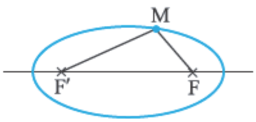
فهرست

۲ـ بیضی

تعریف بیضی: بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که جمع فاصله‌ی آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت مقدار ثابتی باشد. دو نقطه‌ی ثابت را F و F' و مقدار ثابت را $2a$ می‌نامیم. پس نقطه‌ی M در صورتی روی بیضی است که $MF + MF' = 2a$ باشد.



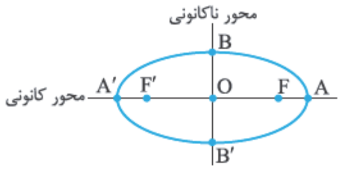
$$MF + MF' = 2a$$

F و F' را کانون‌های بیضی می‌نامیم.

برای رسم بیضی نخی به طول $2a$ را در نقاط F و F' محکم می‌کنیم و سپس قلم را می‌چرخانیم.

ویژگی‌های بیضی

با F، F' و مقدار $2a$ آشنا شدیم. هر بیضی دو محور تقارن دارد. محور کانونی (که هر دو کانون روی آن هستند) و محور غیرکانونی. در محل برخورد دو محور با هم، مرکز بیضی قرار دارد و در محل برخورد بیضی با محورها، رأس‌ها را داریم.



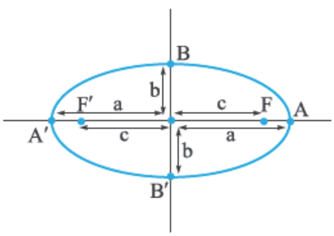
A و A': رئوس کانونی

B و B': رأس‌های ناکانونی

F و F': کانون

O: مرکز

مقادیر فاصله‌ها را هم باید بلد باشیم:



$$OB = OB' = b \qquad OA = OA' = a \qquad OF = OF' = c$$

فاصله‌ی $F'F = 2c$ را فاصله‌ی کانونی می‌نامند. $B'B = 2b$ را قطر کوچک می‌نامیم. قطر بزرگ $AA' = 2a$ همان طول نخ یا ثابت بیضی است. البته AA' طول بلندترین وتر و بیشترین فاصله‌ی دو نقطه‌ی بیضی است.

میزان کشیدگی بیضی با پارامتری به نام خروج از مرکز تعیین می‌شود. $\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{c}{a}=e=$ خروج از مرکز بیضی

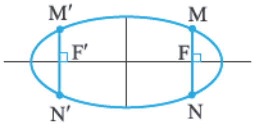
حاصل e عددی بین صفر و یک است و هر چه e بیشتر باشد، بیضی کشیده‌تر است.

وتر گذرنده از کانون و عمود بر محور کانونی را وتر کانونی می‌نامیم. طول این وتر $MN=M'N'=\dfrac{2b^2}{a}$ است.

فرمول دیگری برای MN به صورت $MN=2b\sqrt{1-e^2}$ هم داریم.

وتر کانونی را ببینید:

$$MN=\frac{2b^2}{a}=2b\sqrt{1-e^2}=M'N'$$

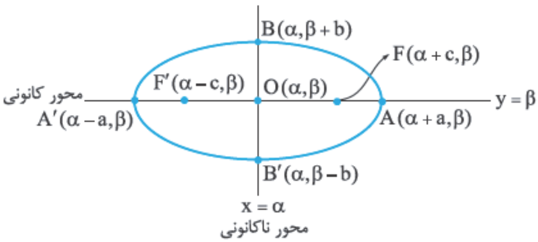


در بیضی بین a، b و c رابطه‌ی فیثاغورس داریم: $a^2=b^2+c^2$

و بنابراین: $FB=a=$ فاصله‌ی رأس ناکانونی از کانون

انواع قرارگیری بیضی درصفحه

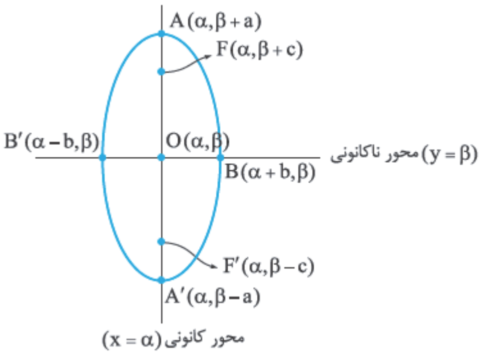
(الف) در بیضی افقی، محور کانونی افقی (موازی محور x ها) است. در صورت تست گفته بودند «هر دو کانون روی خطی موازی محور x ها قرار دارند». معادله‌ی محور کانونی $y=\beta$ و معادله‌ی محور ناکانونی $x=\alpha$ است. در این بیضی، مرکز و رأس‌های کانونی و کانون‌ها، عرض مساوی دارند.



در این بیضی‌ها: $\alpha-a\le x\le\alpha+a$ و $\beta-b\le y\le\beta+b$. معادله‌ی خط‌های مماس بر بیضی در رئوس کانونی $x=\alpha\pm a$ است. معادله‌ی خطوط مماس در رئوس ناکانونی به صورت $y=\beta\pm b$ است.

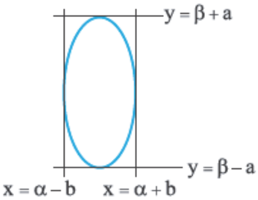
(ب) در بیضی قائم، محور کانونی موازی محور y ها است و رأس‌های کانونی و کانون‌ها و مرکز، دارای یک طول هستند. در این بیضی‌ها داریم:

$$\alpha-b\le x\le\alpha+b$$
$$\beta-a\le y\le\beta+a$$



در محل رئوس، خط‌های مماس بر بیضی را می‌بینیم:

مساحت مستطیل برابر 4ab است.



معادله‌ی بیضی

معادله‌ی بیضی به مرکز $O(\alpha,\beta)$ به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{\quad}+\frac{(y-\beta)^2}{\quad}=1$ نوشته می‌شود و در مخرج‌ها باید a^2 و b^2 قرار دهیم.

با توجه به رابطه‌ی $a^2=b^2+c^2$ در بیضی، همیشه $a^2>b^2$ است. قانون انتخاب مخرج‌ها خیلی ساده است: در بیضی افقی، مخرج بزرگ‌تر (یعنی a^2) را برای x می‌گذاریم و در بیضی قائم، مخرج بزرگ‌تر را برای کسر y می‌گذاریم.

مثلاً در بیضی $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$ داریم:

الف) مرکز بیضی $O(-3,2)$ است.
ب) چون مخرج x^2 بیشتر است بیضی افقی می‌شود.

ج) $a^2=16$ و $b^2=12$ است؛ بنابراین $a=4$ و $b=2\sqrt{3}$

د) پس طول قطر بزرگ یا مجموع فواصل هر نقطه‌ی بیضی از دو کانون یا بلندترین وتر $MF+MF'=2a=8$ است.

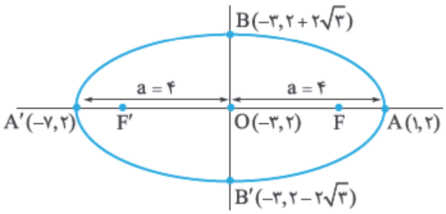
(سراسری ۸۶ و سنجش ۹۴)

ه) مساحت محدود به مماس‌ها در رئوس، $S=4ab=32\sqrt{3}$ است. *(خارج ۹۰)*

و) طول وتر گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، $MN=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 12}{4}=6$ است. *(سراسری ۸۷ و ۹۰)*

ز) با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس $c^2=a^2-b^2=4$ است. پس $c=2$ و مقدار خروج از مرکز $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ است. مختصات کانون‌ها هم به صورت $F(-1,2)$ و $F'(-5,2)$ است.

ح) مختصات رئوس را ببینید:



$-7\le x\le 1$

$2-2\sqrt{3}\le y\le 2+2\sqrt{3}$

رئوس A و A′ دورترین نقاط بیضی تا مرکز هستند. *(خارج ۸۶)*

ط) بیشترین و کم‌ترین فواصل نقاط بیضی تا کانون برابر $AF'=a+c=6$ و $AF=a-c=2$ هستند. *(سنجش ۹۳)*

ی) بیشترین فاصله‌ی نقاط بیضی از محور yها یعنی بیشترین مقدار $|x|$ در این بیضی برابر ۷ است. *(سنجش ۹۳)*

استفاده از معادله‌ی گسترده‌ی بیضی

در معادله‌ی گسترده‌ی بیضی جملات x^2 و y^2 داریم که ضریب آن‌ها مساوی نیست اما هم‌علامت است. مثلاً $2x^2+3y^2-6x+y=1$ معادله‌ی یک بیضی است.

بعد از مربع کامل کردن، باید طرف راست عددی مثبت باشد.

الف) مرکز بیضی را با مشتق نسبت به x و نسبت به y به دست می‌آوریم. مثلاً مرکز بیضی به معادله‌ی $4x^2+y^2-8x+6y=3$ به صورت روبه‌رو پیدا می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} f'_x&=8x-8=0 \Rightarrow x=1\\ f'_y&=2y+6=0 \Rightarrow y=-3\end{aligned}\right\}\Rightarrow O(1,-3)$$

ب) اگر ضریب x^2 کم‌تر باشد، بیضی افقی است و برعکس. پس مثلاً در بیضی بالا (چون ضریب x^2 بیشتر است) شکل قائم داریم.

ج) خروج از مرکز بیضی همیشه برابر است با:

$$e=\sqrt{1-\frac{\text{ضریب کم‌ترین بین } x^۲ \text{ و } y^۲}{\text{ضریب بیشترین بین } x^۲ \text{ و } y^۲}}$$

پس خروج از مرکز بیضی موردنظر $e=\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۵- اگر مرکز یک بیضی افقی در نقطه‌ی $(-۴,-۱)$، خروج از مرکز $\frac{۴}{۵}$ و طول یک رأس کانونی آن ۱ باشد، آن‌گاه مجموع طول قطرها و فاصله‌ی کانونی بیضی چه‌قدر است؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

۱۶- مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(۶,۳)$ و $(-۲,۳)$ و خروج از مرکز آن $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. این بیضی محور x ها را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟ *(خارج ۹۲)*

۱) $-۱,۵$ ۲) $-۱,۷$ ۳) $۰,۶$ ۴) $۱,۵$

۱۷- مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $(-۱,۳)$ و $(-۱,-۱)$ است. این بیضی از نقطه‌ی $(-۴,۲)$ می‌گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۸- کانون‌های یک بیضی در نقاط $F(۱+\sqrt{۵},-۱)$ و $F'(۱-\sqrt{۵},-۱)$ قرار دارند. اگر اندازه‌ی وتر گذرنده از کانون و عمود بر محور کانونی بیضی $\frac{۸}{۳}$ باشد، فاصله‌ی یک کانون از رأس ناکانونی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$

۱۹- بیضی به معادله‌ی $x^۲+۴y^۲+ay+bx+c=۰$، در نقطه‌ای به طول ۳ بر محور x ها مماس است و از نقطه‌ی $(-۲,-۱)$ می‌گذرد. عرض مرکز آن کدام است؟ *(خارج ۹۴)*

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۸}$

۲۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، معادله‌ی $۳x^۲+y^۲-۶x+ay+a+۶=۰$ نمایش یک بیضی است؟ *(سنجش ۹۳ و ۹۴)*

۱) $-۲<a<۶$ ۲) $-۶<a<۲$

۳) $a>۶$ یا $a<-۲$ ۴) $a>۲$ یا $a<-۶$

۲۱- کانون‌های بیضی به معادله‌ی $۲x^۲+۷y^۲-۴x=۱۲$ دو سر قطری از دایره‌اند. این دایره نیمساز ناحیه‌ی اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

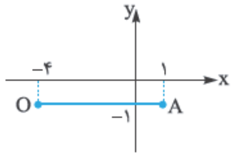
۱) ۲ ۲) $۱+\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۲۲- نقطه‌ی M بر روی یک منحنی طوری حرکت می‌کند که فاصله‌ی آن از خط $x=۸$ دو برابر فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $(۲,۰)$ است. اندازه‌ی بزرگ‌ترین وتر این منحنی کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) ۸ ۴) $۸\sqrt{۵}$

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

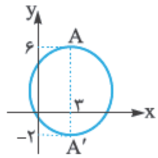
۱۵- گزینه‌ی «۲» شکل را ببینید:



فاصله‌ی OA یعنی a برابر $۵ = (-۴) - ۱$ است. پس با تعریف خروج از مرکز داریم:
$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{c}{۵} \Rightarrow c = ۴$$

و طبق رابطه‌ی فیثاغورس: $b = ۳$، پس داریم: $۲a + ۲b + ۲c =$ جمع قطرها و فاصله‌ی کانونی
$$\Rightarrow ۲(a+b+c) = ۲(۵+۳+۴) = ۲۴$$

۱۶- گزینه‌ی «۳» شکل را ببینید:

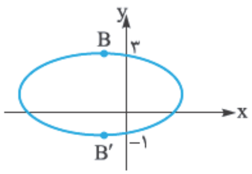


از $A(۳,۶)$ و $A'(۳,-۲)$ سه نتیجه می‌گیریم:
اولاً بیضی قائم است، ثانیاً $AA' = ۲a = ۸$، ثالثاً $O = \frac{A+A'}{۲} = (۳,۲)$.
حالا با کمک خروج از مرکز، مقدار b را حساب کنیم:
$$e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} \xrightarrow[a=۴]{e=\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{۱۶}} \Rightarrow ۱ - \frac{b^۲}{۱۶} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{b^۲}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow b^۲ = ۱۲$$

حالا معادله‌ی بیضی قائم را می‌نویسیم:
$$\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} + \frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} = ۱ \xrightarrow[b^۲=۱۲\ ,\ a^۲=۱۶]{O(۳,۲)} \frac{(x-۳)^۲}{۱۲} + \frac{(y-۲)^۲}{۱۶} = ۱$$
$$\xrightarrow[y=۰]{\text{محور x ها را قطع کند}} \frac{(x-۳)^۲}{۱۲} + \frac{(۰-۲)^۲}{۱۶} = ۱ \Rightarrow \frac{(x-۳)^۲}{۱۲} = ۱ - \frac{۴}{۱۶} = \frac{۳}{۴}$$
$$\Rightarrow (x-۳)^۲ = ۹ \Rightarrow x - ۳ = \pm ۳ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } ۶$$

پس می‌توان گفت این بیضی وتری به طول ۶ روی محور x ها می‌سازد. (دوباره به شکل بیضی نگاه کنید)

۱۷- گزینه‌ی «۳» مرکز بیضی در وسط قطر کوچک قرار دارد. یعنی:
$$O = \frac{B+B'}{۲} = (-۱,۱)$$
مقدار b هم برابر فاصله‌ی BO است:
$$b = BO = ۳ - ۱ = ۲$$
از طرفی چون B و B′ طول مساوی دارند، قطر کوچک بیضی موازی محور y ها است، پس بیضی افقی است.
نگاهی به شکل داشته باشید:



معادله‌ی بیضی افقی به مرکز $O(-۱,۱)$ و با دانستن $b = ۲$ به صورت زیر است:
$$\frac{(x+۱)^۲}{a^۲} + \frac{(y-۱)^۲}{۴} = ۱$$
حالا سؤال گفته این بیضی از $(-۴,۲)$ می‌گذرد:
$$\xrightarrow{(-۴,۲)} \frac{(-۴+۱)^۲}{a^۲} + \frac{(۲-۱)^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow \frac{۹}{a^۲} = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow a^۲ = ۱۲$$
خروج از مرکز برابر است با:
$$e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{۴}{۱۲}} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

نقطه‌ی داده‌شده روی محورهای تقارن بیضی نبود پس ویژگی خاصی نداشت جز این‌که در معادله صدق می‌کرد.

فاصله‌ی کانونی این بیضی $FF' = ۲c = ۴\sqrt{۲}$ هم می‌تواند مورد سؤال قرار گیرد.

۱۸- گزینه‌ی «۲» جای کانون‌ها (عرض مساوی دارند) نشان می‌دهد بیضی افقی است. مرکز بیضی در وسط آن‌ها یعنی $O(1,-1)$ است و فاصله‌ی کانونی هم $2c = FF' = 2\sqrt{5}$ است. پس داریم: $c=\sqrt{5}$

از طرفی طول وتر کانونی را در صورت سؤال داده: $MN=\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a}=\frac{4}{3}$

با توجه به فیثاغورس و مقدار c هم می‌نویسیم: $c^2=a^2-b^2=5$، پس باید a و b را از معادلات زیر پیدا کرد:

$$\begin{cases} a^2-b^2=5 \\ \frac{b^2}{a}=\frac{4}{3} \end{cases} \xrightarrow[\frac{4}{3}a \text{ را قرار می‌دهیم}]{\text{از پایین به جای } b^2 \text{ عبارت}} a^2-\frac{4}{3}a=5 \Rightarrow 3a^2-4a-15=0$$

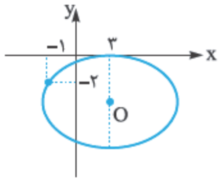
$$\xrightarrow[a>0]{\text{حل معادله}} a=3 \Rightarrow b=2$$

فاصله‌ی کانون از رأس ناکانونی را می‌خواهیم: $FB=a=3$

۱۹- گزینه‌ی «۱» در تست خارج ۹۴، خروج از مرکز این بیضی را می‌خواستند که بدون حل و بدون محاسبه‌ی a، b و c از رابطه‌ی $e=\sqrt{1-\frac{\min(A,B)}{\max(A,B)}}$ به دست می‌آمد. (جوابش $\frac{\sqrt{3}}{2}$ بود)

اما حل این سؤال: اولاً بیضی افقی است. (چون ضریب x^2 کم‌تر است)

ثانیاً در $(3,0)$ بر محور xها مماس است. پس با توجه به شکل، باید طول مرکز ۳ باشد:



در واقع $(3,0)$ یک رأس ناکانونی بیضی است.

$$f'_x=2x+b=0 \xrightarrow{x_O=3} 2\times3+b=0 \Rightarrow b=-6$$

$$\xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{(3,0)} 9+0+0+\underbrace{(-6)}_{b}(3)+c=0 \Rightarrow c=9$$

$$\xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{(-1,-2)} (-1)^2+4(-2)^2+a(-2)+(-6)(-1)+9=0 \Rightarrow 1+16-2a+15=0 \Rightarrow a=16$$

پس عرض مرکز برابر است با: $f'_y=0 \Rightarrow 8y+\underbrace{a}_{16}=0 \Rightarrow y_O=\frac{-16}{8}=-2$

وقتی منحنی در $(3,0)$ بر محور xها مماس است باید با قراردادن $y=0$، به عبارتی برسیم که ریشه‌ی مضاعف آن $x=3$ است. $x^2+4y^2+ay+bx+c=0 \xrightarrow{y=0} x^2+bx+c=0$

$$\xrightarrow[x=3]{\text{ریشه‌ی مضاعف}} x^2+bx+c=(x-3)^2 \Rightarrow b=-6\,, c=9$$

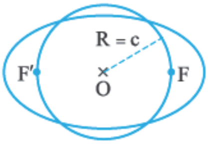
حالا نقطه‌ی $(-1,-2)$ را صدق می‌دهیم: $\xrightarrow{(-1,-2)} 1+16+a(-2)+(-6)(-1)+9=0 \Rightarrow a=16 \Rightarrow y_O=-2$

۲۰- گزینه‌ی «۳» در معادله‌ی گسترده‌ی بیضی، ضرایب x^2 و y^2 هم‌علامت هستند و برابر نیستند. هم‌چنین باید پس از مربع کامل شدن، عدد سمت راست مثبت باشد: $3x^2-6x+y^2+ay+a+6=0$

$$\Rightarrow 3(x^2-2x+1)+(y^2+ay+(\frac{a}{2})^2)=-a-6+3+\frac{a^2}{4} \Rightarrow 3(x-1)^2+(y+\frac{a}{2})^2=-a-6+3\times1+\frac{a^2}{4}$$

پس باید $\frac{a^2}{4}-a-3$ مثبت باشد: $\frac{a^2}{4}-a-3>0 \xrightarrow{\times4} a^2-4a-12>0 \Rightarrow (a-6)(a+2)>0$

چون خارج دو ریشه موافق علامت ضریب درجه دوم است پس: $a>6$ یا $a<-2$



۲۱- گزینه‌ی «۱» وقتی کانون‌های بیضی دو سر قطر دایره باشند، مرکز بیضی همان مرکز دایره است و شعاع دایره برابر c بیضی خواهد بود:

پس باید مرکز و اندازه‌ی c در بیضی را بیابیم.

$$2x^2+7y^2-4x=12 \Rightarrow 2(x^2-2x+1)+7y^2=12+2$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2+7y^2=\underbrace{12+2\times 1}_{14} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{7}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow O(1,0)\,,\, c^2=a^2-b^2=7-2=5$$

بنابراین مرکز و شعاع دایره، به ترتیب $(1,0)$ و $\sqrt{5}$ هستند و معادله‌ی آن $(x-1)^2+(y-0)^2=5$ خواهد بود. برای تلاقی با نیمساز ناحیه‌ی اول، $y=x$ را قرار می‌دهیم و داریم: $(x-1)^2+x^2=5$ که با کمی دقت $x=2$ می‌خورد.

۲۲- گزینه‌ی «۳» صورت سؤال می‌گوید: (فاصله‌ی $M(x\,,y)$ از $F(2,0)$) $\times 2=$ (فاصله‌ی $M(x\,,y)$ از $x=8$)

$$\Rightarrow |x-8|=2\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} \xrightarrow[|a|^2=a^2]{\text{به توان ۲}} x^2-16x+64=4\underbrace{(x-2)^2}_{x^2-4x+4}+4y^2$$

حواستان هست که ضریب ۲ مال کل عبارت بود؟!

$$x^2-16x+64=4x^2-16x+16+4y^2 \Rightarrow 48=3x^2+4y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{\underbrace{16}_{a^2}}+\frac{y^2}{12}=1 \Rightarrow AA'=2a=2\times 4=8$$

نقطه‌ی $(2,0)$ یک کانون و خط $x=8$ خط هادی این بیضی است. خروج از مرکز آن هم $\frac{1}{2}$ است. (چرا؟)