

مقدمه ویرایش جدید

«در یک سمینار رموز موفقیت، سخنران از حضار پرسید: برادران رایت هرگز تسلیم شدند؟ حضار فریاد زدند: نه! نشدند. سخنران پرسید: توماس ادیسون تسلیم شد؟ حضار: نه! نشد. سخنران پرسید: لانس آرمسترانگ تسلیم شد؟ حضار: نه! نشد. سخنران برای چهارمین بار پرسید: مارک راسل تسلیم شد؟ مدتی سکوت در کلاس حاکم شد، سپس یکی از حاضران پرسید: مارک راسل دیگر کیست؟ ما تا حالا اسم او را نشنیده‌ایم! سخنران گفت: حق دارید که اسمش را نشنیده باشید، چون تسلیم شد!»

این داستان رو نوشتم که چند تا نکته رو بهت بگم. وقتی هنوز یک سال و اندی تا کنکور باقی مونده و تو مشغول خوندن این کتاب تست هستن، معلوم می‌شه جزء دانش‌آموزای خوب و هدفمند هستن و آرزوی رفتن به دانشگاه‌های بزرگ رو در سر داری. در حالی که خیلی از رقیبای تو، در خواب سنجینی به سر من برن و هرچی بهشون می‌گی شروع کن می‌گن کو تا کنکور! هنوز وقت هست! عرب‌ها یه ضرب المثل دارن من گن: «شترت را به خدا بسپار ولی افسارش را به درختن بیند».! یعنی امیدت به خدا باشه ولی خودت هم حرکتی، زحمتی، کاری برگردیم سراغ خودت:

بدان و آگاه باش که خوب موقعی شروع کردی و اگه با همین فرمون تا انتها برى و تسلیم نشی، به یاری خدا، بهترین رشته رو توی برترین دانشگاه‌ها قبول می‌شی. دقت کن وضعیت الانت مهم نیست! حتی اگه تا حالا ریاضی رو نفهمیدی و از فرمول‌هاش سردریباوردی، به کمک این کتاب به راحتی از پیش‌برمیای. یادت باشه تو این مسیر پر فراز و نشیب تا کنکور، خسته می‌شی، می‌بری و از همه بدتر شاید نامید شی! اما اینو فراموش نکن که هیچ وقت تباید تسلیم نامیدی بشی! تسلیم شدن رو کلاً از ذهن‌ت پاک کن. برای این‌که بتونی این مسیر رو تا انتها برى، با این کتاب همراه‌تیم. این کتاب آخرشها! باور کن! بهش اعتماد کن و ریاضیات رو به ما بسپار.

ویژگی‌های این کتاب

- ۱ درسنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی توش هست و هم مطالب عمیقتر.
- ۲ طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درسنامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رویه جا بخونی!
- ۳ اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا من خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم. باور کن برای دعوت هر کدام از موضوع‌های کتاب‌مون، کلی جلسه گذاشتیم و بحث کردیم. خیلی کار سختی بود ولی من ارزید.
- ۴ توی محدوده مطالب کتاب درسی، عمق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو برات درآوردم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچ‌چی جا نمونده.
- ۵ هیچ مطلبی رو بدون مثال برات باقی نذاشتیم. همه مثال‌های‌امون هم از فیلتر استادای عالی و با تجربه گذشتن و بعدش به همشون به طور کامل و آموزش جواب دادیم.
- ۶ پُر از تست‌های دوست‌داشتنیه! تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن یه تست سخت، سکته نکن 😊 و از ریاضی فراری نش.
- ۷ همه تست‌های کنکورهای جدید، حتی کنکور امسال! تو کتاب‌مون هست، البته فقط تست‌هایی را آوردیم که مربوط به کتاب جدیده.
- ۸ پاسخ‌نامه‌ش پُر از راهبردهای عالیه! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤالاً گیر نمی‌کنی و من دونی که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخ‌نامه این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و... مسلح شده!
- ۹ مثل کتاب درسی، تست‌های‌امون رویکرد مسائل واقعی گرفتن، مثلًا وقتی من خوایم فاصله دو نقطه رو بهت یاد بدم، از فاصله نیمکت بین تو و دوست استفاده کردیم.

۱) تعداد تست‌های خیلی زیاده و البته متناسب با اهمیت هر مبحث! اینقدر که اگه هم‌شون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط منش. پُل هالموس من گه: تمرین قلب ریاضیات است. اگه اینطوریه پس کتاب ما متخصص قلبه!

ساختمان کتاب

حالا چند جمله‌ای هم راجع به ساختار کتاب برات بگم. توی هر درس اگه لازم بوده، مطالب رو به چند بخش تقسیم کردیم و درسنامه و مثال حل شده برآش آوردیم، ولی مطالب فنی و تکنیکی رو نگه داشتیم و اسه حل تست‌های خفن و اون‌ها را تحت عنوان «راهبرد» توی قسمت پاسخ تشریحی آوردم. «راهبردها» برای کساییه که من خوان صد بزن! بعد از درسنامه هر قسمت، تست‌های مربوط به اون قسمت اومند. فصل که تمام میشه به آزمون جامع از کل فصل برات گذاشتیم تا خودتو محک بزن. انتهای کتاب پاسخ تشریحی همه تست‌ها اومند و بعدشم پاسخ‌نامه کلیدی.

تست‌های رو برآتون دستچین کردیم تا سوال‌های بی‌کیفیت و کم‌کیفیت توی کتاب نباشه. توی پاسخ‌های تشریحی هم تا منشده توضیح دادیم، چون من دونیم خیلی از شماها به معلم‌های کنکوری خوب دسترسی ندارید تا سوال‌هایی رو که برآتون پیش میاد پرسید سوالات سخت رو با علامت ★ مشخص کردیم. سعی کنید پس از حل سایر تست‌ها سراغ این سوالات بروید.

راهنمای استفاده از کتاب

خوب بذار بگم چطوری از کتاب استفاده کنی! اول درسنامه رو با مثال‌اش خوب بخون، بعد برو سراغ حل تست‌ها. هر وقت دیدی نمی‌تونی به سؤال رو حل کنی، برو سراغ پاسخ‌نامه تشریحی، شاید راهبردی داره که تو بله نیستی. اگه وقت نداری، تست‌ها رو دو یا چند قسمت کن! مثلاً فقط شماره‌های زوجش رو بزن. نکته‌هایی رو که یاد من گیری حاشیه‌نویسی کن و سعی کن لااقل هر دو هفته‌یه بار اون‌ها رو دوره کنی. در انتهای فصل یا برای جمع‌بندی منشون از آزمون انتهای فصل استفاده کن و بینی توی زمان پیشنهادی منشون چه درصدی بزنی.

و اما قدردانی...

اول؛ باید از آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات تشکر کنم که واقعاً مثل رئیس سازمان استاندارد کشور (!) منشونه، یعنی تا کتابی رو به لحاظ محتوایی و ظاهری در حد استانداردهای مهروم‌ماه تشخیص نده، اجازه چاپ بهش نمی‌ده، ممنونم که هستید و کیفیت رو بالا نگه می‌دارید.

دوم؛ باید از آقای محمدحسین انشوشه مدیر شورای تأییف تشکر کنم که با توجه به تجربه ۳۰ سالشون در زمینه تأییف، جمعی از بهترین اساتید کشور رو برای نوشتن کتاب دور هم جمع کردن؛ اساتیدایی که هر کدو مشون دنیایی از معلومات هستند؛ استاد نصیر کریمی، دبیر دبیرستان فرزانگان تهران (تیزهوشان مادر) و استاد تقی‌زاده، مدیر گروه ریاضی دبیرستان البرز.

سوم؛ از استادم جناب آقای بهمن اصلاح‌پذیر -که به حق یکی از بزرگ مردان آموزش ریاضی کشور هستند- به خاطر هم‌فکری‌ها و جلسات متعددی که با دبیران و مؤلفان ترتیب دادند و در حقیقت هدایت علمی کتاب رو به عهده داشتند و از استاد گرانقدر جناب آقای هوشنگ نظری -از با سابقه‌ترین دبیران کشور- که ریزینانه کتاب رو بررسی کردند و پیشنهادهای سازنده‌ای رو دادند.

این کتاب مرهون زحمات و تلاش‌های این دوستان است:

آقای احسان لعل مسئول ویراستاری گروه ریاضی و خانم‌ها مهرنوش رضوی و آزاده غنی‌فرد ویراستاران علمی کتاب

آقای محسن فرهادی مدیر گروه هنری

آقای مجتبی حسنی صفحه‌آرای کتاب

آقای امیر انشوشه مدیریت سایت و آقایان عمامد ولدی و حمیدرضا پیام واحد انفورماتیک و تبلیغات، بابت همکاری‌های صمیمانه‌شون.

از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند. خواهشمند است نظرات خود را از طریق اینستاگرم به آیدی مقابل ارسال نمایند.
@ashrafii.official

مدیر گروه ریاضی

عباس اشرفی

استادان مشاور به سرپرستی آقای محمد گودرزی که از نظرات ارزنده آن‌ها در ویرایش جدید کتاب استفاده نموده‌ایم:

۱. محمود امیری ۲. محمدرضا بیگن ۳. جهانبخش نیکنام

فهرست



فصل اول هندسه تحلیلی و جبر

v

۳۷

۶۹

۱۰۳

۱۲۳

۱۴۵

۱۶۹

۱۸۹

۳۱۱

۳۱۶

فصل دوم هندسه

فصل سوم تابع

فصل چهارم مثلثات

فصل پنجم توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ششم حد و پیوستگی

فصل هفتم آمار و احتمال

پاسخنامه تشریحی

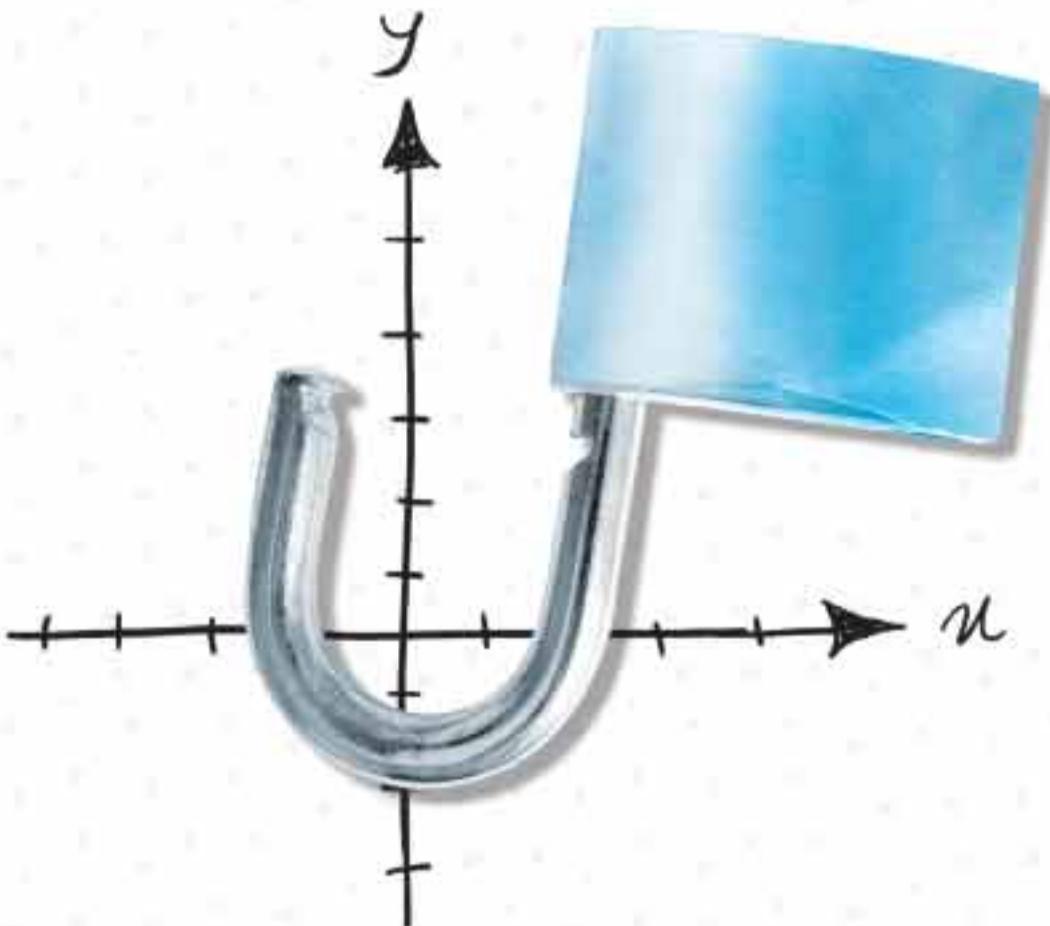
پاسخنامه کلیدی

پیوست سؤالات کنکور ۱۴۰۰

فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر

فصلی که من بینید جعبه ابزاریه برای استفاده در بقیه مباحث ریاضی.
این فصل با هندسه تحلیلی شروع می‌شود (که قبلاً تو کتاب سال چهارم بود). کلی
مطلوب جدید راجع به خط، نقطه، فاصله‌هاشون از هم و از خودشون رو تو این
بخش یاد می‌گیری. بعد وارد تابع و معادله درجه دوم می‌شود؛ همون سهمی
پارسال! ولی این دفعه هم سوال‌های نمودارش و هم معادله‌اش پیچیده‌تر می‌شود.
آخرش هم به معادلات گویا و گنگ می‌رسد. این بحث تا آخرین دقایقی که ریاضی
من خویند، دست از سرتون برنمی‌داره! پس خوب یادش بگیر.



هندسه تحلیلی



یادآوری: در سال‌های گذشته با مفاهیم معادله خط، شیب، عرض از مبدأ، تابع خطی و آشنا شدید در این بخش به طور خلاصه آن را بیان می‌کنیم.

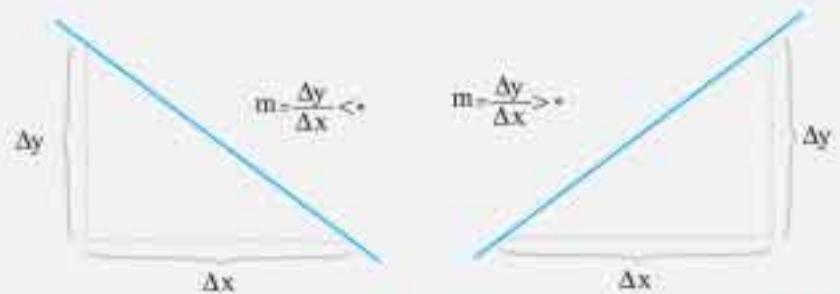
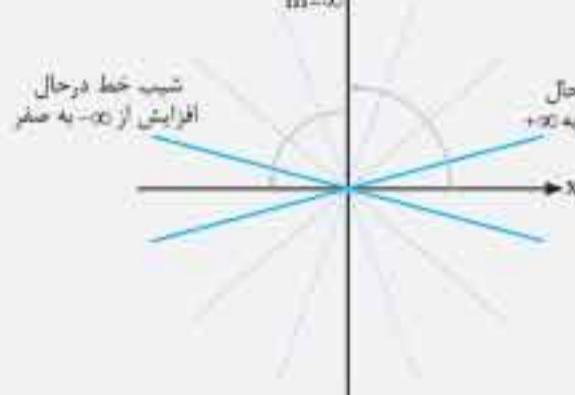
◀ **شیب:** تعریف‌ها و تعبیرهایی از شیب که تاکنون آموخته‌اید عبارت‌اند از:

الف: میزان تغییرات y به تغییرات x را شیب خط گویند در واقع اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه روی خط باشند ($x_1 \neq x_2$)

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{به شیب خط گذرا از دو نقطه } A \text{ و } B \text{ گویند.}$$

ب: اگر معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، شیب خط a است.

پ: اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ باشد، شیب خط $\frac{a}{b}$ است.



ت: تازیانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور X می‌سازد، شیب خط نامیده می‌شود.

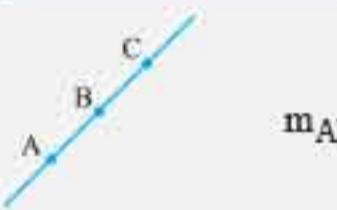
$$\tan \alpha = m$$

ث: شیب خط $x = a$ تعریف نشده و شیب خط $y = b$ صفر است.



شرط آن که سه نقطه A ، B و C روی یک خط راست باشند، آن است که:

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$



معادله خط

◀ برای به دست آوردن معادله خط، دو روش داریم:

۱ با داشتن شیب و یک نقطه: معادله خطی با شیب m که از نقطه (x_1, y_1) می‌گذرد، عبارت است از:

$$m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{با داشتن دو نقطه: هرگاه دو نقطه } (x_1, y_1) \text{ و } (x_2, y_2) \text{ را داشته باشیم } (x_1 \neq x_2), \text{ می‌توانیم به کمک رابطه}$$

شیب خط گذرا از نقاط A و B را بیابیم و به کمک معادله $y - y_1 = m(x - x_1)$ ضابطه خط را بیابیم.



۱ می‌توان معادله خط را به صورت $y = ax + b$ قرض نمود و با جای‌گذاری دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و تشکیل دستگاه، a

و b را یافته. به این ترتیب ضابطه $y = ax + b$ به دست می‌آید.

۲ معادله خطی که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد، برابر است با $x = a$.

۳ معادله خطی که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد، برابر است با $y = b$.

مثال: عرض از مبدأ خط مقابل کدام است؟

$$-\sqrt{3} - 2 \quad (2)$$

$$2 - 2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$-2\sqrt{2} + 1 \quad (1)$$

$$1 - 2\sqrt{3} \quad (3)$$

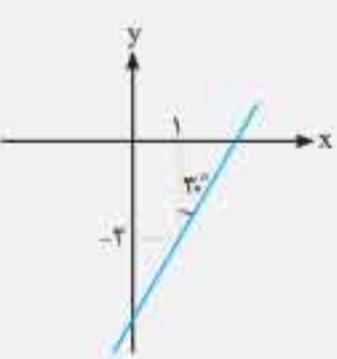
▶ پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویه ساخته شده، یک زاویه 30° درجه است، بنابراین

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

زاویه دیگر 60° درجه است، پس:

$$y + 2 = \sqrt{3}(x - 1) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} - 2$$

عرض از مبدأ



مثال: خط گذرته از دو نقطه $(1, 2)$ و $(2, 7)$ محور طولها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

$$-\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

پاسخ: قرض می‌کنیم معادله خط $y = ax + b$ است. نقاط داده شده را در معادله خط جای‌گذاری می‌کنیم:
 $(1, 2) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 2 = a(1) + b \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a = 4$
 $(2, 7) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 7 = a(2) + b \Rightarrow 2a + b = 7 \Rightarrow b = -1$

یعنی معادله خط $4x - y = 1$ است.

این خط چایی محور طولها را قطع می‌کند که $y = 0$ شود. بنابراین:

شیب‌های دو خط موازی و دو خط عمود بر هم

مهم

- دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند، یعنی اگر شیب‌های دو خط موازی m و m' باشند، باید $m = m'$ باشد.
- حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -1 است، یعنی $m \cdot m' = -1$ است. به عبارت دیگر شیب یکی قرینه و معکوس دیگری است.

دقیق کنید رابطه $m \cdot m' = -1$ برای دو خط غیرموازی با محورهای مختصات برقرار است.

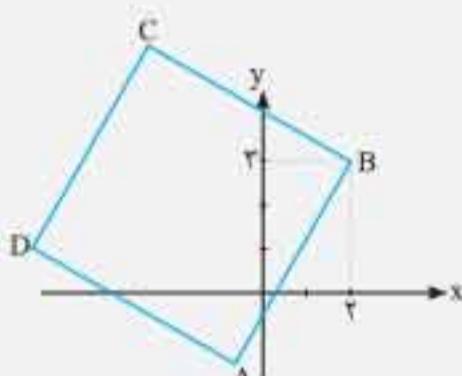
مثال: اگر معادله قطع AB در مستطیل شکل رو به رو $-4y - 2x = 6$ باشد، عرض از مبدأ خط BC کدام است؟

$$\frac{14}{3} \quad (2)$$

$$\frac{17}{3} \quad (4)$$

$$\frac{11}{2} \quad (1)$$

$$\frac{15}{2} \quad (3)$$



پاسخ: قطع BC بر قطع AB عمود است، پس شیب BC عکس $AB: 2x - 4y = -6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ است. و قرینه شیب AB است.

حال شیب BC را می‌باشیم: $m_{BC} \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{BC} \times \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow m_{BC} = -2$

به کمک مختصات نقطه $B(2, 2)$ و شیب $m = -2$ ، معادله خط BC را می‌نویسیم:

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 6$$

عرض از مبدأ این خط $\frac{17}{3}$ است.

مثال: با توجه به شکل مقابل، اگر خط L موازی محور x رسم شده باشد، خط d_1 در کدام نقطه، محور طولها را قطع می‌کند؟

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

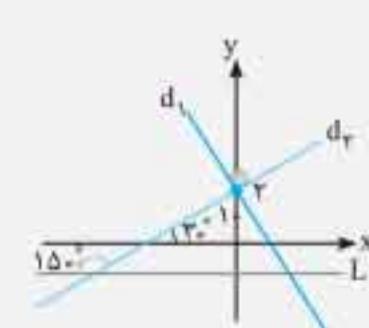
$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

پاسخ: خط با جهت مثبت محور طولها زاویه 30° درجه می‌سازد.

پس شیب آن $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

چون خط d_1 بر خط d_2 عمود است، بنابراین شیب خط d_1 عکس و قرینه شیب خط d_2 است.

$$d_1: m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$$



عرض از مبدأ این خط 2 است.

معادله خط d_1 برابر $y = -\sqrt{3}x + 2$ است.

برای یافتن محل برخورد این خط با محور طولها، باید عرض آن را صفر قرار دهیم:

$$y = -\sqrt{3}x + 2 \Rightarrow 0 = -\sqrt{3}x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



۱. از نقاط $A(2, -1)$ و $B(-1, 2)$ کدام است؟
 ۲. به ازای کدام مقادیر m نقاط $(m, 2)$ و $(-1, m+1)$ مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟
 ۳. معادله خطی که از نقطه محل برخورد دو خط $y = -x + 4$ و $y = \frac{x}{3}$ می‌گذرد و بر خط $y = -x + 4$ عمود است، کدام است؟
 ۴. یکی از خطوط به معادله $(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0$ بخط $y = -x + 1$ از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(1, 2)$ عبور می‌کند.
 ۵. در مثلثی با رئوس $C(2, 2)$ و $B(-5, 6)$ ، $A(-1, -4)$ کدام است؟
 ۶. نقاط $A(2, 5)$ و $C(0, 2)$ سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟
 ۷. معادله سه ضلع یک مثلث است $y = 2x$ ، $x+y=1$ و $x=2$. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟
 ۸. دو نقطه A و B به طول‌های 1 و 2 روی خط $x = 4x - 2$ قرار دارند. اگر تصاویر نقاط A و B روی محور x ، نقاط C و D باشند، مساحت ذوزنقه $ABCD$ چقدر است؟
 ۹. دو نقطه M و M' روی محور طول‌ها وجود دارند که اگر $(1, -2)$ و $(2, 1)$ باشند، زاویه‌های $\angle AMB$ و $\angle A'M'B$ قائم می‌شوند.
 حاصل ضرب طول نقاط M و M' کدام است؟

۱. معادله خطی که از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(-1, 2)$ کدام است؟

$2x - 3y + 6 = 0$ (۱) $2x + 3y - 6 = 0$ (۲) $2x + 3y + 6 = 0$ (۳) $2x - 3y - 6 = 0$ (۴)

۲. به ازای کدام مقادیر m نقاط $(m, 2)$ و $(-1, m+1)$ مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

$2x - \frac{9}{4} = 0$ (۱) $-2x - \frac{3}{4} = 0$ (۲) $-2x + \frac{3}{4} = 0$ (۳) $-2x + \frac{9}{4} = 0$ (۴)

۳. معادله خطی که از نقطه محل برخورد دو خط $y = -x + 4$ و $y = \frac{x}{3}$ می‌گذرد و بر خط $y = -x + 4$ عمود است، کدام است؟

$y = -x + 1$ (۱) $y = x + 1$ (۲) $y = -x$ (۳) $y = x$ (۴)

۴. یکی از خطوط به معادله $(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0$ بخط $y = -x + 1$ از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(1, 2)$ عبور می‌کند.

$2y - 2x = -5$ (۱) $2y - 2x = 5$ (۲) $2y + 2x = 1$ (۳) $2y + 2x = 4$ (۴)

۵. در مثلثی با رئوس $C(2, 2)$ و $B(-5, 6)$ ، $A(-1, -4)$ کدام است؟

$y = -2x - 6$ (۱) $y = 4x$ (۲) $2y + x + 9 = 0$ (۳) $y = 2x - 2$ (۴)

۶. نقاط $A(2, 5)$ و $C(0, 2)$ سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

$(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ (۱) $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (۳) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۴)

۷. معادله سه ضلع یک مثلث است $y = 2x$ ، $x+y=1$ و $x=2$. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

$y+x = \frac{1}{2}$ (۱) $y+x = \frac{2}{3}$ (۲) $x = \frac{2}{3}$ (۳) $y = \frac{2}{3}$ (۴)

۸. دو نقطه A و B به طول‌های 1 و 2 روی خط $x = 4x - 2$ قرار دارند. اگر تصاویر نقاط A و B روی محور x ، نقاط C و D باشند، مساحت ذوزنقه $ABCD$ چقدر است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۹. دو نقطه M و M' روی محور طول‌ها وجود دارند که اگر $(1, -2)$ و $(2, 1)$ باشند، زاویه‌های $\angle AMB$ و $\angle A'M'B$ قائم می‌شوند.

حاصل ضرب طول نقاط M و M' کدام است؟

-۲ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴)

فاصله دو نقطه

۱. فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از رابطه رویه‌رو به دست می‌آید:

$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ ۲. فاصله هر نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ از مبدأ برابر است با:


 مثال: در یک کلاس، پنج ردیف ۸ نفره تیمکت مطابق شکل چیده شده است.
 اگر ابعاد طول و عرض هر تیمکت را 5×5 سانتی‌متر در نظر بگیریم، فاصله مرکز تیمکت ردیف ۲، شماره ۳ با مرکز تیمکت ردیف ۵، شماره ۶ کدام است؟ (فضای خالی بین دو تیمکت تیز به اندازه یک تیمکت است).

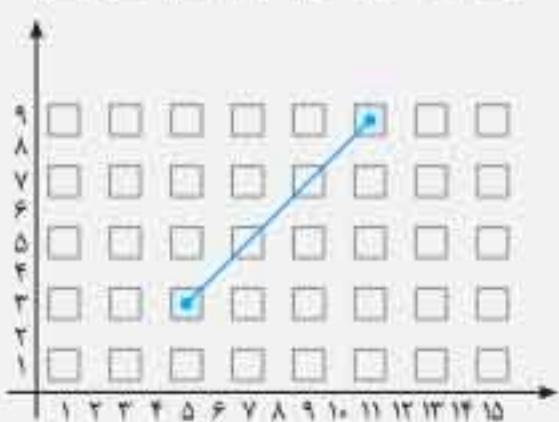
$25\sqrt{18}$ (۱) $50\sqrt{18}$ (۲)

$50\sqrt{72}$ (۳) $25\sqrt{85}$ (۴)

۳. پاسخ: می‌خواهیم فاصله نقطه $(5, 2)$ را از نقطه $(11, 9)$ بیابیم:

$$d = \sqrt{(11-5)^2 + (9-2)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

چون ابعاد هر تیمکت 5×5 است، فاصله واقعی $\sqrt{72} \times 5 = \sqrt{360}$ می‌باشد.



نقطه وسط پاره خط

مختصات نقطه M وسط پاره خط AB با مختصات نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

مهم

مثال: اگر سه نقطه $(-1, 0)$, $A(2, 4)$ و $C(2, 5)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه CM کدام است؟

(۱) $\sqrt{12}$

(۲) $\sqrt{11}$

(۳) $\sqrt{10}$

(۴) 2

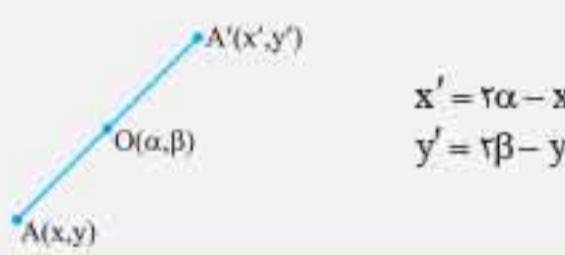
$$M\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(1, 2)$$

ابتدا مختصات نقطه M وسط AB را می‌یابیم:

$$CM = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10}$$

حال طول پاره خط CM را می‌یابیم:

قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نقطه $O(\alpha, \beta)$:



نکته

قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر است با $(-x, -y)$.

یک گام فراتر:

رابطه بین مختصات رؤوس متوازی الاضلاع

در هر متوازی الاضلاع $ABCD$, مجموع مختصات رؤوس مقابل با هم برابرند.

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

مهم

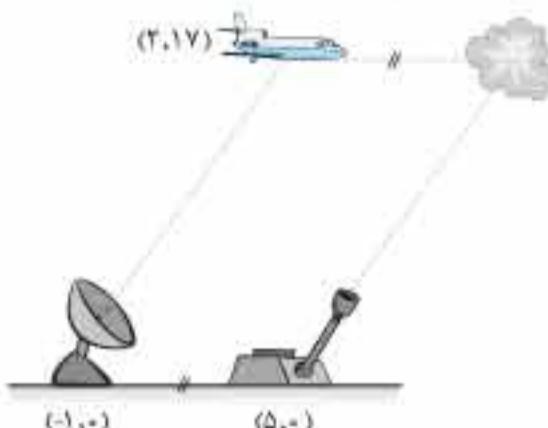
۱۰. اگر نقاط $(1, 2)$, $A(1, n)$ و $(m+1, n-1)$, $D(m+1, n)$, $C(4, 5)$, $B(2, 7)$ مختصات چهار رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، حاصل $m \cdot n$ کدام است؟

(۱) 4

(۲) 3

(۳) 2

(۴) -1



۱۱. مطابق شکل اگر هوایپا، رادار و ضد هوایی در یک صفحه باشند، ضد هوایی به کدام مختصات شلیک کند تا هوایپا شکار شود؟

(۱) $(8, 17)$

(۲) $(5, 17)$

(۳) $(17, 5)$

(۴) $(17, 8)$

۱۲. یک میله پرجم، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصله هر نقطه تا میله با فاصله نقطه مقابل آن تا میله برابر است.

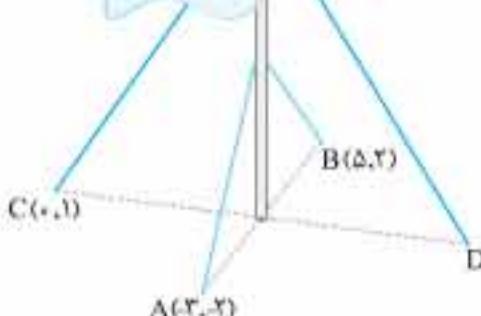
مختصات نقطه D کدام است؟

(۱) $(2, -1)$

(۲) $(-1, 2)$

(۳) $(2, -2)$

(۴) $(-2, 2)$



۱۲. قرینه نقطه $(2,5)$ نسبت به نقطه (a,b) برابر با (b,a) می‌باشد. $a^2 + b^2$ کدام است؟ ۱۶ (۱)
۲۵ (۴) ۲۰ (۳) ۱۸ (۲)
۱۳. در مثلثی با رئوس $(2,0)$, $A(4,2)$, $B(-1,-6)$ و $C(6,-1)$ معادله میانه وارد بر ضلع BC کدام است؟ ۱۴ (۱)
-y = 3x - 6 (۴) y = 3 (۳) x = 4 (۲) 2y = x - 2 (۱)
۱۵. نقاط $(a,-a)$ و $B(4,1)$, $A(1,0)$, $C(a,-a)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a , مثلث ABC در رأس A قائم و متساوی الساقین است؟ ۱۵ (۱)
۳ (۴) ۲ (۳) -2 (۲) -3 (۱)
۱۶. دو نقطه روی یمساز ربع اول و سوم داریم که از نقطه $(1,2)$ به فاصله ۲ هستند. مجموع طول‌های این نقاط کدام است؟ ۱۶ (۱)
4 (۴) 3 (۳) 2 (۲) 1 (۱)
۱۷. نقطه $(7,6)$ رأس متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $11 - 3x - 2y = 8$ و $4x + 2y = 1$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ ۱۷ (۱)
(4,2) (۴) (2,5) (۳) (2,4) (۲) (1,5) (۱)
۱۸. اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$, $y - x = 2$, $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟ ۱۸ (۱)
(تمامی خارج (۹۹)) 6 (۴) 2\sqrt{3} (۳) 5 (۲) 2\sqrt{5} (۱)

فاصله نقطه از خط

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
مهم

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:



فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط عمودی $K = K' - y_0$ برابر $|K - x_0|$ و از خط افقی $K' - y_0$ برابر $|K' - y_0|$ است.

مثال: می‌خواهیم از یک روستا که در مختصات $(-2,4)$ قرار دارد یک راه آسفالت به جاده‌ای

به معادله $. = 1 - 2x - 4y$ احداث کنیم. اگر واحدهای مختصات برحسب کیلومتر باشند و هزینه احداث هر کیلومتر جاده 100 میلیون تومان باشد، حداقل هزینه احداث جاده کدام است؟

- ۱۸ (۱) 520 میلیون
۲ (۳) 540 میلیون
۳ (۴) 560 میلیون

پاسخ: کوتاه‌ترین فاصله، خط عمود AH است.

$$AH = \frac{|3x_A - 4y_A - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3(-2) - 4(4) - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{26}{5}$$

$$\frac{26}{5} \times 100 = 520$$

طول جاده $\frac{26}{5}$ کیلومتر است، بنابراین:

فاصله دو خط موازی

فاصله دو خط موازی $ax + by + c' = 0$ و $ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
مهم

حواله باش: قبل از استفاده از این فرمول اولاً باید همه بخش‌های معادله به سمت چپ منتقل شوند و ثانیاً ضرایب x و y باید در دو معادله برابر باشند و در صورت لزوم باید با ضرب و تقسیم یک یا چند عدد در معادلات، ضرایب را یکسان نمود.

مثال: دایره‌ای بر دو خط $. = 1 - 2x + y$ و $. = -7 - 4x - y$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟ ۱۹ (۱)

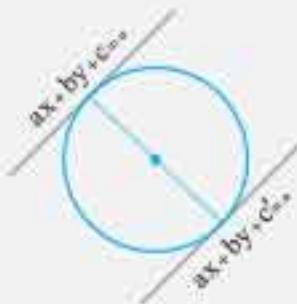
- ۱۹ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ۲۰ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ۲۱ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۲۲ (۱) $\sqrt{5}$

پاسخ: ابتدا در خابطه $-7 - 4x - y = -2y - 4x = 7$ عدد -7 را به سمت چپ منتقل می‌کنیم

سپس طرفین را بر 2 تقسیم می‌کنیم تا ضرایب در دو معادله یکسان شوند.

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y - 2x + \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2R = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{7}{2} - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{4}$$



۱۲
۱۳

۱۴
۱۵

۱۶
۱۷



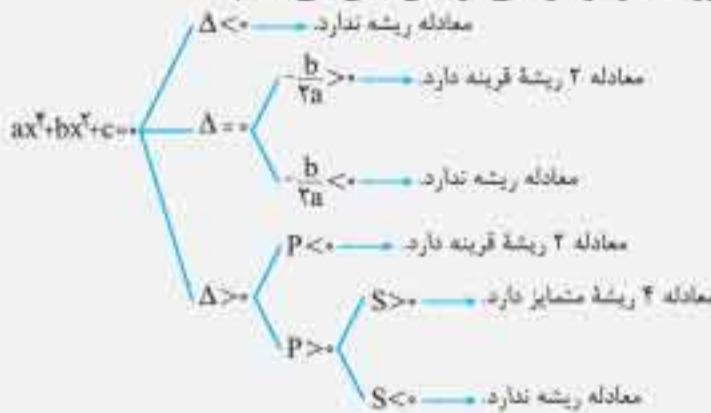
$$P = \frac{c}{a} = \frac{-2\sqrt{2} - 2}{1} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

بنابراین دو ریشه مختلف العلامت دارد و قدر مطلق ریشه مثبت بزرگ‌تر از قدر مطلق ریشه منفی است.

یک گام فراتر:

بحث راجع به ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$

(با قرض $a, b, c \neq 0$) برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن را به صورت نمودار درختی برایتان بیان می‌کنیم:



مثال: معادله $-x^2 - 4x + 2 = 0$ چهار ریشه متمایز دارد. حدود a کدام است؟

$$-2 < a < 2 \quad (4)$$

$$a < 2 \quad (3)$$

$$-4 < a < -2 \quad (2)$$

$$a > -2 \quad (1)$$

مطابق آن‌چه که در بالا بحث شد زمانی معادله چهار ریشه دارد که:

$$\textcircled{1} \quad \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(2-a) > 0 \Rightarrow 16 - 8 + 4a > 0 \Rightarrow 8 + 4a > 0 \Rightarrow a > -2$$

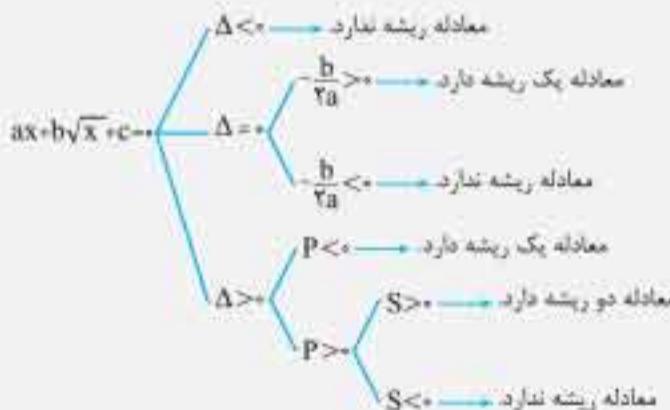
$$\textcircled{2} \quad P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2-a}{1} = 2-a > 0 \Rightarrow a < 2$$

$$\textcircled{3} \quad S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 > 0 \quad \text{بدینهی}$$

اشتراک مجموعه جواب‌های فوق $2 < a < -2$ می‌شود.

بحث راجع به ریشه‌های معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$

(با قرض $a, b, c \neq 0$) به نمودار درختی زیر توجه کنید:



در حالت $P < 0$ نیازی به بررسی Δ وجود ندارد، چرا که هر وقت a و c مختلف‌العلامت باشند، Δ لزوماً مثبت می‌شود.

مثال: به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 2\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ (معادله ریشه مضاعف ندارد).

$$-2 < m < \frac{5}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} < m < \frac{5}{2} \quad (3)$$

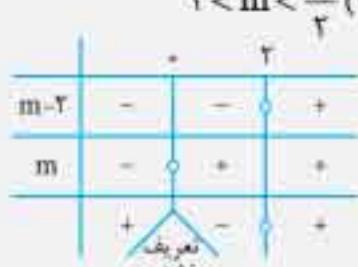
$$-2 < m < \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} < m < 2 \quad (1)$$

پاسخ: طبق نمودار ارائه شده، باید $\Delta > 0$ و $P < 0$ باشد.

به دلیل منفی بودن P نیازی به بررسی Δ نیست و فقط گافی است $P < 0$ باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$



۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱) صفر

۴ (۴)

۳ (۳)

۴۲. معادله $(2x^2 - 1)^2 = 7 + 6(2x^2 - 1)$ دارای چند ریشه متمایز است؟

۲ (۲)

۱) صفر

۵ (۴)

۴ (۴)

۴۳. مجموع ریشه‌های معادله $x^2 = 16(2x^2 + 9)$ کدام است؟

-۵ (۲)

۱) صفر

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱) ۱

۴۴. معادله $(x - \frac{1}{x})^2 + 2(x + \frac{1}{x}) = 0$ چند ریشه دارد؟

۲ (۲)

۱) ۱

۴ (۴)

۳ (۳)

۱) ۱

۴۵. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله $(m-1)x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت دارد؟۱ < $m < 2$ (۴)۲ < $m < 3$ (۳)۱ < $m < 3$ (۲)

۰ (۱)

-۱ < $m < 5$ (۴)-۲ < $m < 4$ (۳)-۳ < $m < 4$ (۲)-۳ < $m < 5$ (۱)۴۶. اگر معادله $mx^2 - 4x^2 + m - 3 = 0$ دارای چهار ریشه متمایز باشد، آن‌گاه m باید در بازه (a, b) باشد، $a, b \in \mathbb{R}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱) ۱

۴۷. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟۰ < $m < 2$ (۳)-۲ < $m < 4$ (۳)-۳ < $m < 4$ (۲)-۳ < $m < 5$ (۱)-۱ < $m < 5$ (۴)-۲ < $m < 4$ (۳)-۳ < $m < 4$ (۲)-۳ < $m < 5$ (۱)۴۸. مجموعه مقادیر a کدام باشد تا معادله $x^2 + (2a+1)x^2 + (a^2 - 1) = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟۰ < $m < 2$ (۳)۱ < $m < 2$ (۲)

۱) ۱

۰ < $a < 4$ (۳)-۱ < $a < 1$ (۲)

۱) ۱

۴۹. تعداد ریشه‌های حقیقی متمایز معادله $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 3$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱) ۱

۵۰. معادله $2 = (x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x)$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱) ۱

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، می‌توان مجموع و حاصل ضرب آن‌ها را بدون نیاز به حل معادله، از روابط زیر یافته

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

مهم

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

برای نمونه در معادله $-5 - 2x^2 - 2x = 0$ بدون حل معادله می‌توان فهمید مجموع دو ریشه برابر 1 و حاصل ضرب ریشه‌ها

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$$

نکته

معادله درجه دوم، با مجموع ریشه‌های S و حاصل ضرب ریشه‌های P به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

 **مثال:** معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{\alpha} + 1$ و $\sqrt{\alpha} - 1$ باشند، کدام است؟

$$x^2 - 2x + (1 - \alpha) = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 - 2\sqrt{\alpha}x - 1 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + 2x + (1 - \alpha) = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + 2\sqrt{\alpha}x + 1 = 0 \quad (۲)$$

حل مسائل پارامتری ارتباط بین ریشه‌ها

اگر در یک معادله پارامتری، مقدار یک ریشه را بحسب دیگری داشته باشیم مثلاً بدانیم یک ریشه دو برابر یا معکوس یا... دیگری است، می‌توانیم با تشکیل دستگاهی مرکب از S و P ریشه‌ها را بیابیم و بعد از آن مقدار پارامتر را پیدا کنیم.

مثال: در معادله $-15x^2 + 3m = 2x^2 - 1$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد، کدام است؟

$$\frac{63}{4} \quad (4)$$

$$\frac{59}{4} \quad (3)$$

$$\frac{63}{5} \quad (2)$$

$$\frac{59}{5} \quad (1)$$

پاسخ:

روش اول: اگر یکی از ریشه‌های معادله را α فرض کنیم ریشه دوم برابر $2\alpha + 2$ می‌شود.

در این معادله مجموع ریشه‌ها 5 و حاصل ضرب ریشه‌ها $m = \frac{b}{a} = -\frac{-15}{3} = 5$ است. $P = \frac{c}{a} = \frac{m}{3}$

$$\begin{cases} \alpha + (\alpha + 2) = 5 \\ \alpha \cdot (\alpha + 2) = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2 = 5 \\ \alpha(\alpha + 2) = \frac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \alpha = \frac{m}{3} \end{cases}$$

به کمک مقدار $\alpha = \frac{3}{2}$ می‌توان مقدار m را از رابطه دوم یافت:

روش دوم: تفاضل دو ریشه برابر 2 است. فرمول تفاضل دو ریشه هم $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است، بنابراین:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(-15)^2 - 4(3)m}}{2} = 2 \Rightarrow \sqrt{225 - 12m} = 6 \Rightarrow 225 - 12m = 36 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

در این سوال روش دوم ساده‌تر است ولی دقیق‌تر کنید روش اول قاعدة کلی است و روش دوم خاص این سوال است.

.۷۰ در معادله $x^2 + ax + 9 = 2x^2 + ax - 9$ یک ریشه، دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

$$5 \quad (4)$$

$$4/5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3/5 \quad (1)$$

.۷۱ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + mx - 3 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطه $2\alpha + \beta = 4$ بین ریشه‌ها برقرار است؟

$$-6 \pm \sqrt{10} \quad (4)$$

$$-2 \pm \sqrt{5} \quad (3)$$

$$3 \pm \sqrt{5} \quad (2)$$

$$6 \pm \sqrt{10} \quad (1)$$

.۷۲ به ازای کدام مقدار K در معادله $x^2 + Kx + 9 = 2\sqrt{x_1 x_2} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$ بین ریشه‌ها رابطه $x_1 x_2$ برقرار است؟

$$-9 \quad (4)$$

$$-11 \quad (3)$$

$$11 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

.۷۳ اگر ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b = 0$ دو عدد صحیح متولی باشند، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

$$a^2 - b = 1 \quad (4)$$

$$a^2 - 4b = 1 \quad (3)$$

$$a^2 + 4b = 1 \quad (2)$$

$$a^2 + 4b = 0 \quad (1)$$

.۷۴ به ازای کدام مقدار a ، رابطه $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{5}{6}$ میان ریشه‌های معادله $x^2 - (a+2)x + a+1 = 0$ برقرار است؟ (قانون فرهنگ آموزش)

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

.۷۵ یکی از ریشه‌های معادله $x - 2 = a(x - 1)$ از 1 برابر ریشه دیگر سه واحد کمتر است، مقدار مثبت a کدام است؟ (قانون فرهنگ آموزش)

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{9} \quad (3)$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{9}{5} \quad (1)$$

.۷۶ به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $x^2 - (m+1)x + \frac{1}{4} = 0$ برابر 2 می‌باشد؟ (ریاضی ۹۷)

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

.۷۷ به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله $x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟ (ریاضی فاتح ۹۷)

$$15 \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

$$11 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

نمودار تابع درجه دوم

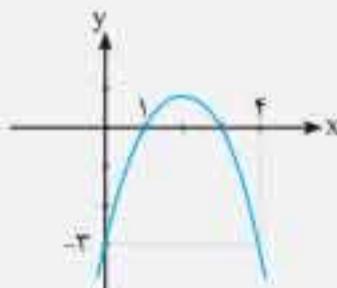


یادآوری: نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت یک سهمی قائم است که اگر $a > 0$, دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$, دهانه سهمی رو به پایین می‌باشد.

سوالاتی که نمودار به همراه چند نقطه از آن داده شده و ضابطه تابع آن خواسته می‌شود را می‌توان به سه دسته کلی تقسیم‌بندی نمود.

الف: سه نقطه عادی:

سه نقطه داده شده را در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به یک دستگاه سه معادله سه مجهولی برسیم. با حل دستگاه، مجهول‌های a , b و c به دست می‌آید و ضابطه تابع مشخص می‌شود.



مثال: نمودار مقابل، نمودار تابع درجه دوم به معادله $y = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. b کدام است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳)

پاسخ: این نمودار از نقاط $(-3, 0)$, $(0, 0)$ و $(3, -3)$ می‌گذرد. نقاط را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

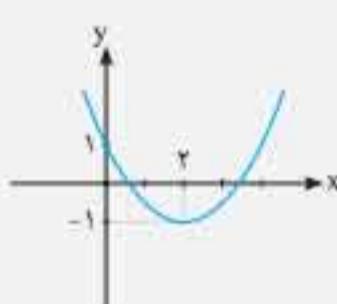
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(-3, 0) \Rightarrow 0 = 9a - 3b + c \Rightarrow c = -3$$

$$\begin{cases} (0, 0) \Rightarrow 0 = a + b + c \\ (3, -3) \Rightarrow -3 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

ب: رأس و یک نقطه عادی:

دو نقطه داده شده را در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ جای‌گذاری می‌کنیم. همین‌طور طول رأس را در معادله $x = -\frac{b}{2a}$ قرار می‌دهیم. به این ترتیب به یک دستگاه سه معادله سه مجهولی می‌رسیم و با حل آن ضرایب a , b و c به دست می‌آیند.



مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ کدام گزینه صحیح است؟

$$a+b+c = \frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$a-b+c = \frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$a+b+c = -\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$a-b+c = -\frac{1}{2} \quad (۴)$$

پاسخ:

روش اول: نقاط $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ را در ضابطه تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} (-1, 0) \Rightarrow 0 = a - b + c \\ (0, 1) \Rightarrow 1 = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

از طرفی طول رأس سهمی $2 = \frac{-b}{2a}$ است، بنابراین $b = -4a$ است.

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ b = -4a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ و } b = -2$$

$$a + b + c = \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{2}$$

بنابراین می‌توان فهمید:

روش دوم: اگر نقطه رأس سهمی را (m, h) بنامیم معادله سهمی به صورت $y = a(x-m)^2 + h$ در می‌آید.

برای پیدا کردن a کافی است مختصات نقطه عادی را در ضابطه تابع جای‌گذاری کنیم.

می‌خواهیم مثال قبلی را به روش جدید حل کنیم. مختصات رأس سهمی $(-1, 2)$ است، پس $1 = a(x+1)^2 + 2$ می‌باشد.

$$y = a(x+1)^2 + 2 \xrightarrow{(0, 1)} 1 = a(0+1)^2 + 2 \Rightarrow 1 = a + 2 \Rightarrow a = -1$$

ضابطه سهمی به صورت زیر در می‌آید.

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 \Rightarrow a + b + c = -\frac{1}{2} - 1 + 1 = -\frac{1}{2}$$

۱۰
۱۱

۱۲

۱۳
۱۴





۲۵

۲۶

۲۷

۲۸

سپاهان

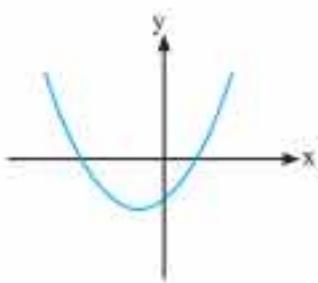
.۷۸. کدام ضابطه می‌تواند مربوط به نمودار مقابل باشد؟

$$y = 3x^2 + 2x + 1 \quad (1)$$

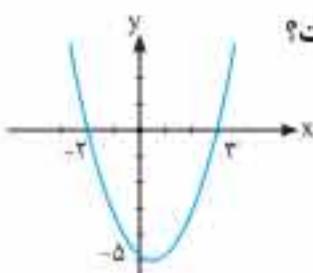
$$y = x^2 + 3x - 1 \quad (2)$$

$$y = 3x^2 + 5x + 1 \quad (3)$$

$$y = x^2 - 3x - 1 \quad (4)$$



.۷۹. شکل مقابل، نمودار تابع درجه دوم به معادله $y = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



(۱)

-۵ (۲)

۶ (۳)

-۶ (۴)

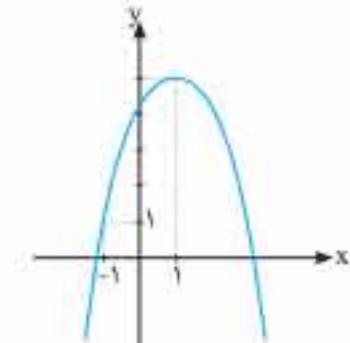
.۸۰. سهمی شکل مقابل به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشد و $a - b = -3$ است. مقدار (۱) $f(0)$ کدام است؟

-۴ (۱)

صفر (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)



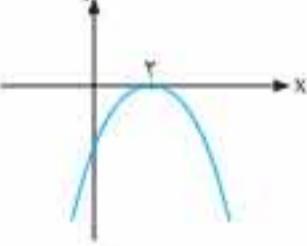
.۸۱. شکل مقابل نمودار تابع درجه دوم $f(x) = Kx^2 + 8x + c$ است. کدام است K ؟

-۲ (۱)

-۸ (۲)

۲ (۳)

-۴ (۴)



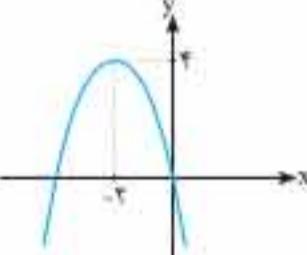
.۸۲. با توجه به نمودار تابع $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ مقدار a کدام است؟

۱ (۱)

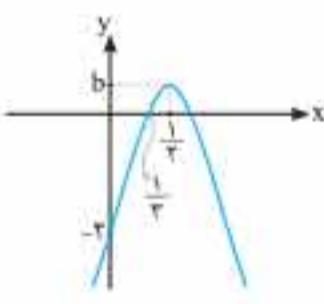
-۱ (۲)

-۲ (۳)

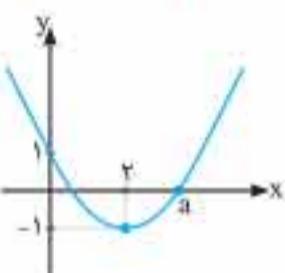
۲ (۴)



.۸۳. شکل مقابل نمودار تابع درجه دوم f است. مقدار b کدام است؟

 $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳)

.۸۴. با توجه به شکل مقابل، که نمودار یک تابع درجه دو را نشان می‌دهد، مقدار a کدام است؟

 $\frac{5}{2}$ (۱) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ (۲) $2+\sqrt{2}$ (۳)

.۸۵. اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x را در دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور y را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

-۳ (۱)

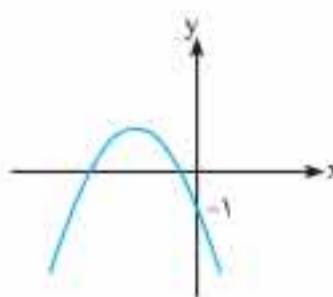
۳ (۲)

 $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴)

.۸۶. محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + K$ را در نقطه‌ای به عرض ۲- قطع می‌کند. طول پاره خطی که سهمی روی محور x ایجاد می‌کند، کدام است؟

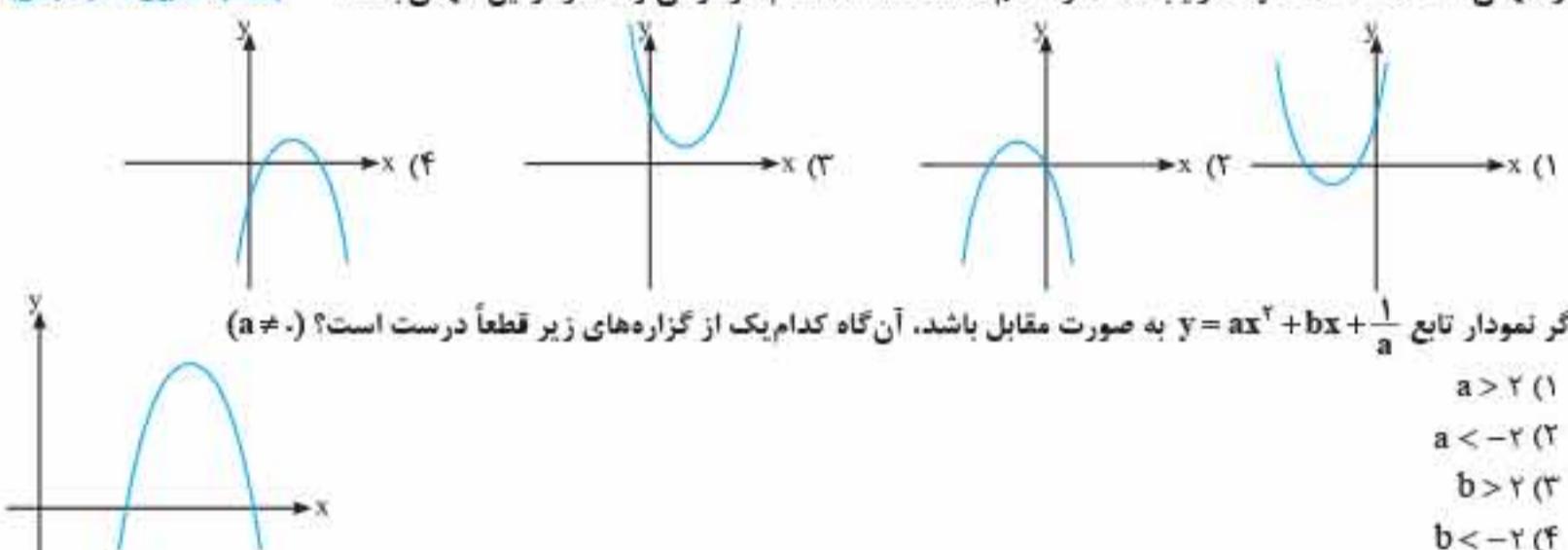
 $4\sqrt{2}$ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴)

۸۷ در شکل زیر سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. کدام گزینه در مورد ضرایب a , b , c و تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ صحیح است؟



- (۱) $a < 0, b < 0, c < 0$ و معادله دو ریشه دارد.
- (۲) $a < 0, b > 0, c < 0$ و معادله دو ریشه دارد.
- (۳) $a > 0, b < 0, c < 0$ و معادله ریشه ندارد.
- (۴) $a > 0, b > 0, c > 0$ و معادله ریشه ندارد.

۸۸ در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ هم‌علامت هستند. کدام نمودار می‌تواند نمودار این سهمی باشد؟



۸۹ اگر نمودار تابع $y = ax^2 + bx + \frac{1}{a}$ به صورت مقابل باشد. آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر قطعاً درست است؟

- (۱) $a > 2$
- (۲) $a < -2$
- (۳) $b > 2$
- (۴) $b < -2$

۹۰ نمودار تابع $f(x) = mx^2 + 8x + 3$ به صورت مقابل است. چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۷
- (۲) ۸
- (۳) ۹
- (۴) ۱۰

۹۱ شکل زیر نمودار سهمی $f(x) = y$ است. قدر مطلق اختلاف ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

(کانون فرهنگ آموزش)

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) ۸

۹۲ به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره بالای محور x است؟

- (۱) $-1 < m < 2$
- (۲) $-2 < m < 2$
- (۳) $-2 < m < -1$
- (۴) $m > -2$

۹۳ با کدام مقدار m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟

- (۱) $9 < m < 25$
- (۲) $7 < m < 15$
- (۳) $m < -1$
- (۴) $m < -2$

۹۴ اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 2$ ، محور x در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $4 < m < 9$
- (۲) $3 < m < 5$
- (۳) $3 < m < 4$
- (۴) $m > 3$

۹۵ به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) $-2 \leq a < 0$
- (۲) $a \leq -2$
- (۳) $a > 0$
- (۴) $a \leq 2$

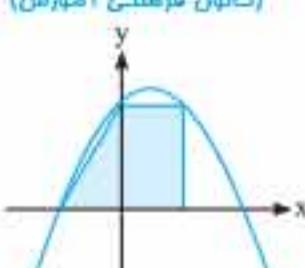
۹۶ خط $y = K$ منحنی $y = x^2 - 4x + 1$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. به ازای K ‌های مختلف مجموعه نقاط وسط پاره خط AB روی کدام تابع زیر قرار می‌گیرند؟

- (۱) $y = \frac{x}{2}$
- (۲) $y = 2x$
- (۳) $x = 2$
- (۴) $y = 2$

۹۷ نمودار سهمی $y = 2 + x - x^2$ در شکل زیر رسم شده است. مساحت ذوزنقه رنگی کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$
- (۲) $\frac{4}{5}$
- (۳) $\frac{7}{5}$
- (۴) $\frac{2}{5}$

(کانون فرهنگ آموزش)



.۸۷۲ در یک جمع، ۱۵ مرد و ۲۵ زن حضور دارند. در بین آن‌ها x مرد و y زن چشم سبز رنگ دارند. یک تفر به تصادف انتخاب می‌کنیم.

فرض کنید A پیشامد زن بودن و B پیشامد چشم سبز داشتن این فرد باشد. در کدام صورت A و B همواره مستقل نند؟

$$x = y \quad (4)$$

$$x = 5y \quad (3)$$

$$5x = 2y \quad (2)$$

$$5x = 4y \quad (1)$$

.۸۷۳ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری‌که $P(A' \cap B) + P(A) = 1$ و همچنین $P(A \cup B) = 1$ باشد، حداقل

(کالون غره‌گی آموزش)

$$1/16 \quad (4)$$

$$1/64 \quad (3)$$

$$1/48 \quad (2)$$

$$1/8 \quad (1)$$

.۸۷۴ در یک خانواده ۱۵ فرزندی، احتمال این‌که فرزند هفتم و دوازدهم پسر باشند، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\binom{15}{2}}{2^{15}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

.۸۷۵ در بین ۶ تفر احتمال این‌که همه‌گی روز شنبه به دنیا آمده باشند، کدام است؟

$$\frac{1}{7^6} \quad (4)$$

$$\frac{7!}{7^6} \quad (3)$$

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{7^6} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

.۸۷۶ در فضای نمونه‌ای هم‌شانس $\{c, d, a\}$ ، $\{a, b, c, d\}$ با کدام پیشامد زیر مستقل است؟

$$\{c, d, a\} \quad (4)$$

$$\{c, a, d\} \quad (3)$$

$$\{b, d\} \quad (2)$$

$$\{a, b\} \quad (1)$$

.۸۷۷ در یک تیراندازی احتمال این‌که سهیل تیر را به هدف تزند، ۴۰٪ است. دست کم او باید چند تیر بزند تا احتمال برخورد دست کم یک

تیر به هدف، بیش از ۹۵٪ شود؟

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

.۸۷۸ یک فضای نمونه‌ای، پنج عضو a, b, c, d و e دارد. اگر $P(\{b, c\}) = \frac{5}{12}$ و $P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه $P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\})$ کدام است؟

$$\frac{5}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

.۸۷۹ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم مجموع آن‌ها ۵ یا ۱۰ آمده است. چقدر احتمال دارد که هر دو عدد رو شده زوج باشند؟

$$\frac{7}{27} \quad (4)$$

$$\frac{5}{27} \quad (3)$$

$$\frac{5}{7} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

.۸۸۰ در یک مسابقه اتومبیل‌رانی احتمال این‌که یک اتومبیل دچار نقص فنی شود، ۴٪ است. احتمال ترسیدن به خط پایان برای یک اتومبیل اگر خراب شده باشد ۲٪ می‌باشد. اگر اتومبیلی را در این مسابقه به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که خراب بوده و از خط پایان بگذرد، کدام است؟

$$1/6 \quad (4)$$

$$1/28 \quad (3)$$

$$1/82 \quad (2)$$

$$1/6 \quad (1)$$

.۸۸۱ یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم سکه اول «رو» آمده است. با کدام احتمال، دست کم یکی از سکه‌ها «پشت» آمده است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

.۸۸۲ ★ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = 4P(A \cap B) = 2P(B)$ ، آن‌گاه چقدر احتمال دارد فقط پیشامد A رخ دهد؟ (A و B تهی نیستند).

$$\frac{9}{16} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

.۸۸۳ ★ در گیسنهای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به تصادف، پی در پی و بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟

$$1/12 \quad (4)$$

$$1/25 \quad (3)$$

$$1/15 \quad (2)$$

$$1/6 \quad (1)$$

.۸۸۴ ★ یک تاس را دست کم چند بار پرتاب کنیم تا با احتمال بیش از ۹۹ درصد دست کم یک بار عدد اول بیاید؟

$$8 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

.۸۸۵ ★ ۴ جعبه داریم که در هر کدام پنج توب با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. اگر از هر جعبه یک توب به تصادف برداریم، احتمال این‌که تمامی این توب‌ها شماره یکسان داشته باشند، چقدر است؟

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5^3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5^4} \quad (1)$$

.۸۸۶ ★ یک تاس را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که بزرگ‌ترین عددی که می‌آید ۴ باشد، کدام است؟

$$(\frac{2}{3})^5 \quad (4)$$

$$\frac{2^6 - 1}{3^6} \quad (3)$$

$$(\frac{2}{3})^6 \quad (2)$$

$$(\frac{1}{3})^6 \quad (1)$$

۱۷۶
۱۷۷
۱۷۸
۱۷۹



سازمان
میراث

۸۸۷. می‌دانیم امروز احتمال آمدن برف $\frac{1}{2}$ و فردا $\frac{1}{2}$ است. احتمال آمدن برف فردا به شرط آن که امروز برق باید $\frac{1}{2}$ است. احتمال برق نیامدن فردا به شرط آن که امروز برق نباید، کدام است؟

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{1}{78} \quad (4) \frac{1}{9}$$

۸۸۸. خانواده‌ای ۵ فرزند دارد، می‌دانیم فرزند دوم پسر است. احتمال آن که آخرین فرزند سومین پسر باشد، کدام است؟

$$(1) \frac{1}{32} \quad (2) \frac{1}{16} \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{2}{16}$$

۸۸۹. احتمال ازدواج پسر و دختر خانواده‌ای تا ۵ سال دیگر به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ است. اگر پسر ازدواج کند، احتمال ازدواج دختر به $\frac{1}{4}$ افزایش می‌باید. با کدام احتمال حداقل یکی از آن‌ها تا ۵ سال دیگر ازدواج خواهد کرد؟

$$(1) \frac{11}{24} \quad (2) \frac{7}{24} \quad (3) \frac{12}{16} \quad (4) \frac{5}{12}$$

۸۹۰. در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

$$(1) \frac{3}{8} \quad (2) \frac{7}{16} \quad (3) \frac{5}{8} \quad (4) \frac{1}{4}$$

۸۹۱. یک تاس همگن را انداخته‌ایم. می‌دانیم عدد ظاهر شده، مضرب ۲ نیست. احتمال آن که شماره ظاهر شده ۲ باشد، کدام است؟

$$(1) \frac{1}{6} \quad (2) \frac{1}{5} \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{1}{3}$$

۸۹۲. در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آن‌ها تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آن‌ها مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟

$$(1) \frac{1}{7} \quad (2) \frac{7}{25} \quad (3) \frac{8}{25} \quad (4) \frac{85}{100}$$

۸۹۳. دو تاس را با هم می‌اندازیم. با کدام احتمال دو عدد رو شده، متولی هستند؟

$$(1) \frac{2}{9} \quad (2) \frac{5}{18} \quad (3) \frac{7}{18} \quad (4) \frac{4}{9}$$

۸۹۴. چهار دانش‌آموز یک کلاس روی یک تیمکت نشسته‌اند. با کدام احتمال، ماه تولد حداقل دو نفر آن‌ها یکسان است؟

$$(1) \frac{19}{48} \quad (2) \frac{41}{96} \quad (3) \frac{23}{48} \quad (4) \frac{55}{96}$$

۸۹۵. ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه هستند. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید هستند؟

$$(1) \frac{25}{63} \quad (2) \frac{26}{63} \quad (3) \frac{10}{21} \quad (4) \frac{11}{21}$$

۸۹۶. در جعبه‌ای ۲ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

$$(1) \frac{28}{45} \quad (2) \frac{29}{45} \quad (3) \frac{31}{45} \quad (4) \frac{32}{45}$$

۸۹۷. در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۱ مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

$$(1) \frac{30}{91} \quad (2) \frac{25}{77} \quad (3) \frac{40}{143} \quad (4) \frac{50}{143}$$

۸۹۸. هر یک از ارقام ۱۰۰۰۰۱ و ۵ بر روی پنج کارت یکسان توشه شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل، مضرب ۳ می‌باشد؟

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{1}{5} \quad (4) \frac{1}{6}$$

۸۹۹. در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۲ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

$$(1) \frac{5}{22} \quad (2) \frac{7}{22} \quad (3) \frac{11}{22} \quad (4) \frac{4}{11}$$

پاسخنامہ تشریحی

$$(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-2K}{K+1}x + \frac{K-1}{K+1}$$

$$m' = \frac{-2K}{K+1} = \frac{-2}{1} \Rightarrow 2K = -2 \Rightarrow K = -1$$

حال با جایگذاری ۲ به جای K معادله را حل می‌کنیم:

$$(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0 \xrightarrow{K=-1} 2y + 2x = 1$$



$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-6}{3-(-5)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

چون ارتفاع AH بر قطع BC عمود است، بنابراین شیب AH عکس و

$$m_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

قرینه BC می‌باشد.

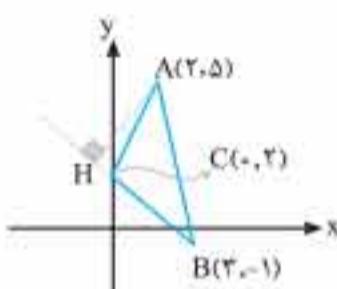
حال معادله خط AH را می‌باشیم:

$$y - y_A = m_{AH}(x - x_A) \Rightarrow y - (-1) = 2(x - (-1))$$

$$\Rightarrow y = 2x - 2$$



برای یافتن نقطه H باید معادله دو خط BC و AH را بیان و آنها را با هم قطع دهیم.



$$BC: m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-(-1)}{3-(-5)} = -1$$

$$BC: y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 2 = -1(x - (-1))$$

از آنجایی که خط AH بر خط BC عمود است شیب خط AH عکس

$$m_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

و قرینه شیب خط BC است.

معادله خط AH را می‌باشیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 3$$

برای یافتن نقطه H باید دستگاه معادلات دو خط

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$



نکته: در سوالات مثلث، اگر یکی از اضلاع آن افقی یا عمودی باشد، بهتر است شکل مثلث را رسم کنیم.

یکی از اضلاع مثلث ($x=1$) خطی عمود است پس بهتر است شکل مثلث را رسم کنیم.

همان طور که می‌بینید، کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث، ارتفاع AH می‌باشد که یک خط افقی است و معادله آن باید به صورت $y = K$ باشد.

به این ترتیب فقط گزینه «۱» می‌تواند درست باشد.

اگر بخواهیم K را بیابیم، باید معادله دو خط $x+y=1$ و $y=2x$ را قطع دهیم و عرض نقطه تقاطع را بیابیم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x+2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}$$

۱. **روش اول:** ابتدا شیب خط AB را می‌باشیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

سپس معادله خط را به کمک یکی از نقاط A یا B می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 2$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$3y = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0 \quad \text{یا} \quad 2x - 3y + 6 = 0$$

روش دوم: فرض می‌کنیم معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد با جایگذاری دو نقطه $(3, 0)$ و $(0, -2)$ در معادله، مجهولات a و b را می‌باشیم:

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 0 = a(3) + b \\ -2 = a(0) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$2x - 3y - 6 = 0 \quad \text{یا} \quad 2x - 3y + 6 = 0$$

اگر سه نقطه را به ترتیب $(0, 0)$, $A(m, 2)$ و $B(6, 4m+1)$ در نظر بگیریم، شیب‌های دو خط OA و OB باید با هم برابر باشند تا این سه نقطه در یک راستا قرار بگیرند:

$$m_{OA} = m_{OB} \Rightarrow \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O}$$

$$\Rightarrow \frac{2-0}{m-0} = \frac{4m+1-0}{6-0}$$

$$4m^2 + m - 18 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(4m+9)(4m-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{9}{4} \\ m = 2 \end{cases}$$

ابتدا محل برخورد دو خط x و $y = \frac{x}{2}$ را با تشکیل دستگاه می‌باشیم:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{x}{2} \Rightarrow 4x = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

محل برخورد، نقطه $(0, 0)$ است.

خط مطلوب، بر خط $y = -x + 4$ عمود است پس شیب آن عکس و

قرینه شیب خط $y = -x + 4$ است.

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$$

معادله خط مطلوب را به کمک نقطه $(0, 0)$ و شیب ۱ می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

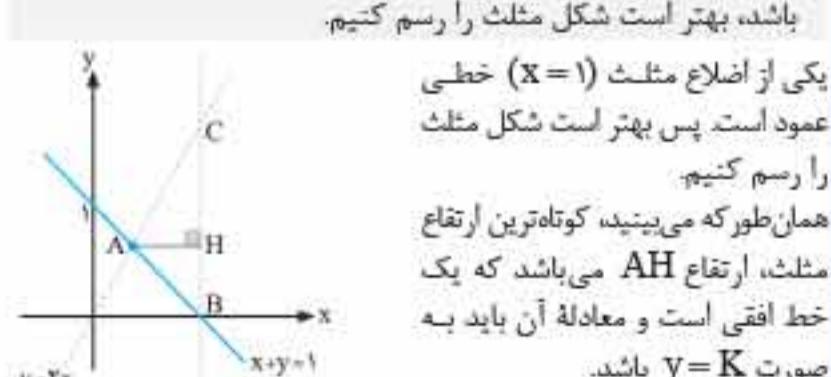
۴. **ابتدا شیب خط AB را می‌باشیم:**

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

چون خط مطلوب، بر خط AB عمود است پس شیب آن، عکس و قرینه شیب AB است.

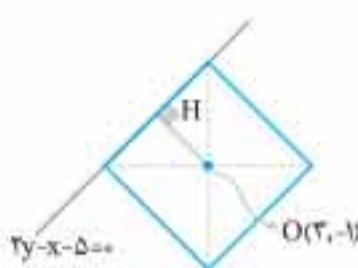
$$m' = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

بنابراین شیب خط $y = (K+1)y + 2Kx - K + 1$ برای $\frac{3}{2}$ است.



اگر بخواهیم K را بیابیم، باید معادله دو خط $x+y=1$ و $y=2x$ را قطع دهیم و عرض نقطه تقاطع را بیابیم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x+2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}$$



فاصله نقطه $(-1, -2)$ در مرکز مربع تا معادله یک ضلع آن، برابر نصف طول ضلع مربع است.

$$\begin{aligned} OH &= \frac{|2y_1 - x_1 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

طول ضلع مربع 2 برابر OH بعده است، پس مساحت مربع برابر

$$S = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 8$$

می‌شود با:

کافی است معادله ضلع BC را نوشه و پس فاصله رأس A از آن را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} BC : y - (-2) &= \frac{3 - (-2)}{\sqrt{2}}(x - 2) \Rightarrow BC : y + 2 = x - 2 \\ \Rightarrow BC : y - x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{BC : } y - x + 4 = 0 \quad \text{بر روی H قرار دارد.}$$

۴۲

برای حل این معادله به جای x^2 از مجھول معاون A استفاده می‌کنیم:

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 4(x^2) + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 = A} A^2 - 4A + 3 = 0 \Rightarrow (A - 1)(A - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

معادله دارای چهار ریشه متمایز است.

۴۳

به جای $1 - 2x^2$ ، مقدار A را قرار می‌دهیم:

$$(2x^2 - 1)^2 = 1 + 6(2x^2 - 1) \Rightarrow A^2 = 1 + 6A$$

$$\Rightarrow A^2 - 6A - 7 = 0 \Rightarrow (A - 7)(A + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 7 \\ A = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 = +7 \\ 2x^2 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

این معادله دارای سه ریشه متمایز است.

۴۴

در معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ حتماً ریشه‌های غیرصفر، دو به دو قرینه یکدیگرند و بنابراین مجموع آنها صفر می‌شود.

۴۵

در این معادله، $A = \frac{1}{2}x^2$ فرض می‌کنیم، بنابراین:

$$\frac{1}{2}x^2 + 7x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2(x^2)^2 + 7(x^2) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2A^2 + 7A - 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(2A + 4)(2A - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ A = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -4 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

معادله یک ریشه دارد.

هر دو فاصله با هم برابرند، پس:

$$\frac{|-3\alpha + 3|}{\sqrt{2}} = |-2\alpha + 2| \Rightarrow \frac{9\alpha^2 - 18\alpha + 9}{2}$$

$$= 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 \Rightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = 8\alpha^2 - 24\alpha + 18$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-6 - \sqrt{72}}{2} = -3 - 3\sqrt{2} \\ \alpha = \frac{-6 + \sqrt{72}}{2} = -3 + 3\sqrt{2} \end{cases}$$

با توجه به این که مرکز دایره در ربع اول است پس باید α مثبت باشد، پس $\alpha = -3 + 3\sqrt{2}$ است.

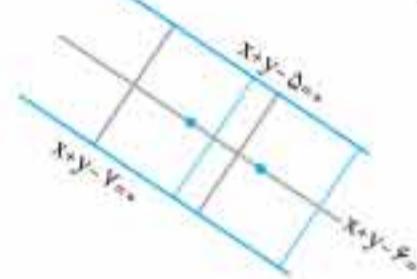
۴۶

نکته:

خط وسط دو خط موازی $ax + by + c' = 0$ و $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

مرکز مربع نقطه‌ای در وسط این دو خط است.



چون دو خط موازی $x + y = 7a$ و $ax + y = 5$ هستند و شیب‌های آن‌ها با هم برابرند، پس $a = 1$ است.

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

پس خط وسط دو خط $x + y - 7 = 0$ و $x + y - 5 = 0$ برابر است با:

$$x + y + \frac{-5 - 7}{2} = 0 \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

۴۷

راهبرد

برای یافتن مساحت مثلثی با رئوس $B(x_B, y_B)$ ، $A(x_A, y_A)$ و $C(x_C, y_C)$ می‌توان از روش زیر استفاده نمود:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [((x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C))]$$

تذکر:

۱) ترتیب چیدن نقاط در فرمول S اهمیتی ندارد، فقط اولین نقطه در مرتبه آخر باید تکرار شود.

۲) در صورت منفی شدن جواب S ، مساحت برابر قدر مطلق آن است.

به کمک راهبرد فوق مساحت را می‌باشیم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(((2 \times 0) + (3 \times 2) + (0 \times 5)) - (2 \times 5 + 0 \times 0 + 2 \times 2))] \\ &= \frac{1}{2} [6 - 16] = \frac{-10}{2} = -5 = 5 \end{aligned}$$

از آنجایی که مساحت نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس $S = 5$ است.