

(فصل ۱)

آنالیز ترکیبی و احتمال

۷	درس ۱: شمارش
۱۷	درس ۲: احتمال
۲۸	درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

(فصل ۲)

الگوهای خطی

۳۵	درس ۱: مدل سازی و دنباله
۴۷	درس ۲: دنباله حسابی

(فصل ۳)

الگوهای غیرخطی

۶۳	درس ۱: دنباله هندسی
۷۵	درس ۲: توان های گویا
۸۷	درس ۳: تابع نمایی

۹۵	پاسخ نامه تشریحی
۱۵۹	پاسخ نامه کلیدی

آمار ترکیبی

احتمال

درس ۱

شمارش



اصول شمارش

اصل جمع

فرض کنید بتوانیم یک عمل مشخص را به X یا Y یا ... Z روش مختلف انجام دهیم، در این صورت طبق اصل جمع تعداد کل حالت‌های انجام آن کار برابر است با $X + Y + \dots + Z$. دقت کنید که حرف «یا» در سؤالات، نشان‌دهنده اصل جمع است. مثلاً فرض کنید مریم برای رفتن از تهران به مشهد، بتواند از یکی از ۳ خط اتوبوس یا یکی از ۲ خط هوایی یا یکی از ۴ خط ریلی استفاده کند. تعداد کل حالت‌هایی که مریم می‌تواند به مشهد برود برابر است با:

$$3 + 2 + 4 = 9$$

دقت دارید که مریم نمی‌تواند هم‌زمان از هر سه وسیله نقلیه استفاده کند و برای رفتن به مشهد فقط باید یکی از وسایل نقلیه را انتخاب کند. به همین علت از اصل جمع استفاده کرده‌ایم.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم، هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل، آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است (اصل ضرب نیز قابل تعمیم به بیشتر از ۲ مرحله می‌باشد). توجه کنید که اگر دو یا چند کار، پشت سر هم انجام شوند از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. ضمناً حرف «و» نشان‌دهنده اصل ضرب است.

تست اگر علی ۳ پیراهن آبی، سفید و زرد و ۲ شلوار سیاه و طوسی و ۲ جفت کفش قهوه‌ای و نارنجی داشته باشد، به چند طریق می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند؟

۱۸ (۴)

۱۴ (۳)

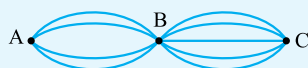
۱۲ (۲)

۷ (۱)

پاسخ گزینه ۲ علی می‌تواند هم پیراهن، هم شلوار و هم کفش انتخاب کند؛ پس متوجه می‌شویم که باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = 3 \times 2 \times 2 = 12$$

تست نمودار زیر، ارتباط بین سه شهر A، B و C را با جاده‌هایی که همگی دوطرفه هستند نشان می‌دهد. شخصی می‌خواهد از شهر A به



C برود و برگردد به طوری که در مسیر برگشت از مسیرهایی که موقع رفتن استفاده کرده، دوباره

عبور نکند. او چند انتخاب خواهد داشت؟

۱۸۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

پاسخ گزینه ۱ فرد باید اول به شهر B و سپس به شهر C برود؛ پس چون باید دو کار را پشت سر هم انجام دهد، لذا متوجه می‌شویم که با اصل

ضرب مواجه‌ایم:

$$\text{تعداد حالت‌های مسیر رفت} = 4 \times 5 = 20$$

شخص در مسیر برگشت، نمی‌تواند از مسیرهایی که رفته استفاده کند، لذا بین B و C یک مسیر و بین A و B هم یک مسیر حذف می‌شود و چنین می‌نویسیم:

$$\text{تعداد حالت‌های مسیر برگشت} = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{تعداد کل حالت‌های رفت و برگشت} = 20 \times 12 = 240$$

نکته در سؤالاتی که موضوع آن‌ها آزمون‌های چند گزینه‌ای است اگر پاسخ‌دادن به همه سؤالات الزامی باشد، برای یافتن تعداد کل حالت‌های پاسخگویی باید تعداد گزینه‌ها را به توان تعداد سؤالات برسانیم.

ولی اگر پاسخگویی به همه سؤالات الزامی نباشد، برای یافتن تعداد کل حالت‌ها باید تعداد گزینه‌ها را به علاوه یک کرده جواب را به توان تعداد سؤالات برسانیم.

تست اگر بخواهیم به یک آزمون چهار گزینه‌ای با ۱۰ سؤال پاسخ دهیم، چند حالت مختلف خواهیم داشت؟ (پاسخ گویی به همه سؤالات الزامی است).

$$2^{10} (4)$$

$$10^4 (3)$$

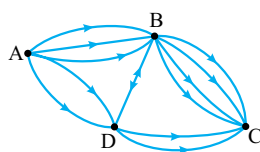
$$4^8 (2)$$

$$2^{10} (1)$$

پاسخ گزینه ۲

$$2^{10} = (2^2)^5 = 4^5 = \text{تعداد سؤالات (تعداد گزینه‌ها) = تعداد حالت‌ها}$$

اگر در همین سؤال گفته می‌شد پاسخگویی به همه سؤالات الزامی نیست جواب برابر با 5^{10} می‌شد.



نکته در بسیاری از مسائل، از اصول جمع و ضرب به طور هم‌زمان استفاده می‌شود. مثلاً به شکل روبه‌رو

توجه کنید: فرض کنید شخصی می‌خواهد از شهر A به C سفر کند. او ۴ مسیر کلی را می‌تواند انتخاب کند.

مسیر ABC یا ABDC یا ADC یا ADBC حالا فرد هر مسیری را که انتخاب کند، باید حالت‌های

مختلف بین شهرها را در هم ضرب کند:

$$ABC \text{ مسیر } 3 \times 4 = 12$$

$$ADC \text{ مسیر } 2 \times 2 = 4$$

$$ABDC \text{ مسیر } 3 \times 1 \times 2 = 6$$

$$ADBC \text{ مسیر } 2 \times 1 \times 4 = 8$$

لذا تعداد کل حالت‌ها برابر با 30 می‌باشد.

نماد فاکتوریل

فرض کنید n عددی طبیعی باشد $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

یعنی برای یافتن فاکتوریل یک عدد طبیعی باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود ضرب کنیم، مثلاً داریم:

$$2! = 2 \times 1 = 2 \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \quad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ضمناً توجه کنید که: $0! = 1$ و $1! = 1$

تذکر اگر نخواهیم فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم، کافی است هر جا که متوقف می‌شویم علامت فاکتوریل بگذاریم؛ مثلاً:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$$

$$10! = 10 \times 9!$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3!$$

معمولاً در کسرهای این اتفاق می‌افتد؛ یعنی لازم نیست تمام عددهایی را که فاکتوریل دارند تا ۱ باز کنیم؛ مثلاً در کسر $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ کافی است

را ۲ مرحله باز کنیم تا به مخرج برسیم (چون $n+3$ بزرگ‌تر از $n+1$ است):

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2)$$

تست در کدام گزینه، یک تساوی نادرست داریم؟

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n^2 + n \quad (4)$$

$$(3!)! - 2! = 718 \quad (3)$$

$$\frac{8!}{3!2!5!} = 24 \quad (2) \quad \sqrt{0!} + \sqrt{1!} + \sqrt{4!+1} = 7 \quad (1)$$

پاسخ گزینه ۲

$$1) \sqrt{0!} + \sqrt{1!} + \sqrt{4!+1} = \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{24+1} = 1+1+5=7$$

$$2) \frac{8!}{3!2!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 28$$

$$3) (3!)! - 2! = (6)! - 2! = 720 - 2 = 718$$

$$4) \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} = (n+1) \times n = n^2 + n$$

تست حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(x^2 - 13) = 6$ کدام است؟

- ۱۶ (۱) -۱۶ (۲) ۲۵ (۳) -۲۵ (۴)

پاسخ گزینه ۲ فاکتوریل یک عبارت، برابر با ۶ شده؛ پس آن عبارت باید ۳ باشد؛ چون می‌دانیم که $3! = 6$ است:

$$x^2 - 13 = 3 \Rightarrow x^2 = 16 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 4 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = (+4)(-4) = -16$$

جایگشت

مفهوم جایگشت: افراد، اعداد، اشیا و ... به صورت‌های مختلف می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. به هر یک از حالت‌های ممکن برای قرار گرفتن n شیء متمایز در کنار هم، یک جایگشت از آن n شیء می‌گوییم. به عنوان مثال می‌خواهیم جایگشت‌های ارقام ۱ و ۲ و ۳ را بنویسیم؛ یعنی می‌خواهیم تمام اعداد سه‌رقمی که با این ارقام می‌توان ساخت را بنویسیم. این اعداد عبارت‌اند از:

۱۲۳، ۱۳۲، ۲۳۱، ۲۱۳، ۳۱۲، ۳۲۱

پس ملاحظه می‌کنیم که ۶ عدد ۳ رقمی یا ۶ جایگشت ۳ رقمی ساخته شد. بدون نوشتن تمام جایگشت‌ها نیز می‌توانیم تعداد آن‌ها را تعیین کنیم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$ مثلاً تعداد جایگشت‌های مختلف که با حروف کلمه «AMIR» می‌توان ساخت برابر $4! = 24$ است. با:

تست تعداد جایگشت‌های چند شیء متمایز برابر ۱۲۰ می‌باشد. تعداد این اشیا کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ گزینه ۲ اگر تعداد اشیا n فرض کنیم، خواهیم داشت:

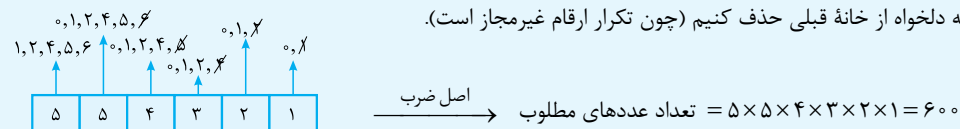
$$n! = 120 \Rightarrow n = 5 \text{ (می‌دانیم } 5! \text{ برابر } 120 \text{ می‌شود)}$$

نکته در بسیاری از مسائل، بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و ... از روش پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم. در این مسائل اگر شرط خاصی مثل زوج یا فرد بودن عدد مطرح شد، باید ابتدا اولین خانه سمت راست را پر کنیم و سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ برویم و خانه‌ها را از چپ به راست پر کنیم. (البته هر مسئله، شرط خاص خودش دارد ولی فهمیدن این که از کجا شروع به پرکردن فونه‌ها کنیم با کمی تمرین کاملاً براتون می‌فته)

تست با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

- ۳۰۰ (۱) ۵۰۰ (۲) ۶۰۰ (۳) ۷۰۰ (۴)

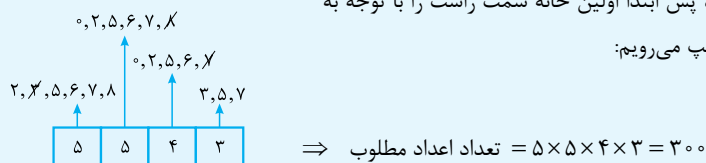
پاسخ گزینه ۳ شرط خاصی برای عدد شش‌رقمی ذکر نشده (جز این که رقم‌ها تکراری نباشند)، پس پرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم. فقط توجه کنید که اولین رقم سمت چپ عدد نمی‌تواند با صفر شروع شود، ضمناً پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه بعدی می‌رویم، باید یک رقم استفاده‌شده را به دلخواه از خانه قبلی حذف کنیم (چون تکرار ارقام غیرمجاز است).



تست با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۸ چند عدد فرد چهاررقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

- ۱۵۰ (۱) ۲۰۰ (۲) ۳۰۰ (۳) ۳۵۰ (۴)

پاسخ گزینه ۳ عددی فرد است که یکانش فرد باشد، پس ابتدا اولین خانه سمت راست را با توجه به این موضوع پر می‌کنیم، سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می‌رویم:



نکته اگر صفر جزء ارقام داده‌شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد، باید دو حالت جداگانه تشکیل دهیم. یکی وقتی که یکان صفر باشد و دیگری وقتی که یکان صفر نباشد.

تست با ارقام ۰, ۲, ۴, ۵, ۶, ۷, ۹ چند عدد ۴ رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۳۴۰ (۴)

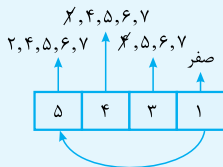
۲۸۲ (۳)

۲۰۴ (۲)

۱۸۴ (۱)

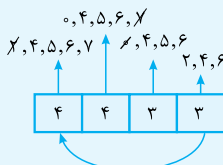
پاسخ گزینه ۲ طبق نکته گفته شده باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم:

حالت اول



$$\Rightarrow \text{تعداد عددها} = 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$$

حالت دوم

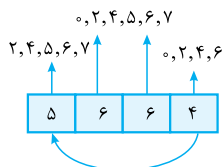


$$\Rightarrow \text{تعداد عددها} = 4 \times 4 \times 3 \times 3 = 144$$

طبق اصل جمع

$$\rightarrow \text{تعداد کل عددهای خواسته شده} = 60 + 144 = 204$$

تذکر اگر در تست بالا ذکر می شد که تکرار رقمها مجاز است نباید هیچ عددی را خط می زدیم و فقط با یک حالت به جواب می رسیدیم:



$$\Rightarrow \text{تعداد عددها} = 5 \times 6 \times 6 \times 4 = 720$$

کنار هم قرار گرفتن چند شیء خاص

گاهی اوقات می خواهیم افراد یا اشیاء یا حروف یا ارقام خاصی همیشه کنار هم باشند. در این گونه سوالات آن اشیاء یا افراد را یک مجموعه به هم چسبیده فرض می کنیم؛ یعنی آن ها را داخل یک بسته قرار می دهیم؛ سپس تعداد اشیای بیرون بسته و خود بسته را شمرده با فاکتوریل می نویسیم و آن را در تعداد اشیای داخل بسته با فاکتوریل ضرب می کنیم. مثلاً می خواهیم با حروف کلمه *mafluk* کلماتی بسازیم که در آن ها حروف *m* و *a* همواره کنار هم باشند:

$$\boxed{m,a} f, l, u, k \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$$

توجه دارید که بیرون بسته ۴ شیء (۴ حرف) وجود داشت که به همراه خود بسته برابر ۵ شد که با فاکتوریل نوشتیم. سپس تعداد اشیاء (حروف) داخل بسته را شمردیم که ۲ تا بود و نوشتیم ۲!

تست با ارقام ۱, ۲, ۴, ۵, ۶, ۷, ۹ چند عدد ۷ رقمی می توان ساخت به طوری که در تمام این اعداد، رقم های فرد کنار هم قرار گیرند؟

(تکرار ارقام مجاز نیست.)

۴۷۶ (۲)

۲۷۶ (۱)

۵۷۶ (۴)

۶۷۶ (۳)

پاسخ گزینه ۲ رقم های فرد را کنار هم و در داخل یک بسته قرار می دهیم:

$$\boxed{1,5,7,9}, 2,4,6 \Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = 4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$$

۱ شیء

البته توجه کنید اگر حروف یا ارقام داخل بسته، یکسان بودند نباید اشیای داخل را شمارش کنیم.

تست با حروف کلمه «NAAMDARAAN» چند کلمه ۱۰ حرفی می توان ساخت به طوری که در همه آن ها حروف یکسان، کنار هم قرار

داشته باشند؟

۵! × ۴! (۴)

۵! × ۵! × ۲! (۳)

۱۸۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

$$\boxed{AAAAA} \boxed{NN} M D R \Rightarrow \text{تعداد کلمات خواسته شده} = 5! = 120$$

۱ بسته ۱ بسته

پاسخ گزینه ۱

توجه کنید که الان دیگر نباید داخل مستطیل ها را بشماریم چون در داخل مستطیل اول، همگی A و مستطیل دوم همگی N هستند و جابه جایی A ها با هم و N ها با هم، تغییری ایجاد نمی کند.

در نظر بگیرید که n شیء متمایز موجود است و می‌خواهیم r شیء از آن‌ها را به شرطی انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم، مهم باشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء را با $P(n, r)$ نشان داده و آن را ترتیب r شیء از n شیء می‌نامیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad n \geq r$$

تست از بین ۶ کارمند می‌خواهیم نفر اول را به عنوان مدیر، نفر دوم را به عنوان معاون و نفر سوم را به عنوان دفتردار انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱۸۰ (۴)

۱۴۰ (۳)

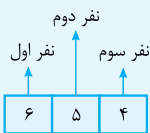
۱۲۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

پاسخ گزینه ۲: ترتیب انتخاب افراد مهم است، زیرا نفر اول، نفر دوم و نفر سوم هر کدام سمت‌های مختلفی دارند، پس در واقع باید به کمک فرمول بالا، ۳ نفر را از بین ۶ نفر انتخاب کنیم:

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

البته به جای استفاده از فرمول $P(n, r)$ می‌توانیم از روش پرکردن خانه‌ها نیز استفاده کنیم:



$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

تست تعداد ترتیب‌های n شیء از ۵ شیء برابر است با تعداد ترتیب‌های $(n-1)$ شیء از ۵ شیء، مربع کدام است؟

۲۵ (۴)

۴۹ (۳)

۳۶ (۲)

۱۰۰ (۱)

$$P(5, n) = P(5, n-1) \Rightarrow \frac{5!}{(5-n)!} = \frac{5!}{(5-(n-1))!}$$

$$\Rightarrow \frac{5!}{(5-n)!} = \frac{5!}{(5-n+1)!} \Rightarrow (5-n)! = (5-n+1)! \Rightarrow (5-n)! = (5-n) \cdot (5-n)! \Rightarrow 5-n+1 = 5-n \Rightarrow n=5 \Rightarrow n^2=25$$

مسائل ترکیب در نظر بگیرید که n شیء متمایز وجود دارد و می‌خواهیم r شیء از آن‌ها انتخاب کنیم به شرطی که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم مهم نباشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده و آن را ترکیب r شیء از n شیء می‌نامیم و فرمول آن به صورت مقابل است:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}, \quad n \geq r$$

تست در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی وجود دارد و ۹ نفر در لیست انتظار قرار دارند. به چند حالت می‌توان ۴ نفر را سوار هواپیما کرد؟

۱۲۶ (۴)

۱۱۰ (۳)

۱۰۸ (۲)

۱۰۰ (۱)

پاسخ گزینه ۲: در مورد ترتیب انتخاب این ۴ مسافر برای سوار کردنشان به هواپیما تأکیدی نشده پس باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{(9-4)! \times 4!} = \frac{9!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

تست ۷ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. تعداد چهارضلعی‌هایی که با این ۷ نقطه می‌توان ساخت کدام است؟

۶۵ (۴)

۴۰ (۳)

۳۵ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ گزینه ۲: باز هم با یک مسئله ترکیب مواجه‌ایم. چون می‌دانید که چهارضلعی ABCD مثلاً با BCAD فرقی ندارد؛ یعنی وقتی چهار نقطه را به عنوان رأس‌های چهارضلعی انتخاب می‌کنیم، دیگر جابه‌جایی آن‌ها با هم، چهارضلعی جدیدی ایجاد نمی‌کند، لذا خواهیم داشت:

$$\text{تعداد چهارضلعی‌ها} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \times 4!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!} = 35$$

تذکره اگر در همین سؤال گفته می‌شد چند وتر می‌توان ساخت، جواب برابر با $\binom{7}{2}$ می‌شد و اگر گفته می‌شد چند مثلث می‌توان ساخت، جواب برابر با $\binom{7}{3}$ می‌شد.

نکته تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$. در این جا از فرمول ترکیب استفاده کرده‌ایم، چون می‌دانیم در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا با هم تأثیری ندارد و مجموعه جدیدی تشکیل نمی‌شود.

تست مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۵ (۴)

پاسخ گزینه ۲ مجموعه A دارای ۷ عضو است، پس تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی آن برابر است با:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

انتخاب اجباری گاهی اوقات مجبوریم ۱ یا چند شیء یا فرد را حتماً جزء انتخابمان قرار دهیم. فرض کنید بخواهیم از بین n شیء متمایز r شیء را انتخاب کنیم به طوری که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند، تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد. چون واضح است که k شیء قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید $r-k$ شیء باقی‌مانده را از بین $n-k$ شیء انتخاب کرد.

تست تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $A = \{m, n, p, z, x, y, f\}$ به شرطی که همه آن‌ها شامل x, y باشند، کدام است؟

۱۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۰ (۴)

پاسخ گزینه ۲ ۲ انتخاب اجباری x و y داریم، پس خواهیم نوشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{7-2}{4-2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

روش‌های حل سریع ترکیب: در خیلی از موارد نیازی نیست از فرمول ترکیب به شکل $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$ به طور معمول استفاده کنیم، بدون اثبات از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم تا سرعت حل کردن مسائل ترکیب را بالا ببریم:

- ۱ اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ اعداد r و n برابر باشند جواب حتماً برابر ۱ است: $\binom{n}{n} = 1 \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{6}{6} = 1, \binom{1}{1} = 1$
- ۲ اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ عدد r برابر صفر باشد جواب حتماً برابر ۱ است: $\binom{n}{0} = 1 \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{3}{0} = 1, \binom{200}{0} = 1$
- ۳ اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ عدد r برابر ۱ باشد جواب خود n است: $\binom{n}{1} = n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{4}{1} = 4, \binom{25}{1} = 25$
- ۴ اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ اختلاف r و n برابر ۱ باشد آن‌گاه جواب برابر n است: $\binom{n}{n-1} = n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{5}{4} = 5, \binom{28}{27} = 28$
- ۵ اگر ترکیب به شکل $\binom{n}{2}$ باشد، خواهیم داشت: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

تست به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد، به طوری که حداقل ۳ زن انتخاب شوند؟

۵۰ (۱) ۶۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۵ (۴)

پاسخ گزینه ۱ کلاً ۴ زن وجود دارند، پس حداقل ۳ زن یعنی باید ۳ زن یا ۴ زن انتخاب شوند. می‌دانید حرف «یا» به معنی استفاده از اصل جمع است:

$$\begin{array}{c} \text{۲ مرد و ۴ زن یا ۳ مرد و ۳ زن} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \binom{5}{4} \times \binom{4}{3} + \binom{5}{3} \times \binom{4}{2} = 4 \times 10 + 10 \times 6 = 80 \end{array}$$

تعداد کل حالت‌ها

سعی کنید جواب‌های دو ترکیب $\binom{5}{2}$ و $\binom{5}{3}$ را حفظ کنید، چون با آن‌ها زیاد سروکار داریم (جواب هر دوی آن‌ها به کمک فرمول ترکیب برابر با ۱۰ می‌شود).

۱- از بین ۱۰ کشور اروپایی، ۶ کشور آسیایی و ۳ کشور آمریکای شمالی می‌خواهیم یک کشور را برای سفر به این کشورها انتخاب کنیم. چند حالت برای سفر به این کشور خواهیم داشت؟

- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۲- فرض کنید یک دانشجو می‌خواهد ۱ درس عمومی از بین ۳ درس عمومی ارائه‌شده و ۱ درس اختصاصی از بین ۴ درس اختصاصی ارائه‌شده انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۳- به چند طریق می‌توانیم فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس از بین ۵ خودکار آبی، قرمز، سبز، مشکی و سفید و ۸ مداد با رنگ‌های متمایز و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های مختلف انتخاب کنیم؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۶ (۳) ۱۶۰ (۴) ۱۲

۴- یک کارخانه تولید خودرو، خودروهایی در ۷ رنگ، ۳ حجم موتور، ۲ نوع گیربکس و ۲ نوع مختلف داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب خواهد داشت؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۸۴ (۳) ۲۸ (۴) ۱۲۰

۵- یک تاس و ۳ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تاس عدد اول آمده کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۸۴

۶- تعداد راه‌های ممکن برای پاسخ‌دادن به تعدادی سؤال ۴ گزینه‌ای برابر 6^{125} است. تعداد سؤالات کدام گزینه است؟ (پاسخ‌دادن به سؤالات الزامی نیست.)

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۸

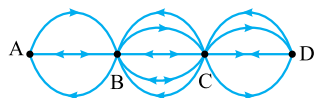
۷- تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به یک آزمون ۳ سؤالی که هر سؤال ۲ گزینه دارد چند برابر تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به یک آزمون ۳ سؤالی ۴ گزینه‌ای است؟ (پاسخ‌گویی به همه سؤالات الزامی است.)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) ۸

۸- یک دانش‌آموز در کنکور سراسری رشته انسانی، به ۲۸۰ سؤال موجود در دفترچه‌ها به چند طریق می‌تواند پاسخ دهد؟ (پاسخ‌گویی به همه سؤالات الزامی نیست.)

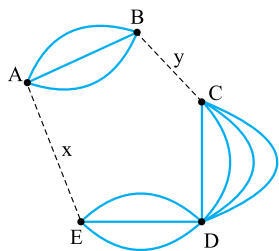
- (۱) 4^{280} (۲) 2^{280} (۳) 5^{280} (۴) 28^{50}

۹- بین ۴ شهر A، B، C و D مطابق شکل زیر، راه‌های ارتباطی وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از A به D برویم و برگردیم به شرطی که در مسیر رفت از راه‌های دوطرفه و در مسیر برگشت از راه‌های یک‌طرفه استفاده کنیم؟



- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۰- اگر تعداد راه‌ها از شهر A به E را با x و از B به C را با y نمایش دهیم و فردی به ۲۴ حالت مختلف بتواند از A به D سفر کند، حاصل $x + 4y$ کدام است؟



- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

فاکتوریل

۱۱- چه تعداد از روابط زیر، درست هستند؟ (n عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ است)

- (الف) $3 \times 4! = 12!$ (ب) $10! - 3! = 7!$

- (پ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n^2 + n$ (ت) $(0!)^2 = (1!)^2$

- (ث) $\sqrt{9!} = 3!$ (ج) $n! = n(n-1)(n-2)!$

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۲- اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ باشد حاصل $(n+2)!$ کدام است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۶ (۳) ۲۴ (۴) ۷۲۰



۱۳- اگر $\frac{(x+2)!}{(x+1)!} = 4$ باشد، آنگاه حاصل $2x$ کدام است؟

- ۱۴- معادله $(x^2 - 4)! = 1$ چند ریشه دارد؟
- ۱۵- معادله $(x^2 - x + 1)! = 24$ چند ریشه حقیقی دارد؟

جایگشت (ساختن کلمات و اعداد)

- ۱۶- چند عدد ۳ رقمی بخش پذیر بر ۵ و متشکل از رقم‌های فرد وجود دارد؟
- ۱۷- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
- ۱۸- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد چهار رقمی و فرد بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟
- ۱۹- چند عدد پنج رقمی زوج با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ می توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)
- ۲۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می توان نوشت؟ (با تکرار ارقام)
- ۲۱- با ارقام موجود در مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ ، چند عدد پنج رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها، می توان نوشت؟
- ۲۲- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)
- ۲۳- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد ۳ رقمی کوچک تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
- ۲۴- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد چهار رقمی بخش پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها، می توان نوشت؟
- ۲۵- چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است.)
- ۲۶- چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ با ارقام مختلف می توان نوشت؟
- ۲۷- چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟
- ۲۸- چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیر صفر است؟
- ۲۹- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد کوچک تر از ۷۰۰ می توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)
- ۳۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۵۰۰۰۰ می توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)
- ۳۱- چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که رقم دهگان آن، عددی اول باشد؟
- ۳۲- عدد ۳۸۵۲۹۴ چند جایگشت دارد به طوری که ارقام فرد همواره کنار هم باشند؟
- ۳۳- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد ۳ رقمی بزرگ تر از ۳۳۰ بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟

۳۴- با ارقام ۱, ۴, ۵, ۸, ۰, چند عدد ۳ رقمی مضرب ۱۰ و بزرگتر از ۴۰۰ می توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

(۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۶

۳۵- با تمام ارقام فرد طبیعی یک رقمی، چند عدد ۵ رقمی مضرب ۵ و بزرگتر از ۷۰۰۰۰ می توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

(۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۱۸ (۴) ۴۸

۳۶- با ارقام ۰, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۰۰۰ و کوچکتر از ۶۰۰۰ می توان ساخت؟ (تکرار ارقام غیر مجاز است.)

(۱) ۱۸۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۴) ۸۰

۳۷- چند عدد ۴ رقمی طبیعی فرد وجود دارد که رقم یکان هزار آن ها فرد نباشد؟

(۱) ۱۰۰۰ (۲) ۱۵۰۰ (۳) ۲۰۰۰ (۴) ۲۵۰۰

۳۸- چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ می توان ساخت به طوری که ارقام ۵ و ۶ در آن ها به کار رفته و در کنار هم باشند؟ (بدون تکرار ارقام)

(۱) ۳۶ (۲) ۱۲ (۳) ۷۲ (۴) ۲۴

۳۹- تعداد جایگشت های ۶ حرفی کلمه «Suarez» که در آن ها حروف صدادار و بی صدا یکی در میان قرار بگیرند کدام است؟ (تکرار حروف غیر مجاز است.)

(۱) ۴۲ (۲) ۷۲ (۳) ۶۴ (۴) ۸۲

۴۰- ۴ فرد با نام های A, B, C و D می خواهند به ترتیب در یک همایش سخنرانی کنند به چند حالت امکان پذیر است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۴۸

۴۱- با حروف کلمه «تمساح» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «ت» شروع و به «ح» ختم شوند؟

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۶

۴۲- با حروف کلمه «earth» چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که حتماً شامل حرف h باشد؟ (تکرار حروف، غیر مجاز است.)

(۱) ۳۶ (۲) ۹۶ (۳) ۴۸ (۴) ۱۲۰

۴۳- تعداد جایگشت های حروف کلمه «DAMDARAN» به شرط آن که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند کدام است؟ (سراسری ۸۳)

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۳۶۰

۴۴- پلاک اتومبیل سواری در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{***ب***}$ می باشد که هر ستاره، نمایش یک رقم غیر صفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟ (سراسری ۸۲)

(۱) ۱۱۶۶۴ (۲) ۱۴۵۸۰ (۳) ۱۵۴۸۰ (۴) ۱۸۲۲۵

۴۵- با حروف کلمه «دلبرانه» چند کلمه ۷ حرفی می توان ساخت به طوری که در همه آن ها عبارت «دلبر» به همین شکل مطرح شود؟

(۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶

۴۶- حروف کلمه «ASSIST» را به چند طریق می توان بدون توجه به مفهوم کنار هم قرار داد که حروف «S» یک در میان باشند؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۴۷- تعداد جایگشت های کلمه «MAHSUS» که در آن ها بین دو حرف S دقیقاً یک حرف دیگر وجود داشته باشد کدام است؟

(۱) ۴۸ (۲) ۹۶ (۳) ۱۱۸ (۴) ۲۴۰

۴۸- با حروف کلمه «DANESH» چند رمز عبور چهار حرفی می توان ساخت به طوری که حرف S در هر رمز باشد؟ (سراسری ۹۷)

(۱) ۲۴۰ (۲) ۲۵۰ (۳) ۲۶۰ (۴) ۲۷۰

۴۹- با حروف کلمه «همسر خوب» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که در آن ها دو حرف «س» و «ب» کنار هم نیامده باشند؟

(۱) ۸۸۰ (۲) ۱۲۰۰ (۳) ۲۵۰۰ (۴) ۳۶۰۰

۵۰- با حروف کلمه «ملک پوری» چند کلمه ۴ حرفی (با معنی یا بی معنی) می توان نوشت به طوری که تمام حروف آن ها بدون نقطه باشند و همه آن ها به «ر» ختم شوند؟ (تکرار حروف جایز نیست.)

(۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) ۶ (۴) ۸

ترتیب و ترکیب

۵۱- مقدار کدام عبارت زیر با $n!$ برابر است؟

(۱) $C(n, 0)$ (۲) $C(n, 1)$ (۳) $P(n, n-1)$ (۴) $P(n, 0)$

۵۲- ۱۲ نفر دانش آموز نمونه، به چند روش می توان سه نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه انتخاب کرد؟

(۱) ۱۳۲۰ (۲) ۶۶۰ (۳) ۳۳۰ (۴) ۲۲۰

۵۳- از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دسته ۵ تایی شامل ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می توان انتخاب کرد؟ (سراسری ۸۱)

(۱) ۲۴۱۰ (۲) ۲۴۲۰ (۳) ۲۵۲۰ (۴) ۲۵۴۰

۵۴- در جعبه‌ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد به چند طریق می‌توان ۳ مهره از این جعبه خارج کرد؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۱۰

۵۵- روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه وجود دارد. چه تعداد مثلث با این نقاط می‌توان تشکیل داد؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۸۰

۵۶- به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه با تعداد یکسان تقسیم کرد؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۶۰ (۳) ۷۲ (۴) ۹۰

۵۷- در یک دوره بازی فوتبال بین ۸ تیم، بازی‌ها به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند در پایان دوره، چند بازی انجام خواهد شد؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۲۸ (۳) ۳۸ (۴) ۴۶

۵۸- می‌خواهیم از بین ۴ کودک، ۵ نوجوان و ۷ جوان یک گروه سرود ۵ نفره تشکیل دهیم به چند حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم به شرط آن که حداقل ۳ نفر از آن‌ها نوجوان باشند؟

- (۱) ۱۰۸ (۲) ۱۲۰ (۳) ۵۶۰ (۴) ۶۰۶

۵۹- به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد به طوری که حداکثر ۳ زن انتخاب شوند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۵۰ (۴) ۷۴

۶۰- در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند به طوری که ۳ نفر آن‌ها مجاز به رانندگی باشند؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۷۵ (۴) ۸۴

۶۱- دور یک میز گرد، ۶ نفر به چند طریق می‌توانند قرار گیرند به طوری که ۲ فرد موردنظر از آنان، همواره کنار یکدیگر باشند؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۹۶ (۴) ۱۲۰

۶۲- به چند طریق می‌توان از بین ۸ سؤال یک امتحان به ۵ سؤال پاسخ داد به شرط آن که پاسخ به ۲ سؤال اول، اجباری باشد؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۴۲ (۴) ۸۰

۶۳- مجموعه $A = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ مفروض است. مجموعه A چند زیرمجموعه ۴ عضوی و شامل عدد ۹ دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۶۴- تعداد زیرمجموعه‌های چهارعضوی مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ به طوری که شامل g و فاقد عضو f باشند، کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۲۸

۶۵- از بین ۵ کارمند حسابدار و ۳ کارمند تحویلدار به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که رئیس گروه حسابدار باشد؟

- (۱) ۸۵ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۱۰

۶۶- چندتا از زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ حتماً شامل اعضای ۷ و ۶ هستند؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۶۷- یک مجموعه n عضوی، ۵۵ زیر مجموعه $(n-2)$ عضوی دارد. n کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۶۸- اگر $P(n, 2) - C(n, 2) = 36$ باشد حاصل $C(n, 6)$ کدام است؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۶ (۴) ۱۰۸

۶۹- مقدار $\frac{P(n, r)}{P(n+1, r+1)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{n+1}$ (۲) $\frac{r}{n}$ (۳) $\frac{1}{(n+1)!}$ (۴) $\frac{r+1}{n+1}$

۷۰- اگر ${}^2C(n, 5) = 3P(n-1, 4)$ باشد، حاصل $(n-176)!$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲۴ (۳) ۱۲۰ (۴) ۷۲۰

۷۱- با حروف کلمه «RANGIN» چند کلمه رمز ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۱۲۰

۷۲- تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی کلمه «MANSUR» که دو حرف M و N حتماً در آن‌ها وجود داشته باشد کدام است؟ (بدون تکرار حروف)

- (۱) ۴۸۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۱۱۲

(سراسری ۸۷)

۷۳- تعداد جایگشت‌های ۳ حرفی از حروف کلمه «SERESHT» کدام است؟

۶۰ (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۶ (۴)

۷۴- ۵ حرف از ۸ حرف کلمه «BUSINESS» را با جایگشت‌های متمایز کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد کلماتی که هر سه S در آن‌ها موجود باشند کدام است؟

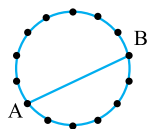
(سراسری ۹۲)

۱۵۰ (۱) ۱۶۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۲۴۰ (۴)

۷۵- به چند طریق می‌توان ۲ عدد از میان اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب کرد به طوری که مجموع آن‌ها فرد باشد؟

۹۰ (۱) ۱۰۰ (۲) $\binom{20}{2}$ (۳) $\binom{10}{2}$ (۴)

۷۶- با توجه به شکل زیر ۱۴ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. وتر AB هم رسم شده است. به چند طریق می‌توان یک چهارضلعی در یک طرف وتر و یک مثلث در طرف دیگر وتر ساخت؟ (چهارضلعی‌ها و مثلث‌ها شامل نقاط A و B نیستند).



۲۱۰ (۱) ۳۲۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۵۲۵ (۴)

۷۷- از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز که دوبه‌دو غیر هم

مدرسه‌ای باشند را انتخاب کرد؟

۱۶۰ (۱) ۳۲۰ (۲) ۶۴۰ (۳) ۴۸۰ (۴)

۱- گزینه ۳ فقط باید یک کشور را از بین ۳ گروه موجود انتخاب کنیم

پس متوجه می شویم که باید از اصل جمع استفاده کنیم:

$$۱۹ = ۱۰ + ۶ + ۳ = \text{تعداد حالت ها}$$

۲- گزینه ۲ این دانشجو هم می تواند درس عمومی بردارد و هم اختصاصی (به طور هم زمان) پس از اصل ضرب استفاده می کنیم و خواهیم داشت:

۳- گزینه ۲ در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و تأکید شده که فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان نویس می تواند انتخاب شود لذا از اصل جمع استفاده می کنیم:

۴- گزینه ۲ یک مشتری به طور هم زمان می تواند از بین هر نوع ویژگی خودرو، (رنگ، حجم موتور، گیربکس، داشبورد)، یکی را انتخاب کند، پس باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

$$۸۴ = ۷ \times ۳ \times ۲ \times ۲ = \text{تعداد انتخاب های مشتری}$$

۵- گزینه ۳ برای هر سکه ۲ حالت وجود دارد «رو» یا «پشت» پس برای ۳ سکه تعداد حالت ها برابر $۲^۳ = ۸$ می باشد. از طرفی در تاس، اعداد اول عبارتند از ۲، ۳ و ۵ که تعداد آن ها ۳ تا است. لذا طبق اصل ضرب تعداد کل حالت ها برابر است با:

۶- گزینه ۲ تعداد سؤالات را x فرض می کنیم:
تعداد سؤالات (۱ + تعداد گزینه ها) = تعداد حالت های پاسخگویی
 $x^{۱۸} = ۵^x \Rightarrow (۵^۳)^۶ = (۴+۱)^x \Rightarrow (۱۲۵)^۶ = (۴+۱)^x \Rightarrow x = ۱۸$

۷- گزینه ۳ سؤال داریم که هر سؤال ۲ گزینه دارد پس تعداد حالت های پاسخگویی به آن ها برابر است با:
از طرفی به ۳ سؤال با ۴ گزینه به $۴^۳ = ۶۴$ حالت می توان جواب داد لذا نسبت خواسته شده برابر است با:

۸- گزینه ۳ برای هر سؤال ۵ انتخاب وجود دارد، انتخاب یکی از ۴ گزینه و یا حل نکردن سؤال، لذا چون $۲۸^۰$ سؤال داریم تعداد حالت ها برابر است با: $۵^{۲۸۰}$.

۹- گزینه ۲ در مسیر رفت باید ۳ عمل مختلف را پشت سرهم انجام دهیم یعنی اول از A به B برویم، بعد از B به C و در نهایت از C به D، پس طبق اصل ضرب تعداد حالت های هر عمل را در هم ضرب می کنیم. در مسیر برگشت هم باید ۳ عمل مختلف را انجام دهیم و از اصل ضرب استفاده می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} AB & BC & CD \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 \times 2 \times 1 = 2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} DC & CB & BA \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 \times 2 \times 1 = 2 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{رفت و برگشت: } 2 \times 2 = 4$$

۱۰- گزینه ۲ برای رفتن از A به D دو مسیر کلی وجود دارد یکی ABCD و دیگری AED:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} AB & BC & CD \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{مسیر ABCD: } 2 \times 3 \times 4 = 24 \\ \text{مسیر AED: } 3 \times 3 = 9 \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} 3x + 12y = 24$$

حالا تمام جملات رابطه بالا را بر ۳ تقسیم می کنیم:

$$3x + 12y = 24 \xrightarrow{\div 3} x + 4y = 8$$

۱۱- گزینه ۲ در چهار عمل اصلی، نمی توانیم حاصل را بدون باز کردن فاکتوریل، به دست آوریم پس روابط (الف)، (ب) قطعاً نادرست هستند. همچنین دقت کنید که نمی توانیم از یک عددی که نماد فاکتوریل دارد و زیر رادیکال است بدون محاسبه جذر بگیریم؛ یعنی رابطه $\sqrt{9!} = 3!$ نادرست است. (بدون توجه به فاکتوریل، فقط از ۹ جذر گرفته شده) یعنی ابتدا باید حاصل ۹! را حساب کرد سپس از آن جذر گرفت. روابط (پ) و (ت) را اثبات می کنیم:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n^2 + n$$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{cases} \Rightarrow (0!)^2 = (1!)^2$$

قسمت (ج) هم درست است چون می دانیم در باز کردن یک عدد که فاکتوریل دارد هر جا متوقف شدیم باید علامت (!) بگذاریم.

۱۲- گزینه ۳ $(n+1)$ از $(n-1)$ بزرگ تر است، پس $(n+1)!$ را باز می کنیم تا به $(n-1)!$ برسیم:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow n(n+1) = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه می کنیم}} (n+3)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -3 \text{ (غ قق)} \\ n = 2 \text{ (قق)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n+2)! = (2+2)! = 4! = 24$$

۱۳- گزینه ۲ $(x+2)$ بزرگ تر از $(x+1)$ است پس صورت کسر را باز می کنیم تا به مخرج برسیم:

$$\frac{(x+2)!}{(x+1)!} = 4 \Rightarrow \frac{(x+2)(x+1)!}{(x+1)!} = 4 \Rightarrow x+2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 4 - 2 = 2$$

پس حاصل $2x$ برابر است با: $2 \times 2 = 4$

۱۴- گزینه ۲ می دانیم $0! = 1$ و $1! = 1$ پس از معادله $(x^2 - 4)! = 1$ جذر

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 2$$

$$x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm \sqrt{5}$$

پس معادله موردنظر، دارای ۴ جواب است.

۱۵- گزینه ۱ می دانیم حاصل $4!$ برابر با ۲۴ می شود پس عبارت داخلی پیرانتز باید ۴ شود:

$$x^2 - x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 1 + 12 = 13$$

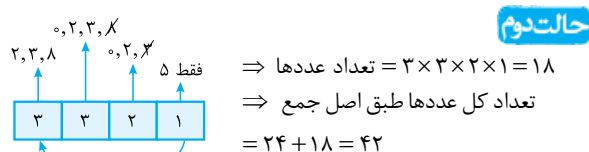
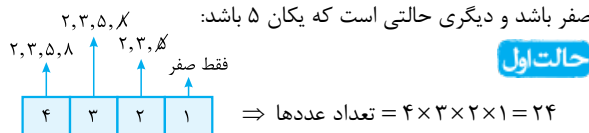
دلتا مثبت شده است پس معادله بالا ۲ ریشه حقیقی دارد. (نیاز به حل معادله نیست، چون فقط تعداد ریشه ها خواسته شده)

۱۶- گزینه ۲ باید با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ اعداد سه رقمی بخش پذیر بر ۵ بسازیم.

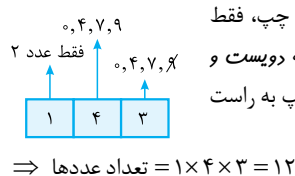
فرض بر این است که تکرار ارقام مجاز است (در متن سؤال، محدودیتی ذکر نشده) پس خواهیم نوشت:

$$\Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = 5 \times 5 \times 1 = 25$$

۲۲- گزینه ۲ صفر جزء رقم‌ها است و تکرار ارقام، غیرمجاز است پس باید دو حالت جداگانه برای حل در نظر بگیریم یکی حالتی است که یکان صفر باشد و دیگری حالتی است که یکان ۵ باشد:



۲۳- گزینه ۱ می‌خواهیم عدد موردنظر کوچک‌تر از ۴۰۰ باشد پس اولین رقم سمت چپ، نمی‌تواند ۴ یا ۷ یا ۹ باشد زیرا اعداد حاصل، بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌شوند پس اولین رقم سمت چپ، فقط می‌تواند ۲ باشد (یعنی عدد حاصل می‌شود دو رقمی و فردی) پس نحوه پر کردن خانه‌ها از چپ به راست و به شکل مقابل است:



۲۴- گزینه ۳ یکان اعدادی که بر ۵ بخش‌پذیرند، صفر یا ۵ است. تعداد آن‌ها را در دو حالت حساب و با هم جمع می‌کنیم. در هر دو حالت زیر، ترتیب پر کردن خانه‌ها به صورت زیر است:

یکان، هزارگان، صدگان، دهگان

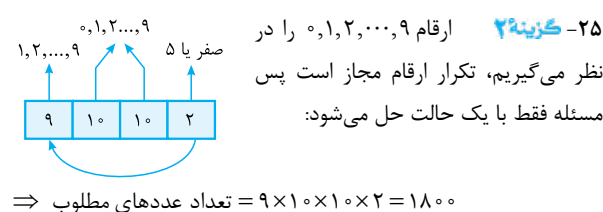
$$\leftarrow \text{یکان} \times \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{5}{10} = 60$$

و ۵ نمی‌تواند باشد

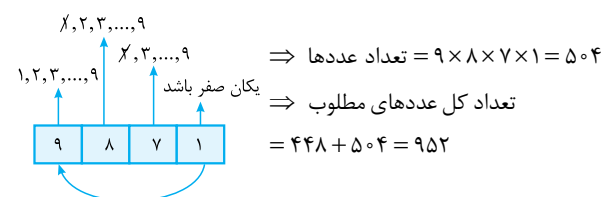
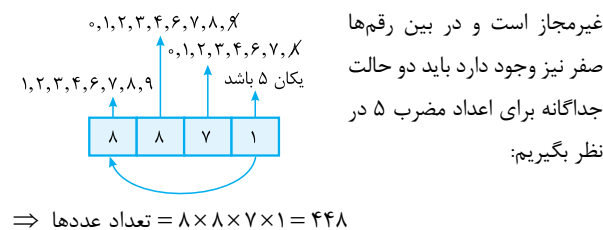
$$\text{یکان} \times \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = 48$$

پس در کل $60 + 48 = 108$ عدد با این ویژگی می‌توان نوشت.

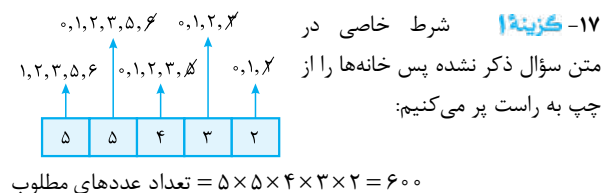
۲۵- گزینه ۲ ارقام ۰، ۱، ۲، ...، ۹ را در نظر می‌گیریم، تکرار ارقام مجاز است پس مسئله فقط با یک حالت حل می‌شود:



۲۶- گزینه ۲ ارقام ۰، ۱، ۲، ...، ۹ را در نظر می‌گیریم. چون تکرار ارقام غیرمجاز است و در بین رقم‌ها صفر نیز وجود دارد باید دو حالت جداگانه برای اعداد مضرب ۵ در نظر بگیریم:

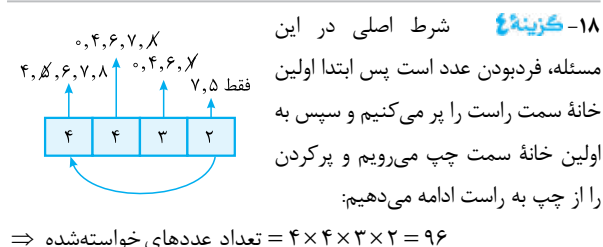


۱۷- گزینه ۱ شرط خاصی در متن سؤال ذکر نشده پس خانه‌ها را از چپ به راست پر می‌کنیم:

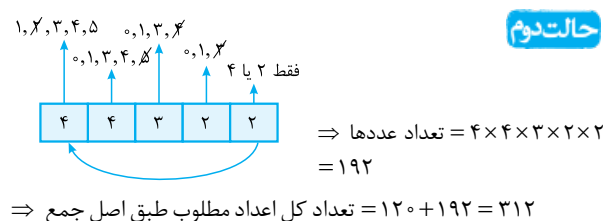
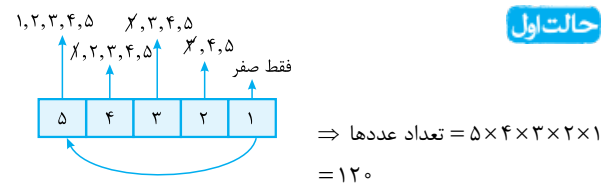


دقت دارید که در اولین خانه سمت چپ، رقم صفر نمی‌تواند قرار بگیرد چون هیچ عددی با صفر شروع نمی‌شود ولی از صفر در خانه‌های بعدی می‌توان استفاده کرد.

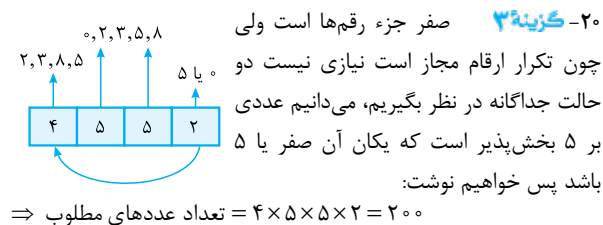
۱۸- گزینه ۲ شرط اصلی در این مسئله، فرد بودن عدد است پس ابتدا اولین خانه سمت راست را پر می‌کنیم و سپس به اولین خانه سمت چپ می‌رویم و پر کردن را از چپ به راست ادامه می‌دهیم:



۱۹- گزینه ۳ چون صفر جزء رقم‌ها است و تکرار ارقام غیرمجاز است باید دو حالت جداگانه برای حل مسئله در نظر بگیریم یکی وقتی که یکان صفر باشد و دیگری وقتی که یکان رقم زوجی به جز صفر باشد:



۲۰- گزینه ۳ صفر جزء رقم‌ها است ولی چون تکرار ارقام مجاز است نیازی نیست دو حالت جداگانه در نظر بگیریم، می‌دانیم عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که یکان آن صفر یا ۵ باشد پس خواهیم نوشت:



۲۱- گزینه ۳ از خانه‌ای شروع به پر کردن می‌کنیم که محدودیت بیشتری دارد. چون قرار است عدد فرد باشد، پس محدودیت فقط برای رقم یکان است (یکان باید فرد باشد).

در این‌جا ترتیب پر شدن خانه‌ها به صورت مقابل است: یکان، ده‌هزارگان، هزارگان، صدگان، دهگان

یکی از ارقام ۱ و ۷ باید در یکان باشد، پس یکان ۲ حالت دارد:

$$\frac{2}{\text{یکان}} \times \frac{1}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{صدگان}} \times \frac{1}{\text{هزارگان}} \times \frac{1}{\text{ده‌هزارگان}} = \frac{2}{10000}$$

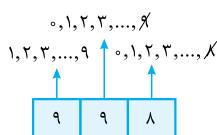
حالا از ۵ عدد باقی‌مانده یکی را در ده‌هزارگان قرار می‌دهیم:

$$\frac{2}{\text{یکان}} \times \frac{1}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{صدگان}} \times \frac{1}{\text{هزارگان}} \times \frac{1}{\text{ده‌هزارگان}} = \frac{2}{10000}$$

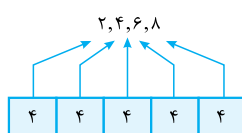
رقم هزارگان ۴ حالت، رقم صدگان ۳ حالت و رقم دهگان ۲ حالت دارد:

$$\frac{2}{\text{یکان}} \times \frac{2}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{هزارگان}} \times \frac{1}{\text{ده‌هزارگان}} = 240$$

۲۷- گزینه ۳ می‌توانیم از تمام ارقام ۰, ۱, ۲, ..., ۹ استفاده کنیم فقط صفر در اولین خانه سمت چپ نمی‌تواند قرار گیرد.
 $\Rightarrow$ تعداد عددها $= 9 \times 9 \times 8 = 648$



۲۸- گزینه ۴ باید از ارقام ۲, ۴, ۶ و ۸ برای پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم ضمناً تکرار ارقام مجاز است چون محدودیتی ذکر نشده است:



$$\Rightarrow \text{تعداد عددها} = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$$

۲۹- گزینه ۲ در صورت سؤال، در مورد چندرقمی بودن عدد مطلوب چیزی گفته نشده، پس خودمان باید حالت‌های مناسب را در نظر بگیریم:

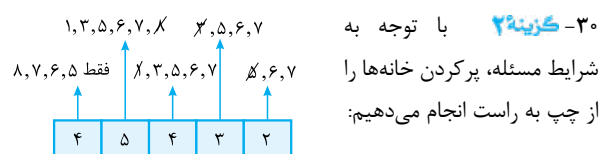
$$\text{تعداد} = 4 \Rightarrow \text{اعداد یک‌رقمی همگی کوچکتر از } 4, 5, 6, 7 \text{ هستند.}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد} = 12 \Rightarrow \text{اعداد دورقمی همگی کوچکتر از } 4, 5, 6, 7 \text{ هستند.}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد} = 18 \Rightarrow \text{اعداد سترقمی اگر بخواهند کوچکتر از } 700 \text{ باشند، نباید با } 7 \text{ شروع شوند.}$$

$$\Rightarrow \text{طبق اصل جمع} \Rightarrow \text{تعداد کل کلمات مطلوب} = 4 + 12 + 18 = 34$$

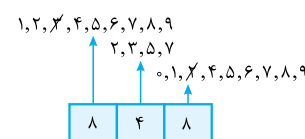
۳۰- گزینه ۲ با توجه به شرایط مسئله، پرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:



$$\Rightarrow \text{تعداد عددهای خواسته شده} = 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 480$$

توجه کنید که پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه بعدی رفته‌ایم یک رقم دلخواه از خانه قبلی را خط زده‌ایم. مثلاً در خانه دوم از چپ، به دلخواه عدد ۸ را که در خانه اول از چپ استفاده شده خط زده‌ایم. شما به جای ۸ می‌توانید ۵ یا ۶ یا ۷ را خط بزنید هیچ فرقی ندارد.

۳۱- گزینه ۳ ابتدا باید خانه دهگان را پر کنیم چون شرط اصلی سؤال در مورد آن است سپس خانه سمت چپ و در نهایت خانه سمت راست را پر می‌کنیم:



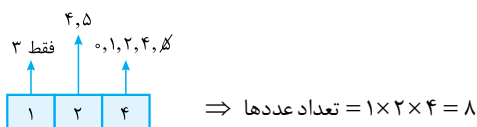
$$\Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = 8 \times 4 \times 8 = 256$$

۳۲- گزینه ۴ ارقام فرد عبارت‌اند از ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ و چون می‌خواهیم همیشه کنار هم باشند آن‌ها را داخل یک بسته قرار می‌دهیم. پس خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \text{تعداد جایگشت‌ها} = 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

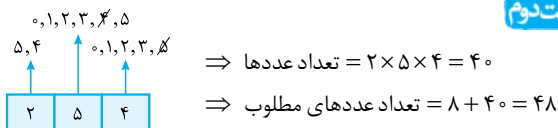
۳۳- گزینه ۳ باید دو حالت جداگانه برای حل این سؤال در نظر بگیریم یکی وقتی که اولین خانه سمت چپ ۳ باشد و دیگری وقتی اولین خانه سمت چپ ۴ یا ۵ باشد.

حالت اول



$$\Rightarrow \text{تعداد عددها} = 1 \times 2 \times 4 = 8$$

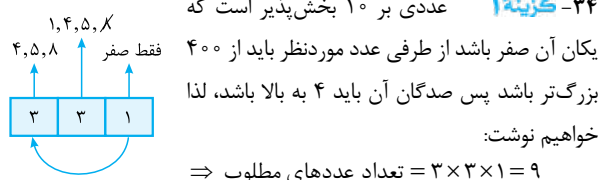
حالت دوم



$$\Rightarrow \text{تعداد عددها} = 2 \times 5 \times 4 = 40$$

$$\Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = 8 + 40 = 48$$

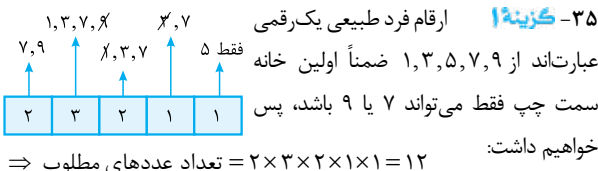
۳۴- گزینه ۱ عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر است که



یکان آن صفر باشد از طرفی عدد موردنظر باید از ۴۰۰ بزرگ‌تر باشد پس صدگان آن باید ۴ به بالا باشد، لذا خواهیم نوشت:

$$\Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

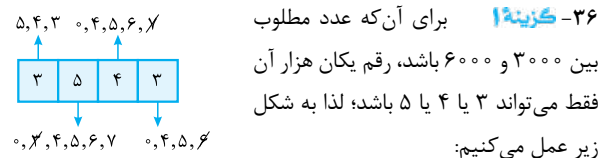
۳۵- گزینه ۱ ارقام فرد طبیعی یک‌رقمی عبارت‌اند از ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ ضمناً اولین خانه



سمت چپ فقط می‌تواند ۷ یا ۹ باشد، پس خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$$

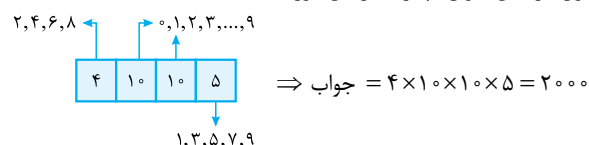
۳۶- گزینه ۱ برای آن که عدد مطلوب



بین ۳۰۰۰ و ۶۰۰۰ باشد، رقم یکان هزار آن فقط می‌تواند ۳ یا ۴ یا ۵ باشد؛ لذا به شکل زیر عمل می‌کنیم:

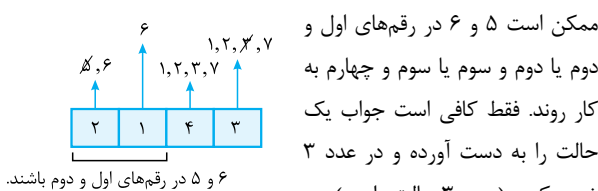
$$\Rightarrow \text{جواب} = 3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$$

۳۷- گزینه ۳ اولاً یکان عدد باید از بین ارقام ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ انتخاب شود تا عدد، فرد محسوب شود. ثانیاً در رقم یکان هزار، باید از ارقام ۲, ۴, ۶, ۸ استفاده کنیم. برای دهگان و صدگان محدودیتی ذکر نشده، پس می‌توانند از بین ارقام صفر تا ۹ انتخاب شوند (توجه کنید که تکرار ارقام مجاز است؛ چون در متن سؤال، چیزی در این مورد گفته نشده است).



$$\Rightarrow \text{جواب} = 4 \times 10 \times 10 \times 5 = 2000$$

۳۸- گزینه ۳ رقم‌های ۵ و ۶ را چسبیده به هم فرض می‌کنیم. حال

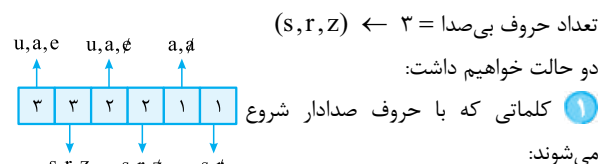


۵ و ۶ در رقم‌های اول و دوم باشند.

$$\Rightarrow \text{تعداد عددها} = 2 \times 1 \times 4 \times 3 = 24$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل عددهای مطلوب} = 24 \times 3 = 72$$

۳۹- گزینه ۲ تعداد حروف صدادار $3 \leftarrow (u, a, e)$



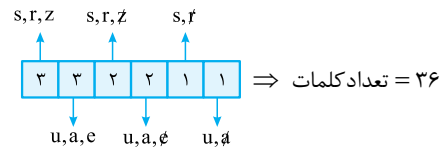
تعداد حروف بی‌صدا $3 \leftarrow (s, r, z)$

دو حالت خواهیم داشت:

۱) کلماتی که با حروف صدادار شروع می‌شوند:

$$\Rightarrow \text{تعداد کلمات} = 36$$

کلماتی که با حروف بی صدا شروع می‌شوند:

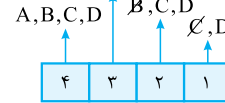


تعداد کلمات = ۳۶

۴۰- گزینۀ ۳ روش اول ترتیب انتخاب افراد مهم است پس از فرمول

$n!$ استفاده می‌کنیم. $n! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ تعداد حالت‌ها

روشن‌دوم می‌توانیم از روش پرکردن



خانه‌ها استفاده کنیم: $\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها = $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

۴۱- گزینۀ ۲ چون کلمه «تمساح»

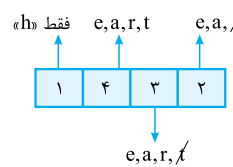
فارسی است بهتر است خانه‌ها را از راست



به چپ پُر کنیم: $\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب = $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 1 = 6$

۴۲- گزینۀ ۲ ابتدا فرض می‌کنیم حرف h در اولین جایگاه سمت چپ

قرار داشته باشد، ضمناً تکرار حروف غیرمجاز است؛ لذا خواهیم داشت:



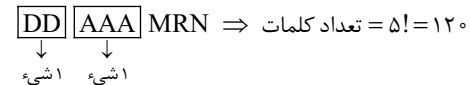
ولی حرف h در جایگاه‌های دیگر هم می‌تواند قرار گیرد؛ یعنی h می‌تواند در هر

۴ خانه قرار گیرد، پس داریم: $\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب = $24 \times 4 = 96$

۴۳- گزینۀ ۱ حرف‌های D را کنار هم و حرف‌های A را نیز کنار هم

قرار می‌دهیم و آن‌ها را داخل بسته‌هایی قرار می‌دهیم سپس هر بسته را ۱

شیء در نظر می‌گیریم:



توجه کنید که دیگر داخل بسته‌ها را نمی‌شماریم چون حروف داخل هر

بسته، یکسان هستند و جابه‌جایی آن‌ها با هم کلمه جدیدی ایجاد نمی‌کند.

۴۴- گزینۀ ۲ به جای ستاره‌ها، خانه رسم می‌کنیم اولین رقم سمت

چپ باید فرد باشد (۱,۳,۵,۷,۹) ولی اولین رقم سمت راست باید زوج

باشد (۲,۴,۶,۸) بقیه خانه‌ها

محدودیتی ندارند پس می‌توانند هر

یک از ارقام ۱ تا ۹ را اختیار کنند ضمناً

تکرار ارقام مجاز است، بنابراین:

$\Rightarrow$ تعداد پلاک‌ها = $5 \times 9 \times 9 \times 9 \times 4 = 14580$

۴۵- گزینۀ ۳ عبارت «دلبر» را یک بسته فرض می‌کنیم و حواسمان هست

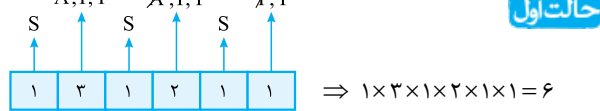
که حروف موجود در «دلبر» نمی‌توانند با هم جابه‌جا شوند، پس خواهیم

داشت: $\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب = $4! = 24$

دلبر ۱ شیء

۴۶- گزینۀ ۲ حالت وجود دارد. کلماتی که با S شروع می‌شوند و

کلماتی که با S شروع نمی‌شوند:



حالت دوم $\Rightarrow 3 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$

تعداد کل کلمات خواسته‌شده = $6 + 6 = 12$

۴۷- گزینۀ ۲ ابتدا باید جایگاه دو حرف S را در کلمات مختلفی که

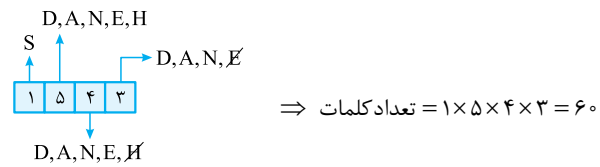
ساخته می‌شود مشخص کنیم:

۱	S	۴	S	۳	۲	۱
۲	۴	S	۳	S	۲	۱
۳	۴	۳	S	۲	S	۱
۴	۴	۳	۲	S	۱	S

پس Sها چهار حالت مختلف خواهند داشت و جواب نهایی برابر می‌شود با:

$\Rightarrow$ تعداد کل کلمات مطلوب = $4 \times 4! = 96$

۴۸- گزینۀ ۱ ابتدا فرض می‌کنیم اولین حرف سمت چپ، حرف S باشد:



ولی S می‌تواند در خانه‌های دیگر هم باشد پس در کل S می‌تواند در هر

یک از ۴ خانه قرار گیرد لذا جواب به دست آمده را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم:

$\Rightarrow$ تعداد کل کلمات خواسته‌شده = $60 \times 4 = 240$

۴۹- گزینۀ ۲ ابتدا تعداد کل کلمات ۷ حرفی که با حروف داده‌شده

می‌توان ساخت به دست می‌آوریم: $\Rightarrow$ تعداد کل کلمات

حالا تعداد کلماتی را می‌یابیم که در آن‌ها «س» و «ب» کنار هم باشند:

$\Rightarrow$ تعداد کلمات = $6! \times 2! = 720 \times 2 = 1440$

اشیء

اگر جواب‌های دو حالت بالا را از هم کم کنیم، تعداد کلماتی به دست می‌آید

که در آن‌ها «س» و «ب» کنار هم نیستند (در واقع از روش متمم‌گیری

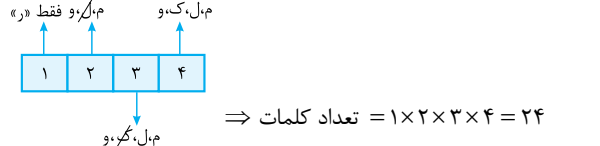
استفاده کرده‌ایم). $\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب = $5040 - 1440 = 3600$

۵۰- گزینۀ ۱ حروف بدون نقطه عبارت‌اند از: م، ل، ک، ر، و.

ولی توجه کنید که حرف آخر باید «ر» باشد. هم‌چنین می‌دانید «ی» هر

جای کلمه (به جز آخر کلمه) استفاده شود، نقطه‌دار خواهد بود؛ پس «ی»

کلاً حذف می‌شود. حرف «پ» هم که نقطه‌دار است و کنار می‌رود. لذا داریم:



۵۱- گزینۀ ۳ $C(n,0) = \frac{n!}{(n-0)! \times 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$$C(n,1) = \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

پس ۲۸ بازی در مرحله رفت انجام می‌شود. از طرفی می‌دانیم تعداد بازی‌ها در مرحله برگشت با مرحله رفت مساوی است پس در مرحله برگشت هم ۲۸ بازی انجام می‌شود و در کل $۲۸ + ۲۸ = ۵۶$ بازی صورت می‌گیرد.

۵۸- گزینه ۴ باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم چون بعد از انتخاب افراد موردنظر، جابه‌جایی آن‌ها با هم هیچ تأثیری ندارد و گروه جدیدی ایجاد نمی‌کند:

$$\begin{aligned} & \text{انتخاب ۲ نفر از ۱۱ کودک و جوان} \times \text{انتخاب ۳ نفر از ۵ نوجوان} \\ & = \binom{11}{2} \times \binom{5}{3} \\ & \text{انتخاب ۵ نفر از ۵ نوجوان} + \text{انتخاب ۱ نفر از ۱۱ کودک و جوان} + \text{انتخاب ۴ نفر از ۵ نوجوان} \\ & = \binom{5}{5} + \binom{11}{1} \times \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \\ & = \frac{5!}{5! \times 3!} \times \frac{11!}{9! \times 2!} + 5 \times 11 + 1 \\ & = \frac{5 \times 4 \times 3!}{1 \times 3!} \times \frac{11 \times 10 \times 9!}{9! \times 2!} + 55 + 1 = 10 \times 55 + 55 + 1 = 606 \end{aligned}$$

۵۹- گزینه ۴ پس از این که این ۶ نفر را انتخاب کنیم، جابه‌جایی آن‌ها با هم، گروه جدیدی ایجاد نمی‌کند. پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. حداکثر ۳ زن، یعنی ۳ زن یا ۲ زن یا ۱ زن یا هیچ زن. ولی اگر هیچ زنی انتخاب نشود، باید هر ۶ نفر مرد باشند که غیرممکن است (چون کلاً ۵ مرد وجود دارد).

$$\begin{aligned} & \text{۵ مرد و ۱ زن} + \text{۴ مرد و ۲ زن} + \text{۳ مرد و ۳ زن} \\ & \text{تعداد حالت‌ها} = \binom{4}{3} \times \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \times \binom{5}{3} + \binom{4}{1} \times \binom{5}{4} \\ & = (4 \times 10) + (6 \times 10) + (4 \times 1) = 74 \end{aligned}$$

۶۰- گزینه ۲ ابتدا باید راننده را از بین ۳ نفر که مجاز به رانندگی هستند، انتخاب کنیم:

$$\begin{aligned} & \text{تعداد حالت‌ها برای انتخاب راننده} = \binom{3}{1} = 3 \\ & \text{اکنون ۴ نفر دیگر باید به ۴! طریق کنار هم بنشینند، لذا طبق اصل ضرب داریم:} \\ & 3 \times 4! = 3 \times 24 = 72 \end{aligned}$$

۶۱- گزینه ۲

نکته تستی تعداد جایگشت‌های n شخص، دور یک میز دایره‌ای برابر با $(n-1)!$ است؛ چون مکان نشستن نفر اول مهم نیست.

دو نفری که قرار است کنار هم قرار بگیرند (مثلاً A و B) را در یک بسته قرار می‌دهیم:

A, B, C, D, E, F
↓
۱ شیء

پس می‌توان فرض کرد ۵ نفر داریم که می‌خواهیم آن‌ها را دور یک میز گرد قرار دهیم. این کار به $(5-1)!$ ، یعنی $4!$ حالت امکان‌پذیر است. ولی خود A و B می‌توانند به $2!$ طریق با هم جابه‌جا شوند؛ لذا طبق اصل ضرب داریم:

$$2! \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

۶۲- گزینه ۲ دو انتخاب اجباری وجود دارد، پس خواهیم داشت:

$$\text{تعداد حالت‌های پاسخگویی} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

$$\text{۳} \quad P(n, n-1) = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-n+1)!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

$$\text{۴} \quad P(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

۵۲- گزینه ۱ چون گفته شده این سه نفر باید در سه مورد متمایز فعالیت کنند، پس ترتیب انتخاب‌ها مهم است و باید از فرمول $P(n, r)$ یا روش پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم، روش پرکردن خانه‌ها ساده‌تر است:

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

۵۳- گزینه ۳ باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم چون پس از انتخاب کتاب‌ها، جابه‌جایی آن‌ها مهم نیست:

$$\begin{aligned} & \text{تعداد حالت‌ها} = \binom{10}{2} \times \binom{8}{3} = \frac{10!}{8! \times 2!} \times \frac{8!}{5! \times 3!} \\ & = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = 45 \times 56 = 2520 \end{aligned}$$

۵۴- گزینه ۲ وقتی ۳ مهره را انتخاب کنیم دیگر جابه‌جایی آن‌ها با هم اهمیتی ندارد یعنی ترتیب در این مسئله مهم نیست لذا از فرمول ترکیب بهره می‌گیریم، تعداد کل مهره‌ها برابر $4 + 6 = 10$ تا است پس در واقع می‌خواهیم ۳ مهره را از بین ۱۰ مهره انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

۵۵- گزینه ۳ با هر ۳ نقطه که روی محیط یک دایره باشند یک مثلث ساخته می‌شود از طرفی مثلثی مثل ABC فرقی با BAC و CAB ندارد؛ یعنی جابه‌جایی سه رأس یک مثلث با هم، مثلث جدیدی ایجاد نمی‌کند پس باید از ترکیب استفاده کنیم:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

۵۶- گزینه ۴ ترتیب پخش اسباب‌بازی بین بچه‌ها مهم نیست؛ پس از ترکیب استفاده می‌کنیم. به بچه اول ۲ اسباب‌بازی از بین ۶ اسباب‌بازی می‌دهیم که تعداد حالت‌های این کار $\binom{6}{2}$ است. حالا به سراغ بچه دوم می‌رویم. الان باید از بین ۴ اسباب‌بازی تا را انتخاب کنیم که به $\binom{4}{2}$ طریق امکان‌پذیر است. در نهایت ۲ اسباب‌بازی باقی ماند که باید به بچه سوم داده شود؛ یعنی به $\binom{2}{2}$ حالت این کار هم انجام می‌شود. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 15 \times 6 \times 1 = 90$$

۵۷- گزینه ۱ تعداد حالت‌هایی که دو تیم را از بین ۸ تیم برای بازی رفت با هم می‌توان انتخاب کرد عبارت‌اند از:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 28$$

$$\frac{P(n, r)}{P(n+1, r+1)} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{(n+1)!}{((n+1)-(r+1))!}} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{(n+1)!}{(n-r)!}}$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1) \times n!} = \frac{1}{n+1}$$

یک مرحله
بازش می‌کنیم

روش دوم عددگذاری: r و n را دو عدد طبیعی دلخواه فرض می‌کنیم ولی توجه کنید که r کوچک‌تر از n باشد، مثلاً r را ۲ و n را ۳ فرض می‌کنیم:

$$\frac{P(n, r)}{P(n+1, r+1)} = \frac{P(3, 2)}{P(4, 3)} = \frac{\frac{3!}{(3-2)!}}{\frac{4!}{(4-3)!}} = \frac{3!}{4 \times 3!} = \frac{1}{4}$$

حالا در گزینه‌ها نیز عددگذاری را انجام می‌دهیم تا به جواب $\frac{1}{4}$ برسیم:

همین گزینه درست است. $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

۷۰- گزینه ۲ می‌دانیم که:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ و } C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

حالا به کمک دو فرمول بالا عبارت‌های داده‌شده در متن معادله را باز می‌کنیم:

$${}^2C(n, 5) = {}^3P(n-1, 4) \Rightarrow 2 \times \frac{n!}{(n-5)!5!} = 3 \times \frac{(n-1)!}{(n-1-4)!}$$

$$\Rightarrow \frac{2(n)(n-1)!}{(n-5)!5!} = \frac{3(n-1)!}{(n-5)!} \Rightarrow \frac{2n}{5!} = 3$$

$$\Rightarrow 2n = 3 \times 5! \Rightarrow 2n = 3 \times 120 \Rightarrow n = \frac{3 \times 120}{2} = 180$$

$$\Rightarrow (n-176)! = (180-176)! = 4! = 24$$

۷۱- گزینه ۲ دو حالت خواهیم داشت:

۱) کلماتی که سه حرف آن‌ها متمایزند که تعدادشان برابر است با:

R, A, N, G, I

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 60$$

۲) کلماتی که شامل ۲ حرف N هستند در این صورت ۱ حرف دیگر از بین ۴ حرف R, A, G, I انتخاب می‌شود. تعداد این کلمات برابر است با:

$$\left(\frac{4}{1}\right) \times \frac{3!}{2!} = 4 \times 3 = 12 \Rightarrow 60 + 12 = 72 = \text{تعداد کل کلمات مطلوب}$$

۷۲- گزینه ۱ دو حرف M و N به همراه ۳ حرف دیگر، کلمات ۵ حرفی تشکیل می‌دهند که تعداد آن‌ها برابر ۵! است. از طرفی ۳ حرفی که در مورد آن‌ها صحبت شد باید از بین ۴ حرف انتخاب شوند (S, A, U و R) که این کار به $\left(\frac{4}{3}\right)$ حالت مختلف انجام می‌گیرد. در نهایت طبق اصل ضرب به جواب خواهیم رسید:

$$5! \times \left(\frac{4}{3}\right) = 120 \times 4 = 480 = \text{تعداد کلمات مطلوب}$$

۶۳- گزینه ۲ با یک انتخاب اجباری مواجه‌ایم چون می‌خواهیم عدد ۹ حتماً انتخاب شود لذا خواهیم داشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب} = \binom{5-1}{4-1} = \binom{4}{3} = 4$$

در درس‌نامه گفتیم که: $\binom{n}{n-1} = n$ مثلاً: $\binom{9}{8} = 9$ و $\binom{11}{10} = 11$

۶۴- گزینه ۱ عضو f را از مجموعه A کنار می‌گذاریم که در این صورت

۶ عضو باقی می‌ماند عضو g قبلاً انتخاب شده، پس باید از بین ۵ عضو باقی‌مانده ۳ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10$$

۶۵- گزینه ۲ رئیس گروه باید حسابدار باشد، پس باید از بین ۵

حسابدار انتخاب شود که تعداد حالت‌های آن $\binom{5}{1}$ می‌باشد، پس از انتخاب

رئیس گروه، ۲ نفر بعدی را می‌توانیم از بین ۷ نفر (۴ حسابدار باقی‌مانده و ۳ تحویلدار) انتخاب کنیم، که تعداد حالت‌های آن $\binom{7}{2}$ است.

طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{5}{1} \times \binom{7}{2} = \frac{5!}{4!1!} \times \frac{7!}{2!5!} = 5 \times 21 = 105$$

۶۶- گزینه ۳ با یک انتخاب اجباری مواجه‌ایم؛ یعنی از ۴ عضوی که

می‌خواهیم انتخاب کنیم، ۲ تا قبلاً انتخاب شده‌اند (اعضای ۶ و ۷)، پس حالا باید ۲ عضو باقی‌مانده را از بین اعضای $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10$$

۶۷- گزینه ۴ می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از یک مجموعه

n عضوی برابر با $\binom{n}{2}$ است، پس با توجه به اطلاعات مسئله خواهیم داشت:

$$\binom{n}{n-2} = 55 \xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{\text{امتحان کردن اعداد}} n = 11$$

فقط اگر $n = 11$ باشد، حاصل $\binom{n}{n-2}$ برابر ۵۵ می‌شود، زیرا:

$$\binom{n}{n-2} = \binom{11}{11-2} = \binom{11}{9} = \frac{11!}{2!9!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{2 \times 9!} = 55$$

۶۸- گزینه ۲ الان مجبوریم معادله داده‌شده را حل کنیم، چون مقدار

n خواسته نشده که از گزینه‌ها استفاده کنیم:

$$P(n, 2) - C(n, 2) = 36 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 36$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!} = 36$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{1} - \frac{n(n-1)}{2} = 36$$

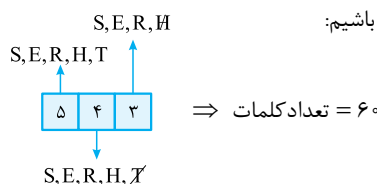
$$\xrightarrow[\text{در ۲ ضرب دو طرف}]{\quad} 2n(n-1) - n(n-1) = 72$$

$$\Rightarrow \underbrace{n^2 - n - 72}_\text{تجزیه می‌کنیم} = 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=9 \text{ (ق ق)} \\ n=-8 \text{ (غ ق)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(n, 6) = C(9, 6) = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 84$$

۷۳- گزینه ۳ باید ۳ حالت مختلف در نظر بگیریم:

۱ حروف تکراری نداشته باشیم:



۲ حرف S دو بار تکرار شود:

حروف E, R, H, T

$$\text{تعداد کلمات} = \binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

۳ حرف E دو بار تکرار شود:

حروف S, R, H, T

$$\text{تعداد کلمات} = \binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} = 12$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل کلمات مطلوب} = 60 + 12 + 12 = 84$$

۷۴- گزینه ۳ حرف S انتخاب شده‌اند، پس ۲ حرف دیگر از بین حروف E, I, N, U, B انتخاب می‌شوند، لذا خواهیم داشت:

$$\text{تعداد کلمات مطلوب} = \binom{5}{2} \times \frac{5!}{3!} = 10 \times 5 \times 4 = 200$$

شاید بپرسید کسر $\frac{5!}{3!}$ از کجا آمده؟ جواب این است که می‌خواهیم کلمات ۵ حرفی بسازیم پس تعداد آن‌ها برابر ۵! است ولی ۳ حرف تکراری وجود داد (حرف S سه بار تکرار شده) پس باید ۵! را بر ۳! تقسیم کنیم.

۷۵- گزینه ۲ می‌دانید که جمع دو عدد وقتی فرد است که یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد. ضمناً از ۱ تا ۲۰ تعداد اعداد فرد برابر ۱۰ و تعداد اعداد زوج هم برابر ۱۰ می‌باشد، لذا:

فرد زوج

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{10}{1} \times \binom{10}{1} = 10 \times 10 = 100$$

۷۶- گزینه ۴ می‌دانیم هر مثلث با داشتن ۳ رأس و هر چهار ضلعی با داشتن ۴ رأس آن ساخته می‌شود، لذا داریم:

مثلث زیر وتر مثلث بالای وتر

$$\text{تعداد مثلث‌ها و چهارضلعی‌ها} = \binom{7}{3} \binom{5}{4} + \binom{5}{3} \binom{7}{4} = 35 \times 5 + 10 \times 35 = 525$$

چهارضلعی بالای وتر چهارضلعی زیر وتر

۷۷- گزینه ۳ ابتدا باید ۳ مدرسه از ۵ مدرسه را انتخاب کنیم. چون

ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست، از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. لذا تعداد حالت‌های این مرحله برابر $\binom{5}{3}$ است. حال باید از هر یک از مدارس انتخاب‌شده، فقط ۱ نفر را انتخاب کنیم که برابر می‌شود با $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$ پس طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} = \binom{5}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

انتخاب مدارس انتخاب دانش‌آموزان