

قسمت دوم

استدلال

فصل

۱

استدلال

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی براساس مجموعه محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گویند.

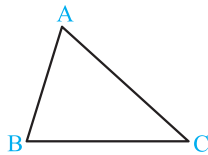
مثلاً اگر با مشاهده تعدادی چهارضلعی مانند مربع، مستطیل، دوزنقه، متوازی‌الاضلاع نتیجه‌گیری کنیم که مجموع اندازه زوایای هر چهارضلعی محدب 360° است، یک استدلال استقرایی انجام داده‌ایم.

استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری کلی براساس مفاهیمی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی نامیده می‌شود.

مجموع اندازه زوایای داخلی هر مثلث

مجموع اندازه زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

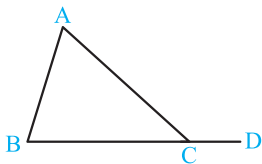


زاویه خارجی مثلث

اگر یک ضلع مثلث را امتداد دهیم، زاویه‌ای بیرون مثلث ایجاد می‌شود که زاویه خارجی نامیده می‌شود. اندازه

$$\hat{ACD} = \hat{A} + \hat{B}$$

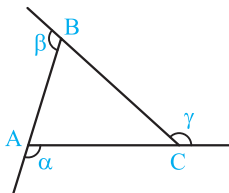
هر زاویه خارجی برابر مجموع اندازه زوایای داخلی غیرمجاور آن می‌باشد.



مجموع اندازه‌های زوایای خارجی هر مثلث

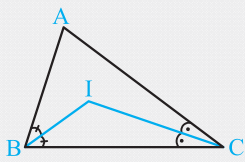
مجموع اندازه‌های زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° است.

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$



مثال: ثابت کنید اندازه زاویه حاصل از برخورد نیمسازهای دو زاویه داخلی مثلث برابر 90° به علاوه نصف اندازه زاویه سوم است.

پاسخ: نقطه تلاقی نیمسازهای زوایای داخلی B و C را I می‌نامیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $\hat{BIC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$

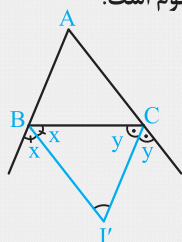


$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \triangle BIC: \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} + \hat{BIC} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \\ \hat{B} + \hat{C} + 2\hat{BIC} = 360^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \hat{A} + 2\hat{BIC} = 360^\circ \Rightarrow 2\hat{BIC} = 180^\circ + \hat{A} \Rightarrow \hat{BIC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

مثال: ثابت کنید اندازه زاویه حاصل از برخورد نیمسازهای دو زاویه خارجی مثلث برابر 90° منهای نصف اندازه زاویه سوم است.

پاسخ: نقطه تلاقی نیمسازهای زوایای خارجی B و C را I' می‌نامیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $\hat{BI'C} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$. داریم:

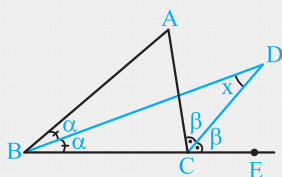


$$2x = 180^\circ - \hat{B} \Rightarrow x = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}, \quad 2y = 180^\circ - \hat{C} \Rightarrow y = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$$

$$x + y + \hat{BI'C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} + 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} + \hat{BI'C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{BI'C} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

مثال: ثابت کنید اندازه زاویه حاصل از برخورد نیمساز یک زاویه داخلی و نیمساز زاویه خارجی دیگر برابر نصف اندازه زاویه سوم است.

پاسخ: نقطه تلاقی نیمساز زاویه B و نیمساز زاویه خارجی C را D می‌نامیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{D} = \frac{\widehat{A}}{2}$



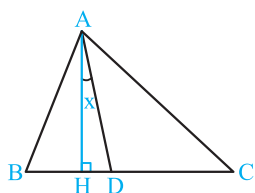
$$\left. \begin{array}{l} \triangle BCD \text{ خارجی } \widehat{DCE} \Rightarrow \beta = x + \alpha \\ \triangle ABC \text{ خارجی } \widehat{ACE} \Rightarrow 2\beta = 2\alpha + \widehat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(x + \alpha) = 2\alpha + \widehat{A}$$

$$\Rightarrow 2x + 2\alpha = 2\alpha + \widehat{A} \Rightarrow 2x = \widehat{A} \Rightarrow x = \frac{\widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{D} = \frac{\widehat{A}}{2}$$

زاویه بین نیمساز و ارتفاع یک مثلث

در هر مثلث زاویه بین نیمساز و ارتفاع رسم شده از یک رأس مثلث برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویه دیگر مثلث.

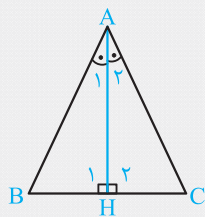
$$x = \frac{|\widehat{B} - \widehat{C}|}{2}$$



مثال: ثابت کنید اگر در یک مثلث، نیمساز یک زاویه ارتفاع هم باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

پاسخ: فرض مسئله روی شکل آورده شده است. می‌خواهیم ثابت کنیم $AB = AC$. داریم:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2, AH = AH, \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \xrightarrow{\text{(رض ز)}} \triangle ABH \cong \triangle ACH \Rightarrow AB = AC$$



تست: در مثلث ABC ، $\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}$ ، اگر اندازه زاویه بین نیمساز و ارتفاع رأس A برابر 9° و اندازه زاویه بین نیمساز و ارتفاع رأس B برابر $4/5^\circ$ باشد، زاویه C چند درجه است؟

۵۶ (۴)

۴۵ (۳)

۵۱ (۲)

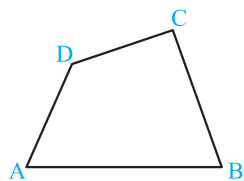
۴۸ (۱)

پاسخ: $\frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = 9^\circ \Rightarrow \widehat{B} - \widehat{C} = 18^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} + 18^\circ$ ، $\frac{\widehat{A} - \widehat{C}}{2} = 4/5^\circ \Rightarrow \widehat{A} - \widehat{C} = 9^\circ \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} + 9^\circ$

گزینه (۲) درست است. $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} + 9^\circ + \widehat{C} + 18^\circ + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 3\widehat{C} = 180^\circ - 27^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ - 9^\circ = 51^\circ$

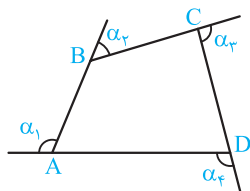
مجموع اندازه‌های زوایای یک چهارضلعی محدب

در هر چهارضلعی محدب مجموع اندازه زوایای داخلی برابر 360° است.



مجموع اندازه‌های زوایای خارجی یک چهارضلعی محدب

در هر چهارضلعی محدب مجموع اندازه زوایای خارجی برابر 360° است.



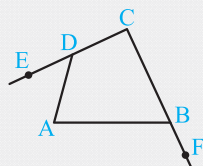
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ$$

مثال: ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب، مجموع اندازه‌های زوایای مقابل داخلی برابر است با مجموع اندازه زوایای خارجی دو زاویه دیگر.

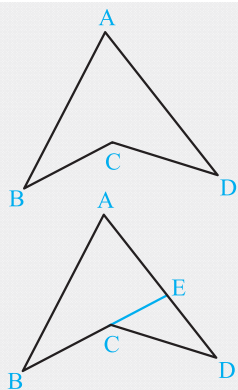
پاسخ: در چهارضلعی روبه‌رو می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{ADE} + \widehat{ABF}$. داریم:

$$\widehat{A} + \widehat{ADC} + \widehat{C} + \widehat{ABC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A} + 180^\circ - \widehat{ADE} + \widehat{C} + 180^\circ - \widehat{ABF} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{ADE} + \widehat{ABF}$$



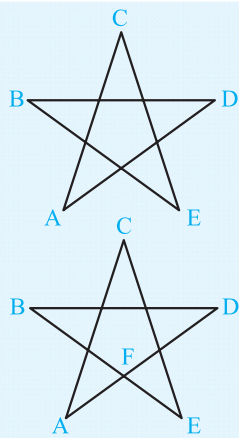
مثال: در چهارضلعی مقابل ثابت کنید $\widehat{BCD} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}$



پاسخ: ضلع BC را امتداد می‌دهیم تا ضلع AD را در E قطع کند. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle CDE \text{ زاویهٔ خارجی } \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{CED} + \widehat{D} \\ \triangle ABE \text{ زاویهٔ خارجی } \widehat{CED} \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{A} + \widehat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}$$

تست: در شکل مقابل، مجموع اندازه‌های زوایای A، B، C، D، E کدام است؟



(۱) 180°

(۲) 270°

(۳) کمتر از 180°

(۴) بین 180° و 270°

پاسخ: در چهارضلعی ACEF داریم (*): $\widehat{AFE} = \widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{E}$ (مثال قبل). همچنین \widehat{BFD}

و \widehat{AFE} متقابل به رأس اند، پس $\widehat{BFD} = \widehat{AFE}$ و در مثلث BFD داریم:

$$\widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{BFD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{AFE} = 180^\circ \xrightarrow{(*)} \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{E} = 180^\circ$$

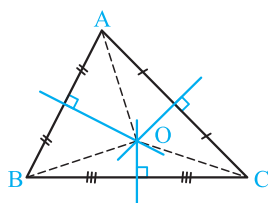
بنابراین گزینه (۱) درست است.

برخی از نقاط هم‌رسی در مثلث

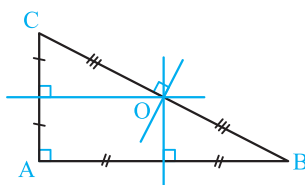
۱- عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث هم‌رسند.

نکته نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، از سه رأس مثلث به یک فاصله است. ($OA = OB = OC$)

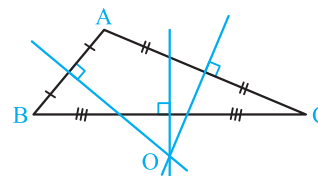
نکته در مثلث حاده‌الزاویه، قائم‌الزاویه، منفرجه‌الزاویه به ترتیب نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها، داخل، رو و خارج مثلث قرار می‌گیرد.



مثلث حاده‌الزاویه



مثلث قائم‌الزاویه



مثلث منفرجه‌الزاویه

مثال: ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها وسط وتر قرار دارد.

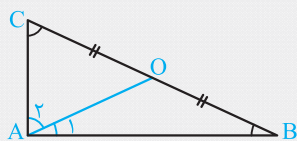
پاسخ: عمودمنصف ضلع AC را رسم می‌کنیم، فرض کنیم M نقطه تلاقی آن با وتر BC باشد، M را

به A وصل می‌کنیم. می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است پس $MA = MC$ و می‌توان نوشت:

$$MA = MC \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C} \xrightarrow{\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ} \widehat{A}_2 = 90^\circ - \widehat{C}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ یا $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C}$ و با توجه به تساوی فوق نتیجه می‌شود $\widehat{B} = \widehat{A}_2$ ، پس $BM = MA$ و این یعنی نقطه M روی عمودمنصف ضلع AB قرار دارد و $BM = MA = MC$ پس عمودمنصف BC نیز از M می‌گذرد، لذا عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ABC، در نقطه وسط وتر (در نقطه M) هم‌رسند.

مثال: ثابت کنید اگر نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلثی روی ضلع مثلث قرار گیرد، مثلث قائم‌الزاویه است.



پاسخ: فرض کنید در شکل روبه‌رو O نقطه همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم $\hat{A} = 90^\circ$. داریم:

$$AB \text{ روی عمودمنصف } O \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}$$

$$AC \text{ روی عمودمنصف } O \Rightarrow OA = OC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}$$

اما در مثلث ABC جمع زوایا برابر 180° است، پس:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \Rightarrow 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

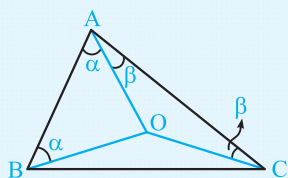
تست: در یک مثلث حاده‌الزوايا $\hat{A} = 84^\circ$ و O نقطه همرسی عمودمنصف‌ها می‌باشد. اندازه زاویه \hat{BOC} کدام است؟

۱۳۵° (۴)

۱۵۰° (۳)

۱۶۸° (۲)

۱۶۲° (۱)



پاسخ: نقطه همرسی عمودمنصف‌های مثلث حاده‌الزوايا (O) داخل آن قرار می‌گیرد. چون

$OA = OB = OC$ ، پس مثلث‌های AOB و AOC متساوی‌الساقین‌اند، پس زوایای آن‌ها مطابق

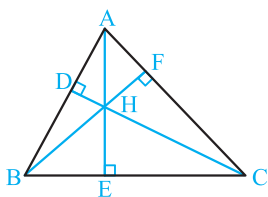
شکل می‌شود و در چهارضلعی ABOC داریم:

$$\hat{BOC} = \hat{ABO} + \hat{A} + \hat{ACO} = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 2(\alpha + \beta) = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{BOC} = 2 \times 84^\circ = 168^\circ$$

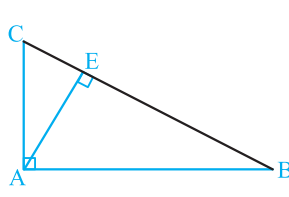
بنابراین گزینه (۲) درست است.

۲- ارتفاع‌های هر مثلث هم‌رسند.

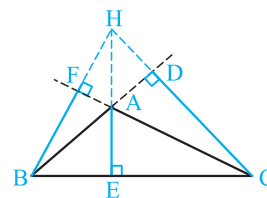
نکته در مثلث قائم‌الزاویه، نقطه همرسی ارتفاع‌ها رأس زاویه قائمه است و در مثلث منفرجه‌الزاویه این نقطه خارج مثلث قرار می‌گیرد و در مثلث حاده‌الزوايا داخل مثلث واقع می‌شود.



مثلث حاده‌الزوايا

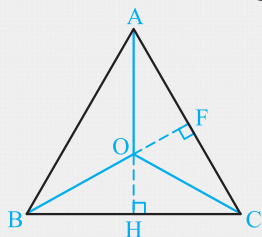


مثلث قائم‌الزاویه



مثلث منفرجه‌الزاویه

مثال: ثابت کنید اگر در مثلثی نقطه همرسی ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها بر هم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع است.



پاسخ: فرض کنیم O نقطه همرسی عمودمنصف‌ها و ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. چون O نقطه

همرسی ارتفاع‌هاست پس امتداد OA بر ضلع BC عمود می‌شود و O نقطه همرسی عمودمنصف‌ها

می‌باشد لذا $OB = OC$ پس دو مثلث قائم‌الزاویه OBH و OCH به حالت وتر یک ضلع هم‌نهشت‌اند

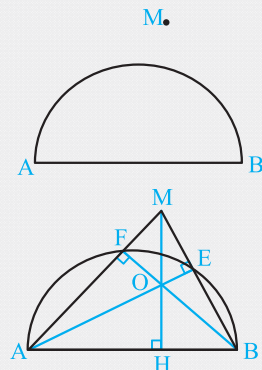
در نتیجه $BH = CH$. حال می‌توان گفت دو مثلث قائم‌الزاویه ABH و ACH به حالت (ض‌ض)

هم‌نهشت‌اند پس $AB = AC$. با استدلال مشابه نتیجه می‌شود $AB = BC$ لذا $AB = AC = BC$ و

این یعنی مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

مثال: در شکل روبه‌رو با داشتن یک خط‌کش غیر مدرج می‌خواهیم از نقطه M عمودی بر قطر

نیم‌دایره داده شده (AB) رسم کنیم، طریقه ترسیم را با ذکر دلیل شرح دهید.



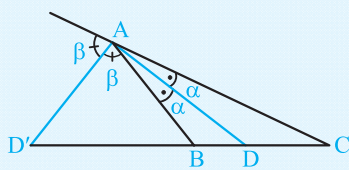
پاسخ: M را به A و B وصل می‌کنیم، نقطه تلاقی MA و MB را با نیم‌دایره به ترتیب F و E

می‌نامیم. زوایای AFB و AEB روبه‌رو به قطرند، پس قائمه‌اند، یعنی در مثلث AMB،

پاره‌خط‌های AE و BF ارتفاع می‌باشند، محل تلاقی آن‌ها یعنی نقطه O نقطه همرسی ارتفاع‌ها است،

پس امتداد MO بر AB عمود است.

تست: در مثلث ABC ، AD نیمساز زاویه A و AD' نیمساز زاویه خارجی A است. نقطه همرسی ارتفاع‌های مثلث ADD' چگونه است؟
 (۱) داخل مثلث ABC (۲) روی مثلث ABC (۳) بیرون مثلث ABC (۴) وضعیت مشخصی ندارد.



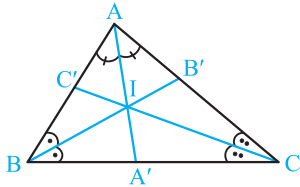
پاسخ: مطابق شکل در مثلث ABC ، نیمساز داخلی زاویه A و نیمساز خارجی آن رسم شده‌اند. داریم:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D'AD} = 90^\circ$$

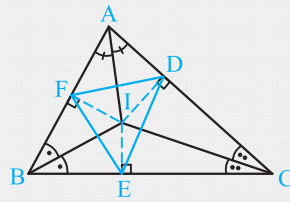
و این یعنی مثلث ADD' قائم‌الزاویه است پس نقطه همرسی ارتفاع‌های آن همان رأس زاویه قائمه یعنی نقطه A است پس نقطه همرسی ارتفاع‌های مثلث ADD' روی مثلث ABC قرار دارد. بنابراین گزینه (۲) درست است.

۳- نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌رسند.

نکته نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همواره داخل آن قرار دارد و از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



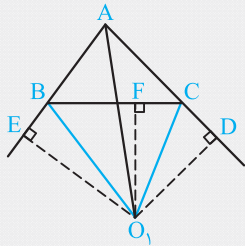
مثال: اگر I نقطه همرسی نیمسازهای زوایای مثلث ABC باشد و نقاط F, E, D پای عمودهایی باشند که از I بر اضلاع مثلث ABC وارد می‌شوند، ثابت کنید I نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF است.



پاسخ: می‌دانیم I نقطه همرسی نیمسازهای زوایای هر مثلث از اضلاع آن به یک فاصله است یعنی در شکل مقابل داریم $IE = IF = ID$. پس نقطه I از رأس‌های مثلث DEF به یک فاصله است، لذا I نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF است.

مثال: ثابت کنید نیمساز هر زاویه داخلی مثلث با نیمسازهای دو زاویه خارجی دیگر هم‌رس‌اند.

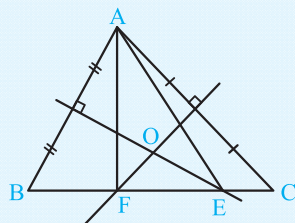
پاسخ: نیمسازهای زوایای خارجی B و C در مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن‌ها را O_1 می‌نامیم. از O_1 بر ضلع BC و امتداد ضلع‌های AC و AB عمود رسم می‌کنیم. داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BCD} \text{ روی نیمساز } O_1 \Rightarrow O_1D = O_1F \\ \widehat{CBE} \text{ روی نیمساز } O_1 \Rightarrow O_1F = O_1E \end{array} \right\} \Rightarrow O_1E = O_1D$$

یعنی نقطه O_1 از دو ضلع زاویه \widehat{A} به یک فاصله است، پس O_1 روی نیمساز زاویه \widehat{A} قرار دارد و این یعنی نیمسازهای زوایای خارجی B و C و نیمساز زاویه داخلی A در نقطه O_1 هم‌رسند.

تست: مثلث حاده‌الزاویه ABC را در نظر می‌گیریم. عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC ضلع BC را به ترتیب در E و F قطع می‌کنند، کدام گزاره درست است؟



(۱) نقطه همرسی نیمسازهای دو مثلث ABC و AEF بر هم منطبق‌اند.

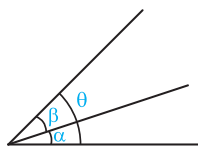
(۲) نقطه همرسی نیمسازهای مثلث ABC ، نقطه همرسی ارتفاع‌های مثلث AEF است.

(۳) نقطه همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC ، نقطه همرسی ارتفاع‌های مثلث AEF است.

(۴) نقطه همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC ، نقطه همرسی نیمسازهای مثلث AEF است.

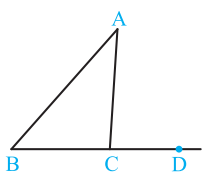
پاسخ: بنا به فرض نقطه O ، نقطه همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC است. هم‌چنین F روی عمودمنصف AC است پس $AF = CF$. در هر مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف قاعده نیمساز زاویه رأس هم می‌باشد، لذا عمودمنصف ضلع AC نیمساز زاویه \widehat{AFC} است. با استدلال مشابه در مثلث متساوی‌الساقین AEB عمودمنصف ضلع AB نیمساز زاویه \widehat{AEB} است. پس O نقطه همرسی نیمسازهای مثلث AEF است. بنابراین گزینه (۴) درست است.

نامساوی‌ها در مثلث



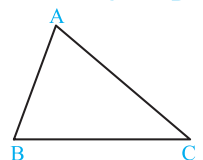
$$\theta > \beta, \theta > \alpha$$

(۱) در شکل مقابل همواره داریم:



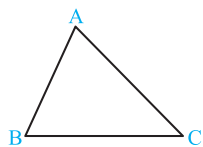
(۲) هر زاویه خارجی در مثلث از زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است. یعنی در شکل مقابل داریم:

$$\widehat{ACD} > \widehat{B}, \widehat{ACD} > \widehat{A}$$



(۳) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

$$AB < AC \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{B}$$



(۴) در هر مثلث مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه ضلع سوم بزرگ‌تر است.

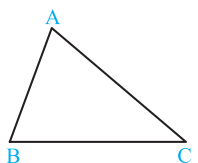
$$\begin{cases} AB + AC > BC \\ AB + BC > AC \\ AC + BC > AB \end{cases}$$

(۵) در هر مثلث اندازه هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

قضیه و عکس قضیه

برخی نتایج مهم و کلی که با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، قضیه نامیده می‌شوند و اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن چه حاصل می‌شود عکس قضیه گفته می‌شود. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

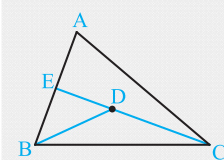
عکس قضیه شماره (۳): اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.



$$\widehat{C} < \widehat{B} \Rightarrow AB < AC$$

مثال: ثابت کنید اگر نقطه‌ای داخل مثلث باشد، زاویه‌ای که رأس آن، این نقطه بوده و اضلاعش از دو سر یک ضلع مثلث بگذرد، از زاویه روبه‌رو به آن ضلع بزرگ‌تر است.

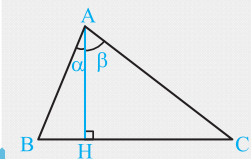
پاسخ: فرض کنیم D نقطه‌ای داخل مثلث ABC باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{BDC} > \widehat{A}$. به همین جهت CD را امتداد می‌دهیم تا AB را در E قطع کند، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{BDC} > \widehat{BED} \text{ (زاویه خارجی مثلث BED)} \\ \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{BED} > \widehat{A} \text{ (زاویه خارجی مثلث AEC)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BDC} > \widehat{A}$$

مثال: ثابت کنید ارتفاع مثلث با ضلع بزرگ‌تر زاویه بزرگ‌تر می‌سازد.

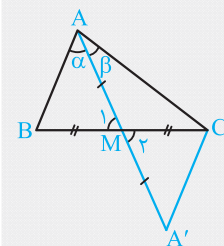
پاسخ: با فرض $AC > AB$ می‌خواهیم ثابت کنیم $\beta > \alpha$. داریم:



$$AB < AC \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{B} \Rightarrow -\widehat{C} > -\widehat{B} \Rightarrow 90^\circ - \widehat{C} > 90^\circ - \widehat{B} \Rightarrow \beta > \alpha$$

مثال: ثابت کنید میانه مثلث با ضلع کوچک‌تر، زاویه بزرگ‌تری می‌سازد.

پاسخ: در مثلث ABC میانه AM رسم شده است. با فرض $AC > AB$ می‌خواهیم ثابت کنیم $\alpha > \beta$ ، به همین جهت میانه AM را به اندازه خودش تا نقطه A' امتداد می‌دهیم، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} BM = CM \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \\ AM = A'M \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \triangle ABM \cong \triangle A'CM \Rightarrow \begin{cases} A'C = AB \\ \widehat{A'} = \alpha \end{cases}$$

بنا به فرض $AC > AB$ پس نتیجه می‌شود $AC > A'C$. داریم:

$$\triangle A'AC : A'C < AC \Rightarrow \widehat{A'AC} < \widehat{A} \Rightarrow \beta < \alpha$$

مثال: ثابت کنید طول هر ضلع مثلث از نصف محیط آن کم‌تر است.

پاسخ: در یک مثلث دلخواه با طول اضلاع $AB = c$ و $AC = b$ ، $BC = a$ داریم:

$$a < b + c \xrightarrow{+a} 2a < a + b + c \Rightarrow a < \frac{a + b + c}{2}$$

پس ضلع به طول a از نصف محیط مثلث کم‌تر است و به طریق مشابه نتیجه می‌شود b و c هم از نصف محیط کم‌تر هستند.

۲۱

تست: در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، CD کوچک‌ترین ضلع و AB بزرگ‌ترین ضلع است. کدام نامساوی همواره درست است؟

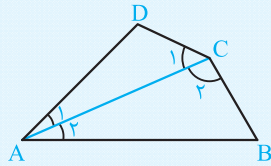
(۴) $\hat{A} < \hat{C}$

(۳) $\hat{C} > \hat{D}$

(۲) $\hat{B} > \hat{C}$

(۱) $\hat{A} > \hat{B}$

پاسخ: بنا به فرض AB بزرگ‌ترین ضلع و CD کوچک‌ترین ضلع است. قطر AC را رسم می‌کنیم، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : AB > BC \Rightarrow \hat{C}_2 > \hat{A}_2 \\ \triangle ACD : AD > CD \Rightarrow \hat{C}_1 > \hat{A}_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \hat{C} > \hat{A}$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.

گزاره: جمله‌ای است خبری که درست یا نادرست می‌باشد، اگر چه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد.

گزاره ساده: گزاره‌ای که تنها یک خبر را اعلام کند به آن گزاره ساده گفته می‌شود. مثلاً گزاره «فردا هوا برفی است.» یک گزاره ساده است.

گزاره مرکب: به گزاره‌ای که بیش از یک خبر را اعلام کند، گزاره مرکب گفته می‌شود، مثلاً گزاره «۲ عددی زوج و درخت سبز است.»، یک گزاره مرکب است.

تست: چند تا از گزاره‌های زیر مرکب است؟

«بعضی از اعداد اول زوج‌اند.» - «هیچ عددی از خودش کوچک‌تر نیست.» - «۵ فرد است یا اول است.» - «اگر $a = b$ ، آن‌گاه $a \leq b$ »

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزاره «۵ فرد است یا اول است.» گزاره مرکب است، هم‌چنین گزاره «اگر $a = b$ آن‌گاه $a \leq b$ » گزاره مرکب است، پس گزینه (۲) درست است.

نقیض یک گزاره: اگر p یک گزاره باشد، گزاره «چنین نیست که p » را نقیض گزاره p می‌گوییم. مثلاً نقیض «۵ فرد است.» می‌شود «چنین نیست که ۵ فرد است.» و در زبان عادی می‌شود «۵ فرد نیست.».

نقیض گزاره‌هایی که با «هر» شروع می‌شوند، با «وجود دارد» شروع می‌شود و جمله منفی می‌شود. مثلاً نقیض گزاره «هر مثلثی متساوی‌الاضلاع است.» می‌شود «وجود دارد مثلثی که متساوی‌الاضلاع نیست.» نقیض گزاره‌هایی که با «وجود دارد» شروع می‌شوند، با «هر» شروع می‌شود و جمله منفی می‌شود. مثلاً نقیض گزاره «دو زاویه متقابل به رأس وجود دارد که مکمل‌اند.» می‌شود «هر دو زاویه متقابل به رأس، مکمل نیستند.»

تست: نقیض گزاره «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° است.» کدام است؟

(۲) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° نیست.

(۱) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

(۴) مجموع زوایای داخلی هر مثلث از 180° کم‌تر است.

(۳) مجموع زوایای داخلی هر مثلث از 180° بیش‌تر است.

پاسخ: «چنین نیست که مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° است.» و معادل آن این است که بگوییم «مجموع زوایای داخلی هر

مثلث 180° نیست.»، پس گزینه (۲) درست است.

نکته: گزاره‌هایی که با کلمه «هیچ» بیان می‌شوند را می‌توان با «هر» هم بیان کرد. مثلاً «هیچ مثلثی متساوی‌الساقین نیست.» بدین معنی است که «هر مثلثی متساوی‌الساقین نیست.»

تست: نقیض گزاره «هیچ مثلثی دو زاویه قائمه ندارد.» کدام است؟

(۲) مثلثی وجود دارد که بیش از دو زاویه قائمه دارد.

(۱) مثلثی وجود دارد که دو زاویه قائمه دارد.

(۴) مثلثی وجود دارد که دو زاویه قائمه ندارد.

(۳) مثلثی وجود دارد که کم‌تر از دو زاویه قائمه دارد.

پاسخ: «چنین نیست که هیچ مثلثی دو زاویه قائمه ندارد.» معادل آن، این است که بگوییم «وجود دارد مثلثی که دو زاویه قائمه دارد.»

پس گزینه (۱) درست است.

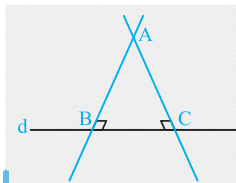
تست: نقیض گزاره «هر مثلث حداقل یک زاویه کوچک‌تر از 60° دارد.» کدام است؟

- (۱) مثلثی وجود دارد که زاویه کوچک‌تر از 60° ندارد.
 (۲) مثلثی وجود دارد که دقیقاً یک زاویه 60° دارد.
 (۳) مثلثی وجود دارد که یک زاویه بزرگ‌تر از 60° دارد.
 (۴) مثلثی وجود دارد که حداکثر یک زاویه بزرگ‌تر از 60° دارد.
- پاسخ:** «چنین نیست که هر مثلث حداقل یک زاویه کوچک‌تر از 60° دارد.» معادل آن، این است که «مثلثی وجود دارد که زاویه کوچک‌تر از 60° ندارد.» پس گزینه (۱) درست است.

گزاره شرطی: گزاره‌ای که به صورت «اگر ... آن‌گاه ...» بیان شود، گزاره شرطی نامیده می‌شود. مثلاً گزاره «اگر دو ضلع مثلثی برابر باشند، آن‌گاه زوایای مقابل آن‌ها برابر هستند.» یک گزاره شرطی می‌باشد.

برهان غیرمستقیم (برهان خلف)

- در این روش، برای اثبات یک گزاره؛
 (آ) فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد (فرض خلف).
 (ب) به کمک روش‌های درست ریاضی، گزاره‌ای را نتیجه می‌گیریم که با مفروضات مسئله یا یک قضیه یا یک مفهوم درست در تناقض باشد.
 (پ) با توجه به قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم نقیض حکم نادرست است، در نتیجه حکم درست است.



مثال: ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط، فقط یک عمود می‌توان بر آن رسم کرد.

پاسخ: فرض کنیم از نقطه مفروض A بیش از یک عمود بر خط d رسم شود، مثلاً دو خط بر d عمود شود (فرض خلف)، در این صورت مجموع زوایای مثلث ABC (مطابق شکل) بیش از 180° می‌شود که تناقض است، پس فرض خلف غلط و حکم درست می‌باشد.

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی یا یک حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. مثلاً حکم کلی «هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» با مثال نقض لوزی رد می‌شود.

تست: کدام گزاره با مثال نقض رد می‌شود؟

- (۱) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.
 (۲) هر مربع یک مستطیل است.
 (۳) قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.
 (۴) نقطه هم‌رسمی نیم‌سازهای زوایای هر مثلث داخل آن است.
- پاسخ:** در مثلث قائم‌الزاویه دو تا از ارتفاع‌ها همان اضلاع زاویه قائمه هستند، پس از ضلع‌ها کوچک‌تر نیستند. پس گزینه (۱) درست می‌باشد.

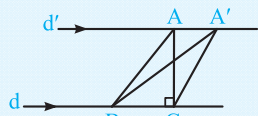
گزاره دوشرطی: اگر گزاره شرطی و عکس آن را با کلمه «و» ترکیب کنیم، گزاره دوشرطی ایجاد می‌شود، یعنی «اگر p آن‌گاه q» و «اگر q آن‌گاه p» گزاره دوشرطی نامیده می‌شود که به صورت خلاصه «p اگر و تنها اگر q» نوشته می‌شود و آن را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهند.

مثال: قضیه فیثاغورس را به صورت دوشرطی بنویسید.

پاسخ: مثلثی قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع آن برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن باشد.

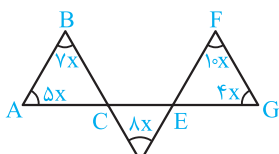
تست: کدام گزاره را می‌توان به صورت دوشرطی نوشت؟

- (۱) در هر مستطیل قطرهای برابرند.
 (۲) در متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.
 (۳) هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.
 (۴) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت برابر دارند.
- پاسخ:** اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند و عکس آن نیز درست است، یعنی اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، پس می‌توان آن را به صورت دوشرطی نوشت «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند.» بنابراین گزینه (۲) درست است. عکس سایر گزینه‌ها درست نیستند.
- عکس گزینه (۱): اگر در یک چهارضلعی قطرهای برابر باشند، آن چهارضلعی مستطیل است. \Leftarrow مثال نقض: در دوزنقه متساوی‌الساقین قطرهای برابرند، اما مستطیل نیست. عکس گزینه (۳): هر متوازی‌الاضلاع یک لوزی است. \Leftarrow مثال نقض: متوازی‌الاضلاع به اضلاع ۳ و ۵ نمی‌تواند لوزی باشد. عکس گزینه (۴): اگر دو مثلث هم‌مساحت باشند، آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشت هستند. \Leftarrow مثال نقض: دو



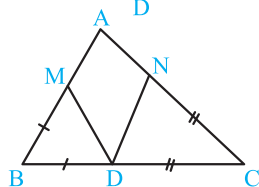
مثلث ABC و $A'BC$ مطابق شکل، دارای قاعده مشترک BC هستند و ارتفاع وارد بر قاعده BC در آن‌ها برابر با فاصله دو خط موازی d و d' است، پس مساحت آن‌ها برابر است، اما هم‌نهشت نیستند. (شکل روبه‌رو)

مجموع زوایا در مثلث و چندضلعی‌ها



۴۳. با توجه به شکل، اندازه زاویه A چند درجه است؟

- ۴۰ (۲)
- ۵۰ (۱)
- ۳۰ (۴)
- ۶۰ (۳)



۴۴. در شکل مقابل $\hat{A} = 58^\circ$ ، $BM = MD$ و $CN = CD$. زاویه MDN چند درجه است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)

- ۵۹ (۲)
- ۵۸ (۱)
- ۶۲ (۴)
- ۶۱ (۳)

۴۵. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، اندازه زاویه بین دو نیمساز زوایای A و B برابر 11° است. اندازه زاویه A چند درجه است؟

- ۱۴۰ (۴)
- ۱۳۵ (۳)
- ۱۰۰ (۲)
- ۱۲۰ (۱)

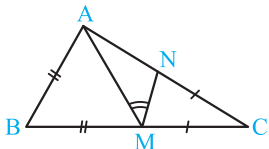
۴۶. در مثلث ABC ، زاویه $\hat{A} = 108^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم، کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث ADE چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۹۳)

- ۵۴ (۴)
- ۳۶ (۳)
- ۳۲ (۲)
- ۲۴ (۱)

۴۷. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، قاعده BC را از هر دو طرف به اندازه ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچک‌ترین زاویه خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است؟ (سراسری تجربی فارج از کشور- ۹۳)

- ۳ (۴)
- ۲ (۳)
- $\frac{3}{2}$ (۲)
- ۱ (۱)

۴۸. در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی‌الساقین اند و $\hat{M} = 43^\circ$ ، اندازه زاویه BAC چند درجه است؟ (سراسری تجربی فارج از کشور- ۹۲)



- ۹۳ (۱)
- ۹۴ (۲)
- ۹۶ (۳)
- ۹۷ (۴)

۴۹. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویه داخلی C را در D قطع می‌کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد، AD برابر کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۴)

- $\frac{AC}{2}$ (۴)
- MC (۳)
- MD (۲)
- AM (۱)

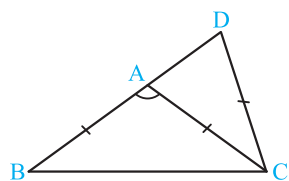
۵۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، قاعده BC را به اندازه ساق تا نقطه D امتداد می‌دهیم، اگر زاویه خارجی رأس A از مثلث ABD برابر 102° درجه باشد، کوچک‌ترین زاویه مثلث ABC ، چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۹۴)

- ۴۴ (۴)
- ۴۲ (۳)
- ۳۸ (۲)
- ۳۴ (۱)

۵۱. در مثلث ABC ($AB = AC$)، ساق AB را به اندازه $BD = BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر AC باشد، زاویه A چند درجه است؟ (سراسری تجربی فارج از کشور- ۹۴)

- ۳۰ (۲)
- ۲۵ (۱)
- ۳۶ (۴)
- ۳۲ (۳)

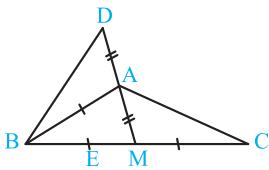
۵۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، ساق BA را از نقطه B به اندازه قاعده BC تا نقطه D امتداد می‌دهیم اگر $CD = CA$ باشد، زاویه A چند درجه است؟ (سراسری ریاضی فارج از کشور- ۹۴)



- ۱۰۵ (۲)
- ۱۰۲ (۱)
- ۱۱۲ (۴)
- ۱۰۸ (۳)

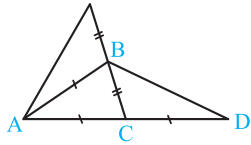
۵۳. در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$ ، $\hat{C} = 24^\circ$)، از رأس C خطی بر AC عمود کرده و بر روی آن $CD = CB$ را طوری جدا می‌کنیم که BD ضلع AC را قطع کند. زاویه DBC چند درجه است؟ (سراسری تجربی فارج از کشور- ۹۴)

- ۴۸ (۴)
- ۳۸ (۳)
- ۳۶ (۲)
- ۳۳ (۱)



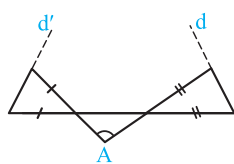
۵۴. در شکل مقابل اگر $\widehat{D} + \widehat{C} = 61^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه ABC چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۸۹)

- (۱) ۳۹ (۲) ۵۶ (۳) ۵۸ (۴) ۶۱



۵۵. در شکل مقابل زاویه $\widehat{BAC} = 52^\circ$ ، مجموع دو زاویه D و E چند درجه است؟ (سراسری تجربی فارغ از کشور- ۸۹)

- (۱) ۳۸ (۲) ۵۲ (۳) ۵۸ (۴) ۶۴



۵۶. در شکل مقابل، دو مثلث کناری مثلث متساوی الساقین اند و $\widehat{A} = 100^\circ$ ، دو خط d و d' با زاویه چند درجه متقاطع‌اند؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

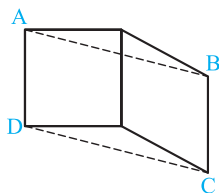
- (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۴۵ (۴) ۵۰

۵۷. در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، رابطه $\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{C}}{5} = \frac{\widehat{D}}{12}$ ، زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مقابل \widehat{A} و \widehat{C} چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۹۶)

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۵۸. در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، رابطه $\frac{\widehat{A}}{4} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{11}$ ، زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مجاور \widehat{A} و \widehat{B} چند درجه است؟ (سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۶)

- (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴) ۷۵

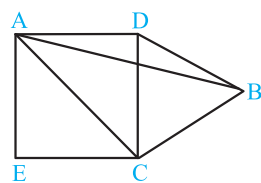


۵۹. در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه 60° ، در یک ضلع مشترک‌اند، بزرگ‌ترین زاویه متوازی‌الاضلاع $ABCD$ چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۸۸)

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵

۶۰. مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع درون مربع در یک ضلع مشترک‌اند. در مثلث غیرقائم‌الزاویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع است، زاویه بزرگ‌تر چند برابر زاویه کوچک‌تر است؟ (سراسری تجربی فارغ از کشور- ۸۶)

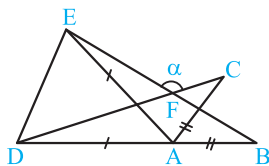
- (۱) ۷ (۲) ۷/۵ (۳) ۸ (۴) ۹



۶۱. در شکل مقابل، بر روی یک ضلع مربع مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. در مثلث ABC بزرگ‌ترین زاویه چند برابر کوچک‌ترین زاویه آن است؟ (سراسری تجربی فارغ از کشور- ۸۸)

- (۱) ۳ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{9}{2}$

۶۲. در شکل زیر $AD = AE$ ، $AB = AC$ ، $\widehat{CAB} = 50^\circ$ و $\widehat{AED} = 65^\circ$ ، زاویه α چند درجه است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)



- (۱) ۱۱۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۲۵ (۴) ۱۳۰

۶۳. یکی از زوایای مثلث متساوی‌الساقینی برابر 100° است. نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها امتداد ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

- (۱) 25° (۲) 30° (۳) 35° (۴) 40°

۶۴. در مثلثی زوایای A ، B و C به ترتیب به نسبت ۱، ۴ و ۷ تقسیم شده‌اند. زاویه‌ای که نیمساز داخلی A با نیمساز خارجی B می‌سازد، چند درجه است؟

- (۱) ۳۵ (۲) $52/5$ (۳) ۷۵ (۴) ۱۵

۶۵. در یک چندضلعی منتظم مجموع اندازه‌های زوایای داخلی ۶ برابر مجموع اندازه‌های زوایای خارجی است. اگر یک ضلع چندضلعی ۱۰/۵ سانتی‌متر باشد، محیط چندضلعی چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۱۴۷ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۴۵

۶۶. اگر به تعداد اضلاع یک پانزده‌ضلعی منتظم، k واحد اضافه شود، اندازه هر زاویه داخلی چندضلعی منتظم $k+1$ درجه بیش‌تر از اندازه زاویه داخلی پانزده‌ضلعی منتظم می‌شود. حداکثر مقدار k کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶۷. یک نُه‌ضلعی محدب حداکثر چند زاویه حاده داخلی می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۸. اگر مجموع اندازه‌های زوایای داخلی یک $(n+k)$ ضلعی 1440° درجه بیش‌تر از مجموع اندازه‌های زوایای داخلی یک $(n-k)$ ضلعی باشد، k کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

۶۹. اندازه هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم 106° درجه کم‌تر از اندازه هر زاویه داخلی یک $(n+1)$ ضلعی منتظم است، n کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۷۰. مجموع اندازه‌های زوایای داخلی یک چندضلعی محدب بدون یکی از آن‌ها برابر 2570° است. اندازه زاویه کنار گذاشته شده کدام است؟

- (۱) 100° (۲) 130° (۳) 140° (۴) 110°

۷۱. اندازه همه زوایای یک n ضلعی محدب بدون در نظر گرفتن یکی از آن‌ها 160° است. اگر n زوج باشد، کم‌ترین اندازه زاویه مجهول چند درجه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۱۰ (۴) ۳۰

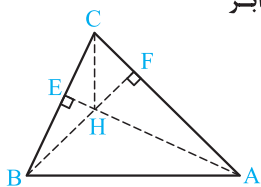
نقاط هم‌رسی عمودمنصف‌ها، ارتفاع‌ها و نیمسازها

۷۲. در مثلث ABC داریم $\hat{A} = 40^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$. اگر نقطه تلاقی سه ارتفاع H باشد، زاویه CHA چند درجه است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۴۰ (۴) ۸۰

۷۳. در مثلث ABC که در آن $\hat{A} = 40^\circ$ ، $\hat{B} = 60^\circ$ و H محل تلاقی سه ارتفاع است، زاویه AHC چند برابر زاویه BHC است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$



۷۴. در مثلث ABC ($AB < AC$)، ضلع BC را از هر دو طرف، به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم، مرکز دایره محیطی مثلث ADE (نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها)، بر روی کدام جزء مثلث ABC است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

- (۱) عمودمنصف BC (۲) میانه نظیر ضلع BC (۳) ارتفاع وارد بر BC (۴) نیمساز داخلی زاویه A

۷۵. در کدام مثلث همه نقاط هم‌رسی عمودمنصف‌ها، ارتفاع‌ها و نیمسازها روی یک امتداد قرار دارند؟

- (۱) متساوی‌الساقین (۲) متساوی‌الاضلاع (۳) مختلف‌الاضلاع (۴) قائم‌الزاویه

۷۶. در مثلث حاده‌الزوایای ABC ، I نقطه هم‌رسی نیمسازها و O نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها می‌باشد. اگر $\hat{BOC} = \frac{\hat{BIC}}{4}$ ، آن‌گاه اندازه زاویه A چند درجه است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۷۷. در یک مثلث بین زوایا، رابطه $\hat{C} = \hat{A} + 2\hat{B}$ برقرار است. محل تلاقی سه ارتفاع کجا قرار دارد؟

- (۱) داخل مثلث (۲) روی محیط مثلث (۳) خارج مثلث (۴) هر سه حالت ممکن است.

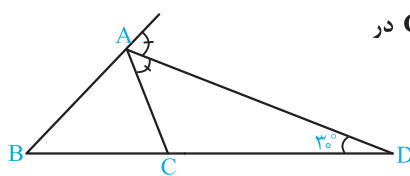
۷۸. اندازه زوایای خارجی یک مثلث به نسبت اعداد ۲، ۳ و ۴ است، کدام گزینه درست است؟

- (۱) نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها، در خارج مثلث است. (۲) نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها در داخل مثلث قرار دارد. (۳) نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها، روی مثلث است. (۴) نقطه هم‌رسی نیمسازها، خارج مثلث قرار دارد.

۷۹. مثلث MNP مفروض است. از رأس‌های آن خط‌هایی موازی اضلاع مقابل آن رسم می‌کنیم، مثلث ABC پدید می‌آید. نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌های مثلث MNP ،
 (۱) از سه ضلع آن به یک فاصله است.
 (۲) از سه رأس آن به یک فاصله است.
 (۳) از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است.
 (۴) از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است.
۸۰. در مثلث ABC ، I نقطه هم‌مرسی نیمسازها می‌باشد. کدام نقطه هم‌مرسی مثلث‌های AIB ، AIC و BIC خارج از مثلث ABC قرار دارد؟
 (۱) نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌ها
 (۲) نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌ها
 (۳) نقطه هم‌مرسی نیمسازها
 (۴) نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها
۸۱. در داخل یک متوازی‌الاضلاع چند نقطه وجود دارد که از دو ضلع و یک قطر آن به یک فاصله باشد؟
 (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴
۸۲. سه خط دایره‌دو متقاطع که هم‌مرس نیستند مفروضند. چند نقطه وجود دارد که از این سه خط به یک فاصله باشد؟
 (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴
۸۳. رأس یک لوزی از یک قطر و خط‌های شامل دو ضلع دیگر به یک فاصله غیرصفر است. اندازه زاویه حاده این لوزی چند درجه است؟
 (۱) ۴۵
 (۲) ۶۰
 (۳) ۳۰
 (۴) ۷۵
۸۴. مثلثی که اندازه یک ضلع آن ۱۲ و فاصله وسط این ضلع از رأس‌ها برابر است را در نظر می‌گیریم. نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌های همه این مثلث‌ها روی کدام شکل قرار دارد؟
 (۱) دایره‌ای به قطر ۱۲
 (۲) عمودمنصف ضلع مفروض
 (۳) دایره‌ای به قطر ۶
 (۴) خطی موازی ضلع مفروض و به فاصله ۶ از آن

نامساوی‌ها در مثلث

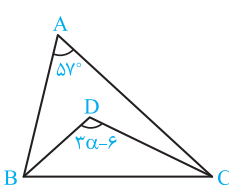
۸۵. در مثلث ABC ، $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 35^\circ$ است. اگر نقطه D روی ضلع BC چنان باشد که $\hat{DAC} = 25^\circ$ ، کدام نامساوی زیر نادرست است؟
 (۱) $AC > AB$
 (۲) $AB > BD$
 (۳) $AC > AD$
 (۴) $BD > AD$



۸۶. در شکل مقابل AD نیمساز زاویه خارجی A و $\hat{D} = 30^\circ$ است. کم‌ترین اندازه زاویه C در مثلث ABC چند درجه است؟
 (۱) ۶۰
 (۲) ۵۹
 (۳) ۶۱
 (۴) ۶۲

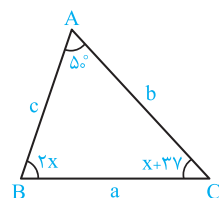
۸۷. در مثلث ABC ، اندازه زاویه B برابر 70° است و $AC > AB$ است. کم‌ترین مقدار صحیح \hat{A} چند درجه است؟
 (۱) ۴۱
 (۲) ۴۲
 (۳) ۴۰
 (۴) ۳۹

۸۸. در مثلث ABC ، اندازه زاویه A برابر 70° است و $AB < AC$ ، اگر D نقطه تلاقی نیمسازهای زوایای B و C باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار صحیح زاویه DBC چند درجه است؟
 (۱) ۲۶
 (۲) ۲۷
 (۳) ۲۸
 (۴) ۲۹



۸۹. در شکل مقابل، تعداد مقادیر صحیح α کدام است؟
 (۱) ۳۷
 (۲) ۳۸
 (۳) ۴۰
 (۴) ۴۱

۹۰. با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل عبارت $\frac{|a-b| + |c-b| + |a-c|}{2}$ کدام است؟
 (۱) $c-a$
 (۲) $b-a$
 (۳) b
 (۴) c



۹۱. در مثلث ABC ، نیمساز داخلی زاویه A ، ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند، کدام نامساوی همواره درست است؟
 (۱) $BA > BD$
 (۲) $DA > DB$
 (۳) $AB > AD$
 (۴) $DB > DA$

۹۲. در مثلث ABC ، نیمساز خارجی زاویه A ، ضلع BC را در D' قطع می‌کند، کدام نامساوی همواره درست است؟
 (۱) $D'B > AB$
 (۲) $D'A > D'B$
 (۳) $AB > AD'$
 (۴) $D'B > D'A$

۹۳. در مثلث ABC با فرض مختلف‌الاضلاع بودن، میانه AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است، کدام نامساوی همواره درست است؟

(سراسری ریاضی-۹۴)

$AM < AB$ (۲)

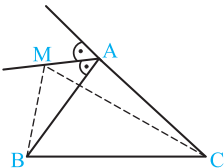
$AM < BC$ (۱)

$AD < AM$ (۴)

$AD < AB$ (۳)

(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۴)

۹۴. در شکل روبه‌رو، نقطه M روی نیمساز خارجی زاویه A است، نسبت $\frac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟



(۱) بزرگ‌تر از ۱

(۲) کم‌تر از ۱

(۳) برابر ۱

(۴) غیر مشخص

۹۵. در مثلث ABC ، $\widehat{A} > \widehat{C}$ و نیمساز زاویه B و عمودمنصف ضلع AB در نقطه D متقاطع‌اند. M و N پای عمودهایی است که از نقطه D

(سراسری ریاضی-۹۵)

به ترتیب بر BA و BC رسم شده‌اند، کدام نابرابری درست است؟

$AM < BN$ (۴)

$DA > DC$ (۳)

$NC < NB$ (۲)

$NC > NB$ (۱)

۹۶. اندازه زوایای مثلثی 120° ، $(2x - 10)^\circ$ و $(y - 5)^\circ$ است، طول بازهای که $x + y$ در آن قرار دارد، کدام است؟

۳۱ (۴)

۳۲ (۳)

۲۸ (۲)

۳۰ (۱)

۹۷. در مثلث ABC ، $AB < AC$ و عمودمنصف ضلع BC نیمساز خارجی زاویه A را در نقطه D قطع می‌کند. اگر M و N پای عمودهایی

باشند که از D به ترتیب بر خط‌های شامل AB و AC وارد می‌شوند، کدام نابرابری درست است؟

$BM > CN$ (۴)

$DC < BM$ (۳)

$BM < CN$ (۲)

$DC > BM$ (۱)

گزاره‌ها، مثال نقض، قضیه‌های دوشروطی و برهان خلف

۹۸. نقیض گزاره «هر چندضلعی محدب حداکثر سه زاویه حاده دارد.» کدام است؟

(۲) وجود دارد چندضلعی محدبی که زاویه حاده داخلی ندارد.

(۱) وجود دارد چندضلعی محدبی که حداقل ۴ زاویه حاده دارد.

(۴) وجود دارد چندضلعی محدبی که حداقل ۳ زاویه حاده دارد.

(۳) وجود دارد چندضلعی محدبی که ۳ زاویه حاده دارد.

۹۹. کدام گزاره زیر را نمی‌توان به صورت دوشروطی نوشت؟

(۲) قطرهای یک لوزی عمودمنصف یکدیگرند.

(۱) در مثلثی که دو ضلع برابر باشند، ارتفاع نظیر آن‌ها برابر است.

(۴) نقطه هم‌رسی نیمسازهای مثلث داخل آن قرار دارد.

(۳) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است.

۱۰۰. کدام قضیه به صورت دوشروطی بیان نمی‌شود؟

(۲) در مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف‌های اضلاع بر روی ضلع بزرگ‌تر، متقاطع‌اند.

(۱) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه یک ضلع بر هم منطبق‌اند.

(۴) در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه 90° ، بزرگ‌ترین ضلع است.

(۳) در مثلث قائم‌الزاویه، اندازه میانه وارد بر وتر، نصف اندازه وتر است.

۱۰۱. کدام گزاره زیر با مثال نقض رد می‌شود؟

(۲) ارتفاع هر مثلث، از همه اضلاع آن کوچک‌تر است.

(۱) هر مربع، یک مستطیل است.

(۴) مثلث متساوی‌الساقین، همواره دو زاویه حاده دارد.

(۳) هر مثلث، حداقل یک زاویه بزرگ‌تر یا مساوی 60° دارد.

۱۰۲. نقیض گزاره «هر عدد که بر ۳ و ۵ بخش پذیر باشد، بر ۱۵ بخش پذیر است.» کدام گزاره است؟

(۲) عددی هست که بر ۳ و ۵ بخش پذیر نیست ولی بر ۱۵ بخش پذیر است.

(۱) عددی هست که بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است ولی بر ۱۵ بخش پذیر نیست.

(۴) عددی هست که بر ۳ یا ۵ بخش پذیر نیست ولی بر ۱۵ بخش پذیر است.

(۳) عددی هست که بر ۳ و ۵ بخش پذیر است ولی بر ۱۵ بخش پذیر نیست.

۱۰۳. نقیض گزاره «برای هر x حقیقی داریم $x < 2$ یا $x > 3$ » کدام است؟

(۲) وجود دارد x حقیقی که $2 \leq x \leq 3$

(۱) وجود دارد x حقیقی که $2 < x < 3$

(۴) وجود دارد x حقیقی که $x < 2$ و $x > 3$

(۳) وجود دارد x حقیقی که $x \geq 3$ و $x \leq 2$

۱۰۴. نقیض گزاره «هر چهارضلعی که دو قطر مساوی دارد، مستطیل است.» کدام است؟

(۲) چهارضلعی هست که دو قطر مساوی دارد و مستطیل است.

(۱) چهارضلعی هست که دو قطر مساوی ندارد و مستطیل نیست.

(۴) چهارضلعی هست که دو قطر مساوی دارد و مستطیل نیست.

(۳) چهارضلعی هست که دو قطر مساوی ندارد و مستطیل است.

۱۰۵. در اثبات گزاره «در مثلث ABC ، اگر $AB \neq AC$ ، آن‌گاه $\widehat{B} \neq \widehat{C}$ » به کمک برهان خلف، فرض خلف کدام است؟

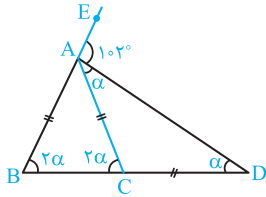
$\widehat{B} = \widehat{C}$ (۴)

$\widehat{B} < \widehat{C}$ (۳)

$\widehat{B} > \widehat{C}$ (۲)

$AB = AC$ (۱)

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۰

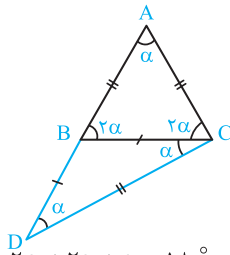


DAE زاویه خارجی مثلث ABD است، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{DAE} &= \alpha + 2\alpha = 3\alpha \\ \Rightarrow 102^\circ &= 3\alpha \Rightarrow \alpha = 34^\circ \\ \widehat{B} = \widehat{C} &= 2\alpha = 68^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۱

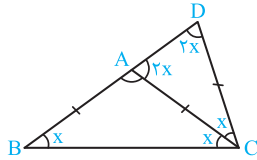


بنا به فرض، ساق AB رابه اندازه BD = BC امتداد داده‌ایم به طوری که CD = AC = AB شده است. اگر فرض کنیم $\widehat{D} = \alpha$ ، زوایا مطابق شکل می‌شوند و در مثل ABC داریم:

$$2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

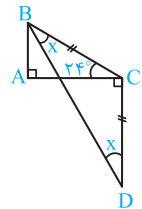
۴ ۳ ۲ ۱ ۵۲

فرض کنیم اندازه زاویه B برابر x باشد در مثل متساوی‌الساقین ABC نتیجه می‌شود $\widehat{ACB} = x$ و بنا به زاویه خارجی داریم $\widehat{CAD} = 2x$. اما مثل CAD متساوی‌الساقین است. پس $\widehat{D} = \widehat{CAD} = 2x$ و چون $BD = BC$ می‌باشد پس می‌توان نوشت:



$$\begin{aligned} \widehat{D} = \widehat{BCD} &\Rightarrow 2x = x + \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{ACD} = 2x - x = x \\ \Delta ADC: 2x + 2x + x &= 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ \\ \widehat{BAC} = 180^\circ - 2x &= 180^\circ - 2 \times 36^\circ = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ \end{aligned}$$

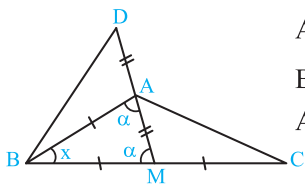
۴ ۳ ۲ ۱ ۵۳



در مثل متساوی‌الساقین BCD اندازه زاویه رأس برابر $90^\circ + 24^\circ = 114^\circ$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} x + x + 114^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow 2x &= 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ \Rightarrow x = 33^\circ \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۵۴



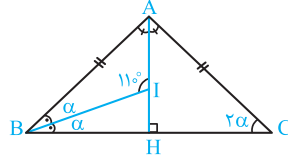
$$\left. \begin{aligned} AB &= CM \\ \widehat{BAD} = \widehat{AMC} &= 180^\circ - \alpha \\ AD &= AM \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{(ضضض)}} \Delta BAD \cong \Delta CMA \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{C}$$

BAM زاویه خارجی مثلث ABD است، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{BAM} = \widehat{ABD} + \widehat{D} &\Rightarrow \alpha = \widehat{C} + \widehat{D} \xrightarrow{\widehat{C} + \widehat{D} = 61^\circ} \alpha = 61^\circ \\ \Delta ABM: \alpha + \alpha + x &= 180^\circ \Rightarrow 61^\circ + 61^\circ + x = 180^\circ \\ \Rightarrow x &= 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۵

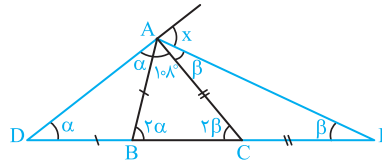


نیمساز زاویه رأس متساوی‌الساقین، ارتفاع هم می‌باشد پس مثلث BIH قائم‌الزاویه است و بنا به زاویه خارجی در مثل BIH داریم:

$$\begin{aligned} 110^\circ &= \alpha + 90^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ \\ \widehat{A} &= 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \end{aligned}$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۶

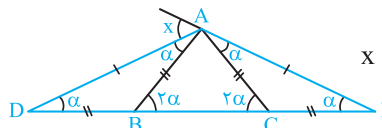
بنا به فرض $\widehat{A} = 108^\circ$ است، پس زاویه DAE در مثل ADE بزرگ‌ترین زاویه است، پس زاویه خارجی آن یعنی x کوچک‌ترین است.



$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ \Delta ABC: 2\alpha + 2\beta + 108^\circ = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ \alpha + \beta = 36^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 36^\circ$$

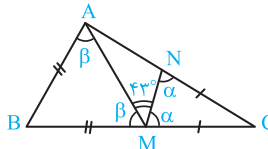
۴ ۳ ۲ ۱ ۴۷

مفروضات پرسش روی شکل آورده شده است. واضح است که بزرگ‌ترین زاویه داخلی مثلث ADE، زاویه DAE است پس کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث ADE مطابق شکل برابر با زاویه x است. پس:



$$x = \widehat{E} + \widehat{D} = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۸



در مثل‌های متساوی‌الساقین ABM و CMN داریم:

$$\widehat{B} = 180^\circ - 2\beta, \quad \widehat{C} = 180^\circ - 2\alpha$$

حال در مثل ABC می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BAC} &= 2\alpha + 2\beta - 180^\circ = 2(\alpha + \beta) - 180^\circ \end{aligned}$$

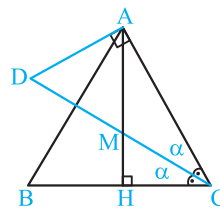
از طرفی برای زوایای به رأس M مطابق شکل داریم:

$$\alpha + \beta + 43^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

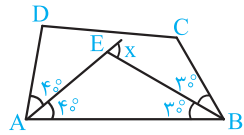
$$\widehat{BAC} = 2 \times 137^\circ - 180^\circ = 274^\circ - 180^\circ = 94^\circ$$

۴ ۳ ۲ ۱ ۴۹



در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نیمساز AH ارتفاع هم می‌باشد، پس در مثلث قائم‌الزاویه MHC داریم $\widehat{CMH} = 90^\circ - \alpha$ رأس نتیجه می‌شود $\widehat{AMD} = 90^\circ - \alpha$

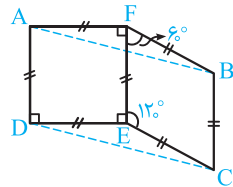
از طرفی بنا به فرض $\widehat{DAC} = 90^\circ$ ، پس در مثلث قائم‌الزاویه DAC داریم $\widehat{D} = \widehat{AMD} = 90^\circ - \alpha$ و در نتیجه $AD = AM$



مطابق شکل E محل برخورد نیمسازهای زوایای \hat{A} و \hat{B} است و در مثلث AEB بنا به زاویه خارجی داریم:

$$x = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$$

۵۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

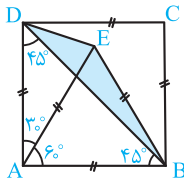


می‌خواهیم زاویه ADC را محاسبه کنیم. مثلث DEC متساوی‌الساقین است و زاویه رأس آن برابر است با $\hat{DEC} = 36^\circ - 90^\circ - 12^\circ = 15^\circ$ داریم:

$$\hat{EDC} + \hat{ECD} + \hat{DEC} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{EDC} + 15^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{EDC} = \frac{180^\circ - 15^\circ}{2} = 82.5^\circ, \hat{ADC} = 90^\circ + \hat{EDC} = 90^\circ + 82.5^\circ = 172.5^\circ$$

۵۹ (۴ ۳ ۲ ۱)



مثلث غیر قائم‌الزاویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع AEB است، مثلث BED می‌باشد.

$$\hat{AED} = \hat{ADE} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\hat{BED} = \hat{AED} + \hat{AEB} = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ$$

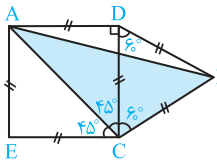
$$\hat{DBE} = \hat{ABE} - \hat{ABD} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

و زاویه دیگر مثلث BDE برابر $\hat{BDE} = 180^\circ - (135^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$ است، پس:

$$\frac{\hat{BED}}{\hat{DBE}} = \frac{135}{15} = 9$$

۶۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

در مثلث متساوی‌الساقین ABD، اندازه زاویه رأس برابر $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ است.



$$\hat{DAB} = \hat{DBA} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

و داریم:

$$\hat{CAB} = \hat{CAD} - \hat{DAB} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

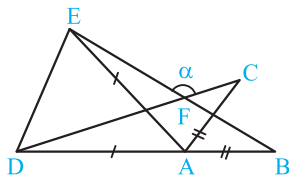
$$\hat{ABC} = \hat{DBC} - \hat{DBA} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

$$\hat{ACB} = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$$

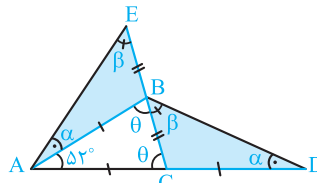
$$\frac{\hat{ACB}}{\hat{CAB}} = \frac{105^\circ}{30^\circ} = \frac{7}{2}$$

بنابراین $\frac{7}{2}$ (۴ ۳ ۲ ۱)

در مثلث متساوی‌الساقین ADE بنا به فرض $\hat{AED} = 65^\circ$ است، پس $\hat{DAE} = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$ و در نتیجه $\hat{ADE} = 65^\circ$



۵۵ (۴ ۳ ۲ ۱)



دو مثلث BEA و BCD همنهشت‌اند و زوایای نظیر مطابق شکل است. داریم:

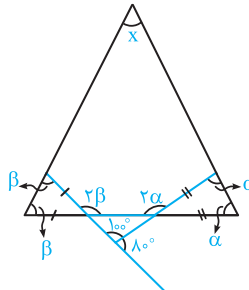
$$\begin{cases} \theta = \alpha + \beta \\ \theta + \theta + 52^\circ = 180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{180^\circ - 52^\circ}{2} = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$$

۵۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$x + \alpha + \beta = 180^\circ$$

در بزرگ‌ترین مثلث روی شکل داریم: در پایین‌ترین مثلث روی شکل، جمع زوایای خارجی 36° است، پس:



$$2\alpha + 2\beta + 180^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 135^\circ$$

$$\begin{cases} x + \alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha + \beta = 135^\circ \end{cases} \Rightarrow x + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$

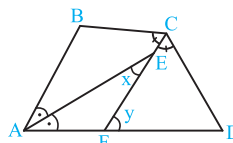
۵۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

بنا به فرض بین زوایای چهارضلعی محذب ABCD رابطه $\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{5\hat{D}}{12}$ برقرار است پس می‌توانیم فرض کنیم $\hat{D} = 12x$ ، $\hat{C} = 25x$ ، $\hat{B} = 20x$ ، $\hat{A} = 15x$ داخلی هر چهارضلعی محذب برابر 360° است. پس می‌توان نوشت:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 15x + 20x + 25x + 12x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 72x = 360^\circ \Rightarrow x = 5^\circ$$

و اندازه زوایای چهارضلعی $\hat{A} = 75^\circ$ ، $\hat{B} = 100^\circ$ ، $\hat{C} = 125^\circ$ و $\hat{D} = 60^\circ$ می‌شود.



مطابق شکل نیمسازهای دو زاویه \hat{A} و \hat{C} در نقطه E متقاطع‌اند و به کمک زاویه خارجی داریم:

$$y = x + \frac{\hat{A}}{2} = x + \frac{75^\circ}{2} \quad (1)$$

$$\triangle CFD: y + \frac{\hat{C}}{2} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow y + \frac{125^\circ}{2} + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow y = 120^\circ - \frac{125^\circ}{2} = \frac{115^\circ}{2} \quad (2)$$

$$(1) \cdot (2) \Rightarrow \frac{115^\circ}{2} = x + \frac{75^\circ}{2} \Rightarrow x = \frac{115^\circ - 75^\circ}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

۵۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

به کمک خواص تناسب داریم:

$$\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{4 + 3 + 11} = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 4 \times 20^\circ = 80^\circ, \hat{B} = 3 \times 20^\circ = 60^\circ$$

۶۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-2) \times 180^\circ$ است پس مجموع زوایای یک $(n+k)$ ضلعی برابر $(n+k-2) \times 180^\circ$ و مجموع زوایای یک $(n-k)$ ضلعی برابر $(n-k-2) \times 180^\circ$ است. بنا به فرض داریم:

$$(n+k-2) \times 180^\circ = 1440^\circ + (n-k-2) \times 180^\circ$$

با تقسیم طرفین تساوی بر 180° داریم:

$$\Rightarrow n+k-2=8+n-k-2 \Rightarrow 2k=8 \Rightarrow k=4$$

۶۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\left(180^\circ - \frac{36^\circ}{n+1}\right) - \left(180^\circ - \frac{36^\circ}{n}\right) = \frac{36^\circ}{n} - \frac{36^\circ}{n+1} = \frac{6}{10}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین} \times 6} 60 \times \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{10} \Rightarrow n(n+1) = 600 \Rightarrow n = 24$$

۷۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

بنا به فرض مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب داده شده بدون یکی از آن‌ها 257° است. پس مجموع زوایای داخلی $(n-2) \times 180^\circ$ از این عدد بزرگ‌تر است.

$$(n-2) \times 180^\circ > 257^\circ \Rightarrow n-2 > 14/10 \dots$$

$$\Rightarrow n > 16/10 \dots \Rightarrow n \geq 17$$

اما مجموع زوایای داخلی 17 ضلعی محدب برابر $(17-2) \times 180^\circ = 2700^\circ$ است. پس اندازه زاویه کنار گذاشته شده برابر $2700^\circ - 257^\circ = 2443^\circ$ است.

۷۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

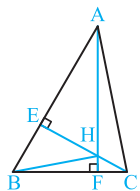
اندازه یک زاویه X و سایر زوایای n ضلعی محدب داده شده برابر 160° است. پس تعداد این زوایا $n-1$ است و داریم:

$$(n-1) \times 160^\circ + X = (n-2) \times 180^\circ \Rightarrow 160n - 160^\circ + X = 180n - 360^\circ$$

$$\Rightarrow X = 20n - 200^\circ$$

چون $X > 0$ است. پس باید $n > 10$ یا $n \geq 11$ باشد و کم‌ترین مقدار زوج آن $n = 12$ است که به ازای آن $X = 240^\circ - 200^\circ = 40^\circ$ می‌شود.

۷۲ (۴ ۳ ۲ ۱)



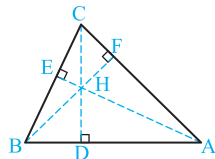
چون نقطه H هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث ABC است، پس $CE \perp AB$ و $AF \perp BC$ است. چهارضلعی $BEHF$ مجموع زوایا 360° است.

$$\hat{B} + 90^\circ + 90^\circ + \hat{EHF} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 60^\circ + 180^\circ + \hat{EHF} = 360^\circ \Rightarrow \hat{EHF} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{CHA} = \hat{EHF} = 120^\circ \text{ متقابل به رأس}$$

۷۳ (۴ ۳ ۲ ۱)



بنا به فرض داریم $\hat{A} = 40^\circ$ ، $\hat{B} = 60^\circ$

$$AFHD: \hat{A} + 90^\circ + 90^\circ + \hat{DHF} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{DHF} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Rightarrow \hat{BHC} = 140^\circ$$

$$BEHD: \hat{B} + 90^\circ + 90^\circ + \hat{DHE} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{DHE} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{AHC} = 120^\circ$$

$$\frac{\hat{AHC}}{\hat{BHC}} = \frac{120^\circ}{140^\circ} = \frac{6}{7}$$

از طرفی $\hat{CAB} = 50^\circ$ ، پس $\hat{DAC} = \hat{BAE} = 130^\circ$ و داریم:

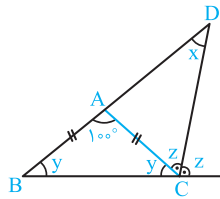
$$AD = AE, \hat{DAC} = \hat{BAE}, AC = AB$$

$$\xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \triangle DAC \cong \triangle EAB \Rightarrow \hat{ADC} = \hat{AEB} = x$$

$$\triangle DEF \text{ زاویه خارجی } \alpha = \hat{DEF} + \hat{EDF} = 65^\circ + x + 65^\circ - x = 130^\circ$$

۶۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه خارجی رأس با قاعده مثلث موازی است و آن را قطع نمی‌کند.



از طرفی زوایای مجاور به قاعده مثلث متساوی‌الساقین همواره حاده‌اند، پس زاویه داده شده زاویه رأس مثلث است. یعنی $\hat{A} = 100^\circ$ داریم:

$$y + y + 100^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2y = 80^\circ \Rightarrow y = 40^\circ$$

$$2z + y = 180^\circ \Rightarrow z = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

$$\triangle BCD \text{ زاویه خارجی } : z = x + y \Rightarrow 70^\circ = x + 40^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

۶۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

اندازه زوایای مثلث x ، $4x$ و $7x$ است. در نتیجه:

$$7x + 4x + x = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

پس $\hat{A} = 15^\circ$ ، $\hat{B} = 4x = 60^\circ$ و $\hat{C} = 7x = 105^\circ$ و زاویه بین نیمساز

داخلی زاویه A و نیمساز خارجی زاویه B برابر $\frac{105^\circ}{2} = 52.5^\circ$ است.

۶۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

در هر n ضلعی محدب، مجموع زوایای داخلی $(n-2) \times 180^\circ$ و مجموع زوایای خارجی 360° است. بنا به فرض داریم:

$$(n-2) \times 180^\circ = 6 \times 360^\circ \Rightarrow n-2=12 \Rightarrow n=14$$

چون n ضلعی منتظم است و اندازه هر ضلع آن $10/5$ سانتی‌متر است، پس محیط آن برابر است با:

$$14 \times 10/5 = 147$$

۶۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

و بنا به فرض داریم:

$$\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{k+15}\right) - \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{15}\right) = k+1$$

$$\Rightarrow 240^\circ - \frac{360^\circ}{k+15} = k+1 \Rightarrow 24k + 360 - 360 = k^2 + 16k + 15$$

$$\Rightarrow k^2 - 8k + 15 = 0 \Rightarrow (k-3)(k-5) = 0$$

در نتیجه $k = 3$ یا $k = 5$ است. پس بیش‌ترین مقدار k برابر 5 می‌باشد.

۶۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

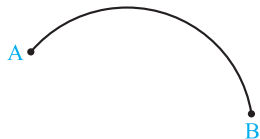
هر n ضلعی محدب حداکثر 3 زاویه حاده داخلی دارد. زیرا در غیر این صورت زوایای منفرجه خارجی بیش‌تر از 4 می‌شود و مجموع زوایای خارجی از 360° بیش‌تر می‌شود که تناقض است.

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال

قسمت اول: ترسیم‌های هندسی

۱. پاره‌خط AB به طول 10 سانتی‌متر مفروض است، نقطه یا نقاطی را تعیین کنید که از A به فاصله 8 سانتی‌متر و از B به فاصله 4 سانتی‌متر باشند.
۲. ثابت کنید اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، آن‌گاه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.
۳. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، آن‌گاه آن نقطه، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.
۴. ثابت کنید اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، آن‌گاه از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.
۵. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن‌گاه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.
۶. متوازی‌الاضلاع رسم کنید که اندازه قطرهای آن 12 و 16 سانتی‌متر باشد و اندازه زاویه بین قطرهای آن 45° باشد.
۷. مستطیلی رسم کنید که اندازه قطرهایش 6 سانتی‌متر باشد و زاویه بین دو قطر آن 45° باشد.
۸. متوازی‌الاضلاع را رسم کنید که اندازه‌های دو ضلع و یک قطر آن معلوم باشد.
۹. متوازی‌الاضلاع که اندازه دو قطر و یک ضلع آن معلوم است را رسم کنید.
۱۰. روی خط مفروض d نقطه‌ای به فاصله‌های مساوی از دو نقطه معلوم A و B پیدا کنید.
۱۱. وتر AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
۱۲. شکل مقابل کمانی از دایره است، مرکز دایره را تعیین کنید.



۱۳. ثابت کنید اگر در نیم‌دایره به قطر AB ، C نقطه‌ای از نیم‌دایره به غیر از A و B باشد، آن‌گاه اندازه زاویه ACB برابر 90° است.
۱۴. مثلثی رسم کنید که اندازه دو ضلع آن 12 و 16 و میانه نظیر ضلع سوم آن برابر 10 باشد.
۱۵. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یک ضلع زاویه قائمه و زاویه روبه‌رو به آن معلوم باشد.
۱۶. نقطه M داخل \widehat{Oy} مفروض است. خطی چنان رسم کنید که اضلاع زاویه را قطع کند و از نقطه M بگذرد و M وسط پاره‌خط حاصل باشد.
۱۷. مثلثی رسم کنید که طول ضلع $BC = a$ ، طول میانه $AM = m_a$ و زاویه α بین میانه AM و ارتفاع AH در آن معلوم باشند.
۱۸. در مثلث ABC طول نیمساز زاویه B ، اندازه زاویه B و اندازه زاویه C معلوم هستند. مثلث ABC را رسم کنید.
۱۹. زاویه xOy به اندازه 45° مفروض است. نقطه معلوم A روی Oy قرار دارد. نقطه M را روی Oy چنان تعیین کنید که فاصله آن تا Ox برابر MA باشد.
۲۰. در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC و $(A = 90^\circ)$ ، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نقطه M را روی AH چنان بیابید که مجموع فواصل آن از AB و AC برابر فاصله‌اش از BC باشد.

قسمت دوم: استدلال

۲۱. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است.
۲۲. ثابت کنید اندازه هر زاویه خارجی مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های زوایای داخلی غیرمجاور آن.
۲۳. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° است.

۲۴. ثابت کنید در هر مثلث زاویه بین نیمساز و ارتفاع رسم شده از یک رأس مثلث، برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویه دیگر.

۲۵. ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب مجموع اندازه‌های زوایای داخلی برابر 360° است.

۲۶. ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-2) \times 180^\circ$

۲۷. ثابت کنید مجموع اندازه زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر 360° است.

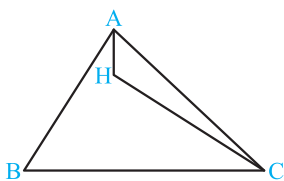
۲۸. ثابت کنید عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث هم‌رسند.

۲۹. ثابت کنید ارتفاع‌های هر مثلث هم‌رسند.

۳۰. ثابت کنید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌رسند.

۳۱. ثابت کنید اگر نقطه هم‌رسی نیمسازها و نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های یک مثلث بر هم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۳۲. در شکل مقابل، H نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث ABC است. اگر اندازه زاویه BCH برابر α باشد، اندازه زاویه BAH را بر حسب α به دست آورید.



۳۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) از نقطه M وسط AC عمودی بر BC رسم می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم، تا امتداد AB را در نقطه D قطع کند. ثابت کنید خط شامل BM بر خط شامل CD عمود است.

۳۴. در مستطیل $ABCD$ ، پاره خط BH را عمود بر قطر AC رسم می‌کنیم. از نقطه M روی AH خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا BH را در نقطه E قطع کند. ثابت کنید خط شامل CE بر خط شامل BM عمود است.

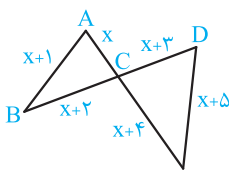
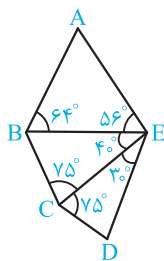
۳۵. ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است.

۳۶. ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر بزرگ‌تر است. (عکس ۳۵)

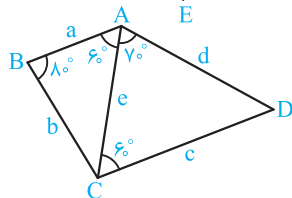
۳۷. ثابت کنید در هر مثلث مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه ضلع سوم بزرگ‌تر است. (قضیه نامساوی مثلث)

۳۸. ثابت کنید در هر مثلث تفاضل هر دو ضلع از ضلع سوم کوچک‌تر است.

۳۹. در شکل مقابل طول بزرگ‌ترین پاره خط را با ذکر دلیل بیابید.



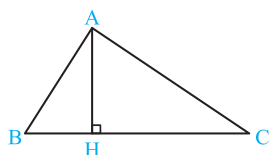
۴۰. در شکل مقابل اندازه بزرگ‌ترین زاویه را با ذکر دلیل تعیین کنید. ($x > 0$)



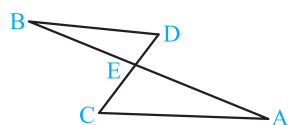
۴۱. در شکل مقابل عبارت $|e-c| + |e-a| + |d-a|$ را بدون نماد قدرمطلق و به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۴۲. ثابت کنید در یک مثلث، نقطه هم‌رسی نیمسازهای زوایا از رأس روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع، بیش‌ترین فاصله را نسبت به هر رأس دیگر مثلث دارد.

۴۳. در مثلث ABC ، AD نیمساز زاویه A و $AC > AB$ است. ثابت کنید $\hat{ADC} > \hat{ADB}$



۴۴. در شکل مقابل $AH \perp BC$ و $BH < CH$ است. ثابت کنید $AB < AC$.



۴۵. در شکل مقابل دو پاره‌خط AB و CD یکدیگر را در نقطه E قطع کرده‌اند به طوری که $\hat{C} > \hat{A}$ و $\hat{D} > \hat{B}$ است. ثابت کنید $AB > CD$.

۴۶. گزاره‌های ساده و مرکب را مشخص کنید.

(آ) دو عدد صحیح وجود دارد که تفاضل مربعاتشان مجذور کامل است.

(ب) هر عدد صحیح فرد یا زوج است.

(پ) به‌ازای هر دو عدد حقیقی، حاصل جمع اولی با دومی برابر حاصل جمع دومی با اولی است.

(ت) در لوزی قطرها بر هم عمودند و نیمساز زوایا می‌باشند.

(ث) اگر $a^2 = 1$ ، آن‌گاه $a = \pm 1$

(ج) اگر $a^2 > 4$ ، آن‌گاه $a > 2$ یا $a < -2$ است.

۴۷. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

(آ) هر مستطیل یک مربع است.

(ب) پنج‌ضلعی محدبی وجود دارد که ۴ زاویه قائمه دارد.

(پ) هر مثلث حداقل دو ضلع برابر دارد.

(ت) هیچ چهارضلعی زاویه بزرگ‌تر از زاویه قائمه ندارد.

(ث) یک چهارضلعی محدب وجود دارد که مجموع زوایای خارجی آن کم‌تر از 360° است.

۴۸. با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ ، آن‌گاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۴۹. می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۵۰. به کمک برهان خلف ثابت کنید هر پاره‌خط یک و تنها یک عمودمنصف دارد.

۵۱. به کمک برهان خلف ثابت کنید در مثلث ABC ، اگر AD نیمساز زاویه A باشد و $BD \neq CD$ ، آن‌گاه $AB \neq AC$.

۵۲. برای حدس کلی زیر مثال نقض ارائه دهید:

«اگر در یک چهارضلعی دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.»

۵۳. گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(آ) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

(ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

(پ) اگر میانه یک مثلث نصف یک ضلع آن باشد، آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه است.

(ت) هر زاویه خارجی یک چندضلعی محدب از هر زاویه داخلی آن بزرگ‌تر است.

(ث) هر مثلث حداقل یک زاویه کوچک‌تر از 60° دارد.

۵۴. عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آن‌ها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

(آ) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه آن نیز برابرند.

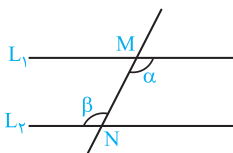
(ب) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

(پ) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

(ت) در هر مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف‌های ضلع‌ها در وسط وتر هم‌رسند.

(ث) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهاش نیمساز زاویه‌هایش است.

۵۵. به کمک برهان خلف ثابت کنید اگر در شکل مقابل $\alpha = \beta$ باشد، آن‌گاه $L_1 \parallel L_2$ است.





ترسیم‌های هندسی واستدلال

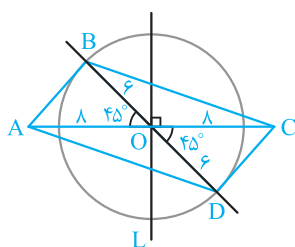
پاسخ فصل ۱

داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ AH = BH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle MAH \cong \triangle MBH \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$$

اما دو زاویه \widehat{H}_1 و \widehat{H}_2 مکمل‌اند، پس اندازه هر کدام 90° است و این یعنی MH عمودمنصف AB است.

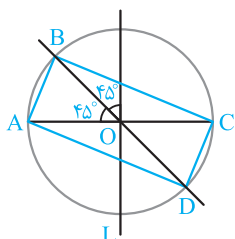
۶



ابتدا پاره‌خط AC به طول ۱۶ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم، سپس عمودمنصف AC (خط L) را رسم کرده و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع ۶ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم.

نیمسازهای دو زاویه قائمه را مطابق شکل رسم می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها با دایره را B و D می‌نامیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند و زاویه بین قطرهایش 45° است.

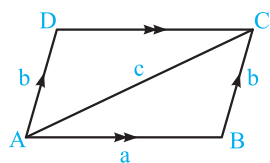
۷



پاره‌خط AC را به طول ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، خط L عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، به مرکز O و شعاع ۳ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم.

نیمسازهای زاویه‌های قائمه بین L و AC را رسم می‌کنیم، نقاط تلاقی آن‌ها با دایره را B و D می‌نامیم، چهارضلعی $ABCD$ مستطیل خواسته شده است.

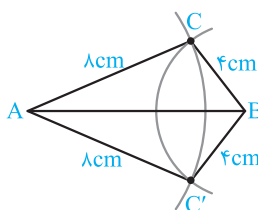
۸



فرض کنیم در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مطابق شکل $AB = a$ ، $AD = b$ و قطر $AC = c$ معلوم باشند، جهت رسم متوازی‌الاضلاع به شرح زیر عمل می‌کنیم.

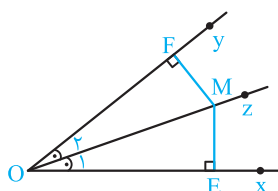
ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع b و به مرکز A و شعاع c دو کمان رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن‌ها را C می‌نامیم. از نقطه‌های A و C دو خط به ترتیب به موازات AB و BC رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن‌ها را D می‌نامیم، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع موردنظر است.

۱



پاره‌خط AB را به طول ۱۰ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع ۴ سانتی‌متر و به مرکز A و شعاع ۸ سانتی‌متر دو کمان رسم می‌کنیم. چون $10 > 4 + 8$ ، پس این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه C و C' قطع می‌کنند، پس مسئله دارای دو جواب است.

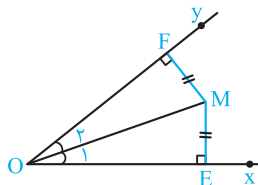
۲



نقطه M روی نیمساز زاویه xOy است و ME و MF فواصل آن از دو ضلع زاویه است، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OM = OM \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle OEM \cong \triangle OFM \Rightarrow ME = MF$$

۳

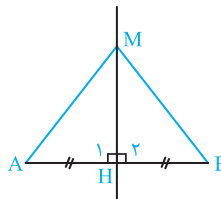


فرض کنیم نقطه M از دو ضلع زاویه xOy به یک فاصله باشد ($ME = MF$) را به O وصل می‌کنیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} ME = MF \\ OM = OM \\ \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OME \cong \triangle OMF \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

یعنی OM نیمساز زاویه xOy است، پس M روی این نیمساز قرار دارد.

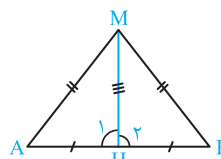
۴



مطابق شکل نقطه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، فاصله‌های M از دو سر پاره‌خط، MA و MB است، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle MAH \cong \triangle MBH \Rightarrow MA = MB$$

۵

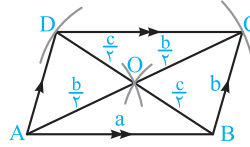


فرض کنیم نقطه M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد ($MA = MB$)، می‌خواهیم ثابت کنیم M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، به همین جهت M را به H (وسط پاره‌خط AB) وصل می‌کنیم،

۹

فرض کنید در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، $AB = a$ و $AC = b$ و $BD = c$ معلوم باشد. می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را

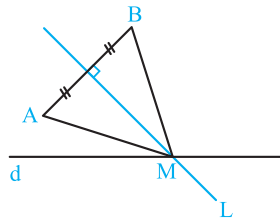
$$\text{نصف می‌کنند. پس } OA = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2} \text{ و } OB = \frac{BD}{2} = \frac{c}{2}$$



پاره‌خط $AB = a$ را رسم می‌کنیم، به مرکز A و شعاع $\frac{b}{2}$ و به مرکز B شعاع $\frac{c}{2}$ دو کمان رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم، به مرکز O شعاع $\frac{b}{2}$ کمانی رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با امتداد OA را C و به مرکز O شعاع $\frac{c}{2}$ کمانی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با امتداد OB را D می‌نامیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

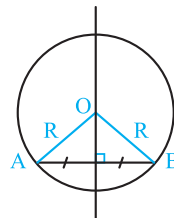
۱۰

خط L عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با خط d را M می‌نامیم، نقطه‌ای است که از A و B به یک فاصله است و روی خط L قرار دارد.



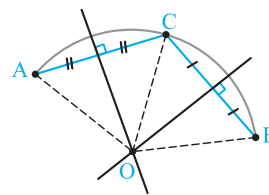
۱۱

عمودمنصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد، زیرا مرکز دایره از دو سر وتر AB به یک فاصله است ($OA = OB = R$).



۱۲

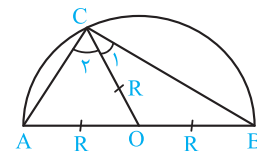
نقطه دلخواه C را روی کمان داده شده در نظر می‌گیریم، عمودمنصف‌های وترهای BC و AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم.



داریم $OA = OC = OB$ ، یعنی نقطه O مرکز دایره‌ای است که کمان داده شده بخشی از آن است.

۱۳

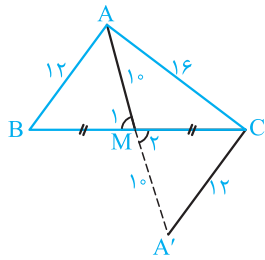
مرکز نیم‌دایره را به نقطه C وصل می‌کنیم. مثلث‌های OAC و OBC متساوی‌الساقین هستند زیرا $OA = OC = OB = R$ ، در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{A}$ و $\hat{C}_2 = \hat{B}$ در مثلث ABC داریم:



$$\hat{A} + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{ACB} = 90^\circ$$

۱۴

فرض کنیم مثلث ABC مثلثی است که دو ضلع آن $AB = 12$ و $AC = 16$ و میانه نظیر ضلع سوم $AM = 10$ باشد، اگر AM را به اندازه خودش تا نقطه A' امتداد دهیم، دو مثلث AMB و $A'MC$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس $A'C = AB = 12$.

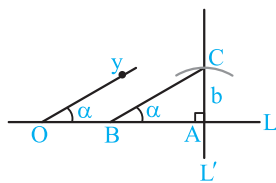


بنابراین اضلاع مثلث $AA'C$ معلوم هستند ($AA' = 20$ و $A'C = 12$ ، $AC = 16$)

طریقه ترسیم: ابتدا مثلث ACA' را با معلوم بودن سه ضلع آن می‌سازیم، سپس میانه نظیر ضلع $AA' = 20$ را رسم می‌کنیم (CM) و آن را از نقطه M به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه B به دست آید، مثلث ABC جواب است.

۱۵

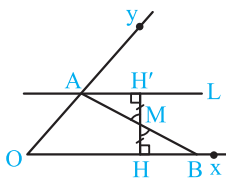
در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ضلع $AC = b$ و زاویه $\hat{B} = \alpha$ معلوم هستند. می‌خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم. دو خط عمود بر



هم L و L' متقاطع در نقطه A را رسم می‌کنیم. نقطه دلخواه O را روی L در نظر می‌گیریم و نیم‌خط Oy را چنان رسم می‌کنیم که زاویه به اندازه α ایجاد شود. به مرکز A شعاع b کمانی رسم می‌کنیم تا خط L' را در نقطه C قطع کند و از نقطه C خطی موازی نیم‌خط Oy رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با خط L را B می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویه ABC جواب است.

۱۶

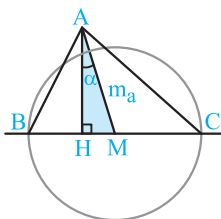
مطابق شکل زاویه xOy و نقطه M داخل آن مفروض است. عمود MH بر نیم‌خط Ox وارد می‌کنیم و آن را از سمت M به اندازه خودش تا نقطه H' امتداد می‌دهیم،



سپس خط L را در نقطه H' عمود بر HH' رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با نیم‌خط Oy را A می‌نامیم، A را به M وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط Ox را در نقطه B قطع کند. دو مثلث قائم‌الزاویه BMH و AMH' به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت هستند پس $MA = MB$

۱۷

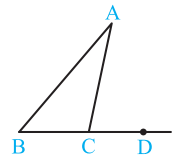
مثلث قائم‌الزاویه AMH را با معلوم بودن وتر $AM = m_a$ و زاویه $\hat{HAM} = \alpha$ رسم می‌کنیم. به مرکز M شعاع $\frac{a}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با امتداد MH را B و C می‌نامیم. A را به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب است.



$$\left. \begin{aligned} L \parallel BC \text{ و } AB \Rightarrow \widehat{A}_r = \widehat{B} \\ L \parallel BC \text{ و } AC \Rightarrow \widehat{A}_r = \widehat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A}_r + \widehat{A}_r$$

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A}_1 = \underbrace{\widehat{A}_1 + \widehat{A}_r + \widehat{A}_r}_{180^\circ} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A} = 180^\circ$$

۲۲



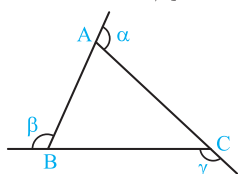
می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{ACD} = \widehat{A} + \widehat{B}$ ، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{ACB} &= 180^\circ \\ \widehat{ACB} + \widehat{ACD} &= 180^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{ACB} = \widehat{ACB} + \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{A} + \widehat{B}$$

۲۳

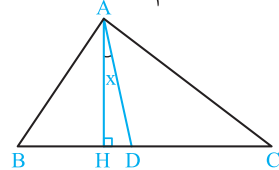
α و β و γ زوایای خارجی مثلث ABC هستند، داریم:



$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \widehat{B} + \widehat{C} \\ \beta &= \widehat{A} + \widehat{C} \\ \gamma &= \widehat{A} + \widehat{B} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} \alpha + \beta + \gamma = 2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

۲۴

در شکل زیر با فرض $\widehat{B} > \widehat{C}$ ، می‌خواهیم ثابت کنیم $x = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$ ، داریم:



$$\widehat{AD} \text{ نیمساز } \widehat{A} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \frac{\widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{HAD} = \frac{\widehat{A}}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم $\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{B}$ ، در نتیجه:

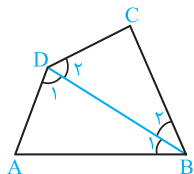
$$90^\circ - \widehat{B} + x = \frac{\widehat{A}}{2} \Rightarrow 180^\circ - 2\widehat{B} + 2x = \widehat{A}$$

$$\Rightarrow 180^\circ - 2\widehat{B} + 2x = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} \Rightarrow 2x = 2\widehat{B} - \widehat{B} - \widehat{C}$$

$$2x = \widehat{B} - \widehat{C} \Rightarrow x = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$$

۲۵

در چهارضلعی محدب ABCD مطابق شکل قطر BD را رسم می‌کنیم، داریم:

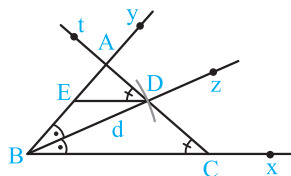


$$\left. \begin{aligned} \Delta ABD: \widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 &= 180^\circ \\ \Delta BCD: \widehat{C} + \widehat{B}_2 + \widehat{D}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{+} \widehat{A} + \widehat{C} + (\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2) + (\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{D} = 360^\circ$$

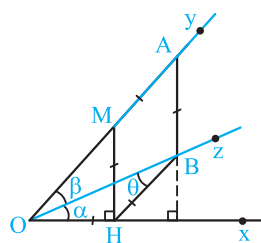
۱۸



در مثلث ABC اندازه زوایای $\widehat{B} = \alpha$ و $\widehat{C} = \beta$ و طول نیمساز $BD = d$ معلوم هستند می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم.

زاویه $\angle xBy$ را به اندازه α و Bz نیمساز آن را رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع d کمانی رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با Bz را D می‌نامیم و DE موازی نیم‌خط Bx رسم می‌کنیم. زاویه $\angle EDt$ را برابر β رسم می‌کنیم و محل تلاقی نیم‌خط Dt و امتداد آن با نیم‌خط‌های By و Bx را به ترتیب A و C می‌نامیم. مثلث ABC جواب است.

۱۹

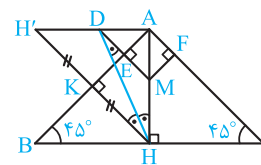


فرض کنیم M نقطه‌ای روی Oy باشد به طوری که $MA = MH$ ، چون $\angle xOy = 45^\circ$ پس $\angle OMH = 45^\circ$ و در نتیجه $OH = MH$. AMHB را می‌سازیم داریم $BH = MH$ ، پس $OH = BH$

یعنی مثلث OHB متساوی‌الساقین است و می‌توان نوشت $\alpha = \theta$ و از طرفی بنا به قضیه خطوط موازی و مورب داریم $\beta = \theta$ بنابراین $\alpha = \beta$ یعنی OB نیمساز زاویه $\angle xOy$ است.

طریقه ترسیم: Oz نیمساز زاویه $\angle xOy$ را رسم می‌کنیم. از A خطی عمود بر Ox رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با Oz را B می‌نامیم از B خطی موازی نیم‌خط Oy رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با نیم‌خط Ox را H می‌نامیم. در نقطه H عمودی بر Ox رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با Oy را M می‌نامیم. داریم $MH = MA$

۲۰



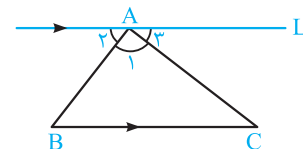
در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع است (نیمساز هم است). می‌خواهیم نقطه M را روی AH چنان تعیین کنیم که: $MH = 2ME$

یا $MH = ME + MF$ (چون چهارضلعی AEMF مربع است).

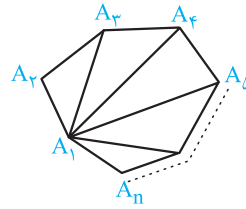
KH را عمود بر AB رسم می‌کنیم و آن را به اندازه خودش تا نقطه H' امتداد می‌دهیم، مثلث $AH'H$ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. نیمساز زاویه $\angle AHH'$ را رسم می‌کنیم، محل تلاقی آن با AH' را D می‌نامیم، از D خطی موازی HH' رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با AH را M می‌نامیم. مثلث DMH متساوی‌الساقین است ($MD = MH$). در نتیجه $MH = MD = 2ME$

۲۱

از نقطه A خط L را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم، داریم:



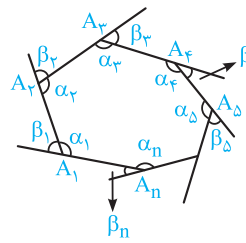
۲۶



n ضلعی محدب $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ را در نظر می‌گیریم، قطرهایی که در رأس A_1 مشترک هستند را رسم می‌کنیم، رأس A_1 با ضلع‌های $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4, A_1 A_5, A_1 A_6, A_1 A_7, A_1 A_8, A_1 A_9, A_1 A_{10}$ و \dots تشکیل مثلث می‌دهند.

چون تعداد این ضلع‌ها $n-2$ است (n ضلع منهای دو ضلع منهای دو ضلع $A_1 A_2$ و $A_1 A_n$) پس تعداد این مثلث‌ها برابر $n-2$ است و مجموع زوایای این مثلث‌ها همان مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب مفروض است، پس مقدار آن برابر است با $(n-2) \times 180^\circ$

۲۷



مطابق شکل در هر یک از رأس‌های n ضلعی محدب $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ زوایای داخلی و خارجی مکمل‌اند، پس:

$$(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_n + \beta_n) = n \times 180^\circ$$

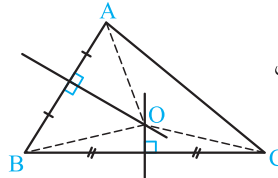
$$\Rightarrow (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = n \times 180^\circ$$

اما مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب برابر $(n-2) \times 180^\circ$ است، پس:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = n \times 180^\circ - (n-2) \times 180^\circ$$

$$= n \times 180^\circ - n \times 180^\circ + 2 \times 180^\circ = 360^\circ$$

۲۸

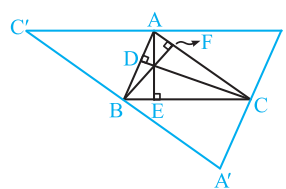


نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع BC و AB را O می‌نامیم، O را به رأس‌های مثلث وصل می‌کنیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} BC \text{ متعلق به عمودمنصف } O &\Rightarrow OB = OC \\ AB \text{ متعلق به عمودمنصف } O &\Rightarrow OB = OA \end{aligned} \right\} \Rightarrow OA = OC$$

تساوی فوق یعنی نقطهٔ O از دو سر ضلع AC به یک فاصله است، پس O روی عمودمنصف ضلع AC قرار دارد، در نتیجه هر سه عمودمنصف اضلاع مثلث در نقطهٔ O هم‌رسند.

۲۹



ارتفاع‌های AE, BF, CD را در مثلث ABC رسم می‌کنیم، از رأس‌های مثلث ABC خطوطی موازی اضلاع مقابل آن‌ها رسم می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ ایجاد می‌شود، داریم:

$$\left. \begin{aligned} AC \text{ مورب } AB' \parallel BC &\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{CAB'} \\ AC = CA & \\ AC \text{ مورب } AB \parallel B'C' &\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACB'} \end{aligned} \right\}$$

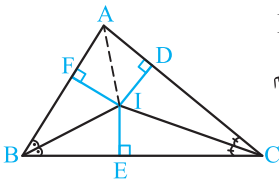
$$\xrightarrow{\text{(ضز)}} \triangle ABC \cong \triangle CB'A \Rightarrow AB' = BC$$

با استدلال مشابه دو مثلث ABC و BAC' به حالت (ضز) هم‌نهشت هستند پس $AC' = BC$ در نتیجه $AB' = AC'$

$$AE \perp BC, B'C' \parallel BC \Rightarrow AE \perp B'C'$$

بنابراین AE عمودمنصف ضلع $B'C'$ در مثلث $A'B'C'$ است، با استدلال مشابه نتیجه می‌شود BF و CD به ترتیب عمودمنصف اضلاع $A'B'$ و $A'C'$ هستند، اما می‌دانیم عمودمنصف اضلاع یک مثلث هم‌رسند، پس سه ارتفاع مثلث ABC هم‌رسند.

۳۰

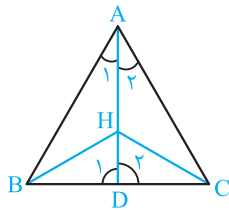


نقطهٔ تلاقی نیمساز زوایای \widehat{B} و \widehat{C} را I می‌نامیم و از I بر اضلاع مثلث عمود رسم می‌کنیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} I \text{ روی نیمساز زاویه } B &\Rightarrow IF = IE \\ I \text{ روی نیمساز زاویه } C &\Rightarrow IE = ID \end{aligned} \right\} \Rightarrow IF = ID$$

تساوی اخیر یعنی نقطهٔ I از اضلاع زاویهٔ A به یک فاصله است، پس I روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، یعنی سه نیمساز زوایای داخلی مثلث ABC هم‌رسند.

۳۱



فرض کنیم H نقطهٔ هم‌رسی نیمسازها و ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

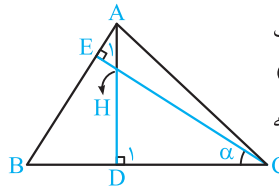
A را به H وصل می‌کنیم، AH را امتداد می‌دهیم تا BC را در نقطهٔ D قطع کند، چون H نقطهٔ هم‌رسی نیمسازها است پس $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ و چون H نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌ها است پس $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ$ داریم:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2, AD = AD, \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{(ضز)}} \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow AB = AC$$

با استدلال مشابه داریم $AB = BC$ پس $AB = AC = BC$ و این یعنی مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۳۲



چون H نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث ABC است پس امتدادهای AH و CH به ترتیب بر BC و AB عمودند در نتیجه $\widehat{E}_1 = \widehat{D}_1 = 90^\circ$ داریم:

$$\triangle DHC: \widehat{DHC} + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DHC} = 90^\circ - \alpha$$

$$\triangle AHE: \widehat{AHE} + 90^\circ + \widehat{EAH} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EAH} = 90^\circ - \widehat{AHE}$$

دو زاویهٔ AHE و DHC متقابل به رأس هستند پس برابرند پس می‌توان نوشت:

$$\widehat{EAH} = 90^\circ - \widehat{DHC} = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha \Rightarrow \widehat{BAH} = \alpha$$