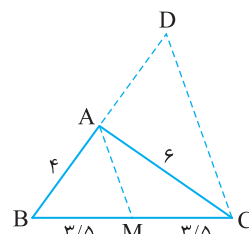
$$3a+16 = 1-4a+4a^2 \Rightarrow 4a^2-7a-15=0$$

$$(4a+5)(a-3)=0 \Rightarrow a=-\frac{5}{4}, a=3$$

توجه کنید که $a=3$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی $a=-\frac{5}{4}$ در

تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a=-\frac{5}{4}$ و $4a+9=4$.

۲۷۳۶- گزینه ۲ راه حل اول توجه



کنید که در مثلث BCD، از نقطه M،

وسط ضلع BC، خطی موازی ضلع CD

رسم شده است. در نتیجه، این خط از

وسط ضلع DB نیز می‌گذرد. یعنی

$$BD=2AB=8$$

راه حل دوم چون $AM \parallel DC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BCD،

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{BM}{6} \Rightarrow BM = 3 \Rightarrow BD = 8$$

۲۷۳۷- گزینه ۲ توجه کنید که در مثلث ایجاد شده هم ضلع‌ها به سه

قسمت برابر تقسیم می‌شوند. از طرف دیگر، مثلث‌های ABC و AEF

متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{AEF} \quad (1)$$

همین‌طور، مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

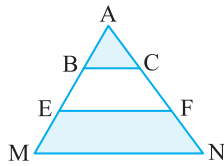
$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{AMN} = \frac{9}{4} S_{AEF}$$

$$S_{AMN} - S_{AEF} = \frac{9}{4} S_{AEF} - S_{AEF}$$

$$S_{EFNM} = \frac{5}{4} S_{AEF} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

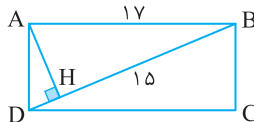
$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFNM}} = \frac{1}{5}$$



۲۷۳۸- گزینه ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD،

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17^2}{15} = \frac{289}{15} = 19 \frac{4}{15}$$

پس طول قطر مستطیل $\frac{4}{15}$ واحد از عدد ۱۹ بیشتر است.



۲۷۳۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha$$

بنابراین (چون $\cos \alpha < 0$ ، ربع سوم است،

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = 0.27$

۲۷۴۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $y = a + b \sin x$ از روی نمودار تابع

معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a + b$ است. چون این

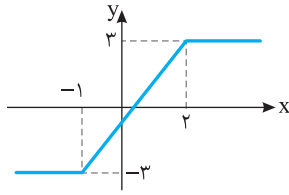
مقدار برابر ۳ است، پس $a + b = 3$. همچنین، نمودار تابع از نقطه $\left(-\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

گذشته است، پس $0 = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = a + b\left(-\frac{1}{2}\right) = a - \frac{b}{2}$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a-\frac{b}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع مورد نظر $y = 1 + 2 \sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ برابر است با } 1 + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2$$



۲۷۴۶- گزینه ۳ نمودار تابع f

به صورت زیر است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

۲۷۴۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

بنابراین $(k \in \mathbb{Z})$

$$3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

چون باید $\cos x \neq 0$ ، پس جواب‌های به شکل $k\pi - \frac{\pi}{2}$ قبول نیستند. در

نتیجه، جواب‌های کلی معادله مورد نظر به صورت $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ هستند $(k \in \mathbb{Z})$.

۲۷۴۸- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2 - \sqrt{3x+2}}{(\Delta x - 8)(x - 2)} \times \frac{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}}{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\lambda - (3x+2)}{(\Delta x - 8)(x - 2)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(\Delta x - 8)(x - 2)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(\Delta x - 8)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})} \\ &= \frac{-3}{(2)(4 + 2 \times 2 + 2^2)} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

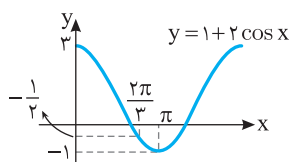
راه حل دوم بنابر قاعده هوییتال.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}{10x - 18} = \frac{-\frac{1}{2}}{20 - 18} = -\frac{1}{2}$$

۲۷۴۹- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} (1 + 2 \cos x) = 0$ و در یک همسایگی راست نقطه $\frac{2\pi}{3}$ ، مقادیر

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = -\infty \text{ بنابراین}$$



۲۷۴۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $3^{x^2-2} = 81^x = (3^4)^x = 3^{4x}$

$$x^2 - 2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{6}, x = 2 + \sqrt{6}$$

چون به ازای $x = 2 - \sqrt{6}$ ، مقدار $x - 2$ منفی می‌شود و $\log_e(x - 2)$ به ازای آن تعریف نشده است. پس $x = 2 - \sqrt{6}$ قابل قبول نیست. بنابراین

$$\log_e(x - 2) = \log_e \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log_e 6 = \frac{1}{2} \quad \text{و در نتیجه} \quad x = 2 + \sqrt{6}$$

۲۷۴۲- گزینه ۲ چون دامنه تابع بازه $(-\frac{a}{2}, +\infty)$ است و از روی نمودار

تابع معلوم می‌شود که این بازه $(\frac{1}{2}, +\infty)$ است، پس $a = -1$. از طرف دیگر

نمودار تابع از نقطه $(2, 0)$ گذشته است. پس $y(2) = 0$:

$$-1 + \log_b(4 - 1) = 0 \Rightarrow \log_b 3 = 1 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین ضابطه تابع $y = -1 + \log_3(2x - 1)$ می‌شود. طول نقطه برخورد

نمودار تابع مورد نظر با خط $y = 1$ جواب معادله زیر است:

$$-1 + \log_3(2x - 1) = 1 \Rightarrow \log_3(2x - 1) = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 9 \Rightarrow x = 5$$

۲۷۴۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{2(-(x - 2))} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{-2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2}{2} = 2$$

چون $f(2) = 2$ ، پس تابع f در نقطه $x = 2$ فقط از راست پیوسته است.

۲۷۴۴- گزینه ۴ فرض کنید A پیشامد موفقیت این فرد و B پیشامد

موفقیت دوستش باشد. در این صورت

$$P(A) = 2P(B), \quad P(A \cup B) = \frac{5}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{(P(A))^2}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{9}$$

$$= P(A) + \frac{P(A)}{2} - \frac{(P(A))^2}{2}$$

$$(P(A))^2 - 3P(A) + \frac{14}{9} = 0 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(A) = \frac{5}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

۲۷۴۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\bar{x}_A = 14$ و $\bar{x}_B = 14/5$. بنابراین

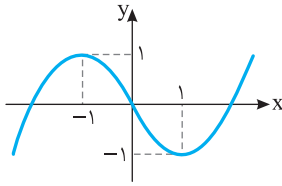
$$\sigma_A^2 = \frac{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = 2$$

$$\sigma_B^2 = \frac{2^2 + 1/5^2 + 1^2 + 1/5^2 + 2^2}{5} = 3/5$$

$$\text{چون } CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{3/5}}{14/5} \text{ و } CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{2}}{14}$$

$$CV_A < CV_B$$

یعنی دقت عمل A بیشتر است. البته بهتر است در صورت سؤال پرسیده شود «نمرات مهارت» کدام کارگر پراکندگی کمتری دارد.



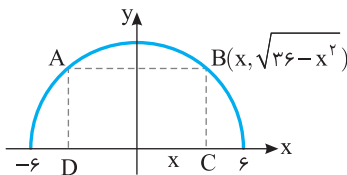
گزینه ۴ - ۲۷۵۶ راه حل اول

باشد و طول نقطه C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطه B روی دایره $x^2 + y^2 = 36$ است، پس عرض نقطه B برابر است با $\sqrt{36 - x^2}$. به این ترتیب، $S_{ABCD} = 2x\sqrt{36 - x^2}$. باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 2\sqrt{36 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 36 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \quad (x > 0)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به ازای $x = 3\sqrt{2}$ به دست می‌آید و برابر است با $2(3\sqrt{2})\sqrt{36 - 18} = 36$.

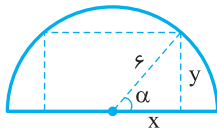


راه حل دوم با نمادگذاری شکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مستطیل

۲x و y باشند. در این صورت $x = 6 \cos \alpha$ و $y = 6 \sin \alpha$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل} = 2xy = 2(6 \cos \alpha)(6 \sin \alpha) = 36 \sin 2\alpha \leq 36$$

توجه کنید که تساوی وقتی به دست می‌آید که $2\alpha = 90^\circ$ ، یعنی $\alpha = 45^\circ$.



گزینه ۱ - ۲۷۵۷ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. فاصله مرکز

دایره تا خط $2x - 3y + 1 = 0$ برابر است با

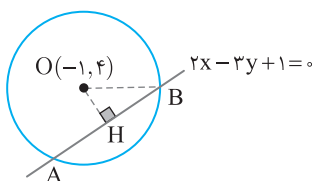
$$OH = \frac{|2(-1) - 3(4) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

چون $HB = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}$ ، پس بنا بر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OHB،

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{5})^2 = 20 \Rightarrow OB = 2\sqrt{5}$$

یعنی شعاع دایره مورد نظر برابر $2\sqrt{5}$ است. بنابراین معادله این دایره به صورت $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$ است. طول نقطه‌های برخورد این دایره با خط $y=2$ جواب معادله زیر هستند:

$$(x+1)^2 + (2-4)^2 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16 \Rightarrow x = -5, x = 3$$



گزینه ۴ - ۲۷۵۰ خارج از برنامه درسی

ابتدا توجه کنید که $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h) - f(\frac{1}{4})}{h} = f'(\frac{1}{4})$

$$f'(x) = \frac{(-1)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$f'(\frac{1}{4}) = \frac{-\frac{1}{2} + (-1)(\frac{1}{4}+1)}{\frac{1}{4}} = 3$$

پس

گزینه ۳ - ۲۷۵۲ چون تابع f در نقطه $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته نیز است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a}{ax+b} = f(2) \Rightarrow \frac{a}{2a+b} = f(2) \Rightarrow 2a+b=2$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(ax+b)^2} & x > 2 \\ -3x^2 + 6 & x < 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-a}{(ax+b)^2} = \frac{-a}{(2a+b)^2} = \frac{-a}{2^2} = -\frac{a}{2}$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x^2 + 6) = -6$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین

توجه کنید که $f(x) = x(\frac{3x+1}{x+2})^{\frac{1}{3}}$ پس

$$f'(x) = (1)(\frac{3x+1}{x+2})^{\frac{1}{3}} + x \times \frac{1}{3} \left(\frac{(3)(x+2) - (1)(3x+1)}{(x+2)^2} \right) (\frac{3x+1}{x+2})^{\frac{1}{3}-1}$$

در نتیجه

$$f'(-3) = (\frac{-8}{-1})^{\frac{1}{3}} + (-3)(\frac{1}{3}) \left(\frac{(3)(-1) - (-8)}{(-1)^2} \right) (\frac{-8}{-1})^{\frac{1}{3}-1} = 2 - 5 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

گزینه ۳ - ۲۷۵۴ ابتدا توجه کنید که نقطه‌های ابتدایی و انتهایی نمودار تابع

$(0, f(0))$ و $(8, f(8))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند

$$\text{برابر است با } \frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{3 - (-5)}{8} = 1. \text{ اکنون طول نقطه‌ای را روی نمودار تابع } f$$

پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

$$f'(x) = \frac{9}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1$$

$$(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x = 2, x = -4 \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین طول نقطه مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با $f(2) = 1$.

معادله خطی که از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است به صورت $y - 1 = (x - 2)$ یعنی $y = x - 1$ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور y را قطع می‌کند برابر است با $y = 0 - 1 = -1$.

گزینه ۱ - ۲۷۵۵ ابتدا توجه کنید که $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & x \leq 0 \\ x^2 - 2x & x > 0 \end{cases}$

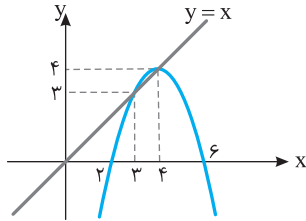
پس نمودار تابع f به صورت زیر است. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع f به ترتیب نقطه‌های $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ هستند که فاصله

$$\sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

آن‌ها برابر است با

راه حل اول برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، کافی است نامعادله $f(x) > x$ را حل کنیم:

$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$
راه حل دوم به نمودار این تابع و خط $y=x$ توجه کنید. در بازه $(3, 4)$ نمودار تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه حل سوم در تابع $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ مقادیر $f(3)$ و $f(4)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(3) = -9 + 24 - 12 = 3, \quad f(4) = -16 + 32 - 12 = 4$$

بنابراین در نقاط $x=3$ و $x=4$ نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینه (۱) جواب است.

گزینه ۴ - ۲۷۶۵ فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+9$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در هر ساعت $\frac{1}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{1}{t+9}$ از این کار را انجام می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9}$ از این کار را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{1}{۲۰}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow 20(t+9) + 20t = t(t+9) \Rightarrow t^2 - 31t - 180 = 0$$

$$(t-36)(t+5) = 0 \Rightarrow t = 36, t = -5 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

گزینه ۲ - ۲۷۶۶ اگر $x \geq \frac{1}{۲}$ ، آن‌گاه معادله به صورت $2x - 1 + x + 2 = 3$

در می‌آید که جواب آن $x = \frac{2}{3}$ است. اگر $-2 < x < \frac{1}{۲}$ ، آن‌گاه معادله به صورت $-2x + 1 + x + 2 = 3$ در می‌آید که $x = 0$ جواب آن است. اگر $x \leq -2$ ، آن‌گاه معادله به صورت $-2x + 1 - x - 2 = 3$ در می‌آید که $x = -\frac{4}{3}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله

$$x = 0 \text{ و } x = \frac{2}{3} \text{ هستند که مجموع آن‌ها برابر } \frac{2}{3} \text{ است.}$$

گزینه ۱ - ۲۷۶۷ ابتدا توجه کنید که

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

بنابراین

$$(g \circ f^{-1})(2) = g(1) = 3, \quad (g \circ f^{-1})(5) = g(2) = 3$$

$$(g \circ f^{-1})(4) = g(3) = 1, \quad (g \circ f^{-1})(6) = g(4) = 2$$

بنابراین

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{5, 4, 6\}$$

در نتیجه

$$D_{\frac{g}{g \circ f^{-1}}} = D_g \cap D_{g \circ f^{-1}} - \{x | (g \circ f^{-1})(x) = 0\} = \{4, 5\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینه (۱) دامنه‌اش $\{4, 5\}$ است.

گزینه ۳ - ۲۷۵۸ توجه کنید که شکل ln از مستطیلی با $2 \times (n+1)$ دایره و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل ln برابر است با $2(n+1) + n = 3n + 2$. پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر است با $3 \times 12 + 2 = 38$.

گزینه ۴ - ۲۷۵۹ ابتدا توجه کنید که

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = g^{-1}(f^{-1}(a))$$

اکنون فرض کنید $f^{-1}(a) = b$. در این صورت

$$f(a) = b \Rightarrow \frac{2}{5}a - 4 = b \Rightarrow a = 3$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(3) = b$. در این صورت

$$g(b) = 3 \Rightarrow b^2 + b = 3 \Rightarrow b = 3$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = g^{-1}(f^{-1}(a)) = g^{-1}(3) = 3$$

گزینه ۲ - ۲۷۶۰ فرض کنید A, B, C به ترتیب پیشامد انتخاب بسته‌های ریاضی، تجربی و علوم انسانی باشند. اگر پیشامد برنده شدن بهروز X باشد، آن‌گاه $P(X) = P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)$

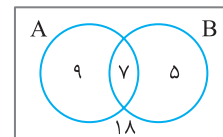
$$= \frac{5}{18} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{18} \times \frac{8}{9} + \frac{6}{18} \times \frac{9}{9} = \frac{35}{180} + \frac{56}{180} + \frac{54}{180} = \frac{145}{180} = \frac{29}{36}$$

گزینه ۴ - ۲۷۶۱ اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامه دیواری را با B نمایش دهیم، آن‌گاه $n(A) = 16$ ، $n(B) = 12$ و $n(A-B) = 9$. بنابراین

$$n(A \cap B) = n(A) - n(A-B) = 16 - 9 = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 16 + 12 - 7 = 21$$

بنابراین $18 - 21 = -3$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



گزینه ۲ - ۲۷۶۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sqrt[5]{4 \times \sqrt[3]{16} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}} = \sqrt[5]{4 \times \sqrt[3]{16} \times 2^{\frac{4}{3}}} = \sqrt[5]{4 \times 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} = \sqrt[5]{4 \times 2^{\frac{8}{3}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{16}{3}}} = 2^{\frac{16}{15}} = 2^2 = 4$$

$$(2A)^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

گزینه ۲ - ۲۷۶۳ برای اینکه سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ همواره

پایین محور x قرار بگیرد، باید $a < 0$ و $b^2 - 4ac < 0$. بنابراین در سهمی به

معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$1-m < 0 \Rightarrow m > 1$$

$$4(m-3)^2 + 4(1-m) < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-5) < 0$$

$$2 < m < 5$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر $2 < m < 5$ است. بنابراین اگر $2 < m < 5$ ، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور x قرار دارد.

گزینه ۱ - ۲۷۶۴ اگر نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را سه واحد به

طرف x های مثبت سپس دو واحد به طرف y های منفی انتقال دهیم، نمودار

تابع $f(x) = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2$ به دست می‌آید. ساده شده

ضابطه این تابع به صورت $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ است. بنابراین می‌خواهیم

بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد.

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطه $x=0$ صعودی است، مقادیر a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین $a=1$ و $b=1$ یا $a=-1$ و $b=-1$. پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا -۲ باشد که فقط حالت $a+b=2$ در گزینه‌ها وجود دارد.

گزینه ۱ - ۲۷۷۲ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\begin{aligned}\sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) \\ &= (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right)\end{aligned}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$(\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x - 1)\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x - 1 = 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2 \quad (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases}$$

معادله $\sin x + \cos x - 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ جواب‌های $x=0$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=2\pi$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

گزینه ۱ - ۲۷۷۳ بازه $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ است،

بنابراین بایستی $x-1 < 2x-1 < x+1$.

مجموعه جواب‌های نامعادله‌های $x+1 < 3$ و $3 < 2x-1$ را به دست می‌آوریم:

$$x+1 < 3 \Rightarrow x < 2 \quad (1)$$

$$3 < 2x-1 \Rightarrow x > 2 \quad (2)$$

اشتراک مجموعه جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

گزینه ۳ - ۲۷۷۴ ابتدا توجه کنید که $f(2)=2a-1$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-1) = 2a-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+\sqrt{x+2})}{x+1} = \frac{3(2+2)}{2+1} = 4$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=2$ پیوسته باشد باید تساوی $2a-1=4$

برقرار باشد که نتیجه می‌شود $a=\frac{5}{2}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید

به کمک قاعده هسپیتال نیز به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 4$$

گزینه ۴ - ۲۷۶۸ ابتدا دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \\ 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-3, 1) \cup (1, 3]$$

برای اینکه بازه $(k-2, 3k+2)$ زیرمجموعه دامنه تابع f باشد یا باید زیرمجموعه $[-3, 1)$ باشد یا باید زیرمجموعه $(1, 3]$ باشد. پس دو حالت زیر

را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $(k-2, 3k+2) \subseteq [-3, 1)$. در این حالت باید $k-2 \geq -3$ و

$$3k+2 \leq 1 \Rightarrow k \leq -\frac{1}{3}$$

حالت دوم $(k-2, 3k+2) \subseteq (1, 3]$. در این حالت باید $k-2 \geq 1$ و

$$3k+2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3}$$

بنابراین $k \in [-1, -\frac{1}{3}]$ بازه (۴) آمده است.

گزینه ۴ - ۲۷۶۹ توجه کنید که اگر $g(x) = x^2 - x$ ، آن‌گاه $g(1) = 0$ و

$$g(2) = 2$$

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 2$$

بنابراین

$$f(1) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 0 \Rightarrow 2^{-A-B} = 2 \Rightarrow -A-B = 1 \Rightarrow A+B = -1$$

$$f(2) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 2 \Rightarrow 2^{-2A-B} = 4 \Rightarrow -2A-B = 2 \Rightarrow 2A+B = -2$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات } \begin{cases} A+B = -1 \\ 2A+B = -2 \end{cases} \text{ نتیجه می‌شود } A = -1 \text{ و } B = 0.$$

در نتیجه

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \Rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 6$$

گزینه ۲ - ۲۷۷۰ ابتدا توجه کنید که

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin \frac{15\pi}{4} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳ - ۲۷۷۱ ابتدا توجه کنید که $f(x) = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$. بنابراین

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|2b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $1 + \frac{a}{2}$ است. با توجه

به نمودار تابع f دوره تناوب برابر $\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$ و حداکثر مقدار تابع برابر

$$\frac{3}{2} \text{ است. بنابراین}$$

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1, \quad 1 + \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

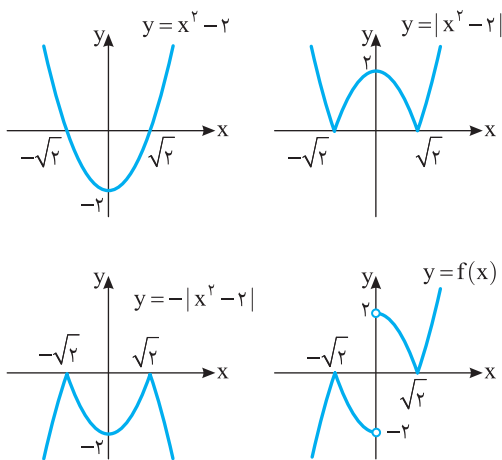
۲۷۸۰- گزینه ۳ راه حل اول تابع f در $x=0$ تعریف نشده پس در این

نقطه مشتق پذیر نیست. عبارت $x^3 - 2x$ در ضابطه f داخل قدرمطلق قرار دارد و این عبارت در $x=0$ و $x=\pm\sqrt{2}$ برابر صفر می شود و در نتیجه تابع f در این نقاط مشتق پذیر نیست. بنابراین تابع f در سه نقطه مشتق ندارد.

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x} = \frac{|x||x^2 - 2|}{x} = \begin{cases} |x^2 - 2| & x > 0 \\ -|x^2 - 2| & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که در $x=0$ ، $x=\sqrt{2}$ و $x=-\sqrt{2}$ تابع f مشتق پذیر نیست.



۲۷۸۱- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 2]$ برابر است با

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

آهنگ تغییر لحظه ای تابع f در $x = \frac{3}{4}$ برابر است با $f'(\frac{3}{4})$:

$$f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{4(x+2)}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'(\frac{3}{4}) = 2 + \frac{11}{4} = \frac{19}{4}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 2]$ از آهنگ لحظه ای آن در

$$x = \frac{3}{4} \text{ به اندازه } 5 - \frac{19}{4} = \frac{1}{4} \text{ بیشتر است.}$$

۲۷۸۲- گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع f معلوم است که این تابع فقط در

$x=3$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx = x(4x^2 + 3ax + 2b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=0$ نباید تغییر کند و فقط در $x=3$ باید تغییر کند.

بنابراین باید $b=0$ و

$$f'(x) = x(4x^2 + 3ax) = x^2(4x + 3a)$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \Rightarrow f(-2) = 48$$

۲۷۷۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1) = a+b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x[x]) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته است، پس $a+b=0$. از طرف دیگر

$$f(-1) = -a+b, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax+b) = -a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x[x]) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (-x) = 1$$

تابع f در نقطه $x=-1$ پیوسته است، پس $-a+b=1$. از حل دستگاه

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=1 \end{cases} \text{ نتیجه می شود } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

۲۷۷۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-5) = -1$. بنابراین اولاً باید

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت $x^2 + ax + b$ در

یک همسایگی نقطه $x=2$ مثبت باشد. پس $x^2 + ax + b$ باید برابر $(x-2)^2$ باشد، در نتیجه

$$x^2 + ax + b = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

پس $a+b=0$.

۲۷۷۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{f}{3}$$

$$\text{بنابراین } (f \circ g)'(1) = g'(1)f'(g(1)) = g'(1)f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{f}{3} = 2$$

۲۷۷۸- گزینه ۴ خط $y = 3x - 5$ در نقطه $(2, 1)$ بر نمودار تابع y

مماس است. پس $g(2) = 1$ و $g'(2) = 3$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$\text{بنابراین } (f \circ g)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = g'(2)f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

۲۷۷۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه $x=2$

علامت عبارت $x^2 - 2x = 2x - x^2$ منفی است، بنابراین $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$ در

واقع تابع f به صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 0 \\ 2 - 2x & 0 < x < 2 \\ x + a & x > 2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، پس $f'_+(2) = f'_-(2)$. بنابراین

$$2 + a = 2 - 4 \Rightarrow a = -4$$

از طرف دیگر تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$2 + 2a + b = 4 - 4 \Rightarrow b = -2a - 2 = 6$$

بنابراین

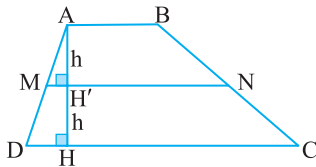
$$\text{در نتیجه } a + b = 2$$

بنابر فرض سؤال.

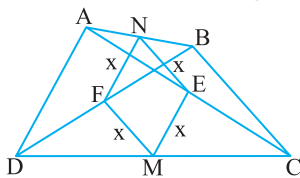
$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{\frac{1}{2}h(AB+MN)}{\frac{1}{2}h(MN+DC)} = \frac{3}{5}$$

$$\Delta AB + \Delta MN = 3MN + 2DC$$

$$\Delta AB - 2DC = -2\left(\frac{AB+DC}{2}\right) \Rightarrow \Delta AB = 2DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{1}{3}$$



گزینه ۱ - ۲۷۸۸ فرض کنید نقاط M و N وسط‌های دو ضلع غیر مجاور چهارضلعی ABCD و نقاط E و F وسط‌های دو قطر آن باشند و چهارضلعی MENF لوزی به ضلع x باشد. بنابر قضیه میان خط در مثلث نتیجه می‌گیریم $AD = 2ME = 2x$ و $BC = 2EN = 2x$. پس $BC = AD$. یعنی دو ضلع غیرمجاور دیگر چهارضلعی ABCD برابرند.



گزینه ۳ - ۲۷۸۹ اگر AA' قطر بزرگ و BB' قطر کوچک بیضی

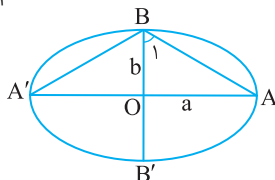
باشند، آنگاه اندازه زاویه ABA' مورد سؤال است. می‌دانیم $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ و بنابر فرض $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

پس

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{2}{3} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه OAB می‌نویسیم

$$\tan \hat{B} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{ABA'} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$



گزینه ۲ - ۲۷۹۰ داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

$$10/6, 10/6, 11/2, 11/5, 11/9, 12/3, 12/7, 12/8, 13/5, 30/2$$

چون تعداد داده‌ها ۱۰ است، پس میانه برابر میانگین داده‌های پنجم و ششم، چارک اول برابر داده سوم و چارک سوم برابر داده هشتم است. بنابراین

$$Q_2 = \frac{11/9 + 12/3}{2} = 12/1, Q_1 = 11/2, Q_3 = 12/8$$

$$\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{11/2 + 12/8 - 2 \times 12/1}{12/8 - 11/2} = \frac{-1/2}{1/6} = -3$$

گزینه ۲ - ۲۷۸۳ فرض کنید B_1 پیشامد تعلق لامپ انتخابی به جعبه

اول، B_2 پیشامد تعلق لامپ انتخابی به جعبه دوم و A پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی باشد. طبق فرمول احتمال کل،

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

طبق فرض $P(B_1) = \frac{5}{12}$ و $P(B_2) = \frac{7}{12}$ ، زیرا لامپ را از بین ۵ لامپ از

جعبه اول و ۷ لامپ از جعبه دوم انتخاب می‌کنیم. همچنین چون ۴ تا از ۲۰

لامپ جعبه اول و ۳ تا از ۱۲ لامپ جعبه دوم معیوب‌اند، پس $P(A|B_1) = \frac{4}{20}$

و $P(A|B_2) = \frac{3}{12}$. در نتیجه

$$P(A) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{20} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{7}{48} = \frac{11}{48}$$

گزینه ۳ - ۲۷۸۴ می‌دانیم اگر A و B مستقل باشند، A و B' نیز

مستقل‌اند. بنابراین

$$\begin{cases} P(A \cap B) = 0/6 \\ P(A \cap B') = 0/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A)P(B) = 0/6 \\ P(A)P(B') = 0/2 \end{cases}$$

$$P(A)P(B) + P(A)P(B') = 0/8$$

$$P(A)(P(B) + P(B')) = 0/8 \Rightarrow P(A) = 0/8$$

$$\frac{P(A)P(B) = 0/6}{0/8} \Rightarrow P(B) = \frac{0/6}{0/8} = \frac{3}{4}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \\ 0/8 + (1 - \frac{3}{4}) - 0/2 = 0/8 + 0/4 - 0/2 = 0/8$$

گزینه ۱ - ۲۷۸۵ فرض کنید A پیشامد شرکت کردن امیر و B پیشامد

شرکت کردن بهروز در مسابقه علمی باشد. طبق فرض $P(A) = 0/6$ ،

$P(B) = 0/3$ و $P(A|B) = 0/5$. باید $P(A|B')$ را حساب کنیم. طبق

قانون احتمال کل

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$0/6 = 0/3 \times 0/5 + (1 - 0/3)P(A|B')$$

$$0/6 = 0/15 + 0/7P(A|B') \Rightarrow P(A|B') = \frac{0/45}{0/7} = \frac{9}{14}$$

گزینه ۲ - ۲۷۸۶ اگر فضای نمونه‌ای آزمایش را فقط برای مهره دوم

تشکیل دهیم، ۱۰ مهره عضو این فضای نمونه‌ای هستند که ۶ تا از آن‌ها سفید

است. بنابراین احتمال سفید بودن مهره دوم $0/6$ است.

گزینه ۲ - ۲۷۸۷ در دوزنقه ABCD نقاط M و N وسط‌های دو ساق

هستند، پس بنابر قضیه میان خط در دوزنقه $MN = \frac{AB+DC}{2}$ و اگر ارتفاع

AH را رسم کنیم، آنگاه $AH' = HH' = h$.

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که عدد ۱ در نامعادله صدق می کند. زیرا $1 < \frac{1+1}{2-1} < 3$

همچنین عدد $\frac{3}{2}$ در نامعادله صدق می کند

$$1 < \frac{\frac{3}{2}+1}{2(\frac{3}{2})-1} < 3 \Leftrightarrow 1 < \frac{5}{4} < 3$$

این اعداد فقط عضو بازه گزینۀ (۴) هستند.

راه حل سوم نامعادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \Rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{4}{5}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}, 2)$$

از اشتراک دو مجموعه جواب به دست آمده نتیجه می شود

$$x \in (\frac{1}{2}, 2) = (0/8, 2)$$

۲۷۹۶- گزینۀ ۱ **راه حل اول** مختصات نقاط را در معادله سهمی قرار می دهیم:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow 0+0+c=5 \Rightarrow c=5, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=1 \Rightarrow a+b=6$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow 4a-2b+c=5 \Rightarrow 4a-2b=0 \Rightarrow b=2a$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات} \begin{cases} a+b=6 \\ b=2a \end{cases} \text{ نتیجه می شود } a=2 \text{ و } b=4. \text{ پس معادله}$$

سهمی به صورت $y = 2x^2 + 4x + 5$ است که از نقطه $(-1, 3)$ می گذرد.

راه حل دوم چون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(0, 5)$ ،

$(-2, 5)$ و $(1, 1)$ می گذرد، پس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c - 5$

از نقاط $(0, 0)$ ، $(-2, 0)$ و $(1, 6)$ می گذرد و معادله سهمی ای که از این نقاط

می گذرد به صورت $y = a(x-0)(x+2) = a(x^2 + 2x)$ است. این سهمی از

نقطه $(1, 6)$ می گذرد. پس

$$6 = a(1+2) \Rightarrow a = 2$$

بنابراین معادله سهمی اولیه به صورت $y = 2x^2 + 4x + 5$ است که از نقطه

$(-1, 3)$ می گذرد.

راه حل سوم چون عرض نقاط $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ یکسان است، پس طول رأس

این سهمی برابر ۱- است. بنابراین معادله سهمی به شکل کلی

$y = m(x+1)^2 + n$ است. این سهمی از نقاط $(0, 5)$ و $(1, 1)$ می گذرد. پس

$$(0, 5) \in \text{سهمی} \Rightarrow m+n=5$$

$$(1, 1) \in \text{سهمی} \Rightarrow 4m+n=1$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} m+n=5 \\ 4m+n=1 \end{cases}$ به دست می آید $m=2$ و $n=3$. در نتیجه

معادله سهمی به صورت $y = 2(x+1)^2 + 3$ است که از نقطه $(-1, 3)$ می گذرد.

۲۷۹۱- گزینۀ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} = \frac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(5+\sqrt{6})}{(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6})} = \frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{25-6} \\ = \frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

از طرف دیگر،

$$2(\sqrt{9}-1)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1) = \sqrt{2}-1$$

۲۷۹۲- گزینۀ ۳ اعداد مربع کامل به صورت زیر هستند:

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots, 8^2, 9^2, \dots$$

بنابراین آخرین عدد دسته هشتم عدد 8^2 و آخرین عدد دسته نهم عدد 9^2

است. همچنین اولین عدد دسته نهم 8^2+1 است. پس واسطه حسابی بین

8^2+1 و 9^2 را باید حساب کنیم که برابر است با

$$\frac{8^2+1+9^2}{2} = 73$$

۲۷۹۳- گزینۀ ۲ چون چند جمله ای $P(x)$ بر x^2-1 بخش پذیر است،

پس بر $x-1$ و $x+1$ هم بخش پذیر است. یعنی $P(-1)=P(1)=0$. از طرف

دیگر باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ برابر $Q(2)$ است. بنابراین

$$Q(x) = P(x-1) + P(1-x) \Rightarrow Q(2) = P(1) + P(-1) = 0$$

توجه در صورت سؤال نوشته شده است «حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ » که

معلوم نیست چیه! ولی احتمالاً منظور همین «باقی مانده» بوده است.

۲۷۹۴- گزینۀ ۱ مجموع جواب ها و حاصل ضرب جواب ها در معادله

$$3x^2 + (2m-1)x + 2-m = 0 \text{ به ترتیب برابر } \frac{1-2m}{3} \text{ و } \frac{2-m}{3} \text{ هستند، پس}$$

$$\frac{1-2m}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow (1-2m)(2-m) = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$$

$$(m+1)(2m-7) = 0 \Rightarrow m = -1, m = \frac{7}{2}$$

به ازای $m = -1$ معادله به صورت $3x^2 - 3x + 3 = 0$ در می آید که جواب

ندارد، پس فقط $m = \frac{7}{2}$ قابل قبول است.

۲۷۹۵- گزینۀ ۴ **راه حل اول** نامعادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow -1 < \frac{x+1}{2x-1} - 2 < 1 \Rightarrow -1 < \frac{-3x+3}{2x-1} < 1$$

$$\left| \frac{-3x+3}{2x-1} \right| < 1 \Rightarrow |3x-3| < |2x-1|$$

بنابراین نامعادله به صورت زیر حل می شود:

$$(3x-3)^2 < (2x-1)^2 \Rightarrow (3x-3)^2 - (2x-1)^2 < 0$$

$$(3x-3+2x-1)(3x-3-2x+1) < 0$$

$$(5x-4)(x-2) < 0 \Rightarrow \frac{4}{5} < x < 2 \Rightarrow x \in (0/8, 2)$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(t) = -t^2 + 4t, \quad 0 \leq t < 1$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت مقابل است و در

نتیجه $0 \leq g(t) < 3$ ، یعنی

$$R_{g \circ f} = [0, 3)$$

۲۸۰۰- گزینه ۳ چون $g(x) = f^{-1}(x)$

$$g(6) + g(12) = f^{-1}(6) + f^{-1}(12)$$

پس

$$f(9) = 9 + 3 = 12 \text{ و } f(4) = 4 + 2 = 6, \quad f(x) = x + \sqrt{x}$$

بنابراین $f^{-1}(12) = 9$ و $f^{-1}(6) = 4$ و در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱۳ است.

۲۸۰۱- گزینه ۲ **راه حل اول** فرض می‌کنیم نمودار تابع f^{-1} در نقطه

$(a, -a)$ که $a > 0$ نیمساز ناحیه چهارم را قطع کند. در این صورت

$$f^{-1}(a) = -a \text{ و در نتیجه } f(-a) = a$$

$$-a - \frac{2}{-a} = a \Rightarrow 2a = \frac{2}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

راه حل دوم ابتدا تابع وارون f را به دست می‌آوریم:

$$y = x - \frac{2}{x}, \quad x < 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 2}{x} \Rightarrow xy = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - yx - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 8}}{2} > 0 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ x = \frac{y - \sqrt{y^2 + 8}}{2} \end{cases}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{2}$ طول نقطه برخورد نمودار تابع f^{-1} با

نیمساز ناحیه دوم (خط $y = -x$) از حل معادله $f^{-1}(x) = -x$ به دست می‌آید:

$$\frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{2} = -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 8} = 3x \quad (x > 0)$$

$$x^2 + 8 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

۲۸۰۲- گزینه ۱ **راه حل اول** توجه کنید که

$$\log_6 3 = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2 3 = \frac{\lambda}{5} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{\lambda}{5}$$

$$\log_{12} 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{\log_2 3 + 2 \log_2 2} = \frac{\frac{\lambda}{5} + 1}{\frac{\lambda}{5} + 2} = \frac{13}{18}$$

بنابراین

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_6 3 = 0/\lambda = \frac{1}{5} \Rightarrow 4^5 = 3 \Rightarrow 4^4 = 3^5 \Rightarrow 2^8 = 3^5$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\begin{aligned} \log_{12} 6 &= \log_{12} 3 + \log_{12} 2 = \log_{2^2 \cdot 3} 3 + \log_{2^2 \cdot 3} 2 \\ &= 4 \log_{(2^8 \cdot 3^5)} 3 + 5 \log_{(2^8 \cdot 3^5)} 2 = 4 \log_{(3^5 \cdot 2^8)} 3 + 5 \log_{(3^5 \cdot 2^8)} 2 \\ &= 4 \log_{3^9} 3 + 5 \log_{2^{18}} 2 = \frac{4}{9} \log_3 3 + \frac{5}{18} \log_2 2 = \frac{4}{9} + \frac{5}{18} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

۲۷۹۷- گزینه ۳ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دوازده واحد به راست

ببریم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-12}$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به

بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-12} + 2$ حاصل می‌شود. نقطه برخورد

نمودار توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x-12} + 2$ مد نظر است که طول آن

از حل معادله $f(x) = g(x)$ به دست می‌آید:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = \sqrt{x-12} \Rightarrow x + 4 - 4\sqrt{x} = x - 12$$

$$16 = 4\sqrt{x} \Rightarrow 4 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 16$$

پس نقطه مورد نظر $A(16, 4)$ است که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{16^2 + 4^2} = 4\sqrt{17}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشته تجربی است. چون حل

هندسی معادلات در کتاب درسی رشته تجربی وجود ندارد.

۲۷۹۸- گزینه ۱ نمودار تابع‌های $f(x) = |2x^2 - 4| = 2|x^2 - 2|$ و

$g(x) = 2x$ به صورت زیر است. واضح است که در بازه (a', b') نمودار تابع f

زیر نمودار تابع g قرار دارد. پس کافی است نقاط a' و b' را معلوم کنیم که

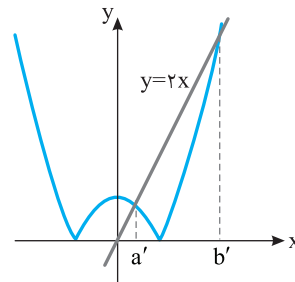
جواب معادله $f(x) = g(x)$ هستند:

$$2|x^2 - 2| = 2x \Rightarrow |x^2 - 2| = x$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b - a$ وقتی است که $a = a' = 1$ و $b = b' = 2$ و در

نتیجه $b - a = 1$.



توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشته تجربی است. چون حل

هندسی معادلات و نامعادلات در کتاب درسی رشته تجربی وجود ندارد.

۲۷۹۹- گزینه ۲ **راه حل اول** ابتدا توجه کنید $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ، بنابراین

$D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ ، از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = -f^2(x) + 4f(x) = 4 - (f(x) - 2)^2 \\ &= 4 - (2x - [2x] - 2)^2 \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که

$$0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow -2 \leq 2x - [2x] - 2 < -1$$

$$1 < (2x - [2x] - 2)^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -(2x - [2x] - 2)^2 < -1$$

$$0 \leq 4 - (2x - [2x] - 2)^2 < 3 \Rightarrow 0 \leq (g \circ f)(x) < 3$$

بنابراین برد تابع $g \circ f$ بازه $[0, 3)$ است.

۲۸۰۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = a + b \cos x$$

پس ماکزیمم تابع برابر $a + |b|$ است که با توجه به شکل برابر ۳ است. از

طرف دیگر نمودار تابع از نقطه $\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$ عبور می کند. پس

$$a + b \cos \frac{7\pi}{3} = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0$$

$$a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{2}$$

$$a + |b| = 3 \Rightarrow -\frac{b}{2} + |b| = 3$$

بنابراین

با توجه به نمودار تابع واضح است که b مقداری منفی است. پس

$$-\frac{b}{2} - b = 3 \Rightarrow b = -2$$

۲۸۰۷- گزینه ۴ حداکثر مقدار و حداقل مقدار تابع $y = a \sin(bx) + c$

به ترتیب برابر $|a| + c$ و $-|a| + c$ است که روی شکل برابر ۱ و -۳ نشان

داده شده است. پس

$$\begin{cases} |a| + c = 1 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ |a| = 2 \end{cases}$$

از طرف دیگر، دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است که روی شکل برابر

$$\frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 6\pi$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

پس

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6 \Rightarrow \frac{a}{b} = \pm 6$$

ولی چون نمودار رسم شده در یک همسایگی راست صفر نزولی است، a و b باید

غیرهم علامت باشند، پس $\frac{a}{b} = -6$.

۲۸۰۸- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi + \pi}{3} \\ x = (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

چون شرط $x \neq k\pi$ قرار داده شده است، پس $x = (2k+1)\pi$ قابل قبول نیست.

۲۸۰۳- گزینه ۲ از نمودار تابع f معلوم است که $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ و

$f(0) = -2$ بنابراین

$$f(x) = -4 + 2^{ax+b} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -4 + 2^b = -2 \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 + 2^{-\frac{a}{3}+b} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ 2^{-\frac{a}{3}+1} = 4 \Rightarrow -\frac{a}{3} + 1 = 2 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = -4 + 2^{-3x+1} \Rightarrow f\left(-\frac{5}{3}\right) = -4 + 2^6 = 60$$

پس

۲۸۰۴- گزینه ۴ راه حل اول فرض کنید $f^{-1}(2) = a > 0$ در این

$$\frac{2^a + \left(\frac{1}{2}\right)^a}{2} = 2 \Rightarrow 2^a + \frac{1}{2^a} = 4$$

صورت $f(a) = 2$ و در نتیجه

با فرض $b = 2^a > 0$ معادله به صورت زیر در می آید:

$$b + \frac{1}{b} = 4 \Rightarrow b^2 - 4b + 1 = 0 \Rightarrow b = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

اگر $b = 2 - \sqrt{3}$ ، آن گاه $a = \log_2(2 - \sqrt{3}) < 0$ که با توجه به دامنه داده

شده قابل قبول نیست. پس

$$2^a = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a = \log_2(2 + \sqrt{3})$$

۲۸۰۵- گزینه ۲ راه حل دوم تابع وارون تابع $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ با دامنه $[0, +\infty)$ را

$$y = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \Rightarrow 2y = 2^x + \frac{1}{2^x}$$

به دست می آوریم:

اگر فرض کنیم $t = 2^x > 0$ ، آن گاه

$$2y = t + \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 2yt + 1 = 0 \Rightarrow t = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow 2^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

چون $x \geq 0$ ، پس فقط $y + \sqrt{y^2 - 1}$ قابل قبول است. بنابراین

$$x = \log_2(y + \sqrt{y^2 - 1}) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

در نتیجه $f^{-1}(2) = \log_2(2 + \sqrt{3})$

۲۸۰۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 48^\circ = \tan(45^\circ + 3^\circ) = \tan(5 \times 9^\circ + 3^\circ) = -\cot 3^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 84^\circ = \sin(81^\circ + 3^\circ) = \sin(9 \times 9^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین

$$\tan 300^\circ \cos 210^\circ + \tan 48^\circ \sin 84^\circ$$

$$= (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

گزینه ۳ - ۲۸۰۹ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه $x = -2$ تابع $y = [x]$ با تابع $y = -3$ برابر است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3 + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} 0 = 0$$

گزینه ۱ - ۲۸۱۰ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x^n - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{4x^n} = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین راه حل اول

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x - 12} = \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x - 3} \\ &= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^3 - 3(x^3 - 1)}{x - 3} \times \frac{1}{4x^2 + 6x\sqrt[3]{x^3 - 1} + 9\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \right) \\ &= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(2x^2 + 3x + 9)}{x - 3} \times \frac{1}{4x^2 + 6x\sqrt[3]{x^3 - 1} + 9\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \\ &= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{4x^2 + 6x\sqrt[3]{x^3 - 1} + 9\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \\ &= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 3x + 9) \times \frac{1}{36 + 36 + 36} \\ &= \frac{1}{12} \times (72 - 9 - 9) \times \frac{1}{36 \times 3} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

راه حل دوم به کمک قاعده هوییتال مقدار حد خواسته شده را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}}{4} \\ &= \frac{\frac{2}{3} - \frac{2 \times 3}{4}}{4} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشته تجربی است. چون حد تابع

رادیکالی در بی نهایت در کتاب درسی رشته تجربی وجود ندارد.

گزینه ۳ - ۲۸۱۱ چون تابع f در نقطه $x = -2$ مشتق پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$\begin{aligned} f'_-(-2) &= f'_+(-2), \quad f(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \\ f(x) &= \begin{cases} \sqrt{5-2x} & x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & x > -2 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{5-2x}} & x \leq -2 \\ -x + b & x > -2 \end{cases} \\ \begin{cases} f'_-(-2) = -\frac{1}{\sqrt{5+4}} = -\frac{1}{3} \\ f'_+(-2) = -(-2) + b = b + 2 \end{cases} &\Rightarrow b + 2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -\frac{7}{3} \\ \begin{cases} f(-2) = \sqrt{5+4} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-\frac{1}{2}x^2 + bx + c) = -2 - 2b + c = c + \frac{\lambda}{3} \end{cases} \\ c + \frac{\lambda}{3} = 3 &\Rightarrow c = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

گزینه ۴ - ۲۸۱۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3 = \frac{x^3 + 2x}{(x^2 - x)^3} = \frac{x(x+2)}{x^3(x-1)^3} = \frac{x+2}{x^2(x-1)^3}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{x^2(x-1)^3 - (2x(x-1)^3 + 3(x-1)^2 x^2)(x+2)}{(x^2(x-1)^3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(2) = \frac{4 \times 1^3 - (4(1)^3 + 3(1)^2 \times 4)(4)}{(4(1)^3)^2} = -\frac{15}{4}$$

گزینه ۱ - ۲۸۱۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x + \sqrt{4x - x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{\sqrt{4x - x^2} + 2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}$$

واضح است که $x = 0$ و $x = 4$ نقاط بحرانی تابع اند ولی چون تابع f در یک همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود، پس این نقاط اکسترم نسبی تابع نیستند. بنابراین باید معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم تا طول نقاط اکسترم نسبی به دست آید:

$$\sqrt{4x - x^2} + 2 - x = 0 \Rightarrow \sqrt{4x - x^2} = x - 2, \quad x > 2$$

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{2}, x = 2 - \sqrt{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین نقطه $A(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ نقطه اکسترم (ماکزیم) نسبی تابع f است

که فاصله آن از نیمساز ناحیه اول برابر است با

$$\frac{|2 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

گزینه ۴ - ۲۸۱۴ ابتدا توجه کنید که $x^2 + y^2 = 10$. پس $y^2 = 10 - x^2$.

اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، مخروطی به دست می‌آید که شعاع قاعده

آن برابر y و ارتفاع آن برابر x است، پس حجم حاصل برابر $V = \frac{\pi}{3} y^2 x$ خواهد

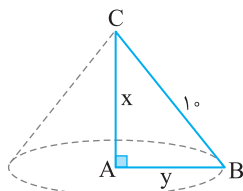
بود. بنابراین می‌خواهیم حداکثر مقدار تابع $V(x) = \frac{\pi}{3} x(10 - x^2)$ حاصل شود.

$$V(x) = \frac{\pi}{3} (10x - x^3) \Rightarrow V'(x) = \frac{\pi}{3} (10 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow y^2 = 10 - \frac{10}{3} \Rightarrow y = \sqrt{2} \sqrt{\frac{10}{3}}$$

بنابراین

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\frac{10}{3}}}{\sqrt{\frac{10}{3}}} = \sqrt{2}$$



۲۸۱۹- گزینه ۲ راه حل اول مطابق شکل زیر و با استفاده از تعمیم قضیه

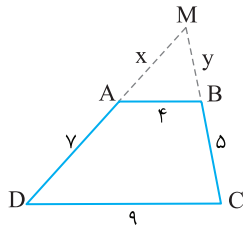
تالس می توان نوشت

$$\triangle MDC: AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9}$$

بنابراین

$$9x = 4x + 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5}, \quad 9y = 4y + 20 \Rightarrow y = 4$$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با $x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = 13\frac{1}{5}$



۲۸۱۶- گزینه ۳ راه حل دوم چون $AB \parallel DC$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه، مثلث های MAB

و MDC متشابه اند. پس نسبت محیط های آنها برابر نسبت تشابه آنهاست.

$$\frac{\text{محیط (MAB)}}{\text{محیط (MDC)}} = \frac{AB}{DC} = \frac{4}{9} \quad \text{تفضیل در} \quad \text{مخرج}$$

$$\frac{\text{محیط (MAB)}}{\text{محیط (MDC)}} = \frac{4}{9-4} \Rightarrow \frac{\text{محیط (MAB)}}{AD+DC+BC-AB} = \frac{4}{5}$$

$$\text{محیط (MAB)} = \frac{4}{5} \times (7+9+5-4) = \frac{4}{5} \times 17 = 13\frac{1}{5}$$

توجه برخلاف ادعای سؤال، چهارضلعی ABCD یک دوزنقه است. در واقع، اگر ABCD متوازی الاضلاع باشد، آن گاه $AB=DC$ و $AD=BC$ که چنین نیست!

۲۸۲۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث

قائم الزاویه ABC، $BC = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$. اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABC،

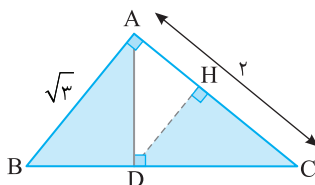
$$BD \times BC = AB^2 \Rightarrow BD \sqrt{7} = \sqrt{3}^2 \Rightarrow BD = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

در نتیجه

$$DC = BC - BD = \sqrt{7} - \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

اکنون توجه کنید که مثلث های قائم الزاویه ABD و CDH متشابه هستند (ز ز) و نسبت مساحت آنها برابر مربع نسبت اندازه اضلاع آنهاست:

$$\frac{S_{CDH}}{S_{ABD}} = \left(\frac{CD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{21}$$



۲۸۱۵- گزینه ۳ راه حل اول فرض کنید فرد A و فرد B نخواهند با هم در

مهمانی شرکت کنند. تعداد حالت های مورد نظر به صورت زیر به دست می آیند

$$\binom{7}{4} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = 2 \times 35 + 21 = 91$$

A و B هیچ کدام دعوت نشوند B دعوت شود و A دعوت نشود A دعوت شود و B دعوت نشود

۲۸۱۶- گزینه ۳ راه حل دوم تعداد حالت هایی که دو فرد A و B با هم به مهمانی دعوت

می شوند، برابر $\binom{7}{3}$ است و تعداد کل حالت های دعوت ۵ نفر از ۹ نفر برابر

است، پس تعداد حالت هایی که دو نفر A و B با هم به مهمانی دعوت نشوند، برابر است با

$$\binom{9}{5} - \binom{7}{3} = 126 - 35 = 91$$

۲۸۱۶- گزینه ۳ تعداد حالت های قرار گرفتن ۸ کتاب در کنار یکدیگر

برابر ۸! است و تعداد حالت هایی که ۳ کتاب انگلیسی کنار هم و ۵ کتاب فارسی کنار هم قرار می گیرند، برابر $3! \times 5!$ است. پس احتمال پیشامد

$$\text{مطلوب برابر است با } \frac{3! \times 5!}{8!} = \frac{1}{28}$$

۲۸۱۷- گزینه ۲ ابتدا ۱۰ واحد از داده ها کم می کنیم، سپس میانگین و انحراف

معیار داده های جدید را به دست می آوریم. توجه کنید که میانگین داده های اصلی ۱۰ واحد بیشتر از میانگین داده های جدید خواهد بود ولی انحراف معیار تغییری نخواهد کرد.

$$0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4$$

$$\bar{x} = \frac{4 \times 1 + 7 \times 4}{16} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{5(0-2)^2 + 4(1-2)^2 + 7(4-2)^2}{16} = \frac{13}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

بنابراین میانگین داده های اصلی برابر ۱۲ و انحراف معیار آنها برابر $\frac{\sqrt{13}}{2}$

است و در نتیجه ضریب تغییرات آنها برابر است با

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{13}}{24} \approx 0.15$$

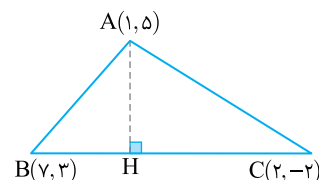
۲۸۱۸- گزینه ۴ ابتدا معادله خط BC را به دست می آوریم:

$$m_{BC} = \frac{3 - (-2)}{7 - 2} = 1$$

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 7)$$

پس معادله خط BC به صورت $x - y - 4 = 0$ است. طول ارتفاع AH برابر فاصله

$$\text{نقطه A از خط BC است که برابر است با } \frac{|1-5-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$



۲۸۲۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \sqrt{3}-1$$

همچنین

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-1+2+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}+1$$

بنابراین

۲۸۲۲- گزینه ۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنباله حسابی را به ترتیب a،

a+4d و a+13d در نظر می‌گیریم. چون این اعداد جملات متوالی یک

دنباله هندسی‌اند، پس

$$a(a+13d) = (a+4d)^2 \Rightarrow a^2 + 13ad = a^2 + 8ad + 16d^2$$

$$5ad = 16d^2 \Rightarrow a = \frac{16}{5}d$$

(توجه کنید که $d \neq 0$ چون در غیر این صورت، $q=1$ که در گزینه‌ها وجود ندارد.)

بنابراین قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با

$$r = \frac{a+4d}{a} = \frac{\frac{16}{5}d+4d}{\frac{16}{5}d} = \frac{\frac{36}{5}d}{\frac{16}{5}d} = \frac{9}{4}$$

۲۸۲۳- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ بهترتیب ۳ و ۱ است، پس $P(4)=3$ و $P(-2)=1$. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ایبر $x-2$ برابر $A(x)=P(x^2)+4P(-x)$ است و برابر است با

$$A(2)=P(4)+4P(-2)=3+4 \times 1=7$$

۲۸۲۴- گزینه ۴ راه‌حل اول چون معادله دو جواب مثبت دارد، پس

شرایط $\Delta > 0$ ، $\frac{c}{a} > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ برقرار هستند. در اینجا $a=2$ ، $b=m$ و $c=m+6$ پس

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \times 2(m+6) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0$$

$$(m-12)(m+4) > 0 \Rightarrow m > 12 \text{ یا } m < -4 \quad (1)$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6 \quad (2)$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0 \quad (3)$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک مجموعه جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت $m \in (-6, -4)$ است.راه‌حل دوم توجه کنید که به ازای $m=-5$ معادله به صورت $2x^2 - 5x + 1 = 0$ در می‌آید که به وضوح دو جواب مثبت دارد چون $\Delta = 17 > 0$ ، $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ و $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} > 0$. پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب نیستند. از طرف دیگر به ازای $m=-1$ معادله به صورت $2x^2 - x + 5 = 0$ در می‌آید که جواب ندارد، زیرا $\Delta = -39 < 0$. پس گزینه (۳) هم جواب نیست و گزینه (۴) جواب است.

۲۸۲۵- گزینه ۳ راه‌حل اول نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x-4}{x+1} < 0$$

$$x \in (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty) \quad (1)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - [-4, 0]$$

راه‌حل دوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow -2 < \frac{2x-1}{x+1} - 1 < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x-2}{x+1} < 2$$

$$\left| \frac{x-2}{x+1} \right| < 2 \Rightarrow |x-2| < 2|x+1| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 < 4x^2 + 8x + 4$$

$$x^2 + 4x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$$

راه‌حل سوم واضح است که $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه (۴)جواب نیست. از طرف دیگر، $x=-5$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب درست نیستند، بنابراین گزینه (۳) جواب است.۲۸۲۶- گزینه ۲ چون رأس سهمی نقطه $(-1, 9)$ است، پس معادله آنبه صورت $y = a(x+1)^2 + 9$ است. این سهمی از نقطه $(3, 1)$ می‌گذرد، پس

$$1 = a(3+1)^2 + 9 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

پس معادله سهمی به صورت $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$ است که از نقطه $(5, -9)$

می‌گذرد:

$$-\frac{1}{2}(5+1)^2 + 9 = -18 + 9 = -9$$

۲۸۲۷- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ ، $(x > 1)$ را نسبت به محور xقرینه کنیم، نمودار تابع $y = -x^2 + 2x$ به دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را شانه‌زدهواحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 16$ به دست می‌آید. نقطه برخورد نمودار تابع اخیر و نمودار تابع اولیه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow x^2 - 2x - 16 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -2 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین باید فاصله نقطه $A(4, 8)$ از مبدأ مختصات را پیدا کنیم که برابر است با

$$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

۲۸۲۸- گزینه ۲ در نقاطی که طول آن‌ها عضو مجموعه جواب‌های

نامعادله $(x-1)^2 > 4x^4$ باشد، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ قرار دارد:

$$4x^4 < (x-1)^2 \Rightarrow (2x)^2 - (x-1)^2 < 0$$

$$(2x^2 + x - 1)(2x^2 - x + 1) < 0$$

عبارت $2x^2 - x + 1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta = 1 - 8 < 0$. بنابراین بایدنامعادله $2x^2 + x - 1 < 0$ را حل کنیم: $(x+1)(2x-1) < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$

۲۸۳۰- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت زیر به دست می آید:

$$y = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 = y + 1 \quad (y \geq -1)$$

$$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{y + 1} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y + 1} - 1$$

$$x = (\sqrt{y + 1} - 1)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x + 1} - 1)^2$$

بنابراین

$$g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x + 1} - 1)^2 \quad (x \geq -1)$$

$$g(3) + g(15) = f^{-1}(3) + f^{-1}(15) = 1 + 9 = 10$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1 \\ f(9) = 15 \Rightarrow f^{-1}(15) = 9 \end{cases}$$

بنابراین

$$g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow g(3) + g(15) = f^{-1}(3) + f^{-1}(15) = 1 + 9 = 10$$

۲۸۳۱- گزینه ۴ راه حل اول ابتدا تابع وارون تابع f را به دست می آوریم:

$$y = x - \frac{1}{2x}, \quad x > 0$$

$$y = \frac{2x^2 - 1}{2x} \Rightarrow 2xy = 2x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 - 2yx - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 8}}{4} \\ x = \frac{2y - \sqrt{4y^2 + 8}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 2}}{2} \\ x = \frac{y - \sqrt{y^2 + 2}}{2} < 0 \end{cases} \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{2}$$

طول نقطه برخورد نمودار تابع f^{-1} با نیمساز ناحیه دوم ($y = -x$) از

حل معادله $f^{-1}(x) = -x$ به دست می آید:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{2} = -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} = -3x \quad (x < 0)$$

$$x^2 + 2 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (\text{غ.ق.}), x = -\frac{1}{2}$$

راه حل دوم فرض کنید نقطه $(a, -a)$ نقطه برخورد نمودار تابع f^{-1} با خط

$y = -x$ (نیمساز ناحیه دوم) باشد ($a < 0$). بنابراین

$$f^{-1}(a) = -a \Rightarrow f(-a) = a \Rightarrow -a - \frac{1}{-2a} = a$$

$$2a = \frac{1}{2a} \Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۲۸۳۲- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا توجه کنید که $\log_3 2 = \frac{5}{8}$ پس

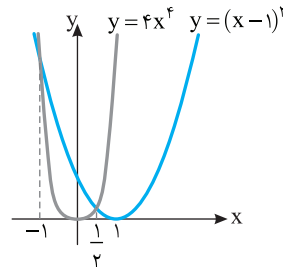
$$\log_3 3 = \frac{8}{5} \quad \text{بنابراین}$$

$$\log_{18} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 18} = \frac{3 \log_3 2}{\log_3 9 + \log_3 2} = \frac{3}{2 \log_3 3 + 1} = \frac{3}{2 \times \frac{8}{5} + 1} = \frac{5}{7}$$

در بازه $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ چنین اتفاقی می افتد. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر

$$\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1 \quad \text{است. توجه کنید که نمودار تابع های } y = (x-1)^2 \text{ و } y = 4x^2 \text{ به}$$

صورت زیر است:



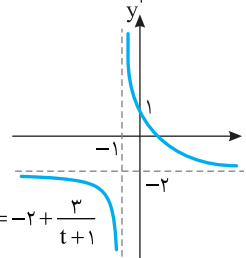
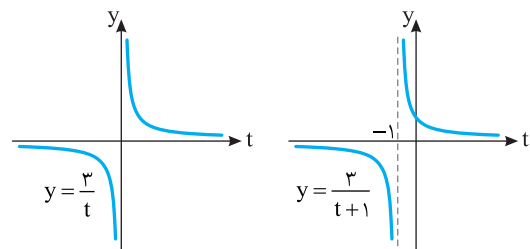
۲۸۲۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0$$

بنابراین تابع $g \circ f$ با تابع $y = \frac{1-2t}{t+1}$ که دامنه آن بازه $(-1, 0]$ است، برابر است.

برد این تابع را به دست می آوریم:

راه حل اول نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود: $y = \frac{1-2t}{t+1} = -2 + \frac{3}{t+1}$



واضح است که برد تابع $g \circ f$ بازه $[1, +\infty)$ است.

راه حل دوم به کمک نابرابری ها برد تابع را به دست می آوریم: $y = -2 + \frac{3}{t+1}$

$$-1 < t \leq 0 \Rightarrow 0 < t+1 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{t+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{t+1} \geq 3 \Rightarrow -2 + \frac{3}{t+1} \geq 1 \Rightarrow y \geq 1$$

بنابراین برد تابع بازه $[1, +\infty)$ است. توجه کنید که به ازای هر $y \geq 1$ مقداری

مانند t وجود دارد که $y = -2 + \frac{3}{t+1}$. این مقدار به صورت زیر به دست می آید:

$$y + 2 = \frac{3}{t+1} \Rightarrow t+1 = \frac{3}{y+2} \Rightarrow t = -1 + \frac{3}{y+2}$$

راه حل سوم تابع $g(t) = \frac{1-2t}{t+1}$ روی بازه $(-1, 0]$ پیوسته و نزولی است.

بنابراین برد آن برابر است با

$$[g(0), \lim_{t \rightarrow (-1)^+} g(t)] = [1, +\infty)$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_3 2 = \frac{\Delta}{\Lambda} \Rightarrow 3^{\frac{\Delta}{\Lambda}} = 2 \Rightarrow 3^{\Delta} = 2^{\Lambda} \Rightarrow 3^{10} = 2^{16}$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\begin{aligned} \log_{18} 8 &= \log_{3^2 \times 2} 2^3 = 3 \log_{3^2 \times 2} 2 = 3 \times \Delta \log_{3^{10} \times 2^5} 2 \\ &= 15 \log_{3^{10} \times 2^5} 2 = 15 \log_{3^{10}} 2 = \frac{15}{10} \log_3 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

۲۸۳۳- گزینه ۱ با توجه به نمودار تابع واضح است که $f(0) = -6$ و

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$$

$$\begin{cases} f(0) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^b = -6 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}a+b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{-b} = 3 \Rightarrow b = -1 \\ 3^{-\frac{a}{3}+1} = 9 \Rightarrow -\frac{a}{3}+1 = 2 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1} \Rightarrow f(2) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = 234 \quad \text{پس}$$

$$2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{راه‌حل اول تابع وارون تابع} \quad 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \Rightarrow 2y = 2^x - \frac{1}{2^x}$$

به دست می‌آوریم:

اگر فرض کنیم $t = 2^x > 0$ ، آن‌گاه

$$2y = t - \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ t = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 \end{cases} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$2^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \log_2(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$f^{-1}(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

بنابراین راه‌حل دوم فرض کنید $f^{-1}(2) = a$. پس $f(a) = 2$ و در نتیجه

$$\frac{2^a - \left(\frac{1}{2}\right)^a}{2} = 2 \Rightarrow 2^a - \frac{1}{2^a} = 4 \Rightarrow (2^a)^2 - 4 \times 2^a - 1 = 0$$

اگر فرض کنیم $2^a = b > 0$ ، آن‌گاه

$$b^2 - 4b - 1 = 0 \Rightarrow b = 2 + \sqrt{5}, b = 2 - \sqrt{5} < 0 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$2^a = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow a = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

بنابراین

۲۸۳۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan 285^\circ = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ) = \tan(-180^\circ + 15^\circ) = \tan 15^\circ$$

$$\sin 1095^\circ = \sin(1080^\circ + 15^\circ) = \sin(6 \times 180^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\cos 255^\circ = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

بنابراین

$$\tan 285^\circ \tan(-165^\circ) - \sin 1095^\circ \cos 255^\circ$$

$$= (-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ) - (\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ)$$

$$= -1 + \sin^2 15^\circ = -\cos^2 15^\circ$$

۲۸۳۶- گزینه ۳ با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع

$$f(x) = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{از نقطه } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ می‌گذرد و حداکثر مقدار آن برابر } \frac{3}{2}$$

است. پس

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0$$

$$a = -\frac{b}{2} \Rightarrow a + |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2} + |b| = \frac{3}{2}$$

همچنین با توجه به وضعیت نمودار واضح است که b باید منفی باشد. پس

$$-\frac{b}{2} - b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۲۸۳۷- گزینه ۱ با توجه به نمودار واضح است که کمترین مقدار تابع برابر

$$-3 \quad \text{است، پس } -|a| + c = -3. \quad \text{از طرف دیگر نمودار تابع از نقطه } \left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$$

عبور می‌کند، پس $1 = a \sin\left(\frac{b\pi}{6}\right) + c$. همچنین دوره تناوب تابع برابر

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{است. پس } \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3. \quad \text{و در نتیجه } |b| = 3. \quad \text{با توجه به نمودار}$$

معلوم است که a و b باید هم علامت باشند، پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر a و b مثبت باشند، آن‌گاه $b = 3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} -a + c = -3 \\ a \sin \frac{\pi}{3} + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + c = -3 \\ a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

حالت دوم اگر a و b منفی باشند، آن‌گاه $b = -3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} a + c = -3 \\ a \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = -3 \\ -a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

۲۸۳۸- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$4 \sin 3x \cos 3x = 1 \Rightarrow 2 \sin 6x = 1 \Rightarrow \sin 6x = \sin \frac{\pi}{6}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ به‌ازای $k=0$ و $k=1$ حاصل می‌شوند:

$$x = \frac{\pi}{36}, x = \frac{5\pi}{36}, x = \frac{13\pi}{36}, x = \frac{17\pi}{36}$$

بنابراین معادله در بازه $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ چهار جواب دارد.

۲۸۳۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x \neq \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه

$$\frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{(\sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{-2 \sin x - 1}{1 + \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin x - 1}{1 + \sin x} = \frac{-2 - 1}{1 + 1} = -\frac{3}{2} \quad \text{بنابراین}$$

برای اینکه تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۲۸۴۳- گزینه ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2 - 4x - 1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{5}, x = 2 - \sqrt{5}$$

اکنون به جدول تعیین علامت $f'(x)$ توجه کنید:

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$	$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
		min	max	

بنابراین $x = 2 + \sqrt{5}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. مقدار ماکزیمم نسبی تابع f برابر است با

$$f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = \frac{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{6\sqrt{5} + 10}{4\sqrt{5} + 10} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{2\sqrt{5} + 5}$$

$$= \frac{30 - 15\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 25}{20 - 25} = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{-5} = \sqrt{5} - 1$$

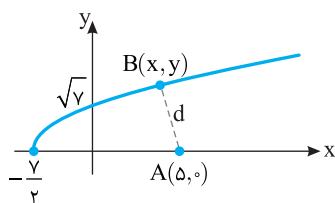
۲۸۴۴- گزینه ۱ مطابق شکل زیر فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ B روی نمودار

تابع $y = \sqrt{2x+7}$ برابر است با

$$d = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

کمترین مقدار عبارت $x^2 - 8x + 32$ به ازای $x = 4$ به دست می آید که برابر ۱۶ است. پس کمترین مقدار d برابر ۴ است.



۲۸۴۵- گزینه ۴ اگر افراد را به صورت جایگاههایی فرض کنیم که می خواهیم

کتابها را در آنها قرار دهیم، توزیع کتابها به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

۳ ۱ ۱ یا ۲ ۲ ۱

• اگر به یک نفر سه کتاب برسد، تعداد حالتها به صورت زیر است:

یکی از سه نفر را به ۳ حالت انتخاب می کنیم و سه تا از پنج کتاب را به $\binom{5}{3}$

حالت انتخاب می کنیم و کتابها را به او می دهیم. سپس دو کتاب باقی مانده به دو حالت بین دو نفر دیگر توزیع کنیم. پس در این صورت تعداد حالتها برابر

$$3 \binom{5}{3} \times 2 = 60 \text{ است.}$$

۲۸۴۰- گزینه ۲ چون حد تابع f در بی نهایت برابر ۲ شده است، پس

درجهٔ چندجمله ای صورت کسر $f(x)$ با درجهٔ چندجمله ای مخرج آن برابر است. اکنون دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول $a = 0$ و $n = 2$. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 6x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{\sqrt{x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1}} = -2$$

بنابراین حالت اول قابل قبول نیست.

حالت دوم $n = 3$ و $a \neq 0$. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x^2-2x-1)}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-2x-1}{x^2-2} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{17}{4}} = -\frac{3}{17}$$

۲۸۴۱- گزینه ۴ سؤال با این ادبیات دارای بی شمار جواب است. کافی است

معادلهٔ دو خط را که از نقطهٔ $A(2, m)$ می گذرند، بنویسیم که هر کدام بر نمودار یکی از تابعهای داده شده مماس باشند. بی شمار نقطهٔ مانند A می توان پیدا کرد و بی شمار مقدار برای a و b وجود دارد. ولی احتمالاً منظور طراح سؤال این بوده که نمودار دو تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ از نقطهٔ $(2, m)$ بگذرند و

یک خط در این نقطه بر هر دو نمودار مماس باشد. در این صورت

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 4 = 4a + 2b \Rightarrow 4a = 4 - 2b$$

$$f'(2) = g'(2) \Rightarrow -3 = 4a + b \Rightarrow 4a = -3 - b$$

$$4 - 2b = -3 - b \Rightarrow b = 7$$

بنابراین

توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = ax^2 + bx \Rightarrow g'(x) = 2ax + b$$

۲۸۴۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \sqrt{\frac{(2x-x^2)^2}{3x+5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(2x-x^2)'}{\sqrt{3x+5}}$$

$$= \frac{2(2-2x)}{\sqrt{3x+5}}$$

از طرف دیگر،

$$y = \frac{2x-x^2}{3x+5} \Rightarrow y' = \frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2)}{(3x+5)^2}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{2((2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2))}{(3x+5)^2 \sqrt{3x+5}}$$

$$f'(-2) = \frac{2((2+4)(-6+5) - 3(-4-4))}{3(-6+5)^2 \sqrt{-6+5}} = 6$$

۲۸۵۶- گزینه ۲ راه حل اول از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5) - \sqrt{3x+1}}{2x - \sqrt{3x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(2x+5) - \sqrt{3x+1}}{4x^2 - (3x+1)} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{2x + \sqrt{3x+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 29x + 25}{4x^2 - 3x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)} \times \frac{2+2}{2+5+7} \\ &= \frac{4}{14} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-25}{4x+1} = \frac{2}{7} \times \left(-\frac{21}{5} \right) = -1/2\end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هویتنال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5 - \sqrt{3x+1}}{2x - \sqrt{3x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = -1/2$$

۲۸۵۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f به صورت زیر است:

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقاط $x=2$ و $x=0$ پیوسته است، پس

$$\begin{aligned}f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ b &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-1)[x]) \Rightarrow b = 0 \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ 4 + 2a + b &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ((x-1)[x]) \\ 4 + 2a &= (2-1) \times 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

۲۸۵۸- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[5, 6]$ برابر است با

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{3 - 4}{1} = -1$$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطه x برابر $f'(x)$ است.

$$f(x) = \sqrt{21 - x^2} + 4x \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2}+4x} &= -1 \quad (*) \Rightarrow 21 - x^2 + 4x = (x-2)^2 \\ 21 - x^2 + 4x &= x^2 + 4 - 4x \Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0\end{aligned}$$

$$x = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad x = 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

توجه کنید که طبق معادله (*) مقدار x باید بیشتر از ۲ باشد.

۲۸۵۲- گزینه ۱ فرض کنید $a = (g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ ، بنابراین

$$g^{-1}(f^{-1}(20)) = a \Rightarrow g(a) = f^{-1}(20) \Rightarrow f(g(a)) = 20$$

واضح است که $f(16) = 20$ ، زیرا

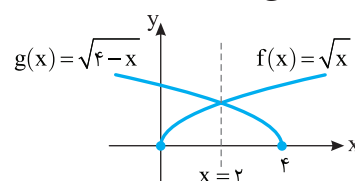
$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(16) = 16 + \sqrt{16} = 16 + 4 = 20$$

پس $f^{-1}(20) = 16$ ، بنابراین

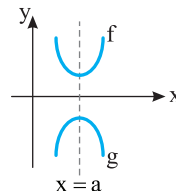
$$g(a) = 16 \Rightarrow \frac{9a+6}{1-a} = 16 \Rightarrow 9a+6 = 16-16a \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

۲۸۵۳- گزینه ۳ اگر قرینه نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نسبت به محور y را رسم

کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ به دست می آید. اگر نمودار جدید را چهار واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-(x-4)}$ به دست می آید. بنابراین نمودار دو تابع اولیه و نهایی به صورت زیر است. با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع g قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $x=2$ است.



توجه ادبیات سؤال ایراد دارد چون پرسیده شده است: «منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟» این سؤال یعنی نمودار توابع f و g هر دو نسبت به خط $x=a$ متقارن هستند و مقدار a چند است؟ (شکل زیر را ببینید) در حالی که مقصود طراح این بوده است که قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $x=a$ نمودار تابع g می شود و a چند است؟ از طرف دیگر سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است. چیزی که سؤال پرسیده مثلاً این طوری می شود:



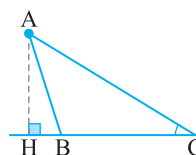
۲۸۵۴- گزینه ۴ ابتدا $\cot \hat{C}$ را با معلوم بودن $\sin \hat{C}$ به دست می آوریم:

$$1 + \cot^2 \hat{C} = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}} \Rightarrow 1 + \cot^2 \hat{C} = \frac{169}{25}$$

$$\cot^2 \hat{C} = \frac{144}{25} \Rightarrow \cot \hat{C} = \frac{12}{5}$$

بنابراین در مثلث AHC می توان نوشت:

$$\cot \hat{C} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \Rightarrow AH = 3/75$$



۲۸۵۵- گزینه ۳ تعداد اعداد واقع در نوزده دسته اول برابر است با:

$$1 + 2 + \dots + 19 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$$

بنابراین عدد اول دسته بیستم ۱۹۱ و عدد آخر آن ۲۱۰ است. مجموع این اعداد برابر است با

$$\begin{aligned}(1 + \dots + 210) - (1 + \dots + 190) &= \frac{210 \times 211}{2} - \frac{190 \times 191}{2} \\ &= 22155 - 18145 = 4010\end{aligned}$$

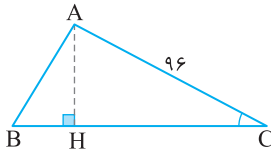
۲۸۶۴- گزینه ۳ ابتدا از $1 + \cot^2 \hat{C} = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}}$ مقدار $\sin \hat{C}$ را

به دست می آوریم:

$$1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}} \Rightarrow \sin^2 \hat{C} = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$\triangle AHC: \sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{96} \Rightarrow AH = 64$$



۲۸۶۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تعداد اعداد نوشته شده در چهل

$$\text{دسته اول برابر است با } 1 + 2 + 3 + \dots + 40 = \frac{40}{2}(1 + 40) = 820$$

بنابراین آخرین عدد واقع در دسته چهل همان هشتصد و بیست و یکم عدد طبیعی فرد است که برابر است با $2 \times 820 - 1 = 1639$.

۲۸۶۶- گزینه ۲ دامنه تابع بازه $[-2, 2]$ در نظر گرفته شده است، بنابراین

تابع در نقاط $x = 2$ و $x = -2$ حد ندارد و پیوسته نیست. در نقاط غیر صحیح بازه $(-2, 2)$ ، توابع $y = \sin \pi x$ و $y = [x]$ پیوسته اند. بنابراین حاصل ضرب آنها، یعنی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ نیز پیوسته است. در نقاط صحیح این بازه (یعنی $x = 0, x = 1, x = -1$) تابع $y = [x]$ ناپیوسته است ولی چون تابع $y = \sin \pi x$ پیوسته است و مقدار آن برابر صفر است، تابع f پیوسته خواهد بود. بنابراین تابع f فقط در دو نقطه $x = 2$ و $x = -2$ ناپیوسته است.

۲۸۶۷- گزینه ۴ اگر نمودار تابع های $f(x) = x\sqrt{x}$ و

$g(x) = x^2 + ax + b$ در نقطه مشترک $x = 4$ بر یک خط مماس باشند، آن گاه

$$\begin{cases} f(4) = g(4) \Rightarrow 8 = 16 + 4a + b \Rightarrow b = -8 - 4a \\ f'(4) = g'(4) \Rightarrow 3 = 8 + a \Rightarrow a = -5 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

توجه کنید که

$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(4) = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

$$g(x) = x^2 + ax + b \Rightarrow g'(x) = 2x + a \Rightarrow g'(4) = 8 + a$$

۲۸۶۸- گزینه ۱ ابتدا $f'(2)$ را به دست می آوریم:

$$0 \leq x < 4 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

اکنون توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x = 5$ ، تساوی $\left[\frac{x}{4}\right] = 1$ برقرار

است. پس در این همسایگی می توان نوشت

$$f(x) = x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 10 - 9 = 1$$

$$\text{بنابراین } f'(2) - f'(5) = \frac{1}{4}$$

۲۸۵۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}} = 5\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(4) = 5 \times 2 - \frac{4}{2} = 8$$

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}} \Rightarrow m = f'(4) = \frac{5}{4} + \frac{2}{8} = \frac{3}{2}$$

معادله خطی که از نقطه $(4, 8)$ با شیب $\frac{3}{2}$ می گذرد، به صورت زیر است:

$$y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$$

اگر قرار دهیم $x = 0$ ، عرض نقطه تقاطع با محور y برابر 2 به دست می آید.

۲۸۶۰- گزینه ۱ چند جمله ای $P(x)$ بر $2x - 1$ بخش پذیر است. پس

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow a = 7$$

$$P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$$

پس باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر است با

$$P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = -1$$

۲۸۶۱- گزینه ۴ طول نقاط تقاطع نمودار تابع های $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$ و

$g(x) = x + 7$ از معادله $f(x) = g(x)$ به دست می آید. پس

$$f(x) = g(x) \Rightarrow |x - 2| + |x + 1| = x + 7$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 + x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = 8$$

$$-1 \leq x < 2 \Rightarrow -x + 2 + x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = -4 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$x \leq -1 \Rightarrow -x + 2 - x - 1 = x + 7 \Rightarrow x = -2$$

بنابراین $A(8, 15)$ و $B(-2, 5)$ نقاط تقاطع هستند که فاصله آنها برابر

$$AB = \sqrt{(8 + 2)^2 + (15 - 5)^2} = 10\sqrt{2}$$

است با

۲۸۶۲- گزینه ۴ راه حل اول فرض کنید $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = a$ پس

$$f^{-1}(g^{-1}(-9)) = a \Rightarrow f(a) = g^{-1}(-9), a \geq 2$$

$$a^2 - 4a + 9 = g^{-1}(-9) \Rightarrow g(a^2 - 4a + 9) = -9 \Rightarrow \frac{3 - (a^2 - 4a + 9)}{2} = -9$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a - 6)(a + 2) = 0 \Rightarrow a = 6, a = -2 \quad (\text{غ.ق.})$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + 5 \Rightarrow y - 5 = (x - 2)^2$$

$$|x - 2| = \sqrt{y - 5} \xrightarrow{x \geq 2} x - 2 = \sqrt{y - 5}$$

$$x = 2 + \sqrt{y - 5} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 5}$$

از طرف دیگر،

$$y = g(x) = \frac{3 - x}{2} \Rightarrow 2y = 3 - x \Rightarrow x = 3 - 2y \Rightarrow g^{-1}(x) = 3 - 2x$$

بنابراین

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9)) = f^{-1}(3 - 2(-9))$$

$$f^{-1}(21) = 2 + \sqrt{21 - 5} = 6$$

۲۸۶۳- گزینه ۲ اگر بخواهیم قرینه نمودار تابع $f(x) = (x - 1)^2$ را نسبت

به مبدأ مختصات رسم کنیم، ابتدا باید آن را نسبت به محور x سپس نسبت به محور y قرینه کنیم (یا ابتدا نسبت به محور y سپس نسبت به محور x قرینه کنیم).

ضابطه این تابع به صورت $y = -f(-x)$ خواهد بود. اگر این نمودار را چهار واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x) = -f(-x) + 4$ رسم می شود. طول نقاط

تلاقی نمودار تابع های f و g از معادله $f(x) = g(x)$ به دست می آید:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x - 1)^2 = -(-x - 1)^2 + 4$$

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 - 2x - 1 + 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$