



PETER SCHOLZE
FIELDS:2018 1987



ماتریس و کاربردها

صفحه ۱۰ تا ۳۱ کتاب درسی	ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها	درس اول	دوازدهم	سکانس 1
-------------------------	------------------------------	---------	---------	---------



1. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 5 \\ 3 & -1 & 4 & y \\ 7 & 8 & 9 & x-2 \end{bmatrix}$ اگر درایه سطر اول و ستون سوم از درایه سطر سوم و ستون دوم ۵ واحد بزرگ‌تر باشد، حاصل $\sum_{j=1}^4 a_{3j}$ کدام است؟

- ۳۶ (۱) ۳۷ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴)

2. اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ مفروض باشد، به طوری که برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ ، برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = 5$ و برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = j + i^2$ ، در این صورت ماتریس A کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

3. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-1 & a-2 \\ b+3 & b-2 \end{bmatrix}$ قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴)

4. به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟

(خارج - ۹۸)

- $x=1, y=-7$ (۱) $x=2, y=-7$ (۲) $x=2, y=-5$ (۳) $x=1, y=-5$ (۴)

5. اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 5 \\ 2 & z-2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & x+y \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

6. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ ، $b_{ij} = i^2 + j^2$ حاصل $2A - B + I$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

7. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & -1 \\ x+1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ x & 5 \end{bmatrix}$ و درایه سطر دوم و ستون اول از ماتریس AB برابر ۷ باشد، درایه سطر سوم و ستون اول از BA کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۱۳ (۴)

8. اگر $A = [i-j]_{2 \times 3}$ و $B = [i+j]_{4 \times 2}$ و i شماره سطر و j شماره ستون باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس BA کدام است؟

- ۶ (۱) ۶ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴)

9. اگر A, B, C, D چهار ماتریس مربعی و هم مرتبه و I ماتریس همانی هم مرتبه با آن‌ها باشد، کدام گزینه نادرست است؟

$AC + C = (A + I)C$ (۲) $ABC + ADC = A(B + D)C$ (۱)

$BC - 2B = B(C - 2I)$ (۴) $BA + AC = A(B + C)$ (۳)

10. اگر A, B, C ماتریس های 2×2 و $BC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $(AB + 2B)(CA + C)$ کدام است؟

$\begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$ (۱)

11. اگر i شماره سطر و j شماره ستون و $AB + BA = [i + j]_{2 \times 2}$ و $A - B = [i^2 - j]_{2 \times 2}$ باشد، حاصل $A^2 + B^2$ کدام است؟

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$ (۱)

12. اگر دو ماتریس $A = [i + m, j]$ و $B = \begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ برابر باشند، $m + x$ کدام است؟

۲ (۴) ۵ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)

13. اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ b & 3 \end{bmatrix}$ در شرایط $AB = BA$ صدق کنند، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱۶ (۴) ۱۴ (۳) ۱۲ (۲) ۱۰ (۱)

14. از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$ عدد غیر صفر x ، کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۱)

15. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مجموع درایه های A^{10} کدام است؟

۲۸ (۴) ۲۲ (۳) ۲۰ (۲) ۲۴ (۱)

16. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & \log_2 3 \\ \log_2 2 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل A^{98} کدام است؟

$-I$ (۴) $-A$ (۳) I (۲) A (۱)

17. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ماتریس $A^7 - A^4$ کدام است؟

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۱)

18. اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 2 & ; i=j \\ 1 & ; i \neq j \end{cases}$ داشته باشیم $A^{10} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ حاصل $a - b$ کدام است؟

۱ (۴) ۲ (۳) -۱ (۲) -۲ (۱)

19. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های $A^4 + B^4$ کدام است؟

۶۷ (۴) ۶۶ (۳) ۶۵ (۲) ۶۴ (۱)



STANISLAV SMIRNOV
FIELDS:2010 1970



بردارها

صفحه ۶۲ تا ۷۶ کتاب درسی

معرفی فضای \mathbb{R}^3

درس اول

دوازدهم

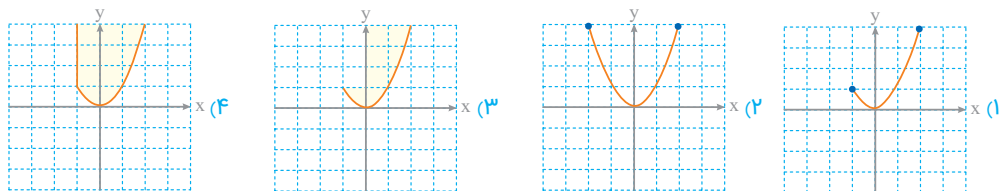
سکانس 8



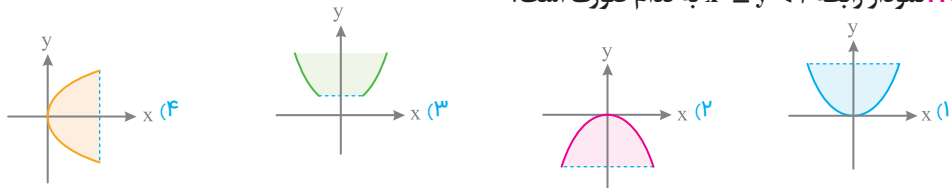
166. نمودار رابطه $\{(x, y) : x = 1, -1 \leq y \leq 3\}$ به کدام صورت است؟

- (۱) مستطیلی به ابعاد 2×4
 (۲) یک پاره خط افقی به طول ۲
 (۳) دو خط موازی به فاصله ۲
 (۴) یک پاره خط قائم به طول ۴

167. نمودار رابطه $y = x^2$ و $-1 \leq x \leq 2$ به کدام صورت است؟



168. نمودار رابطه $x^2 \leq y < 2$ به کدام صورت است؟



169. اگر نقطه $A(m-1, m, 2)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار گرفته باشد، حدود m به کدام صورت باید باشد؟

- (۱) $m < 0$
 (۲) $m > 1$
 (۳) $0 < m < 1$
 (۴) $1 < m < 2$

170. اگر $A(1, 2, 3)$ و $B(4, -2, 4)$ باشد، اندازه تصویر پاره خط AB روی صفحه xy کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) ۳
 (۳) ۲
 (۴) ۵

171. کدام خط با هر دو صفحه XZ و YZ موازی است؟

- (۱) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$
 (۲) $\begin{cases} x=3 \\ z=4 \end{cases}$
 (۳) $\begin{cases} y=1 \\ z=5 \end{cases}$
 (۴) $z=2$

172. معادله صفحه شامل خط $D: \begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$ و نقطه $A(3, 4, 2)$ کدام است؟

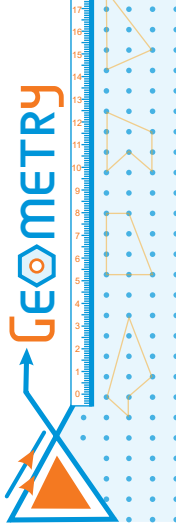
- (۱) $x=1$
 (۲) $z=2$
 (۳) $x=3$
 (۴) $y=4$

173. خط $D: \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ بر کدام صفحه عمود است؟

- (۱) $x=1$
 (۲) $y=-1$
 (۳) $z=3$
 (۴) $x=2$

174. صفحه گذرا از $A(1, 2, 3)$ و عمود بر هر دو صفحه $P_1: x=4$ و $P_2: y=5$ کدام است؟

- (۱) $y=2$
 (۲) $x=1$
 (۳) $z=3$
 (۴) $z=5$



175. سه وجه یک مکعب مستطیل بر صفحات مختصات واقع است و خط به معادله $D: \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ شامل یکی از یال‌های آن است، اگر نقطه‌ای به ارتفاع ۲ واقع بر این خط یکی از رأس‌های مکعب مستطیل باشد، حجم آن کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۶ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴)

176. در یک مکعب مستطیل یکی از رأس‌ها مبدأ مختصات و معادله دو وجه آن $y=5$ و $z=4$ و معادله یکی از یال‌های آن $\begin{cases} x=2 \\ z=4 \end{cases}$ است، حجم این مکعب مستطیل کدام است؟

- ۲۰ (۱) ۴۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۶۰ (۴)

177. اگر نقطه $B(0, 4, 1)$ انتهای بردار $\vec{AB} = (1, 2, -1)$ باشد، فاصله قریبه نقطه A نسبت به محور oz از قریبه آن نسبت به صفحه xz کدام است؟

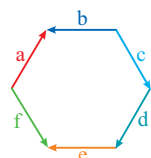
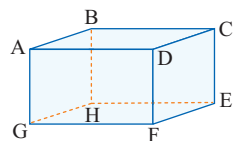
- $\sqrt{2}$ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴)

178. نقاط $A(5, -4, 1), B(-1, 2, 4), O(0, 0, 0)$ مفروض هستند و $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ ، مقدار $|\vec{OM}|$ کدام است؟

- $\sqrt{10}$ (۱) $\sqrt{11}$ (۲) $\sqrt{13}$ (۳) $\sqrt{14}$ (۴)

179. اگر دو بردار $a = (2, 1, m)$ و $b = (-1, 2k, 1)$ موازی باشند، آن‌گاه مقدار $m \times k$ کدام است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) -2 (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)



180. در مکعب مستطیل شکل روبه‌رو، حاصل $\vec{DC} + \vec{BF} - \vec{BG} + \vec{DG}$ کدام است؟

- \vec{BH} (۱) \vec{AH} (۲)
 \vec{BG} (۳) \vec{GE} (۴)

181. در شش ضلعی منتظم شکل مقابل، حاصل جمع همه بردارهای مشخص شده کدام است؟

- $2a$ (۱) $2d$ (۲)
 $2c$ (۳) $-2b$ (۴)

182. اگر $a = (1, 2, 2)$ و $b = (3, -1, -1)$ دو بردار باشند، اندازه‌ی قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر روی دو بردار a و b کدام است؟

- $2\sqrt{5}$ (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{22}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴)

183. نقاط $A(1, 1, 2), B(3, 1, 0), C(-1, 4, 7)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر نقطه‌ی G محل برخورد میانه‌های مثلث باشد، حاصل $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$ کدام است؟

- $i + 2j + 5k$ (۱) $3i - j - 2k$ (۲) $i + j$ (۳) $\vec{0}$ (۴)

184. اگر بردارهای $a = (1, 2, -2)$ و $b = (2, 3, -1)$ به ترتیب معرف نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد باشند، بردار مسیر فرود خرچنگی هواپیما کدام است؟

- $(3, 5, -1)$ (۱) $(1, 1, 1)$ (۲) $(4, 2, 0)$ (۳) $(3, 5, -3)$ (۴)

185. اگر a و b دو بردار باشند که $a = (m, 2, -1)$ و $|b| = \sqrt{41}$ و دو بردار $a + b$ و $a - b$ برهم عمود باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

- ۶ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

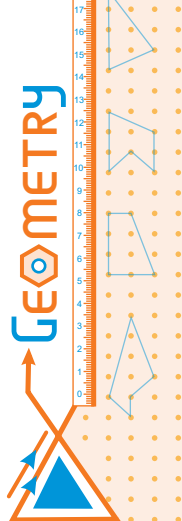
186. اگر بردار $a + b$ نیمساز زاویه دو بردار $a = (7, 4, 1)$ و $b = (5, 5, m)$ باشد، m کدام است؟

- ± 4 (۱) ± 3 (۲) ± 2 (۳) ± 1 (۴)

187. بردار نیمساز دو بردار $a = (2, 1, -2)$ و $b = (-6, 3, 2)$ کدام است؟

- $(-1, 3, 2)$ (۱) $(1, 4, 2)$ (۲) $(1, 4, -2)$ (۳) $(-1, 4, -2)$ (۴)

(داخل - ۹۲)



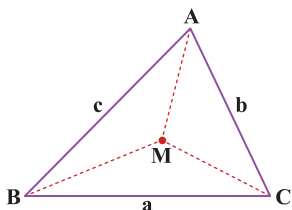
252. اگر محیط یک مثلث برابر با ۷۲ باشد و اندازه اضلاع مثلث برابر نباشند آنگاه اندازه بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۴۰
(۲) ۳۶
(۳) ۳۰
(۴) ۲۴

253. محیط مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۲۴ است. کدام عدد می‌تواند اندازه ساق این مثلث باشد؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۱۳
(۴) ۷

254. اگر در شکل مقابل $MA + MB + MC = 12$ باشد، آنگاه حاصل $a + b + c$ کدام عدد ممکن است باشد؟



- (۱) ۱۶
(۲) ۲۴
(۳) ۸
(۴) ۱۲

255. پاره خط AB به طول ۶ مفروض است. عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه M قطع کند. سپس به مرکز M و شعاع ۴ کمانی می‌زنیم تا عمود منصف AB را در C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD چگونه است؟

- (۱) لوزی با محیط ۲۰
(۲) مربع به مساحت ۱۲
(۳) متوازی‌الاضلاع به محیط ۲۴
(۴) مستطیل به قطرهای ۶ و ۸

256. پاره خط AB به طول ۸ مفروض است؛ عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع ۵ کمانی می‌زنیم تا عمود منصف را در C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD کدام است؟

- (۱) مستطیل به قطرهای ۸ و ضلع ۵
(۲) لوزی به محیط ۲۰
(۳) لوزی با محیط ۱۰
(۴) مستطیل به مساحت ۴۸

257. پاره خط AB به طول ۱۰ مفروض است؛ از نقطه M وسط پاره خط AB دایره‌ای به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. یکی از قطرهای دایره آن را در C و D قطع می‌کند. چهارضلعی ACBD:

- (۱) متوازی‌الاضلاع به قطرهای ۵ و ۱۰
(۲) مستطیل به ضلع ۱۰
(۳) مستطیل به قطر ۱۰
(۴) مربع به ضلع ۵

258. در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و به شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع کدام است؟

(داخل - ۹۵)

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

259. در یک متوازی‌الاضلاع، یک ضلع ۷ و یک قطر ۱۹ است. برای این‌که در رسم متوازی‌الاضلاع با خط‌کش و پرگار جواب منحصر به فردی حاصل شود، اندازه ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع کدام می‌تواند باشد؟

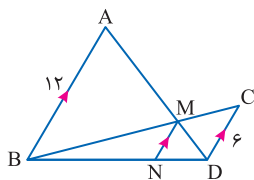
- (۱) ۱۰
(۲) ۱۱
(۳) ۲۷
(۴) ۲۳

260. اندازه دو ساق یک ذوزنقه ۴ و ۱۰ و قاعده کوچک آن ۷ است. قاعده بزرگ کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۲۲
(۳) ۱۰
(۴) ۱۹

312. در شکل زیر اندازه MN کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۴ (۲)
- ۸ (۳)
- ۶ (۴)



313. در دوزنقه ABCD به قاعده های ۳ و ۶ از محل تلاقی قطرها پاره خطی موازی قاعده رسم می کنیم تا ساق ها را در M و N قطع کند. اندازه MN کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۵/۵ (۳)
- ۴/۵ (۴)

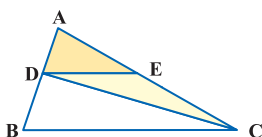
314. درون یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع یک، بزرگ ترین مربع ممکن را قرار می دهیم. اندازه ضلع این مربع کدام است؟

- $\sqrt{3} - 1$ (۱)
- $2\sqrt{3} - 1$ (۲)
- $2\sqrt{3} - 2$ (۳)
- $2\sqrt{3} - 3$ (۴)

315. در شکل زیر اگر $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ باشد و $DE \parallel BC$ آنگاه مساحت ADE چند درصد مساحت DEC است؟

- ۷۰ (۱)
- ۷۵ (۲)
- ۷۸ (۳)
- ۸۴ (۴)

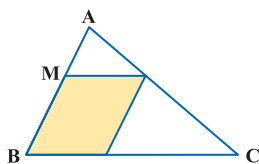
(داخل - ۸۹)



316. اگر در شکل مقابل $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{10}$ باشد، مساحت متوازی الاضلاع رنگ شده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

- ۰/۲۱ (۱)
- ۰/۴۲ (۲)
- ۰/۵۶ (۳)
- ۰/۶۳ (۴)

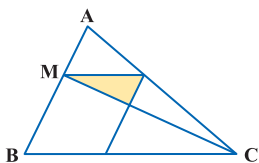
(خارج - ۸۹)



317. مطابق شکل، $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ است. مساحت مثلث سایه زده شده، چند درصد از مساحت متوازی الاضلاع است؟

- ۲۰ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۲۵ (۳)
- ۳۰ (۴)

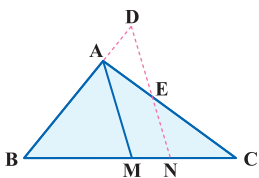
(خارج - ۹۰)



318. در مثلث ABC ($AB = \frac{2}{3} AC$)، پاره خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟

- $\frac{4}{9}$ (۱)
- $\frac{5}{9}$ (۲)
- $\frac{2}{3}$ (۳)

(داخل - ۹۴)



صفحه ۳۴ تا ۳۷ کتاب درسی

قصیه نالی

درس دوم

دهم

سکانس ۱۴

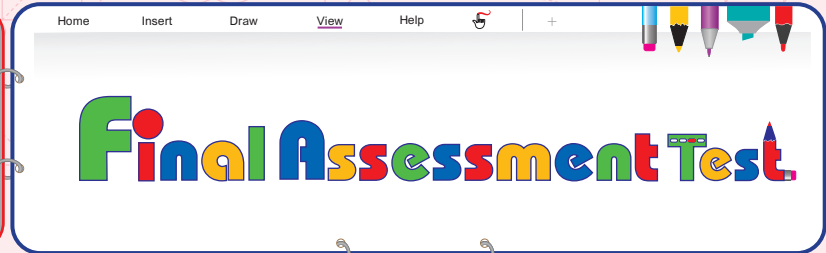
A. Vankarsh
Elaheh, 2002

319. در دو مثلث متشابه

- (۱) اضلاع نظیر در دو مثلث برابرند
- (۲) زوایای نظیر در دو مثلث برابرند
- (۳) ارتفاع های نظیر در دو مثلث برابرند
- (۴) نیمسازهای نظیر در دو مثلث برابرند



CÉDRIC VILLANI
FIELDS:2010 1973



آزمون های جامع

صفحة ۱۰ تا ۳۱ کتاب درسی

آزمون جامع (۱)

فصل اول

دوازدهم

سکانس ۲۹



601. اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ را به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i > j \\ i + j & ; i = j \\ 3 & ; i < j \end{cases}$ نشان دهیم، در ماتریس B مجموع درایه های قطر فرعی کدام است؟

(۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

602. اگر مجموع ماتریس اسکالر $A = \begin{bmatrix} x+2 & 0 \\ y+1 & 5 \end{bmatrix}$ و ماتریس $B = \begin{bmatrix} 3 & a-1 \\ b & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، $a + b$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) ۱-

603. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ و ماتریس C به صورت $C = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ باشد، جمع درایه های سطر اول ماتریس C^2 کدام است؟

(۱) ۲۷۰
(۲) ۸۱
(۳) ۲۷
(۴) ۲۴۳

604. اگر $B + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ ترین درایه ماتریس $A^{-1}BA + A^{-1}CA$ کدام است؟

(۱) ۴۶
(۲) ۳۵
(۳) ۲۵
(۴) ۴۱

605. اگر در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix}$ داشته باشیم $A^{-1} = A$ حاصل $a + b$ کدام است؟

(۱) -۷
(۲) ۷
(۳) -۲۸
(۴) ۲۸

606. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه به ازای چند مقدار a ماتریس AB وارون پذیر است؟

(۱) یک مقدار
(۲) دو مقدار
(۳) هیچ مقدار
(۴) بیشمار مقدار

607. اگر $A = \begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$ بوده و از تساوی $AC = AB$ بتوان به تساوی $B = C$ رسید، مقدار a کدام است؟

(۱) $a = \pm 2$
(۲) $a = \pm 1$
(۳) $a \neq \pm 2$
(۴) $a \neq \pm 1$

آزمون های جامع

خرید آنلاین در gajmarket.com

NOTE

608. اگر $\begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 x & 0 \\ 0 & 1 + \tan^2 x \end{bmatrix}$ باشد، سطر اول A کدام است؟

- (1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$
 (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
 (3) $\begin{bmatrix} 1 & \tan^2 x \end{bmatrix}$
 (4) $\begin{bmatrix} \tan^2 x & 1 \end{bmatrix}$

609. اگر $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی و $(A - 2I)^{-1} = m A + n I$ باشد، n کدام است؟

- (1) -17
 (2) 17
 (3) 10
 (4) -10

610. اگر دستگاه $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ دارای جواب غیرصفر باشد، دستگاه $\begin{bmatrix} 4 & a-3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$...

- (1) یک جواب منحصر به فرد دارد.
 (2) بیشمار جواب دارد.
 (3) جواب ندارد.
 (4) نامشخص

611. اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} \log(6 - 2\sqrt{5}) & \log(1 + \sqrt{5}) \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (1) $2 + 4k$
 (2) $4k$
 (3) $1 + k$
 (4) $2k$

612. در دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ اگر A ماتریس ضرایب مجهولات بوده و $B = \begin{bmatrix} A & A^{-1} \\ A^{-1} & A \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر اول و ستون چهارم ماتریس B کدام است؟

- (1) صفر
 (2) -48
 (3) 48
 (4) -42

613. اگر A یک ماتریس اسکلر مرتبه 3 و داشته باشیم $|A + I| = 64$ حاصل $|A - I|$ کدام است؟

- (1) 2
 (2) 8
 (3) 1
 (4) 9

614. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $A^{93} + A^{94}$ کدام است؟

- (1) -3
 (2) 3
 (3) 4
 (4) -4

615. اگر $|A| = 2$ و $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^{-1} + A|$ کدام است؟

- (1) 6
 (2) $\frac{1}{3}$
 (3) 2
 (4) 3

خرید آنلاین در gajmarket.com

صفحه 10 تا 31 کتاب درسی

سکانس 30

دوازدهم

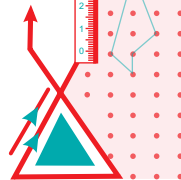
فصل اول

آزمون جامع (2)

C. Villani
Feldin 923

616. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1-x^2 & 2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری غیراسکلر باشد، x کدام است؟

- (1) ± 1
 (2) 1
 (3) -1
 (4) صفر



617. اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i < j \\ 1 & ; i = j \\ 2 & ; i > j \end{cases}$ باشد، سطر دوم ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ A & & \\ & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(1) $[\begin{smallmatrix} 5 & 2 & -1 \end{smallmatrix}]$ (2) $[\begin{smallmatrix} 11 & 4 & -3 \end{smallmatrix}]$

(3) $[\begin{smallmatrix} 5 & 3 & -1 \end{smallmatrix}]$ (4) $[\begin{smallmatrix} 10 & 5 & -2 \end{smallmatrix}]$

618. اگر A, B دو ماتریس مربعی 2×2 باشند که $AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ حاصل $B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

619. اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل A^{11} کدام است؟

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 22 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -22 & 1 \end{bmatrix}$

620. اگر $A^2 = A$ و $A^2 = I - (I - A)^2$ باشد، $B = I - (I - A)^2$ کدام است؟

(1) A (2) \bar{O}

(3) I (4) $B - I$

621. اگر A یک ماتریس قطری باشد و $(A + I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

(1) 5 (2) 6

(3) 12 (4) -6

622. اگر $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ و $B = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و ماتریس $A + B$ وارون پذیر نباشد، برای x چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ وجود دارد؟

(1) 1 (2) 2

(3) 4 (4) هیچ

623. اگر $A^2 = 2I$ و I ماتریس همانی و ماتریس $A(A - I)^{-1}$ را بتوان به صورت $A^2 + \alpha A + \beta I$ نوشت، $\alpha + \beta$ کدام است؟

(1) 2 (2) 1

(3) -1 (4) 3

624. اگر A و B ماتریس هایی وارون پذیر باشند و $A + B = I$ باشد، حاصل $A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}B^{-1}$ کدام است؟

(1) I (2) $-I$

(3) $A^{-1}B^{-1}$ (4) AB

625. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ را به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ نشان دهیم، معکوس ماتریس ضرایب مجهولات در کدام تساوی صدق می کند؟

(1) $A^{-1} = -A - 4I$ (2) $A^{-1} = A + 4I$

(3) $A^{-1} = 4I - A$ (4) $A^{-1} = A - 4I$

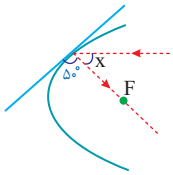
626. اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $a_{ij} = \sin\left(\frac{180^\circ}{i+j}\right)$ باشد، دترمینان ماتریس $A - I$ کدام است؟


(1) $\frac{3}{4}$ (2) $-\frac{7}{4}$

(3) $\frac{7}{4}$ (4) $-\frac{2}{4}$

660. یک شعاع نورانی مطابق شکل به موازات محور سهمی بر سهمی تابیده، زاویه x کدام است؟

- ۱) 6°
- ۲) 8°
- ۳) 5°
- ۴) 7°






صفحه ۶۲ تا ۸۴ کتاب درسی

آزمون جامع (۵)

فصل سوم

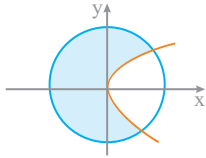
دوازدهم

سکانس ۳۳



C. Villani
Fedu.9723

661. کدام رابطه می‌تواند مربوط به نمودار مقابل باشد؟



- ۱) $x \leq y^2 \leq 3 - x^2$
- ۲) $-x \leq y^2 \leq 3 - x^2$
- ۳) $3 - x^2 \leq y^2 \leq x$
- ۴) $3 - x^2 \leq y^2 \leq -x$

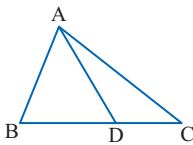
662. معادله خط گذرا از دو نقطه $A(1, 2, 3)$ و $B(1, -1, 3)$ کدام است؟

- ۱) $x = 1$
- ۲) $z = 3$
- ۳) $\begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$
- ۴) $\begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

663. معادله دو وجه مقابل یک مکعب مستطیل به صورت $P_1: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ و $P_2: \begin{cases} z = -2 \\ z = 3 \end{cases}$ است، حجم این مکعب مستطیل کدام است؟

- ۱) ۲۴
- ۲) ۴۰
- ۳) ۳۶
- ۴) ۲۰

664. در مثلث ABC مطابق شکل $\vec{BD} = 2\vec{DC}$ است، اگر $\vec{AD} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$ باشد، کدام است $m+n$ ؟

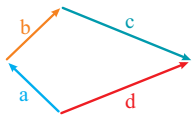


- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) صفر
- ۴) -۱

665. اگر عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار را به عنوان دو بردار در نظر بگیریم، در کدام ساعت، حاصل ضرب داخلی دو عقربه بزرگتر است؟

- ۱) عصر ۵
- ۲) یازده و نیم صبح
- ۳) شب ۹
- ۴) عصر ۲

666. در شکل مقابل، اندازه بردارهای a, b, c, d به ترتیب ۲، ۱، ۱، ۱ می‌باشد. حاصل $a \cdot b + c \cdot d$ برابر کدام است؟



- ۱) ۶
- ۲) ۴
- ۳) ۳
- ۴) ۲

667. اگر a, b, c سه بردار واحد باشند به طوری که $a + b + c = \vec{0}$ حاصل $a \cdot (2b - c)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$
- ۲) $-\frac{3}{2}$
- ۳) $-\frac{1}{2}$
- ۴) $\frac{3}{2}$

668. اگر $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 12$ باشد، حداکثر عبارت $(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3})^2$ کدام است؟

- ۱) ۴
- ۲) $\frac{4}{3}$
- ۳) ۱
- ۴) ۱۶

669. اگر نقاط $A(1, 1, 1), B(2, 1, 2), C(3, 2, 2)$ سه رأس مثلث ABC باشند و AH ارتفاع مثلث باشد، طول پاره خط BH کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$
- ۲) $\sqrt{3}$
- ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

670. اگر $u = (a, 1, -2), v = (2, b, -2), u \times v = (c, 2, 10)$ باشد، بردار $u \times (u \times v)$ با کدام بردار موازی است؟

- ۱) $i + 3j$
- ۲) $i - 3j$
- ۳) $3i - j$
- ۴) $3i + j$

آزمون های جامع

خرید آفلاین در gajmarket.com





671. زاویه بین دو بردار a و b بزرگتر از 90° است. اگر $|a| = 4$, $|b| = 5$, $|a \times (a - b)| = 16$ باشد، اندازه تفاضل دو بردار a و b کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\sqrt{71}$ (۳) $\sqrt{65}$ (۴) ۳

672. اگر a و b دو بردار، $a = (4, 2, 4)$ ، $|b| = 10$ و کسینوس زاویه بین آن‌ها $\frac{3}{5}$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع بنا شده بر دو بردار a و $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴) ۵۶

673. دو بردار a و b به طول‌های ۳ و ۴ واحد با یکدیگر زاویه 30° می‌سازند. مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $a - 2b$ و $3a + 2b$ تولید می‌شود،

(داخل - ۸۴)

کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۲ (۴) ۴۸

674. دو بردار با تصاویر $a = (1, -1, 1)$ و $b = (1, -2, 2)$ مفروض‌اند. حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار $a \times b$, $a + b$, $a - b$ ساخته

می‌شود، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۲ (۴) ۱۶

675. ساده شده عبارت $(a \times i) \cdot [(b \times i) \times (c \times i)]$ کدام است؟

- (۱) $a \cdot (b \times c)$ (۲) $b \cdot (a \times c)$ (۳) $a \times (b \times c)$ (۴) صفر



صفحه ۶۲ تا ۸۴ کتاب درسی

آزمون جامع (۶)

فصل سوم

دوازدهم

سکانس ۳۴



آزمون‌های جامع

676. خط $D: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ با کدام صفحه موازی است؟

- (۱) $x = 2$ (۲) $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ (۳) $z = 4$ (۴) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

677. معادله صفحه شامل خط $D: \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ و نقطه $A(3, 4, 2)$ کدام است؟

- (۱) $x = 1$ (۲) $z = 2$ (۳) $x = 3$ (۴) $y = 4$

678. سه وجه یک مکعب مستطیل بر صفحات مختصات واقع است و خط به معادله $D: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ شامل یکی از یال‌های آن است، اگر نقطه‌ای به ارتفاع ۲ واقع بر این خط یکی از رأس‌های مکعب مستطیل باشد، حجم آن کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۲۴ (۴) ۴۸

679. در یک فرودگاه باد نیرویی به صورت $w = 3i + 2j$ به هواپیما وارد می‌کند، اگر مسیر خط فرود به صورت $l = -i + 4j$ باشد، خلبان نیروی

محرکه هواپیما را باید در راستای کدام بردار تنظیم کند تا یک فرود ایمن انجام دهد؟

- (۱) $2i - 6j$ (۲) $4i - 2j$ (۳) $2i + 6j$ (۴) $-4i + 2j$

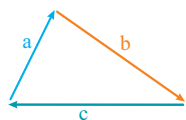


680. در مستطیل ABCD مطابق شکل اندازه اضلاع برابر ۳ و ۴ است. حاصل $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) -۹ (۳) ۹ (۴) ۷

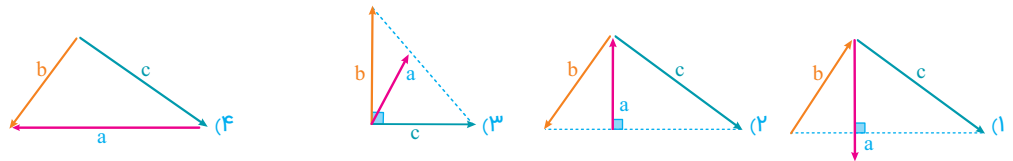
681. اگر a, b, c سه بردار با طول‌های ۴، ۳، ۵ مطابق شکل باشند، حاصل $a \cdot b + a \cdot c - b \cdot c$ کدام است؟

- (۱) -۲۳ (۲) -۷ (۳) ۷ (۴) ۲۳



NOTE

682. سه بردار a, b, c نامساوی و غیرصفر هستند. در کدام یک از شکل های زیر $a \cdot b = a \cdot c$ می باشد؟



683. اگر a' تصویر بردار a در امتداد بردار b باشد، حاصل $a \cdot a'$ کدام نمی تواند باشد؟

- (1) 2 (2) 4 (3) -2 (4) 3

684. اگر a' تصویر بردار $a = -j + k$ در امتداد بردار $b = i + j$ باشد، زاویه بین بردارهای a و a' کدام است؟

- (1) 60° (2) 120° (3) صفر (4) 180°

685. اگر $a = (m, 1, -2)$ و $b - c = (2, -m, 1)$ داشته باشیم $a \cdot b = a \cdot c$ حاصل $b \times a + a \times c$ کدام است؟

- (1) $(3, 6, 6)$ (2) $(3, -2, 6)$

- (3) $(3, 6, 2)$ (4) $(-3, -6, -6)$

686. در کدام حالت حاصل ضرب برداری بردار غیرصفر a در مجموع دو بردار غیرصفر X و Y الزاماً صفر نمی باشد؟

- (1) بردار X قرینه بردار Y (2) بردار a موازی صفحه شامل X و Y

- (3) سه بردار دو به دو موازی هم (4) بردار a موازی بردار $X + Y$

687. اگر $b + c = (n, -1, 2)$ و $a + d = (6, m, 4)$ باشد، رابطه های $a \times b = c \times d$ و همچنین $a \times c = b \times d$ بین چهار بردار a, b, c, d برقرار باشد.

حاصل $m + n$ کدام است؟

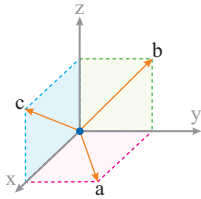
- (1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) -2

688. اگر نقاط $A(1, 2, 1), B(3, 1, 3), C(-1, 0, 2), D(3, -2, 6)$ رئوس دوزنقه $ABCD$ باشند، مساحت دوزنقه کدام است؟

- (1) 9 (2) $4/5$ (3) 18 (4) 6

689. بردارهای $a = i + j, b = j + k, c = i + k$ و وجه یک متوازی السطوح قائم با قاعده مربع هستند، حجم این متوازی السطوح کدام است؟

- (1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) 2



690. در کدام حالت ضرب مختلط سه بردار a, X, Y الزاماً صفر نیست؟

- (1) بردار a برابر با مجموع دو بردار X و Y باشد. (2) بردار a موازی تفاضل X و Y باشد.

- (3) بردار a عمود بر X و Y باشد. (4) مجموع سه بردار صفر باشد.

همه صفحات کتاب درسی

آزمون جامع (7)

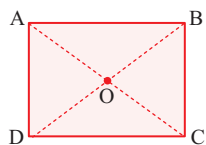
همه فصول

دهم + یازدهم

سکانس 35

C. Villani
Riada, 1972

691. مستطیل $ABCD$ به اضلاع $AB = 8$ و $AD = 6$ مفروض است. چند نقطه روی قطرهای مستطیل وجود دارد که اختلاف فاصله آن ها از

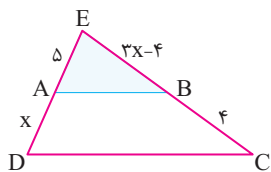


- (1) هیچ (2) 2

- (3) 4 (4) بیشمار



823. در شکل زیر مساحت دوزنقه ABCD چند برابر مساحت مثلث EAB است؟



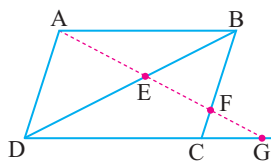
(۲) $\frac{16}{9}$

(۱) $\frac{9}{4}$

(۴) $\frac{36}{25}$

(۳) $\frac{25}{16}$

824. در شکل زیر چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است. مقدار $EF \times EG$ کدام است؟



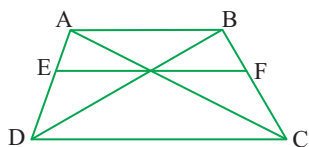
(۲) ED^2

(۱) EA^2

(۴) $FB \times FC$

(۳) $EB \times ED$

825. در شکل زیر، $AB \parallel EF \parallel DC$ و اندازه پاره خط های AB و DC به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازه پاره خط EF کدام است؟



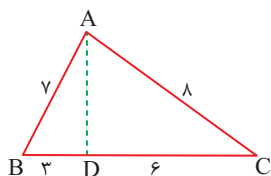
(۱) $\frac{45}{7}$

(۲) $\frac{45}{6}$

(۳) $3\sqrt{5}$

(۴) ۷

826. در شکل زیر، اندازه پاره خط AD کدام است؟



(۱) $\sqrt{37}$

(۲) ۶

(۳) $2\sqrt{7}$

(۴) $2\sqrt{10}$

827. دو کره به شعاع های ۳ و ۴ واحد که مرکزهای آن ها با یکدیگر ۵ واحد فاصله دارند، متقاطعند. مساحت مکان هندسی نقاط مشترک این دو کره کدام است؟

(۲) $4/4\pi$

(۱) $3/24\pi$

(۴) $5/76\pi$

(۳) $4/8\pi$

828. یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده های $\frac{9}{4}$ و ۸ بر دایره ای محیط شده است. فاصله دورترین نقاط دایره تا یک رأس قاعده بزرگ دوزنقه کدام است؟

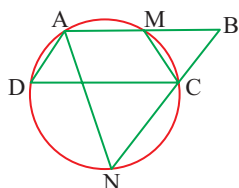
(۲) $3+4\sqrt{2}$

(۱) ۹

(۴) $7/5$

(۳) ۸

829. در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است. تعداد مثلث های متساوی الساقین کدام است؟



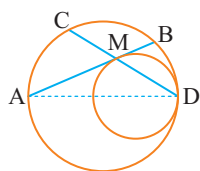
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

830. در شکل زیر، دو دایره در نقطه D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر AB از دایره بزرگ تر، بر دایره داخل در نقطه M، مماس است. نسبت $\frac{MC}{MB}$ کدام است؟



(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) ۲

831. چهار نقطه $A(1, 3), B(15, 9), M(a, 0), N(a + 5, 0)$ در صفحه مختصات مفروض اند، کمترین اندازه خط شکسته AMNA کدام است؟

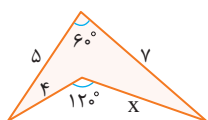
(۲) ۱۹

(۱) ۱۸

(۴) ۲۱

(۳) ۲۰

832. در شکل زیر، مقدار $(x + 2)$ ، کدام است؟



- (1) $3\sqrt{3}$
 (2) $2\sqrt{7}$
 (3) $4\sqrt{2}$
 (4) $3\sqrt{5}$

833. طول یک مستطیل 2 واحد کمتر از $1/5$ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل 192 واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

- (1) 52
 (2) 56
 (3) 60
 (4) 64

834. دایره‌ای به مرکز $(3, 1)$ بر روی خط راست $5x + 12y = 15$ ، وتری به طول $2\sqrt{21}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور x ها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

- (1) $2\sqrt{6}$
 (2) 6
 (3) $2\sqrt{15}$
 (4) 8

835. از میان دایره‌های گذرا از نقطه $A(3, 2)$ و مماس بر خطوط $3x - 4y = 0$ و $y = 0$ ، کوچک‌ترین شعاع دایره کدام است؟

- (1) 1
 (2) $\frac{3}{2}$
 (3) $\frac{4}{3}$
 (4) $\frac{13}{9}$

836. یک بیضی به قطرهای $AA' = 14$ و $BB' = 4\sqrt{6}$ و کانون F نزدیک به نقطه A ، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطه F ، دایره به قطر AA' را در نقطه M ، قطع می‌کند. اندازه پاره خط AM ، کدام است؟

- (1) 7
 (2) $2\sqrt{7}$
 (3) $2\sqrt{3}$
 (4) $2\sqrt{6}$

837. در سهمی به معادله $y^2 + ay + bx - 9 = 0$ ، معادله خط هادی، $x = \frac{13}{4}$ و محور تقارن آن $y = 1$ است. مقادیر a ، b ، کدام‌اند؟

- (1) 5, 8
 (2) 5, 7
 (3) 4, 8
 (4) 3, 7

838. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^4 ، کدام است؟

- (1) $[0 \ 1 \ 0]$
 (2) $[1 \ 0 \ 0]$
 (3) $[0 \ 0 \ 1]$
 (4) $[1 \ 0 \ 1]$

839. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و ماتریس X ، جواب معادله $AX = A^{-1}$ باشد. ماتریس X ، کدام است؟

- (1) $\begin{bmatrix} -32 & 14 \\ 48 & -25 \end{bmatrix}$
 (2) $\begin{bmatrix} 32 & -14 \\ -56 & 25 \end{bmatrix}$
 (3) $\begin{bmatrix} 16 & -7 \\ -28 & 21 \end{bmatrix}$
 (4) $\begin{bmatrix} 16 & -7 \\ -25 & 14 \end{bmatrix}$

840. جواب‌های معادله $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ، کدام است؟

- (1) 4, -9
 (2) 3, -8
 (3) -4, -9
 (4) -3, 8

Matrix **M**

۱ ۴ درایهٔ سطر اول و ستون سوم همان X و درایهٔ سطر سوم و ستون دوم

عدد ۸ است، بنابراین $x = 8 + 5 = 13$ حال منظور از $\sum_{j=1}^4 a_{3j}$ مجموع درایه‌های سطر سوم است: $\sum_{j=1}^4 a_{3j} = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} = 7 + 8 + 9 + 1 = 25$

۲ ۲ می‌دانیم درایهٔ a_{ij} وقتی $j > i$ باشد زیر قطر اصلی و اگر $j < i$ باشد بالای قطر اصلی و به ازای $i = j$ روی قطر اصلی است:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2+1 & 5 \\ 7 & 2^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

۱ ۳ برای این که A یک ماتریس قطری باشد، باید تمام درایه‌های خارج از

قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ b+3=0 \Rightarrow b=-3 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1$$

۲ ۴ می‌دانیم در ماتریس قطری، درایه‌های بیرون قطر اصلی باید صفر باشد، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+4 & -2x+4 \\ 7+y & 7+y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4=0 \Rightarrow x=2 \\ 7+y=0 \Rightarrow y=-7 \end{cases}$$

۳ ۵ باید درایه‌های دو ماتریس نظریه‌بنظر با هم برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \\ z-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, y=2 \\ x+y+z=10 \\ z=5 \end{cases}$$

۱ ۶ ابتدا ماتریس B را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} 1^2+1^2 & 1^2+2^2 \\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$2A - B + I = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

۱ ۷ اگر فرض کنیم $AB=C$, $BA=D$ باشد آنگاه:

۱ $C_{21} = [A \text{ سطر دوم}] \begin{bmatrix} \text{ستون اول} \\ B \end{bmatrix} = [x+1 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ x \end{bmatrix} = 7$

$\Rightarrow 3x+3+0+x=7 \Rightarrow x=1$

۲ $d_{31} = [B \text{ سطر سوم}] \begin{bmatrix} \text{ستون اول} \\ A \end{bmatrix} = [1 \ 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1+10=11$

۱ ۸ کفایت سطر اول ماتریس B را در ماتریس A ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3+0+x=7 \Rightarrow x=1 \\ m+x=5 \\ 2+2m=x \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

۳ ۹ تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ ابتدا ماتریس A را از سمت چپ فاکتور می‌گیریم:

$$ABC + ADC = A(BC + DC)$$

حال ماتریس C را از سمت راست از ماتریس‌های درون پرانتز فاکتور می‌گیریم:

$$A(BC + DC) = A(B + D)C$$

۲ می‌توان به جای ماتریس C ماتریس $I \times C$ قرار داد (چون I عضو بی‌اثر ضرب است) و از ماتریس C از سمت راست فاکتور گرفت:

$$A \times C + C = A \times C + I \times C = (A + I) \times C$$

۳ اگر دقت کنید متوجه می‌شوید در ماتریس BA ماتریس A در سمت راست و در ماتریس AC ماتریس A در سمت چپ واقع شده است، بنابراین نمی‌توان از ماتریس A فاکتور گرفت.

۴ دقت کنید نمی‌توان ماتریس BA را به صورت AB نوشت، چون همان‌طور گفتیم ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

۴ اگر به جای ماتریس $2B$ ماتریس $2BI$ را قرار دهیم، آن‌گاه داریم:

$$BC - 2B = BC - 2BI = BC - B(2I) = B \times (C - 2I)$$

۴ ۱۰ در پرانتز اول از ماتریس B را از سمت راست و در پرانتز دوم از C از سمت

چپ فاکتور می‌گیریم و با توجه به این که $BC=2I$ است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (AB + 2B)(CA + C) &= (A + 2I)BC(A + I) \\ &= (A + 2I)(2I)(A + I) = 2(A + 2I)(A + I) \\ &= 2 \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۴ ۱۱ می‌دانیم $(A-B)^T = (A-B)(A-B)$ حال در طرف دوم تساوی

پرانتزها را طبق قانون پخشی در هم ضرب می‌کنیم:

$$(A-B)^T = A^T - AB - BA + B^T \Rightarrow A^T + B^T = (A-B)^T + AB + BA$$

۱ $AB + BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

۲ $A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-B)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

حال کفایت **۱** و **۲** را با هم جمع کنیم:

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

۳ ۱۲ ابتدا ماتریس A را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم، سپس درایه‌های نظیر

در دو ماتریس را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1+m & 1+2m \\ 2+m & 2+2m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+2m=3 \Rightarrow m=1 \\ m+x=5 \\ 2+2m=x \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

19 ماتریس B ماتریس قطری است و کافی است فقط درایه‌های قطری اصلی

$$B^f = \begin{bmatrix} (-2)^f & 0 & 0 \\ 0 & 1^f & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

را به توان برسانیم یعنی:

و اما در ماتریس A ابتدا A^2 را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

حال با توجه به رابطه بین A و A^2 می‌توانیم A^f را نیز بر حسب A پیدا کنیم:

$$A^f = (2A)^2 = 4A^2 = 4(2A) = 8A = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $A^f + B^f$ به صورت زیر است:

$$A^f + B^f = \begin{bmatrix} 24 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 66$$

20 ابتدا ماتریس A^2 و در صورت لزوم A^3 را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

بنابراین $A^f = A^5 = \dots = A^1 = \bar{O}$ خواهیم داشت:

$$A + A^2 + \dots + A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌ها برابر با $2+2+7=11$ خواهد بود.

21 ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم. می‌دانیم برای ماتریس A و I

تمام اتحادها برقرار است [چون ضرب آن‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی است]:

$$(A-I)(A+I)(A^f + A^2 + I) = \underbrace{(A^2 - I^2)}_{\text{جاق و لاغر}} (A^f + A^2 + I) = A^f - I$$

مزدوج

حال باید ماتریس A^f را پیدا کنیم؛ بنابراین ابتدا A^2 را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 \text{ قطری است}$$

$$A^6 = (A^2)^3 = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^6 - I = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 0 \\ 0 & 63 \end{bmatrix}$$

13 برای این که ضرب این دو ماتریس تعویض پذیر باشد، باید نسبت تفاضل

اعداد قطر اصلی آن‌ها برابر با نسبت اعداد قطر فرعی باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{a-2}{y-3} = \frac{3}{6} = \frac{5}{b} \Rightarrow \begin{cases} 2a-4=4 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4 \\ 3x \times b = 30 \Rightarrow b=10 \end{cases} \rightarrow a+b=14$$

در ساختن این نسبت‌ها گاهی ممکن است مخرج یکی از کسرها صفر شود،

در این صورت برای این که تناسب برقرار گردد باید صورت نیز صفر شود و آن کسر

به صورت $\frac{0}{0}$ درآید.

14

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11x-1 & -x-2 & -3x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11x-1 \\ -x-2 \\ -3x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x(11x-1) + (-x-2)(2x) - 1(3x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{2}{9}$$

15 ابتدا باید ماتریس A^2 را تشکیل دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون تشخیص نظم موجود کمی مشکل است پس A^2 را هم می‌سازیم:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال با توجه به نظم موجود درمی‌یابیم که:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{جمع درایه‌ها} = 22$$

16

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \log_2^2 \\ \log_2^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \log_2^2 \\ \log_2^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

حال طرفین تساوی را به توان 49 می‌رسانیم:

$$A^{98} = I^{49} = I$$

17 ابتدا ماتریس A^2 را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \rightarrow A \text{ متناوب}$$

$$A^7 - A^4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

اگر $A^2 = I$ باشد، آنگاه: $A^{2k} = I$ $A^{2k+1} = A$

18 ابتدا ماتریس A را تشکیل داده و سپس توان دوم آن را می‌سازیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید به الگوی خاصی دست پیدا نکردیم، بنابراین مجبوریم

$$A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

را نیز تشکیل دهیم:

ظاهراً باز هم به الگوی خاصی دست پیدا نکردیم اما خواسته مسئله a-b

است که در تمام توان‌های A حاصل آن برابر 1 است.

سهمی $F(1,0)$ است و نقطه $A(1,1)$ بالاتر از کانون سهمی قرار دارد، پس پرتوهای بازتابش باید نور پایین یعنی موازی و رو به پایین باشد.

لامپ پایین کانون قرار دارد، پرتوهای بازتابش موازی و رو به بالا خواهد بود.	لامپ بالای کانون قرار دارد، پرتوهای بازتابش موازی و رو به پایین خواهد بود.
لامپ از سهمی دور شده است، شعاع‌های بازتابش همگرا در نقطه B هستند.	لامپ به سهمی نزدیک تر است، شعاع‌های بازتابش واگرا هستند.

Vectors

166 نمودار رابطه $x=1$ و $-1 \leq y \leq 3$ مطابق شکل یک پاره خط قائم به طول ۴ است.

167 باید نمودار سهمی $y=x^2$ را در بازه $[-1, 2]$ در نظر بگیریم که گزینه ۱ شکل درست این نمودار را نشان می‌دهد.

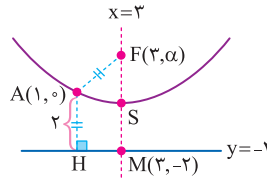
168 برای مشخص کردن نمودار $y \geq x^2$ و $y < 2$ ، ابتدا نمودارهای $y=x^2$ و $y=2$ را رسم می‌کنیم و با نقطه‌یابی منطقه‌ی جواب را پیدا می‌کنیم. چون نقطه $A(0,1)$ در هر دو نامعادله صدق می‌کند، منطقه‌ی رنگ شده جواب است.

169 در ناحیه‌ی دوم دستگاه $x < 0, y > 0, z > 0$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} m-1 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 1$$

در واقع در ناحیه‌های ۱، ۲، ۳، ۴ دستگاه سه بعدی علامت x و y همان علامت x و y در فضای دو بعدی است و $z > 0$ است و ناحیه‌های ۵، ۶، ۷، ۸ همان علامت‌ها برای x و y حفظ می‌شود و $z < 0$ است.

161 چون سهمی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۵ قطع کرده است، بنابراین نقاط $A(1,0)$ و $B(5,0)$ روی سهمی قرار دارند و محور تقارن سهمی برابر $x = \frac{5+1}{2} = 3$ است. حال کانون را به صورت پارامتری روی این خط در نظر می‌گیریم یعنی $F(3, \alpha)$ و سپس به سراغ تعریف سهمی می‌رویم:



$$AF = AH \Rightarrow \sqrt{(1-3)^2 + (0-\alpha)^2} = 2 \Rightarrow 4 + \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = 0$$

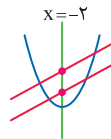
بنابراین مختصات کانون $F(3,0)$ است. حال رأس وسط نقاط F و M قرار دارد، بنابراین:

$$S = \frac{F+M}{2} = \frac{(3,0) + (3,-2)}{2} = (3,-1) \Rightarrow \text{عرض رأس} = -1$$

162 می‌دانیم فاصله‌ی کانونی دیش‌ها از رابطه $p = \frac{D^2}{16h}$ به دست می‌آید که D قطر دهانه دیش و h عمق دیش است، بنابراین:

$$p = \frac{8^2}{16 \times 2} = \frac{64}{32} = 2$$

163 دو خط داده شده موازی‌اند و یک سهمی قائم را قطع کرده‌اند، پس با توجه به طول نقطه $M(-2,1)$ ، مکان هندسی وسط وترها خط $x = -2$ است و بنابراین طول نقطه‌ی وسط دو نقطه برخورد خط جدید با سهمی باید (-2) باشد که تنها گزینه موجود با این شرایط، گزینه ۳ است.



164 می‌دانیم اگر یک شعاع نورانی به موازات محور سهمی بر آن بتابد شعاع بازتابش از کانون سهمی می‌گذرد. بنابراین ابتدا خط $y = -1$ را با سهمی قطع می‌دهیم تا نقطه A به دست آید:

$$y = -1 \Rightarrow 1 + 6 - 4x + 9 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, -1)$$

حال باید کانون سهمی را پیدا کنیم، بنابراین معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$y^2 - 6y - 4x + 9 = 0 \Rightarrow (y-3)^2 = 4x - 9 + 9 \Rightarrow (y-3)^2 = 4(x-0)$$

$$\begin{cases} S(0, 3) \\ p=1 \end{cases} \Rightarrow F(0+1, 3) \Rightarrow F(1, 3)$$

و در آخر معادله خط گذرا از A و F را می‌نویسیم:

$$m_{AF} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - (-1)}{1 - (4)} = \frac{4}{-3}$$

$$y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y - 9 = -4x + 4 \Rightarrow 4x + 3y = 13$$

165 ابتدا مختصات کانون سهمی را پیدا می‌کنیم، سپس موقعیت نقطه A را نسبت به مختصات کانون به دست می‌آوریم. سهمی داده شده یک سهمی افقی به رأس $S(0,0)$ و فاصله‌ی کانونی $p=1$ است. بنابراین مختصات کانونی

حال قرینه نقطه A نسبت به محور OZ را A' و قرینه آن نسبت به صفحه XZ را A'' می‌نامیم و داریم:

$$A'(1, -2, 2) \quad A''(-1, -2, 2) \quad |A'A''| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2$$

بهبتر است بردارها را باز کنیم:

$$\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} \Rightarrow M - A = \frac{2}{3}(B - A) \Rightarrow 3M - 3A = 2B - 2A$$

$$3M = 2B + A \Rightarrow M = \frac{2B + A}{3} = \frac{(-2, 4, 2) + (5, -4, 1)}{3}$$

$$M = \frac{(3, 0, 9)}{3} = (1, 0, 3) \Rightarrow |OM| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 9^2} = \sqrt{10}$$

برای این که دو بردار موازی باشند، باید نسبت مؤلفه‌های آن‌ها با هم برابر شود، اما برای این که اشتباه محاسباتی برایتان پیش نیاید، نسبت‌ها را به صورت زیر تشکیل دهید:

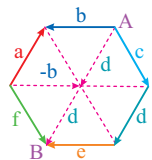
$$\frac{2}{1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{m}$$

یعنی ابتدا یک بردار را در صورت‌های مناسب قرار دهید و سپس بردار دوم را قرار دهید:

$$\frac{2}{-1} = \frac{1}{2k} = \frac{m}{1} \Rightarrow m \times k = (-2)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

همه بردارهای داده شده را باز می‌کنیم:

$$\vec{DC} + \vec{BF} - \vec{BG} + \vec{DC} = C - D + F - B - (G - B) + (G - D) \\ = C - D + F - D = \vec{DC} + \vec{DF} = \vec{DE} = \vec{AH}$$



همان‌طور که در شکل دیده می‌شود

$$c + d + e = \vec{AB} \quad a + f = -b$$

می‌باشد، بنابراین:

$$a + f + b + c + d + e = -b + b + c + d + e = \vec{AB} = \vec{cd} = -2a$$

قطرهای متوازی‌الاضلاع بنا شده بر a و b بردارهای a+b و a-b هستند:

$$a + b = (4, 1, 1) \Rightarrow |a + b| = \sqrt{16 + 1 + 1} = 3\sqrt{2}$$

$$a - b = (-2, 3, 3) \Rightarrow |a - b| = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22}$$

رابطه داده شده را باز می‌کنیم:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = A - G + B - G + C - G = A + B + C - 3G$$

حال با توجه به این که G محل برخورد میانه هاست $G = \frac{A+B+C}{3}$ می‌باشد.

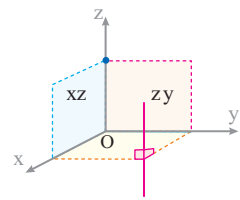
$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = A + B + C - 3\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \vec{0}$$

نقاط A و B را روی صفحه XY تصویر می‌کنیم (کافی است به جای Z، صفر قرار دهیم):

$$\begin{cases} A'(1, 2, 0) \\ B'(4, -2, 0) \end{cases} \Rightarrow |A'B'| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-(-2))^2 + 0^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

فصل مشترک دو صفحه XZ و YZ محور OZ است، از طرف دیگر خطی

که با دو صفحه متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است، بنابراین خط خواسته شده باید موازی OZ باشد، در نتیجه معادله آن به صورت $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ است.



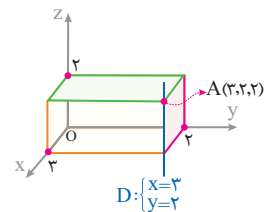
ویژگی مشترک خط و نقطه داده شده $Z=2$ است. بنابراین این صفحه شامل نقطه A و خط D است.

ساده شده این خط به صورت $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ است که عمود بر صفحه XY است، بنابراین بر تمام صفحات موازی آن از جمله $Z=3$ نیز عمود است.

این دو صفحه موازی صفحه‌های XZ, YZ هستند، بنابراین صفحه‌ای که بر هر دوی آن‌ها عمود باشد، موازی صفحه XY (عمود بر OZ) است. در نتیجه معادله آن به صورت $Z=k$ است. حال چون باید از نقطه $A(1, 2, 3)$ نیز عبور کند معادله آن به صورت $Z=3$ است.

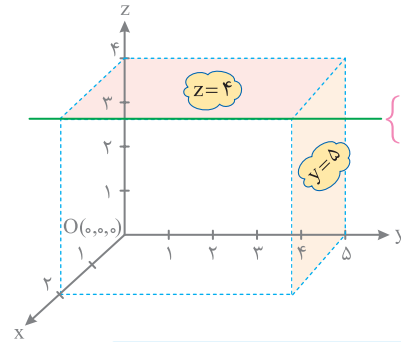
با توجه به اطلاعات مسئله شکل

آن به صورت مقابل است و حجم آن برابر است با: $V = 2 \times 3 \times 2 = 12$



اگر معادلات داده شده را در دستگاه مختصات سه‌بعدی رسم کنیم به صورت زیر خواهد بود:

$V = 2 \times 5 \times 4 = 40$



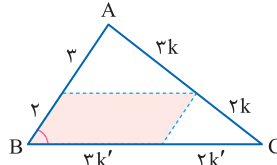
می‌دانیم مختصات هر بردار مانند \vec{AB} از تفاضل مختصات انتها و ابتدای آن به دست می‌آید، بنابراین:

$$\vec{AB} = B - A \Rightarrow (1, 2, -1) = (0, 4, 1) - A \\ \Rightarrow A = (0, 4, 1) - (1, 2, -1) = (-1, 2, 2)$$



2600

ابتدا به کمک قضیه تالس نسبت‌های ایجاد شده روی اضلاع را به



دست می‌آوریم، سپس نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع و مثلث را برحسب سینوس زاویه B می‌نویسیم:

$$\frac{S_{\text{رنگی}}}{S_{ABC}} = \frac{(2)(2k') \sin B}{\frac{1}{2}(\Delta)(\Delta k') \sin B} = \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 48\%$$

Final Assessment Test

3601

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 3 & 2 \\ 1 & 2+2 & 2 \\ 1 & 1 & 2+2 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌های قطر فرعی} = 1+4=5$$

1602

ماتریس A اسکالر است، بنابراین درایه‌های خارج قطر اصلی باید صفر

باشد و درایه‌های روی قطر اصلی باید با هم یکسان باشد:

$$\begin{cases} y+1=0 \Rightarrow y=-1 \\ x+2=5 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

حال باید مجموع A و B قطری باشد:

$$A+B = \begin{bmatrix} 8 & a-1 \\ b & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a+b=1$$

3603

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 18 \\ 3 & 6 & 18 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

جمع درایه‌های سطرها اول $C^2 = 3+6+18=27$

1604

کافیست A^{-1} را حساب کنیم:

$$A^{-1} = \frac{1}{3-4} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر داریم:

$$A^{-1}BA + A^{-1}CA = A^{-1}(B+C)A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 & 46 \\ -25 & 35 \end{bmatrix}$$

1605

طرفین تساوی داده شده رادر ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1} = A \xrightarrow{\times A} I = A^2$$

حال کافیست مربع ماتریس را برابر I قرار دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+2b & 2a+6 \\ ab+3b & 2b+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+6=0 \Rightarrow a=-3 \\ 2b+9=1 \Rightarrow b=-4 \end{cases} \Rightarrow a+b=-7$$

4606

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+1 & 3a-2 \\ 3a-2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = 14(a^2+1) - (3a-2)^2 = 5a^2 + 12a + 10$$

|AB| همواره مثبت است، چون در عبارت به دست آمده $\Delta < 0$ و $a > 0$ است بنابراین این ماتریس به ازای همه مقادیر a وارون پذیر است.

3607

باید ماتریس A وارون پذیر باشد، یعنی دترمینان آن مخالف صفر باشد:

$$|A| = (a-1)(a+1) - 3 \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq 4 \Rightarrow a \neq \pm 2$$

2608

اگر فرض کنیم $BAC = D$ باشد، در این صورت $A = B^{-1}DC^{-1}$

می‌باشد، حال باید ابتدا $B^{-1}D$ را حساب کرده و حاصل آن را از چپ در C^{-1}

$$A = B^{-1}DC^{-1} = (1 + \tan^2 x) B^{-1} C^{-1}$$

ضرب کنیم:

$$= (1 + \tan^2 x) \frac{1}{1 + \tan^2 x} \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1 + \tan^2 x} \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 x & 0 \\ 0 & 1 + \tan^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4609

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I)^2 - 4(A - 2I) - I = \bar{0}$$

$$\xrightarrow{\times (A - 2I)^{-1}} (A - 2I) - 4I - (A - 2I)^{-1} = \bar{0}$$

$$(A - 2I)^{-1} = A - 4I \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-10 \end{cases}$$

3610

باید $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix} = 0$ باشد، بنابراین:

در نتیجه دستگاه دوم به صورت $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ در می‌آید که داریم:

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

2611

$$\left| \frac{\log(6-2\sqrt{5})}{-2} \quad \frac{\log(1+\sqrt{5})}{1} \right| = \log(6-2\sqrt{5}) + 2 \log(1+\sqrt{5})$$

$$= \log(6-2\sqrt{5}) + \log(1+\sqrt{5})^2 = \log(6-2\sqrt{5}) + \log(6+2\sqrt{5})$$

$$= \log(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5}) = \log(6^2 - (2\sqrt{5})^2) = 4 \log 2 = 4k$$

2612

ماتریس A^{-1} را پیدا کرده و B را می‌سازیم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس حاصل از حذف سطرها اول و ستون چهارم B به صورت زیر است:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |B_1| = 3(-7) - 2(12) - 3(1) = -48$$

619 باید بررسی کنیم A^{11} از کدام ترکیب A^2 و A^3 به دست می آید؛ یکی از ترکیب‌ها به صورت $A^{11} = (A^3)^3 \times A^2$ است؛ بنابراین توان سوم ماتریس A^3 را پیدا می‌کنیم و در A^2 ضرب می‌کنیم:

$$(A^3)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^3)^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -22 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I-A)^2 = I^2 - 2AI + A^2 = I - 2A + A^2 = I - A \quad \text{620}$$

$$(I-A)^3 = I - A$$

بنابراین $B^3 = A^3 = A$ در نتیجه $B = I - (I - A) = A$

621 فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$A+I = \begin{bmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & b+1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+1=3 \Rightarrow a=2 \\ b+1=4 \Rightarrow b=3 \end{cases} \Rightarrow |A| = 2 \times 3 = 6$$

$$A+B = \begin{bmatrix} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin x \\ \sin x & \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |A+B| = 0 \quad \text{622}$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos 2x} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

بنابراین برای x چهار جواب $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ در بازه $[0, 2\pi)$ وجود دارد.

$$A^2 = 2I \Rightarrow A^3 - I = I \Rightarrow (A-I)(A^2 + A + I) = I \quad \text{623}$$

$$(A-I)^{-1} = A^2 + A + I$$

$$A(A-I)^{-1} = A^2 + A^2 + A = 2I + A^2 + A$$

$$A(A-I)^{-1} = A^2 + A + 2I \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2 \Rightarrow \alpha + \beta = 3$$

624 از خاصیت $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ استفاده می‌کنیم:

$$A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}B^{-1} = [B(A^{-1} + B^{-1})A]^{-1}$$

$$= [BA^{-1}A + BB^{-1}A]^{-1} = [B+A]^{-1} = I^{-1} = I$$

625 ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ است و طبق

قضیه کیلی - همیلتن داریم:

$$A^2 - 4A + I = \vec{0} \xrightarrow{\times A^{-1}} A - 4I + A^{-1} = \vec{0} \Rightarrow A^{-1} = 4I - A$$

613 فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت:

$$|A+I| = \begin{vmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1)^3 = 64 \Rightarrow k+1=4 \Rightarrow k=3$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$|A-I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -1(-1-0) = 1 \quad \text{614}$$

$$A+I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A+I| = 3(-1) = -3$$

$$|A^{92} + A^{94}| = |A^{92}(I+A)| = |A|^{92} \times |A+I| = -3$$

615 ابتدا دترمینان خواسته شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$|A^{-1} + A| = |A^{-1}(I + A^2)| = |A^{-1}| |I + A^2|$$

حال ماتریس $A^2 + I$ را تشکیل می‌دهیم و دترمینان آن را به دست می‌آوریم:

$$A^2 + I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^2 + I| = 6$$

بنابراین دترمینان خواسته شده برابر است با:

$$|A^{-1} + A| = \frac{|I + A^2|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

616 به جای این‌که درایه‌های خارج قطر اصلی را صفر قرار دهیم و

درگیر محاسبات شویم بهتر است عددی را انتخاب کنیم که درایه‌های خارج

قطر اصلی را صفر کند ولی به ازای آن درایه‌های قطر اصلی یکسان نشود.

بنابراین تنها $x = -1$ قابل قبول است، چون به ازای $x = 1$ ماتریس تبدیل به

یک ماتریس قطری و اسکالر می‌شود.

617 ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

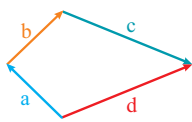
618 از ماتریس A از سمت چپ و از ماتریس B از سمت راست فاکتور می‌گیریم:

$$A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} B = A \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \right) B$$

$$= A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B = AIB = AB$$

665 در ساعت ۲ [عصر یا صبح] زاویه دو بردار از همه کمتر است و ضرب داخلی آن‌ها بزرگتر است.

666 چون حاصل $a \cdot b + c \cdot d$ خواسته شده، پس سعی می‌کنیم رابطه‌ای



بین a, b, c, d پیدا کنیم که آن‌ها با توجه به شکل کاملاً مشخص است: $a + b + c = d$. در نتیجه $a + b = d - c$ بنابراین داریم:

$$|a+b| = |d-c| \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |d|^2 + |c|^2 - 2d \cdot c$$

$$1^2 + 1^2 + 2a \cdot b = 2^2 + 2^2 - 2d \cdot c \Rightarrow 2a \cdot b + 2c \cdot d = 6$$

$$a \cdot b + c \cdot d = 3$$

667 سه بردار هم‌اندازه‌اند و مجموع آن‌ها صفر است، بنابراین زاویهٔ دوبه‌دوی آن‌ها 120° است.

$$a \cdot (2b - c) = 2a \cdot b - a \cdot c = 2|a||b|\cos 120^\circ - |a||c|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \left(2 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \right)$$

668 اگر فرض کنیم $U = (a_1, a_2, a_3)$ و $V = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ طبق نامساوی کوشی - شوارتز داریم:

$$|U \cdot V| \leq |U||V| \Rightarrow \left| \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{3} \right| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \times \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}}$$

حال طرفین نامساوی را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^2 \leq 12 \times \frac{1}{3} = 4$$

669 اندازهٔ پاره‌خط BH عبارت است از اندازهٔ تصویر بردار BA بر بردار BC بنابراین:

$$\begin{cases} \vec{BA} = (-1, 0, -1) \\ \vec{BC} = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow |BH| = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{BC}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

670 با توجه به بردارهای u و v بردار $u \times v$ را پیدا کرده و با بردار داده شده برای $u \times v$ برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = (a, 1, -2) \\ v = (2, b, -2) \end{cases} \Rightarrow u \times v = (-2 + 2b, -4 + 2a, ab - 2) = (c, 2, 10)$$

حال دو بردار در صورتی مساوی هستند که مؤلفه‌های نظیر آن‌ها مساوی باشد:

$$\begin{cases} -4 + 2a = 2 \Rightarrow a = 3 \\ ab - 2 = 10 \Rightarrow b = 4 \\ -2 + 2b = c \Rightarrow c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = (3, 1, -2) \\ u \times v = (6, 2, 10) \end{cases}$$

حال با معلوم شدن بردارهای u و v داریم:

$$u \times (u \times v) = (14, -42, 0) = 14(1, -3, 0) = 14(i - 3j)$$

657 مشتق تابع را با شیب خط داده شده برابر قرار می‌دهیم تا طول نقطهٔ

تقاطع مشخص شود، سپس این طول را در معادلهٔ خط قرار می‌دهیم تا عرض

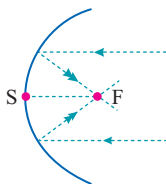
نقطهٔ تقاطع معلوم شود. $\begin{cases} y' = 2x \\ m_D = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow M(1, 2+a)$

حال باید $(1, 2+a) = (b, 5)$ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$$

658 شعاع‌های بازتابش همگی از کانون سهمی می‌گذرند؛ بنابراین باید

مختصات کانون سهمی را به دست آوریم: $\begin{cases} S(-1, 1) \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1+1, 1) = (0, 1)$



659 هر شعاع نورانی که به موازات محور سهمی

بر آن بتابد، شعاع‌های بازتابش از کانون سهمی

می‌گذرد، بنابراین کانون سهمی $F(0/9, -1)$

است:

$$\begin{cases} S(-1/6, -1) \\ F(0/9, -1) \end{cases} \Rightarrow p = 0/9 - (-1/6) = 2/5 = \frac{5}{4}$$

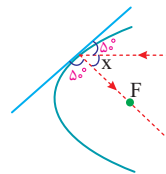
عرض کانون و رأس یکسان است، بنابراین سهمی افقی است و چون طول رأس کمتر از کانون است، سهمی رو به راست باز می‌شود:

$$(y+1)^2 = 4\left(\frac{5}{4}\right)(x+1/6) \xrightarrow{x=0} (y+1)^2 = 10(0+1/6)$$

$$y+1 = \pm \sqrt{5} \Rightarrow y = 3, -5$$

660 زاویهٔ تابش و خط مماس با زاویهٔ باز تابش و خط مماس با هم برابر

است، بنابراین:



$$5^\circ + 5^\circ + X = 180^\circ \Rightarrow X = 80^\circ$$

661 قسمت هاشور خورده درون دایرهٔ $x^2 + y^2 = 3$ و بیرون سهمی

$y^2 = x$ است، بنابراین: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3 \\ y^2 \geq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq y^2 \leq 3 - x^2 \\ y^2 \geq x \end{cases}$

662 هر دو نقطهٔ داده شده X و Z یکسان دارند، بنابراین معادلهٔ خط گذرا از

نقاط A و B به صورت $\begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ است.

663 در این مکعب $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2$ است، بنابراین

حجم مکعب مستطیل برابر است با: $V = 4 \times 2 \times 5 = 40$

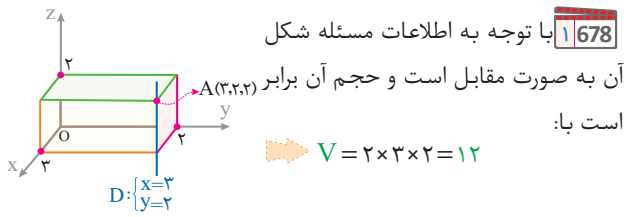
664 ابتدا تساوی داده شده بین دو بردار را به یک تساوی بین نقاط تبدیل

می‌کنیم و سپس نقطهٔ A را در ابتدای همهٔ نقاط طرفین تساوی قرار می‌دهیم:

$$\vec{BD} = 2\vec{DC} \Rightarrow D - B = 2(C - D) \Rightarrow 3D = 2C + B$$

$$3\vec{AD} = 2\vec{AC} + \vec{AB} \Rightarrow \vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \Rightarrow m+n=1$$

۲677 ویژگی مشترک خط و نقطه داده شده $Z=2$ است. بنابراین این صفحه شامل نقطه A و خط D است.

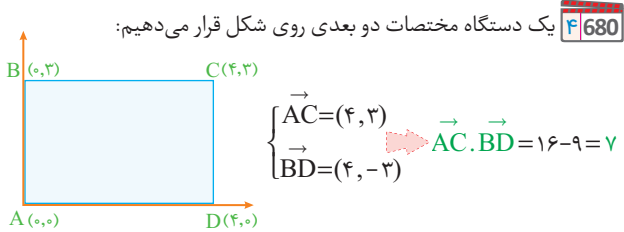


۴679 برای فرود ایمن باید $w+t$ در راستای l باشد، یعنی $w+t$ موازی l باشد، اگر $t = ai + bj$ فرض شود، آنگاه:

$$\begin{cases} w+t = (3+a)i + (b+2)j \\ l = -i + 4j \end{cases} \Rightarrow \frac{3+a}{-1} = \frac{b+2}{4} \Rightarrow 4a+b = -14$$

تنها گزینه‌ای که در رابطه فوق صدق می‌کند گزینه ۴ است، زیرا:

$$4(-4) + 1(2) = -14$$



۲681 می‌دانیم $a+b+c=0$ بنابراین $b+c=-a$ است حال به کمک این رابطه عبارت خواسته شده را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$a \cdot b + a \cdot c - b \cdot c = a \cdot (b+c) - b \cdot c = -a \cdot a - b \cdot c = -|a|^2 - b \cdot c$$

اکنون a را به طرف دوم می‌بریم و خواهیم داشت:

$$b+c = -a \Rightarrow |b+c| = |-a|$$

حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$|b+c|^2 = |-a|^2 \Rightarrow |b|^2 + |c|^2 + 2b \cdot c = |a|^2$$

$$9 + 25 + 2b \cdot c = 16 \Rightarrow 2b \cdot c = -18 \Rightarrow b \cdot c = -9$$

با معلوم شدن $b \cdot c$ حاصل عبارت خواسته شده قابل محاسبه است:

$$\text{حاصل عبارت} = -|a|^2 - b \cdot c = -16 - (-9) = -7$$

۲682 $a \cdot c$ را به طرف اول تساوی برده و از عکس قانون پخشی استفاده می‌کنیم:

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a \cdot b - a \cdot c = 0 \Rightarrow a \cdot (b-c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \times \\ a \perp (b-c) & \checkmark \\ b = c & \times \end{cases}$$

چون بردارها دو به دو متمایز و غیر صفر هستند بنابراین باید a عمود بر $b-c$ باشد که در گزینه ۲ بردار a بر $b-c$ عمود است.

۳683 چون زاویه a, a' هیچ‌گاه بزرگتر از 90° نیست، بنابراین همواره باید $a \cdot a' \geq 0$ باشد، در نتیجه تنها گزینه قابل قبول، گزینه ۳ است.

۱684 برای پیدا کردن زاویه a, a' زاویه بین a و b را حساب می‌کنیم ولی جلوی کسینوس قدر مطلق می‌گذاریم:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{0 - 1 + 0}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

۳671 برای پیدا کردن اندازه تفاضل دو بردار نیاز به کسینوس زاویه دو بردار است، بنابراین رابطه $|a \times (a-b)| = 16$ را ساده کرده و سینوس زاویه دو بردار را پیدا می‌کنیم سپس از روی سینوس مقدار کسینوس به دست می‌آید:

$$|a \times (a-b)| = |a \times a - a \times b| = 16 \Rightarrow |a||b| \sin \theta = 16$$

$$4 \times 5 \times \sin \theta = 16 \Rightarrow \sin \theta = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \xrightarrow{\theta > 90^\circ} \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

حال اندازه تفاضل دو بردار قابل محاسبه است:

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \cos \theta = 65 \Rightarrow |a-b| = \sqrt{65}$$

۳672 مساحت متوازی الاضلاع بنا شده بر دو بردار برابر اندازه ضرب خارجی آن دو بردار است. بنابراین:

$$S = |a \times (a-b)| = |a \times a - a \times b| = |-a \times b| = |a \times b| = |a||b| \sin \theta$$

از طرفی کسینوس زاویه دو بردار $\frac{3}{5}$ است، بنابراین:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \sin^2 \theta = 1 \xrightarrow{\sin^2 \theta = \frac{16}{25}} \sin \theta = \frac{4}{5}$$

حال اندازه بردار a را نیز به دست می‌آوریم:

$$|a| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

بنابراین اکنون مساحت متوازی الاضلاع قابل محاسبه است:

$$S = |a||b| \sin \theta = 6 \times 10 \times \frac{4}{5} = 48$$

۲673 می‌دانیم مساحت مثلث تولید شده توسط دو بردار نصف اندازه حاصل ضرب خارجی آن هاست. بنابراین خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{2} |(3a+2b) \times (a-2b)| = \frac{1}{2} |3a \times a - 6a \times b + 2b \times a - 4b \times b|$$

می‌دانیم $a \times b = -b \times a$ بنابراین مساحت برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} |-6a \times b - 2a \times b| = 4|a \times b| = 4|a||b| \sin 30^\circ = 24$$

۱674 حجم متوازی السطوح برابر با قدر مطلق ضرب مختلط این سه بردار است:

$$V = |(a \times b) \cdot ((a+b) \times (a-b))| = |(a \times b) \cdot (-a \times b + b \times a)| = 2|a \times b|^2$$

$$\begin{cases} a = (1, -1, 1) \\ b = (1, -2, 2) \end{cases} \Rightarrow a \times b = (0, -1, -1) \Rightarrow V = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 4$$

۴675 بردارهای $a \times i, b \times i, c \times i$ همگی عمود بر i هستند، پس قطعاً همگی درون یک صفحه قرار گیرند و در نتیجه ضرب مختلط آن‌ها صفر است.

۱676 گزینه‌های ۲ و ۴ خط محسوب می‌شوند، از طرف دیگر این خط عمود بر صفحه XY است و با صفحات XZ و YZ موازی است. معادله این صفحه‌ها

به ترتیب $x=0$ و $y=0$ است، بنابراین این خط با هر صفحه دیگر که موازی این صفحه‌ها باشد، موازیست، بنابراین گزینه ۱ جواب است چون صفحه‌ای به موازات YZ است.

1813 از رابطه فیثاغورس داریم:

$$(x+1)^2 + (2x+1)^2 = (2x+3)^2 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-1 \end{cases}$$

پس اضلاع مثلث 8 و 15 و 17 و مساحت آن $\frac{8 \times 15}{2} = 60$ است.

1814 کوچک‌ترین دایره گذرا بر A و B دایره‌ای است که A و B دوسر

قطر آن هستند؛ بنابراین: $O = \frac{A+B}{2} = \frac{(-4,1) + (2,5)}{2} = (-1,3)$

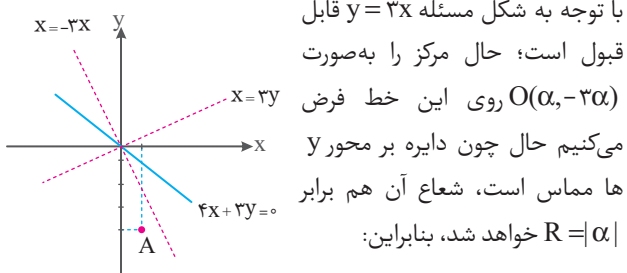
$R = |OA| = \sqrt{(2-(-1))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$

حال معادله دایره را می‌نویسیم، سپس به جای y صفر قرار می‌دهیم تا محل تقاطع با محور x ها به دست آید:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 + 9 = 13 \Rightarrow x = 1, -3$$

1815 دایره‌ای که بر دو خط مماس است، مرکزش روی نیمساز دو خط است:

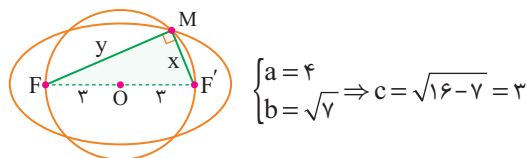
$$\frac{4x+3y}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm \frac{x}{\sqrt{1}} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y = 5x \Rightarrow x = 3y \\ 4x+3y = -5x \Rightarrow y = -3x \end{cases}$$



$$(x-\alpha)^2 + (y+3\alpha)^2 = \alpha^2 \xrightarrow{A(1,-4)} (1-\alpha)^2 + (-4+3\alpha)^2 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2 - 26\alpha + 17 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \frac{17}{9} \Rightarrow R_{\max} = \frac{17}{9}$$

1816 در این بیضی $a = 8$ و $2b = 2\sqrt{7}$ است، بنابراین:



بنابراین باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x+y=8 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=64 \\ x^2+y^2=36 \end{cases} \Rightarrow 36+2xy=64 \Rightarrow xy=14$$

حال مجموع دو عدد 8 و حاصل ضرب آن 14 است، بنابراین:

$$x^2 - 8x + 14 = 0 \xrightarrow{\Delta = 16 - 14 = 2} x = 4 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - \sqrt{2} \\ x_2 = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$$

1817 سهمی افقی است، بنابراین عرض رأس و عرض کانون با هم برابر است:

$$y^2 + ay + bx + 1 = 0 \xrightarrow{f_y=0} 2y + a = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = 4$$

حال به جای $a = 4$ قرار می‌دهیم و معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$y^2 + 4y + bx + 1 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 = -bx - 1 + 4$$

$$\Rightarrow (y+2)^2 = -b(x - \frac{3}{b}) \Rightarrow \begin{cases} S(\frac{3}{b}, -2) \\ p = -\frac{b}{4} \end{cases}$$

بنابراین $F(\frac{3}{b}, -2)$ است؛ حال طول کانون را برابر با $\frac{b}{4} - \frac{3}{b} = 0$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{3}{b} - \frac{b}{4} = 0 \Rightarrow \frac{12-b^2}{4b} = 0$$

$$12 - b^2 = -b \Rightarrow b^2 - b - 12 = 0 \Rightarrow (b-4)(b+3) = 0 \Rightarrow b = 4, -3$$

1818

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1819

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}}_C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$X = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب $-\frac{1}{4}$ را با دایره‌های ماتریس وسطی ساده می‌کنیم:

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

1820 قرینه ستون اول را به ستون سوم و -2 برابر آن را به ستون دوم

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 9 & 5 \\ 1 & -x & 0 \\ 3 & -4 & -x \end{vmatrix} = 0$$

اضافه می‌کنیم:

حال دترمینان را حول ستون سوم بسط می‌دهیم:

$$5(-4+3x) - x(4x-9) = 0 \Rightarrow -4x^2 + 24x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, 5$$

1821 با استفاده از رابطه $1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C}$ مقدار $\sin C$ را به دست

$$\cot C = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin C = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{AC}$$

می‌آوریم:

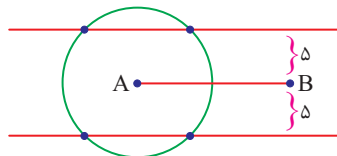
$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{96} \Rightarrow AH = 64$$

1822 نقطه C باید از ضلع AB به فاصله 5 باشد، پس روی خط‌های

موازی با AB و به فاصله 5 واحد از AB قرار دارد. همچنین، نقطه C باید

روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع 7 قرار گیرد. از برخورد این دایره با خط‌های

موازی 4 نقطه به دست می‌آید.



1829 مطابق شکل زاویه های \widehat{D} و \widehat{B} (زوایای روبرو در متوازی الاضلاع) برابرند. همچنین $\widehat{N} = \widehat{D}$ (رو به یک کمان) پس مثلث ABN دو زاویه برابر دارد. از طرفی کمان های محصور بین وترهای موازی برابرند.

$AM \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{MC} \Rightarrow AD = MC = BC$
 پس مثلث BCM دو ضلع برابر دارد. بنابراین گلاً مثلث متساوی الساقین وجود دارد.

1830 در مثلث ACD زاویه C محاطی روبه قطر است، بنابراین $\widehat{C} = 90^\circ$ همچنین در مثلث OMD زاویه M محاطی روبه قطر است پس $\widehat{M} = 90^\circ$ از طرفی در مثلث قائم الزاویه ACD میانه وارد بر وتر نصف وتر است یعنی $OC = OD$ در نتیجه مثلث OCD متساوی الساقین است و OM ارتفاع وارد بر قاعده است پس میانه هست بنابراین $MC = MD$

از طرفی، اگر M به O' وصل کنیم چون شعاع دایره در نقطه M بر AB عمود است پس $\widehat{AMO'} = 90^\circ$ و همچنین اگر M به D وصل کنیم چون زاویه B محاطی روبه قطر است لذا $\widehat{ABD} = 90^\circ$ و می دانیم دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند پس $MO' \parallel BD$. پس در مثلث ABD داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AO'}{O'D} = \frac{3}{1} \Rightarrow AM = 3MB$$

روابط طولی را برای نقطه M می نویسیم:

$$MCMD = MAMB \Rightarrow MC^2 = 3MB^2 \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \sqrt{3}$$

1831 کوتاه ترین مسیر برای خط شکسته $AMNB$ آن است که A را 5 واحد به جلو منتقل کنیم تا به $A'(6, 3)$

برسیم. سپس B را نسبت به محور x قرینه کنیم تا B' به دست آید، اگر A' را به B' وصل کنیم، نقطه N به دست می آید و طول کوتاه ترین مسیر عبارتست از:

$$AM + MN + NB = AA' + A'B' = 5 + \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 + 5 = 20$$

1832 قضیه کسینوس ها را در دو مثلث استفاده می کنیم.

$$CD^2 = 4^2 + x^2 - 2 \times 4 \times x \times \cos 120^\circ$$

$$CD^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 16 + x^2 + 4x = 25 + 49 - 35$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 23 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{104}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{27} & \checkmark \\ x = -2 - \sqrt{27} & \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 2 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

1823 ابتدا از قضیه تالس استفاده می کنیم.

$$\triangle EAB \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4} \Rightarrow 3x^2 - 4x = 20$$

$$\Rightarrow (3x-10)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ یا } x = -2 \times$$

چون دو مثلث EAB و ECD متشابهند، پس نسبت مساحت های آن ها مساوی و با مجذور نسبت تشابه است لذا داریم:

$$\frac{S_{EAB}}{S_{ECD}} = \left(\frac{AE}{DE}\right)^2 = \left(\frac{5}{5+\frac{10}{3}}\right)^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\frac{S_{EAB}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{25-9} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{EAB}} = \frac{16}{9}$$

1824 از تشابه مثلث ها استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \triangle ADE \sim \triangle BEF: \frac{AE}{EF} = \frac{DE}{BE} \\ \triangle ABE \sim \triangle DEG: \frac{AE}{EG} = \frac{BE}{DE} \end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{EG}{AE} \Rightarrow AE^2 = EF \cdot EG$$

1825 اگر نقطه O محل برخورد قطرهای دوزنقه باشد، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{1}{OE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \Rightarrow OE = \frac{45}{14}$$

از طرفی $OE = OF$ می توان نوشت:

$$EF = 2OE = 2 \times \frac{45}{14} = \frac{45}{7}$$

1826 از رابطه استوارت استفاده می کنیم:

$$AD^2 = \frac{3 \times 8^2 + 6 \times 7^2}{3+6} - 3 \times 6 = \frac{186}{9} - 18$$

$$\Rightarrow AD^2 = 36 \Rightarrow AD = 6$$

1827 ناحیه مشترک بین دو کره یک دایره است که شعاع آن با AH برابر است، مثلث OAO' قائم الزاویه است و داریم:

$$AH = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\text{مساحت ناحیه مشترک} = \pi(AH)^2 = \frac{144}{25} \pi = 5.76\pi$$

1828 اگر شعاع دایره محاط در دوزنقه متساوی الساقین باشد، داریم:

$$r^2 = \frac{AB \cdot CD}{4} = \frac{8 \times \frac{9}{2}}{4} \Rightarrow r = 3$$

$$\Rightarrow DO = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\Rightarrow DP = DO + r = 5 + 3 = 8$$