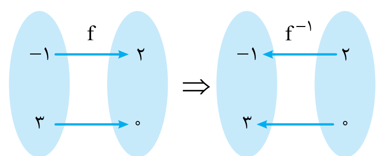
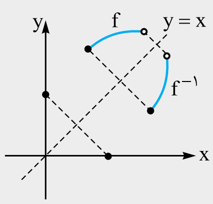
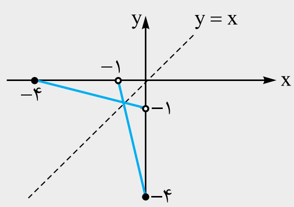
فهرست

		درس‌نامه	تست
مقدمات			
فصل اول **تابع**	**درس ۱:** معرفی توابع چندجمله‌ای و بررسی x^3	۱۲	۴۴
	درس ۲: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)	۱۵	۴۶
	درس ۳: ترکیب توابع	۲۱	۴۸
	درس ۴: انتقال نمودارها	۲۸	۵۴
	درس ۵: وارون تابع و تابع وارون	۳۵	۵۹
فصل دوم **مثلثات**	**درس ۱:** کمان‌های 2α	۶۷	۸۹
	درس ۲: تابع متناوب	۷۱	۹۲
	درس ۳: رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس	۷۳	۹۳
	درس ۴: تانژانت	۷۸	۹۸
	درس ۵: معادلهٔ مثلثاتی	۸۲	۱۰۰
فصل سوم **حد و پیوستگی**	**درس ۱:** تقسیم چندجمله‌ای‌ها	۱۰۶	۱۲۸
	درس ۲: همسایگی	۱۰۸	۱۲۹
	درس ۳: رفع ابهام صفرصفرم $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$	۱۱۰	۱۳۰
	درس ۴: حد بی‌نهایت	۱۱۷	۱۳۵
	درس ۵: حد در بی‌نهایت	۱۲۲	۱۳۸
فصل چهارم **مشتق**	**درس ۱:** آشنایی با مفهوم مشتق	۱۴۵	۱۷۸
	درس ۲: قواعد مشتق‌گیری	۱۴۹	۱۸۰
	درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده ـ ساده‌کردن)	۱۵۴	۱۸۴
	درس ۴: معادلهٔ خط مماس بر منحنی	۱۵۷	۱۸۷
	درس ۵: مشتق چپ و راست ـ مشتق‌گیری در حضور براکت و قدرمطلق	۱۶۰	۱۸۸
	درس ۶: پیوستگی و مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه)	۱۶۳	۱۹۱
	درس ۷: نقاط مشتق‌ناپذیر ـ نقاط گوشه‌ای ـ مماس قائم	۱۶۵	۱۹۲
	درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق	۱۶۹	۱۹۵
	درس ۹: مشتق تابع مرکب	۱۷۲	۱۹۷
	درس ۱۰: آهنگ تغییر	۱۷۵	۲۰۰

درس پنجم: وارون تابع و تابع وارون

وارون یک تابع

از سال یازدهم به یاد داریم که وارون تابع f را $f^{-۱}$ می‌نامیم و برای ساختن $f^{-۱}$، جای x و y را عوض می‌کنیم.
این‌ها را ببینید:

بازنمایی تابع	نحوهٔ وارون‌کردن	مثال
نمودار پیکانی	جهت پیکان‌ها را عوض می‌کنیم.	
زوج‌های مرتب	جای مؤلفه‌ها را عوض می‌کنیم.	$f=\{(-۱,۲),(۳,۰)\} \Rightarrow f^{-۱}=\{(۲,-۱),(۰,۳)\}$
مقدار در یک نقطه	به جای $f(a)=b$ می‌نویسیم $f^{-۱}(b)=a$.	$f(۴)=۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲)=۴$
نمودار مختصاتی	نمودار را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم.	 
رابطهٔ بین x و y	جای x و y را عوض کنیم.	$f:\ y=x^۳ \Rightarrow f^{-۱}:\ x=y^۳$ $g:\ x+۲y=۵ \Rightarrow g^{-۱}:\ y+۲x=۵$

تست اگر $f=\{(۲,-۱),(۳,۱),(۰,۲),(۱,۰)\}$ و $g=\{(۱,-۱),(۲,۰),(-۱,۳),(-۳,۴)\}$، آن‌گاه $y=(g^{-۱}+f^{-۱})(x)$ شامل کدام زوج مرتب است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(-۱,۳)$ ۴) $(-۱,۴)$

پاسخ ۳ با عوض‌کردن جای مؤلفه‌های زوج مرتب‌ها، توابع $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

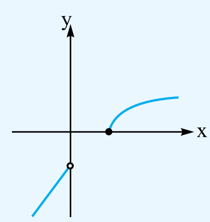
$$f^{-۱}=\{(-۱,۲),(۱,۳),(۲,۰),(۰,۱)\} \text{ و } g^{-۱}=\{(-۱,۱),(۰,۲),(۳,-۱),(۴,-۳)\}$$

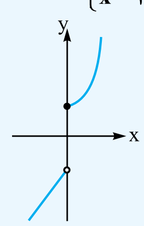
برای $f^{-۱}+g^{-۱}$ سراغ مؤلفه‌های اول مشترک می‌رویم. در بین xها، اعداد ۱− و صفر مشترک‌اند و در xهای مشترک مؤلفه‌های دوم را با هم جمع می‌کنیم:

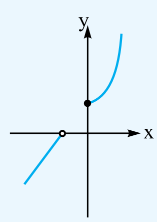
$$\begin{cases}(-۱,۱)\in g^{-۱}\\(-۱,۲)\in f^{-۱}\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع }y\text{ها}} (-۱,۳)\in g^{-۱}+f^{-۱} \quad \text{و} \quad \begin{cases}(۰,۲)\in g^{-۱}\\(۰,۱)\in f^{-۱}\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع }y\text{ها}} (۰,۳)\in g^{-۱}+f^{-۱}$$

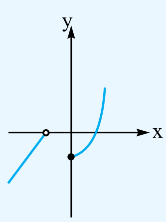
حالا تابع $g^{-۱}+f^{-۱}$ می‌شود: $g^{-۱}+f^{-۱}=\{(۰,۳),(-۱,۳)\}$

تست وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱} & x\ge ۱\\ x-۲ & x<۰\end{cases}$ به کدام شکل است؟

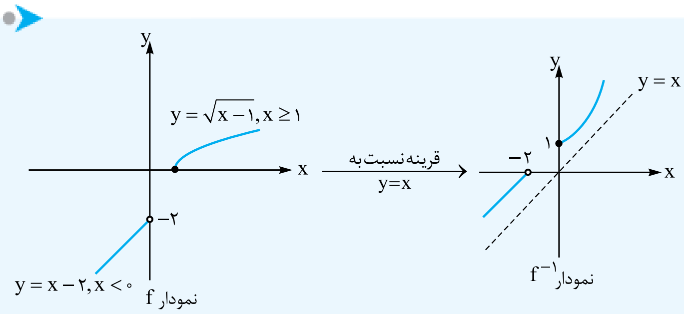
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ ۳ نمودار تابع f را رسم و نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم:



اشاره نقطهٔ $(1,0)$ روی محور x به نقطهٔ $(0,1)$ روی محور y نظیر می‌شود.

تابع وارون

وارون یک تابع ممکن است تابع باشد و یا تابع نباشد. این‌ها را ببینید:

(الف) $f=\{(1,2),(-1,3),(0,2)\} \Rightarrow f^{-1}=\{\underline{(2,1)},(3,-1),\underline{(2,0)}\}$

f تابع است اما f^{-1} تابع نیست چون دوتا زوج مرتب با مولفهٔ اولِ ۲ دارد. دقت کنید که چون تابع f دارای y تکراری بود، طبیعتاً f^{-1}، xهای تکراری خواهد داشت.

(ب) $f=\{(2,4),(-1,5),(0,1)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(4,2),(5,-1),(1,0)\}$

f تابع است و f^{-1} نیز تابع است. از اول هم معلوم بود که چون f، y تکراری ندارد، f^{-1} هم x تکراری نخواهد داشت.

حالا بگویید در چه صورت وارون یک تابع، تابع است؟ خب باید تابع خودمان y تکراری نداشته باشد یعنی یک‌به‌یک باشد.

نکته اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، f^{-1} نیز تابع است، در این صورت می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر است و به f^{-1} می‌گوییم تابع وارون و این‌طوری یاد بگیرید که جملات زیر معادل هم هستند.

(۱) f وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) است. (۲) f یک‌به‌یک است. (۳) وارون f، تابع است. (۴) f تابع وارون دارد.

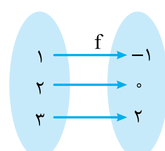
محاسبهٔ مقدار تابع وارون

برای پیداکردن $f^{-1}(b)$ باید از خودمان بپرسیم چه عددی رابطهٔ $f(a)=b$ را برقرار می‌کند. به بیان ساده‌تر $f^{-1}(b)$ از ما می‌پرسد به f چه عددی بدهیم تا جوابش b شود؟

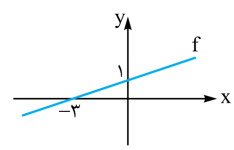
مثال در تابع‌های زیر مقدار $f^{-1}(2)$ را پیدا کنید.

(الف) $f=\{(2,1),(-1,4),(0,2),(4,1)\}$

(ب)



(پ)



(ت) $f(x)=4^{x-1}$

پاسخ (الف) در تابع f زوج مرتب $(0,2)$ داریم، پس در f^{-1} زوج مرتب $(2,0)$ وجود دارد و بنابراین $f^{-1}(2)=0$. یا این‌جوری می‌گوییم که اگر عدد صفر را به f بدهیم، ۲ می‌دهد پس در f^{-1}، ۲ را می‌گیرد و صفر می‌دهد.

(ب) تابع f عدد ۳ را به ۲ نظیر کرده پس f^{-1} عدد ۲ را به ۳ نظیر می‌کند یعنی $f^{-1}(2)=3$.

(پ) تابع f خط است و از $(0,1)$ و $(-3,0)$ می‌گذرد. پس معادلهٔ آن $f(x)=\frac{1}{3}x+1$ است. حالا $f^{-1}(2)$ از ما می‌پرسد به x چه عددی بدهیم تا $f(x)$ بشود ۲؟ خُب فکر کنید ... اگر $\frac{1}{3}x+1$ بخواهد ۲ بشود باید x چند باشد؟

$$\frac{1}{3}x+1=2 \Rightarrow \frac{1}{3}x=1 \Rightarrow x=3$$

پس $f^{-1}(2)=3$.

(ت) $f^{-1}(2)$ یعنی چه؟ یعنی در $f(x)=4^{x-1}$ مقدار x چه‌قدر باشد تا $f(x)$ بشود ۲. پس $f(x)$ را مساوی ۲ قرار می‌دهیم:

$$4^{x-1}=2 \Rightarrow (2^2)^{x-1}=2 \Rightarrow 2^{2x-2}=2^1 \Rightarrow 2x-2=1 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{یعنی}} f^{-1}(2)=\frac{3}{2}$$

اشاره باز هم تأکید کنیم که $f^{-1}(b)$ از ما می‌خواهد $f(x)=b$ قرار دهیم و x را پیدا کنیم.

اشاره در تابع‌های دوضابطه‌ای باید حواسمان به دامنهٔ f^{-1} (یعنی برد f) باشد و دقت کنیم که کدام ضابطه را استفاده می‌کنیم:

تست اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x}+۱ & x\geq ۱\\ \dfrac{۴}{x-۱} & x<۱\end{cases}$، مقدار $f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(-۱)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

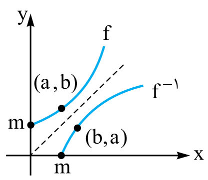
پاسخ:۱ $f^{-۱}(۳)$ یعنی به x چه عددی بدهیم تا حاصل f برابر ۳ شود. ضابطهٔ بالا می‌گوید $x=۸$ و اتفاقاً با دامنه‌اش هم مطابقت دارد. پس $f^{-۱}(۳)=۸$.

برای $f^{-۱}(-۱)$ از ضابطهٔ بالا $x=-۸$ درمی‌آید که قابل قبول نیست (چون دامنهٔ این ضابطه $x\geq ۱$ است)، اما از ضابطهٔ پایین، اگر $\dfrac{۴}{x-۱}$ را مساوی -۱ بگذاریم $x=-۳$ درمی‌آید که مناسب است. پس جواب می‌شود:

$$f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(-۱)=۸+(-۳)=۵$$

نکته

① اگر (a,b) نقطه‌ای روی نمودار f باشد (b,a) نقطهٔ متناظر آن روی نمودار $f^{-۱}$ است.



② اگر نمودار f محور xها را در m قطع کند، نمودار $f^{-۱}$ محور yها را در m قطع می‌کند و بالعکس.

تست اگر $f(x)=x+\sqrt[۳]{x}+m+۱$ و نقطهٔ $(۵,۱)$ روی نمودار $f^{-۱}$ باشد، نمودار $f^{-۱}$ محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $(۱,۰)$ ۲) $(۲,۰)$ ۳) $(۳,۰)$ ۴) $(۴,۰)$

پاسخ:۳ اول از این‌که $(۵,۱)$ روی $f^{-۱}$ است، نتیجه می‌گیریم $(۱,۵)$ روی نمودار f است؛ یعنی $f(۱)=۵$. پس داریم: $۱+\sqrt[۳]{۱}+m+۱=۵$ و بنابراین $m=۲$.

حالا قرار است $f^{-۱}$ محور طول‌ها را قطع کند پس دنبال نقطهٔ $(b,۰)$ روی $f^{-۱}$ هستیم. یعنی در تابع f، نقطهٔ $(۰,b)$ را می‌خواهیم.

$$\xrightarrow{m=۲} f(x)=x+\sqrt[۳]{x}+۳ \xrightarrow{x=۰} f(۰)=b=۳$$

پس $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۳,۰)$ می‌گذرد.

دامنه و برد تابع وارون

چون xهای $f^{-۱}$ همان yهای f هستند و بالعکس، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ همان برد تابع f است. همچنین برد تابع $f^{-۱}$ نیز همان دامنهٔ تابع f است. به زبان ریاضی داریم:

$$D_{f^{-۱}}=R_f \quad و \quad R_{f^{-۱}}=D_f$$

تست اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x^۲-x}$ باشد، برد $g(x)$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $\mathbb{R}-[۰,۱]$ ۳) $\mathbb{R}-(۰,۱)$ ۴) $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۲}\}$

پاسخ:۳ $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، پس برد آن برابر دامنهٔ تابع $f(x)$ است که می‌شود:

$$x^۲-x\geq ۰ \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccc} x & & ۰ & & ۱ & \\ \hline x^۲-x & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array} \qquad R_g=D_f=\mathbb{R}-(۰,۱)$$

تعیین ضابطهٔ تابع وارون

گفتیم که برای تعیین ضابطهٔ $f^{-۱}$، در ضابطهٔ تابع f جای x و y را عوض می‌کنیم. بعد باید عبارت حاصل را مرتب کنیم و یادمان نرود که دامنهٔ $f^{-۱}$، برد f بود. مثلاً وارون تابع با ضابطهٔ $y=۲x^۵-۱$ را می‌خواهیم. جای x و y را عوض می‌کنیم و به $x=۲y^۵-۱$ می‌رسیم. حالا آن را مرتب می‌کنیم:

$$x+۱=۲y^۵ \Rightarrow y^۵=\frac{x+۱}{۲} \Rightarrow y=\sqrt[۵]{\frac{x+۱}{۲}}$$

البته می‌توانستیم این‌طور هم بگوییم: اول x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=۲x^۵-۱ \Rightarrow x^۵=\frac{y+۱}{۲} \Rightarrow x=\sqrt[۵]{\frac{y+۱}{۲}}$$

و در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt[۵]{\frac{x+۱}{۲}}$$

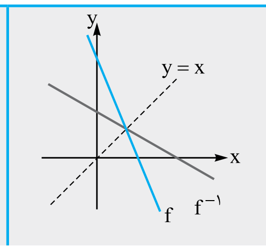
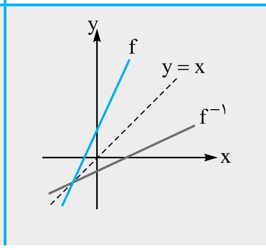
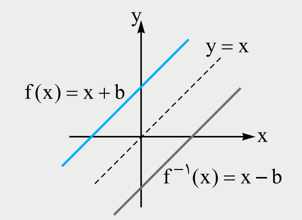
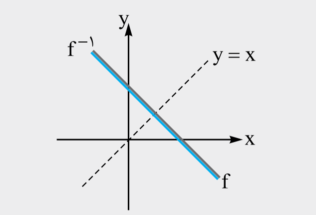
اول بریم سراغ تابع‌های مهم!

وارون تابع خطی

اگر $f(x)=y=ax+b$ باشد (با شرط $a\neq ۰$)، وارون آن می‌شود:

$$f^{-۱}(x)=y=\frac{x-b}{a}$$

پس وارون تابع خطی نیز یک تابع خطی است و شیب آن‌ها عکس یکدیگر است. مثلاً اگر شیب خط ۲ باشد، شیب وارون آن $\frac{۱}{۲}$ است. در حالتی که شیب خط برابر ۱+ یا ۱− باشد، اتفاقات جالبی رخ می‌دهد که در جدول زیر می‌بینیم:

رابطهٔ شیب و وارون	اگر شیب خط ±۱ نباشد، حتماً وارونش را در یک نقطه روی $y=x$ قطع می‌کند.		اگر شیب خط برابر ۱ باشد، خط و وارونش با هم موازی‌اند.	در خط $y=x$ و هر خطی که شیب آن برابر ۱− باشد، خط و وارونش بر هم منطبق‌اند.
نمودار				

تست ؟ | وارون تابع خطی f، به صورت یک خط با شیب ۲ است. اگر $f(۰)=۲$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۱)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲   ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ ۱ | وقتی شیب وارون f، ۲ است شیب خود f حتماً $\frac{۱}{۲}$ بوده، $f(۰)$ هم برابر ۲ است، پس: $f(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$

حالا مقدار $f^{-۱}(۱)$ را می‌خواهیم:

راه I | چه عددی به $\frac{۱}{۲}x+۲$ بدهیم تا جواب آن ۱ شود؟ $\frac{۱}{۲}x+۲=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x=-۱ \Rightarrow x=-۲$

راه II | $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ را وارون کنیم: $x=\frac{۱}{۲}y+۲ \Rightarrow x-۲=\frac{۱}{۲}y \Rightarrow y=f^{-۱}(x)=۲x-۴$

حالا: $\xrightarrow{x=۱} y=f^{-۱}(۱)=۲\times۱-۴=-۲$

وارون تابع هموگرافیک

در تابع هموگرافیک $f(x)=y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به راحتی می‌توانیم ضابطهٔ $f^{-۱}$ را پیدا کنیم. اگر جای y و x را عوض و سپس مرتب کنیم، می‌شود:

$$f^{-۱}(x)=y=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

حفظ می‌کنند که: جای a و d را عوض و هر دو را قرینه می‌کنیم، مثلاً وارون $y=\frac{۷x-۱}{۲x-۵}$ می‌شود $y=\frac{+۵x-۱}{۲x-۷}$.

نکته اگر d و a (ضریب x صورت و عدد ثابت مخرج) قرینهٔ هم باشند، وارون تابع هموگرافیک خودش می‌شود. مثلاً تابع در $f(x)=\frac{۳x-۱}{۵x-۳}$، $a=۳$ و $d=-۳$ یعنی قرینهٔ هم هستند، پس $f^{-۱}$ همان f است: $f^{-۱}(x)=\frac{۳x-۱}{۵x-۳}$

$y=\frac{۱}{x}$ بهترین مثال این نکته است.

تست ؟ | اگر وارون تابع $f(x)=\frac{x-m}{x-m^۲}$ خودش باشد، مقدار $f^{-۱}(۷)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۷   ۴) ۱

پاسخ ۲ | باید a و d قرینهٔ هم باشند. a برابر ضریب x صورت یعنی ۱ است و d همان عدد ثابت مخرج یعنی $-m^۲$ است. پس داریم:

$-m^۲=-۱ \Rightarrow m^۲=۱ \Rightarrow m=۱$ یا -۱

دقت کنید که به ازای $m=۱$ تابع اصلاً هموگرافیک نمی‌شود ($\frac{x-۱}{x-۱}$ که هموگرافیک نیست!) پس $m=-۱$ و داریم: $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$

حالا مقدار $f^{-۱}(۷)$ را می‌خواهیم. چون f و $f^{-۱}$ بر هم منطبق‌اند، $f^{-۱}(۷)$ همان $f(۷)$ است که می‌شود $\frac{۷+۱}{۷-۱}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$

نکته گفتیم در حالت $a+d=۰$ تابع هموگرافیک بر وارونش منطبق می‌شود. اگر $a+d\neq ۰$ باشد، وارونش را قطع نمی‌کند و یا حتماً روی $y=x$ قطع می‌کند. وقتی می‌پرسند تابع هموگرافیک، کجا وارونش را قطع می‌کند، راه عادی این است که تابع را مساوی وارون آن قرار دهیم اما کار بهتر این است که به جای حل $f^{-۱}=f$، f را مساوی x قرار دهیم.

تست تابع $f(x)=\frac{۲x+۳}{x-۱}$ و وارونش در دو نقطه متقاطع‌اند. مجموع طول این نقاط چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ ۳ **راه I** اول تابع را وارون کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x+۳}{x-۱}\xrightarrow[\text{و هر دو را قرینه کنیم}]{\text{جای ۲ و }-۱\text{ را عوض}}f^{-۱}(x)=\frac{۱x+۳}{x-۲}$$

حالا f را با $f^{-۱}$ تقاطع می‌دهیم:

$$\frac{۲x+۳}{x-۱}=\frac{x+۳}{x-۲}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}۲x^۲-۴x+۳x-۶=x^۲+۲x-۳\Rightarrow x^۲-۳x-۳=۰\xrightarrow{\text{مجموع‌ریشه‌ها}}-\frac{b}{a}=۳$$

راه II حالا از آن روش بهتر می‌رویم. قرار شد در تلاقی تابع هموگرافیک و وارونش (وقتی بر هم منطبق نیستند) به جای $f^{-۱}=f$، تابع f را مساوی x قرار دهیم:

$$\frac{۲x+۳}{x-۱}=x\Rightarrow x^۲-x=۲x+۳\Rightarrow x^۲-۳x-۳=۰\xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}}-\frac{b}{a}=۳$$

وارون تابع $y=\sqrt{ax+b}$

وارون تابع $\sqrt{x}$ و انتقال‌های آن، همیشه قسمتی از یک سهمی است. مثلاً وارون خود $y=\sqrt{x}$، نیمهٔ راست سهمی $y=x^۲$ است.

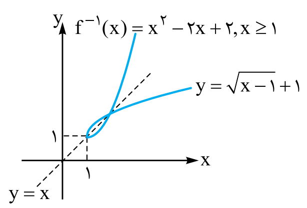
در این‌جا خیلی مهم است که جلوی ضابطهٔ تابع وارون، دامنهٔ آن را بنویسیم (برد خود تابع را بنویسیم). مثلاً می‌خواهیم $y=\sqrt{x-۱}+۱$ را وارون کنیم:

$$y=\sqrt{x-۱}+۱\Rightarrow\sqrt{x-۱}=y-۱\Rightarrow x-۱=(y-۱)^۲\Rightarrow x=y^۲-۲y+۱+۱\Rightarrow x=y^۲-۲y+۲\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=x^۲-۲x+۲$$

حالا حتماً باید برد تابع $y=\sqrt{x-۱}+۱$ یعنی مجموعهٔ $[۱,+\infty)$ را به عنوان شرط دامنه برای تابع وارون بنویسیم. یعنی جواب درست ضابطهٔ تابع وارون می‌شود:

$$f^{-۱}(x)=x^۲-۲x+۲\,,\,x\geq ۱$$

نمودار را هم ببینید:



تست ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=۱-\sqrt{-x+۳}$ کدام است؟

۱) $-x^۲+۲x-۲\,,\,x\leq ۱$ ۲) $-x^۲+۲x+۲\,,\,x\leq ۱$ ۳) $-x^۲+۲x-۲\,,\,x\leq ۳$ ۴) $-x^۲+۲x+۲\,,\,x\leq ۳$

پاسخ ۲ اول دقت کنیم که برد تابع $f(x)=۱-\sqrt{-x+۳}$ فقط شامل yهای کم‌تر یا مساوی ۱ است. پس شرط دامنهٔ تابع وارون باید $x\leq ۱$ باشد که در گزینه‌های ۱ و ۲ درست گفته است. حالا جای x و y را عوض کنیم:

$$y=۱-\sqrt{-x+۳}\xrightarrow[\text{عوض کنیم}]{x\text{ و }y\text{ را}}x=۱-\sqrt{-y+۳}\Rightarrow ۱-x=\sqrt{۳-y}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}۱-۲x+x^۲=۳-y\Rightarrow y=-x^۲+۲x+۲$$

پس جواب می‌شود:

$$f^{-۱}(x)=-x^۲+۲x+۲\,,\,x\leq ۱$$

به دست آوردن $f^{-۱}$ از روی گزینه‌ها

بهترین راه به دست آوردن تابع وارون در تست‌ها، استفاده از گزینه‌ها است فقط کافی است به دو مورد زیر توجه کنید:

۱) دامنهٔ تابع f، برد تابع $f^{-۱}$ است و برد تابع f، دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ خواهد بود.

۲) اگر نقطهٔ (a,b) عضو تابع f باشد، حتماً نقطهٔ (b,a) عضو تابع $f^{-۱}$ خواهد بود و برعکس.

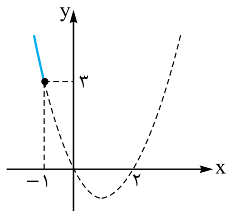
به عنوان مثال یک بار دیگر تست قبل را ببینید. اگر $x=۲$ قرار دهیم، داریم $f(۲)=۰$ پس ضابطه‌ای درست است که به ازای $x=۰$ بشود ۲ (چون $f^{-۱}(۰)=۲$) و در نتیجه گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند. در گزینه‌های ۲ و ۴ ضابطه‌ها با هم برابر هستند و فقط دامنه‌هایشان متفاوت است. حالا باید برد تابع $f(x)=۱-\sqrt{-x+۳}$ را به دست بیاوریم، این شکلی:

$$\sqrt{-x+۳}\geq ۰\xrightarrow{\text{ضرب در }-۱}-\sqrt{-x+۳}\leq ۰\xrightarrow{\text{جمع با یک}}\underbrace{۱-\sqrt{-x+۳}}_{f(x)}\leq ۱\Rightarrow \text{برد}:(-\infty,۱]$$

پس دامنهٔ $f^{-۱}$ باید $x\leq ۱$ باشد، در نتیجه ۲ درست است.

وارون تابع درجه‌دو

سهمی در کل دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌پذیر هم نیست، اما با تحدید دامنه، یک‌به‌یک می‌شود و تابع وارون آن به صورت رادیکالی است. مثلاً



می‌خواهیم $y=x^2-2x$ را برای $x\le -1$ وارون کنیم: $y=x^2-2x\ (x\le -1) \xrightarrow{\text{وارون}} x=y^2-2y\ (y\le -1)$

$\xrightarrow[\text{تا مربع کامل شود}]{\text{به دو طرف ۱ اضافه کنیم}} x+1=y^2-2y+1=(y-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{x+1}=|y-1|$

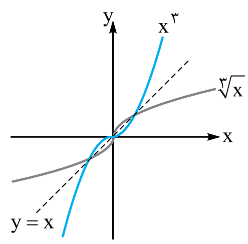
آهان، دقت کردید که شرط $(x\le -1)$ را هم وارون کردیم و نوشتیم $y\le -1$؟ حالا این شرط به دردمان می‌خورد که در عبارت $|y-1|$، قدرمطلق را با علامت منفی برداریم: $\Rightarrow \sqrt{x+1}=-(y-1)=1-y \Rightarrow y=1-\sqrt{x+1}$

برد تابع $y=x^2-2x$ با دامنهٔ $x\le -1$ به صورت $[3,+\infty)$ است، پس ضابطهٔ تابع وارون می‌شود:

$f^{-1}(x)=1-\sqrt{x+1}\ ;\ x\ge 3$

اشاره *یادتان نرود که در مقابل ضابطهٔ وارون باید دامنهٔ آن یعنی برد f را بنویسید.*

وارون تابع درجه‌سه



وارون $y=x^3$ به صورت $y=\sqrt[3]{x}$ است. آن‌ها را در یک دستگاه کنار هم ببینید:

(۱) f و f^{-1} هر دو صعودی با دامنه و برد $\mathbb{R}$ هستند (۲) همدیگر را در $(-1,-1)$، $(0,0)$ و $(1,1)$ قطع می‌کنند.

برای وارون‌کردن سایر تابع‌های درجه‌سوم باید حتماً آن‌ها را به شکل $y=a(x-x_1)^3+b$ دربیاوریم وگرنه نمی‌توانیم وارون را پیدا کنیم. پس اگر عبارتی به شکل اتحاد بازشده دادند، اول باید اتحاد را بسازیم. ببینید:

تست وارون تابع $f(x)=x^3-6x^2+12x$ به کدام صورت است؟

۱) $\sqrt[3]{x-2}+8$ ۲) $\sqrt[3]{x+2}-8$ ۳) $\sqrt[3]{x-8}-2$ ۴) $\sqrt[3]{x-8}+2$

پاسخ ۴ **راه I** در تابع اصلی $f(0)=0$ است، پس در وارون هم باید $f^{-1}(0)=0$ باشد که فقط به (۴) می‌خورد.

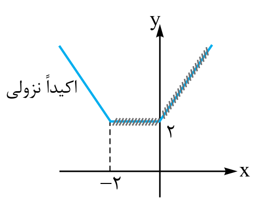
راه II ضریب‌های -6 و 12 و مقایسهٔ قیافهٔ عبارت‌ها با اتحاد $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ نشان می‌دهد این تابع به اتحاد $(x-2)^3$ شبیه می‌شود.

$f(x)=x^3-6x^2+12x-8+8 \Rightarrow f(x)=(x-2)^3+8$

حالا وارون: $y=(x-2)^3+8 \Rightarrow (x-2)^3=y-8 \Rightarrow x-2=\sqrt[3]{y-8} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-8}+2 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt[3]{x-8}+2$

وارون توابع قدرمطلق‌دار

تابع‌های قدرمطلقی معمولاً یک‌به‌یک نیستند و بیشتر اوقات آن‌ها را در یک بازهٔ خاص وارون می‌کنیم. معمولاً صورت سؤال وارون تابع را در بازه‌ای که صعودی یا نزولی باشد، می‌خواهد.

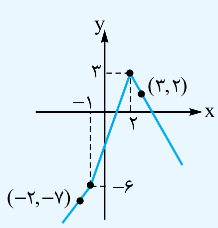


مثلاً $y=|x|+|x+2|$ در کل دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست. اما در بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً نزولی و یک‌به‌یک است. در این بازه، داخل قدرمطلق‌ها منفی‌اند و داریم: $y=-x-(x+2)=-2x-2 \xrightarrow{\text{وارون}} x=-2y-2 \Rightarrow y=\dfrac{-x-2}{2}$

به عنوان شرط دامنه f^{-1}، برد تابع f را می‌نویسیم: $f^{-1}(x)=\dfrac{-x-2}{2}\ ,\ x>2$

تست وارون تابع $f(x)=|x+1|-|2x-4|$ در بازه‌ای که اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

۱) $x+5, x<3$ ۲) $-x+5, x<3$ ۳) $x+5, x>2$ ۴) $-x+5, x>2$



پاسخ ۲ رسم نمودار این تابع را بلدیم. نقاط شکستگی $(-1,-6)$ و $(2,3)$ هستند و نقاط کمکی بعد و قبل، $(3,2)$ و $(-2,-7)$ هستند. تابع برای $x>2$ با برد $(-\infty,3)$ اکیداً نزولی است. پس حتماً شرط دامنه در ضابطهٔ وارون آن $x<3$ باید باشد.

حالا با xهای بیشتر از ۲، درون قدرمطلق‌ها مثبت است و ضابطهٔ تابع $y=(x+1)-(2x-4)=-x+5$ خواهد بود که وارون آن می‌شود خودش (چرا؟). $f^{-1}(x)=-x+5\ ,\ x<3$

وارون توابع نمایی و لگاریتمی

سال قبل در فصل لگاریتم و نمایی خوانده‌ایم که توابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=\log_a x$ وارون هم هستند.

برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون توابع نمایی یا لگاریتمی هم همان ماجرای همیشگی را داریم. جای x و y را عوض می‌کنیم و ... ببینید:

$y=\log_2(x-1) \xrightarrow{\text{عوض x و y}} x=\log_2(y-1) \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} 2^x=y-1 \Rightarrow y=2^x+1$

تست وارون تابع $f(x)=۲^{x+۱}-۱$ کدام ضابطه را دارد؟

۱) $\log_۲(x+۱)-۱$ ۲) $\log_۲(x-۱)-۱$ ۳) $\log_۲(x-۱)+۱$ ۴) $\log_۲(x+۱)+۱$

پاسخ ۱ **عددگذاری** به ازای $x=۱$ داریم $f(۱)=۲^۲-۱=۳$. پس گزینه‌ای درست است که در تابع $f^{-۱}$ به ازای $x=۳$، ۱ بدهد که فقط در ۱ این‌طور است.

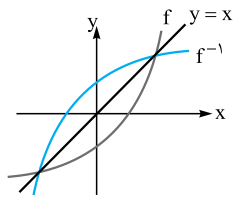
$f^{-۱}(x)=\log_۲(x+۱)-۱ \Rightarrow f^{-۱}(۳)=\log_۲ ۴-۱=۲-۱=۱$ ✓

راه II جای x و y را عوض می‌کنیم:

$f(x)=۲^{x+۱}-۱ \xrightarrow{\text{جا عوض}} x=۲^{y+۱}-۱ \Rightarrow x+۱=۲^{y+۱}$

$\xrightarrow{\text{از دو طرف } \log_۲ \text{ بگیریم}} \log_۲(x+۱)=\log_۲ ۲^{y+۱}=y+۱ \Rightarrow y=\log_۲(x+۱)-۱$

تلاقی f و $f^{-۱}$

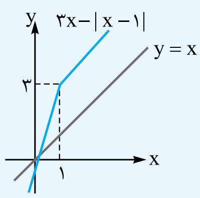


یادمان نرفته f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ هم هستند.حالا دو حالت داریم:

۱) اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، وارونش را فقط روی $y=x$ قطع می‌کند. یعنی به جای برخورد f و $f^{-۱}$، دنبال نقاط برخورد $f(x)$ و x می‌گردیم. پس باید $x=f(x)$ قرار دهیم و xها را پیدا کنیم و تمام. **مثلاً** $y=\sqrt{x+۲}$ اکیداً صعودی است و می‌خواهیم ببینیم وارونش را کجا قطع می‌کند. باید بنویسیم $\sqrt{x+۲}=x$ و از این معادله $x=۲$، طول نقطهٔ برخورد f و $f^{-۱}$ به دست می‌آید. دقت کنید که عرض نقطهٔ برخورد هم ۲ است.

تست اگر $f(x)=۳x-|x-۱|$، آن‌گاه f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱



پاسخ ۲ نمودار $f(x)=۳x-|x-۱|$ را رسم می‌کنیم و می‌بینیم اکیداً صعودی است پس کافی است آن را با $y=x$ تلاقی دهیم:

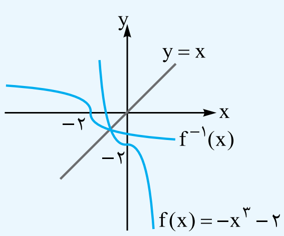
$$۳x-|x-۱|=x \Rightarrow |x-۱|=۲x \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۲x \Rightarrow x=-۱ & \text{غ‌ق‌ق (جواب قدرمطلق منفی نمی‌شود)} \\ x-۱=-۲x \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

پس فقط در نقطهٔ $(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ تابع و وارونش متقاطع‌اند.

۲) اگر تابع f اکیداً صعودی نباشد، غیر از نقاط برخوردش با $y=x$ در هر نقطهٔ دیگری هم می‌تواند وارونش را قطع کند. پس باید معادلهٔ $f=f^{-۱}$ را حل کنیم، برای حل این معادله بهتر است که شکل f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه بکشیم و ببینیم در چه نقاطی متقاطع‌اند.

تست اگر $f(x)=-x^۳-۲$ باشد، f و $f^{-۱}$ در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳



پاسخ ۲ چون f، اکیداً صعودی نیست، پس بهتر است f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه رسم کنیم:

دو تابع در یک نقطه روی نیمساز ناحیهٔ سوم متقاطع‌اند.

نکته این را هم در ذهن داشته باشید که اگر f و $f^{-۱}$ در نقطهٔ (a,b) متقاطع باشند، این نقطه در هر دو تابع صدق می‌کند یعنی هم $f(a)=b$ و هم $f^{-۱}(a)=b$ است. به بیان ساده‌تر باید نقطه‌های (a,b) و (b,a) در f صدق کنند.

تلاقی $f^{-۱}$ با تابع دیگری مثل g

اگر محاسبهٔ $f^{-۱}$ سخت بود، می‌توانیم به جای تلاقی $f^{-۱}$ با g، مسئله را کلاً وارون کنیم و به جای «برخورد $f^{-۱}$ با g» برخورد تابع f با $g^{-۱}$ را بررسی کنیم. مثلاً اگر سؤال گفته «$f^{-۱}$، خط $g: y=۲x$ را کجا قطع می‌کند؟» ما ببینیم «f، خط $g^{-۱}: y=\frac{x}{۲}$ را کجا قطع می‌کند». فقط حواستان باشد که با این کار، جای x و y را عوض کرده‌ایم! پس xای که به دست می‌آوریم در واقع عرض نقطهٔ تلاقی است! تست زیر را ببینید:

تست اگر $f(x)=x^۳+x \; ; \; x>۰$، آن‌گاه نمودار تابع $f^{-۱}$ خط $y=\frac{x}{۲}$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(\sqrt{۲},۳\sqrt{۲})$ ۳) $(۳,۱)$ ۴) $(۳\sqrt{۲},\sqrt{۲})$

پاسخ ۴ | خب قرار شد به جای حل این سؤال بگوییم: «نمودار تابع f خط $x=\frac{y}{3}$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟»

$$\begin{cases} x^3+x=f(x)\\ 3x=y\end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^3+x=3x \Rightarrow x^3=2x \xrightarrow{x>0} x=\sqrt{2}$$

پس در نقطه با طول $\sqrt{2}$، خود f و خط $y=3x$ متقاطع‌اند. پس محل تلاقی f^{-1} و خط $y=\frac{x}{3}$ می‌شود نقطه‌ای به عرض $\sqrt{2}$ که مختصاتش می‌شود: $(3\sqrt{2},\sqrt{2})$

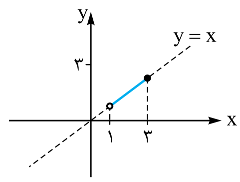
ترکیب تابع و وارونش

وقتی تابع و وارونش را ترکیب کنیم به تابع همانی $(f(x)=x)$ می‌رسیم، در $fof^{-1}(x)$ باید x را اول به f^{-1} بدهیم پس x عضو دامنهٔ f^{-1} یعنی عضو برد f است اما در $f^{-1}of(x)$ اول f روی x عمل می‌کند پس باید $x\in D_f$ باشد. ببینید:

$$fof^{-1}(x)=x,(x\in R_f) \quad , \quad f^{-1}of(x)=x,(x\in D_f)$$

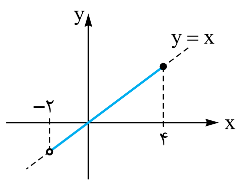
پس $f^{-1}of$ و fof^{-1} هر دو، قسمتی از تابع همانی $y=x$ هستند و همواره در نمایش زوج مرتبی آن‌ها، فقط زوج مرتب‌های به صورت (x,x) وجود دارند.

مثلاً اگر تابع f دامنه‌اش $[-2,4)$ و بردش $(1,3]$ باشد، نمودارهای fof^{-1} و $f^{-1}of$ به صورت مقابل هستند:



$y=fof^{-1}(x)=x$

دامنه $=R_f=(1,3]$



$y=f^{-1}of(x)=x$

دامنه $=D_f=(-2,4]$

اشاره | حواسمان هست که برای رسم fof^{-1} و $f^{-1}of$ به نمودار یا ضابطهٔ f احتیاجی نداریم، چون می‌دانیم که نمودار آن‌ها $y=x$ است و فقط دامنه و برد f را می‌خواهیم.

تست ؟ | اگر $f=\{(3,4),(-1,1),(2,0)\}$ باشد، چندتا از زوج‌های مرتب مقابل در $f^{-1}of$ هستند؟ $(4,4),(3,3),(0,0),(2,2),(1,1)$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ ۴ | $f^{-1}of$ تابع همانی با دامنهٔ D_f است. پس xهای f را داریم یعنی $f^{-1}of=\{(3,3),(-1,-1),(2,2)\}$ و از بین زوج‌های موجود ۲تای آن‌ها هستند.

نکته گاهی اوقات به جای تابع وارون، در صورت سؤال بیان‌های دیگری به کار می‌رود. حواستان باشد که تمام این‌ها معادل‌اند.

با قرینه‌کردن f نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، تابع g به دست می‌آید.

- تابع g در شرایط $fog=x$ و $gof=x$ صدق می‌کند.
- g وارون f است.
- g از تعویض جای مؤلفه‌های زوج‌های مرتب f به دست می‌آید.

تست ؟ | اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و تابع g طوری انتخاب شود که $fog(x)=x$ و $gof(x)=x$، آن‌گاه مقدار $g(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

پاسخ ۳ | صورت سؤال یعنی g وارون f است پس $f^{-1}(\frac{1}{2})$ را می‌خواهیم و باید f را مساوی $\frac{1}{2}$ قرار دهیم:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} x^2+1=4x^2 \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{x>0} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

اشاره | حواسمان هست که در رابطهٔ $\frac{1}{2}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ مقدار x حتماً مثبت است.

وارون تابع مرکب

وارون تابع fog به صورت $g^{-1}of^{-1}$ است. یعنی:

$$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$$

یعنی تک‌تک تابع‌ها را وارون و جای آن‌ها را با هم عوض می‌کنیم. برای درک بهتر فرض کنید در یک فیلم می‌بینید که در باز شده (تابع اول) و شخصی وارد می‌شود (تابع دوم). اگر تابع را وارون کنید (فیلم را برعکس پخش کنید) ابتدا شخص به عقب برمی‌گردد (تابع دوم وارون می‌شود) و سپس در بسته می‌شود (تابع اول وارون می‌شود).

تست ؟ | اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ ۱ | می‌دانیم $(g^{-1}of^{-1})=(fog)^{-1}$، پس $(g^{-1}of^{-1})(20)=(fog)^{-1}(20)$ حالا اگر فرض کنیم $(fog)^{-1}(20)=a$ باید $(fog)(a)=20$ باشد، پس:

$$(fog)(a)=20 \Rightarrow f(g(a))=20 \xrightarrow{f(x)=x+\sqrt{x}} (g(a))+\sqrt{g(a)}=20 \xrightarrow[\text{جای } g(a)]{\text{عددگذاری به}} g(a)=16$$

$$\xrightarrow{g(x)=\frac{9x+6}{1-x}} \frac{9a+6}{1-a}=16 \Rightarrow 9a+6=16-16a \Rightarrow 25a=10 \Rightarrow a=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

برای حسن ختام، یک تست ترکیبی از تابع مرکب و وارون را هم ببینیم:
شبیه این تست در کنکورهای سراسری رشته‌های تجربی و ریاضی سال‌های اخیر، چندین‌بار تکرار شده است.

تست ؟ | اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-1}of)-f$ کدام است؟

۱) $\{-1,4\}$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\{3,4\}$ ۴) $\{2,-1\}$

پاسخ ۴ | اول با استفاده از f و g تابع‌های g^{-1} و $g^{-1}of$ را پیدا می‌کنیم:

$$g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$$

$$g^{-1}=\{(3,2),(2,4),(6,5),(1,3)\} \Rightarrow gof^{-1}=\{(1,4),(4,5)\}$$

$$f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$$

حالا $g^{-1}of-f$ را پیدا می‌کنیم:

$$g^{-1}of=\{(1,4),(4,5)\} \qquad f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$$

$$\Rightarrow g^{-1}of-f=\{(1,4-2),(4,5-6)\}=\{(1,2),(4,-1)\}$$

پس برد $g^{-1}of-f$ شامل اعضای ۲ و ۱− است.

درس پنجم: وارون تابع و تابع وارون

۱۷۶- کدام‌یک از جملات زیر نادرست است؟ (کتاب درسی)

۱) برای رسم f^{-1} باید نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه کنیم. ۲) برد f^{-1} همان دامنهٔ f است.

۳) اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$. ۴) اگر f تابع باشد، f^{-1} هم حتماً تابع است.

در تمامی تست‌های این قسمت، یک نکته بیشتر نداریم: اگر $(a,b)\in f$ باشد، آن‌گاه $(b,a)\in f^{-1}$ است یا به عبارتی اگر $f(a)=b$ باشد، $f^{-1}(b)=a$ است.

۱۷۷- اگر $f=\{(۱,۲)\ (-۳,-۱),(۳,۴),(۴,-۳)\}$ باشد، مقدار $۲f^{-1}(-۳)+f(۳)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۲ ۲) ۱۳ ۳) ۴ ۴) ۱۲

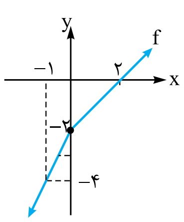
۱۷۸- اگر $f=\{(-۱,۰),(۱,۲),(۰,۱),(۲,-۱)\}$ باشد. آن‌گاه $\frac{f}{f^{-1}}$ شامل چند زوج مرتب است؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۷۹- اگر $f=\{(۲,a+۱),(\sqrt{b},۳)\}$ و $f^{-1}=\{(a-۱,c+۱),(d,b-۲)\}$ یک رابطه و وارون آن باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۱۸۰- با توجه به نمودار تابع f، حاصل $f^{-1}(-۵)+f^{-1}(۴)$ کدام است؟



۱) ۴/۵

۲) ۳/۵

۳) ۴/۵−

۴) ۳/۵−

۱۸۱- در تابع خطی $f(x)=ax+b$ اگر $f^{-1}(۶)=۱$ و $f^{-1}(۲۱)=۴$، b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۵ ۴) ۵−

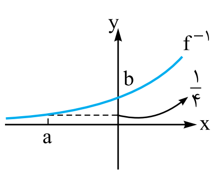
۱۸۲- به ازای چند مقدار a، نمودار تابع وارون $f(x)=\frac{x-۴}{۲x-۱}$ از نقطهٔ $(a+۲,a)$ می‌گذرد؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۱۸۳- وارون تابع $y=x^۳+۲x-۳$، محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۴- شکل روبه‌رو، نمودار وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}-\frac{۱}{x}$ است. $a+b$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)



۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $-\frac{۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۵}{۴}$

۱۸۵- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)$ کدام است؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۸۶- اگر $f(x)=\begin{cases} ۴x+۳ & x\geq ۳ \\ x+۱ & x<۳ \end{cases}$، آن‌گاه $f^{-1}(-۵)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) -۶ ۴) ۴

۱۸۷- اگر $f(x)=f^{-1}(۳)+۲x-۱$ باشد. آن‌گاه $f(۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

رابطهٔ بین دامنه و برد f و f^{-1} را یادتان هست؟ $R_{f^{-1}}=D_f\ ,\ D_{f^{-1}}=R_f$

۱۸۸- دامنهٔ تابع معکوس تابع $y=۳-|x+۱|$ (با شرط $x\leq -۱$) کدام است؟

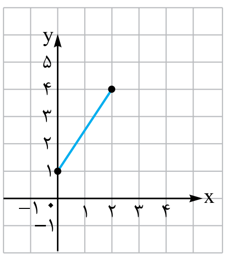
۱) $[۳,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۳]$ ۳) $(-\infty,۲]$ ۴) $[-۱,+\infty)$

۱۸۹- تابع $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$ مفروض است. در تابع $g^{-1}(x)$، دامنه و برد چند عضو صحیح غیرمشترک دارند؟ (کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

نمودار f^{-1}

۱۹۰- ضابطهٔ وارون تابع داده‌شده، کدام است؟ (کتاب درسی)



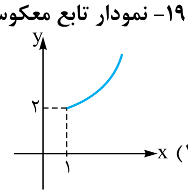
۱) $y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۲}{۳}$

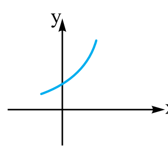
۲) $y=\frac{۲}{۳}x+۱$

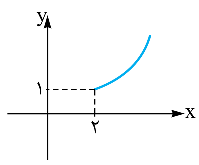
۳) $y=\frac{۳}{۲}x+۱$

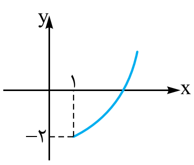
۴) $y=\frac{۳}{۲}x-\frac{۳}{۲}$

۱۹۱- نمودار تابع معکوس تابع $f(x)=۱+\sqrt{x-۲}$ کدام است؟

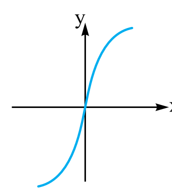
۱) 

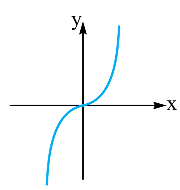
۲) 

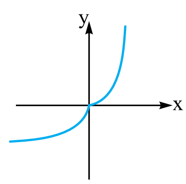
۳) 

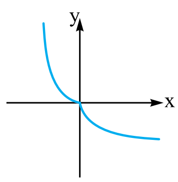
۴) 

۱۹۲- نمایش هندسی تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$ کدام است؟

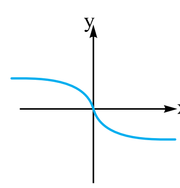
۱) 

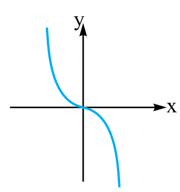
۲) 

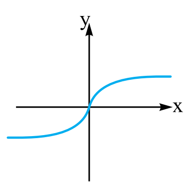
۳) 

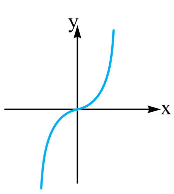
۴) 

۱۹۳- اگر $f(x)=x|x|$، آن‌گاه نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

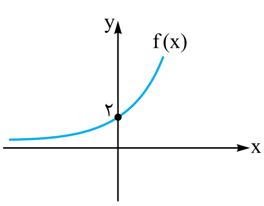
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۹۴- شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f^{-1}(x)}$ کدام است؟

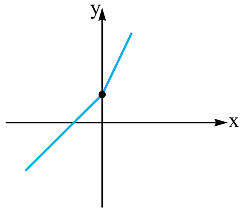


۱) $\mathbb{R}$

۲) $x>۰$

۳) $۲\geq x\geq ۰$

۴) $x\geq ۲$



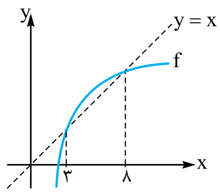
۱۹۵- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار $۲f^{-۱}(x-۱)$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم



۱۹۶- شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$ ۴) $[۳,۸]$

ضابطهٔ تابع وارون

ابتدا از توابع خطی شروع می‌کنیم که در سال یازدهم خوانده‌ایم. قبل از شروع این قسمت یادآوری می‌کنم که بازه‌ای که در گزینه‌ها در مقابل ضابطهٔ $f^{-۱}$ می‌نویسند، در واقع برد تابع f است.

۱۹۷- تابع معکوس تابع $f(x)=۲x+۴$ با دامنهٔ $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۲};-۱\le x\le ۳$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲};-۱\le x\le ۳$

۳) $f^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲};۲\le x\le ۱۰$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲x+۴};-۱\le x\le \frac{۱}{۳}$

۱۹۸- ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ ۴x+۱ & x\ge ۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} & x<۰\\ \frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴} & x\ge ۰\end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲} & x<۰\\ \frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۴} & x\ge ۰\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲} & x<-۱\\ \frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۴} & x\ge ۱\end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} & x<-۱\\ \frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴} & x\ge ۱\end{cases}$

۱۹۹- قرینهٔ خط $d_۱$ به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (سراسری ۹۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۰۰- اگر وارون تابع خطی $f(x)=ax+۱$ بر خودش منطبق باشد، a کدام است؟

۱) فقط ۱ ۲) فقط -۱ ۳) ۱ یا -۱ ۴) این اتفاق ممکن نیست.

۲۰۱- اگر دو خط به معادلات $ax+by=۸$ و $۲x-۳y=b$ نسبت به نیمساز ربع اول قرینهٔ یکدیگر باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) ± ۳ ۲) ± ۲ ۳) -۳ و ۲ ۴) ۳ و -۲

اگر نکات وارون تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را یادتان رفته، حتماً درس‌نامه را نگاه کنید.

۲۰۲- تابع وارون تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{x+۱}$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{x-۱}$ ۳) $f^{-۱}(x)=۱-\frac{۱}{x}$ ۴) $f^{-۱}(x)=۱+\frac{۱}{x}$

۲۰۳- اگر تابع $f(x)=\frac{۲x+۳}{x+b}$ وارون خودش باشد، $f(۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۰۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$، با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۶)

۱) -۴ و -۱ ۲) ۴ و -۱ ۳) -۴ و ۱ ۴) ۴ و ۱

در اکثر تست‌های این بخش یک ورودی مثل α را به خود تابع f می‌دهیم و خروجی f را حساب می‌کنیم. خروجی به دست آمده را در گزینه‌ها به $f^{-۱}$ می‌دهیم. حالا باید خروجی $f^{-۱}$، همان α باشد.

۲۰۵- معکوس تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-۱}(x)=x^۲-۳\,;\,x\ge -۳$ ۲) $f^{-۱}(x)=x^۲-۳\,;\,x\ge ۰$

۳) $f^{-۱}(x)=x^۲+۳\,;\,x\ge -۳$ ۴) $f^{-۱}(x)=x^۲+۳\,;\,x\ge ۰$

۲۰۶- ضابطهٔ معکوس تابع $y=2-\sqrt{x-1}$، به کدام صورت است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-1}(x)=x^2-4x+5\,;\,x\le 2$
۲) $f^{-1}(x)=-x^2+4x-5\,;\,x\le 2$
۳) $f^{-1}(x)=x^2-4x-5\,;\,x\ge 1$
۴) $f^{-1}(x)=-x^2+4x-5\,;\,x\ge 1$

۲۰۷- ضابطهٔ تابع معکوس تابع $f(x)=x^2-4x+5\,;\,x\ge 2$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2\,;\,x\ge 1$
۲) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+2}-2\,;\,x\ge -1$
۳) $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}-1\,;\,x\ge 2$
۴) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+2}-2\,;\,x\ge 1$

۲۰۸- وارون تابع $y=x^2-2x$ وقتی $x\le 1$، به صورت $y=a\sqrt{x+b}+c$ است، حاصل $a+b-c^2$ کدام است؟

۱) -1
۲) -2
۳) -3
۴) 1

۲۰۹- معکوس تابع $y=x^3+3x^2+3x+2$ کدام است؟

۱) $y=1-\sqrt[3]{x-1}$
۲) $y=1-\sqrt[3]{x+1}$
۳) $y=-1+\sqrt[3]{x-1}$
۴) $y=-1-\sqrt[3]{x+1}$

۲۱۰- ضابطهٔ وارون تابع $y=x^4-2x^2+1$ روی دامنهٔ $(-1,0)$ کدام است؟

۱) $y=\sqrt{\sqrt{x}+1}$
۲) $y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$
۳) $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$
۴) $y=-\sqrt{\sqrt{x}+1}$

از این‌جا به بعد توابع چندضابطه‌ای و قدرمطلق وارد تست‌ها می‌شوند. راه اولمان همیشه همان عددگذاری است ولی اگر نشد حتماً سعی می‌کنیم که قدرمطلق را برداریم.

۲۱۱- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$، کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $f^{-1}(x)=-x^2$
۲) $f^{-1}(x)=x^2$
۳) $f^{-1}(x)=x|x|$
۴) $f^{-1}(x)=-x|x|$

۲۱۲- در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x+|x+2|$ وارون‌پذیر است، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $y=\frac{x-2}{2}\,;\,x\ge -2$
۲) $y=\frac{x+2}{2}\,;\,x\ge -2$
۳) $y=\frac{x-2}{2}\,;\,x\ge 0$
۴) $y=\frac{x+2}{2}\,;\,x\ge 0$

۲۱۳- تابع با ضابطهٔ $y=x|x-2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه، کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1+x}\,;\,x<0$
۲) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x}\,;\,x<1$
۳) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}\,;\,0<x<1$
۴) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x}\,;\,0<x<1$

۲۱۴- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|2x-6|-|x+1|$، در یک بازه صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن، در این بازه کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) $f^{-1}(x)=x+7\,;\,x>8$
۲) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+2\,;\,x>3$
۳) $f^{-1}(x)=x+7\,;\,x>-4$
۴) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-1\,;\,-4<x<8$

۲۱۵- ضابطهٔ وارون تابع $y=3x-|x|$ کدام است؟

۱) $y=\frac{3x+|x|}{4}$
۲) $y=\frac{3x+|x|}{8}$
۳) $y=\frac{x+|x|}{4}$
۴) $y=\frac{2x-|x|}{4}$

۲۱۶- ضابطهٔ معکوس $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (خارج ۹۲)

۱) $f(x)=x\sqrt{|x|}\,;\,x\in\mathbb{R}$
۲) $f^{-1}(x)=x\sqrt{|x|}\,;\,x\in\mathbb{R}-\{0\}$
۳) $f^{-1}(x)=x|x|\,;\,x\in\mathbb{R}-\{0\}$
۴) $f^{-1}(x)=x|x|\,;\,x\in\mathbb{R}$

۲۱۷- ضابطهٔ وارون تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}\,;\,|x|<1$
۲) $f^{-1}(x)=\frac{1-|x|}{|x|}\,;\,|x|>1$
۳) $f^{-1}(x)=\frac{x}{|x|-1}\,;\,|x|>1$
۴) $f^{-1}(x)=\frac{|x|-1}{x}\,;\,|x|<1$

اگر $m^n=t$ باشد، آن‌گاه: $n=\log_m t$

۲۱۸- معکوس تابع $f(x)=2^x-1$ کدام است؟

۱) $y=\log_2(x+1)$
۲) $y=\log_2(x-1)$
۳) $y=(\log_2 x)+1$
۴) $y=(\log_2 x)-1$

۲۱۹- اگر $f(x)=\log(x-1)-3$ باشد، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=10^{x+1}+3$
۲) $f^{-1}(x)=10^{x+3}+1$
۳) $f^{-1}(x)=10^{x-1}+3$
۴) $f^{-1}(x)=10^{x-3}-1$

تست بعدی، یکی از سخت‌ترین تست‌های کنکور در ۵۰ سال اخیر است!

۲۲۰- فرض کنید در دامنهٔ $[\circ,+\infty)$، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲}$، مفروض باشد، $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟ (سراسری ۹۹)

۱) $\log_۲(۲-\sqrt{۳})$ ۲) $\log_۲(\sqrt{۳}-۱)$ ۳) $\log_۲(۱+\sqrt{۳})$ ۴) $\log_۲(۲+\sqrt{۳})$

نقاط تلاقی $f^{-۱}$ با f و توابع دیگر

۲۲۱- نمودار $y=-(x+۱)^۳+۱$ معکوس خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۲۲- طول نقطهٔ تلاقی نمودار $f(x)=\sqrt{x+۲}$ با نمودار معکوس آن کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) -۱ و ۲ ۴) فاقد نقطهٔ تلاقی

۲۲۳- نمودار تابع $f(x)=-x^۳+ax+b$ در نقطهٔ $(۱,۲)$ نمودار وارونش را قطع می‌کند. $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) -۱ ۴) ۲

۲۲۴- اگر تابع $f(x)=\sqrt{ax+b}$ تابع وارونش را در $(۱,۲)$ قطع کند، $a-b$ کدام است؟

۱) $-۱\circ$ ۲) -۴ ۳) $۱\circ$ ۴) ۴

۲۲۵- تابع $f(x)=(a+۱)x^۴+(a+۲)x^۳+(a+۴)x^۲+۳x$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی معکوس‌پذیر است. تابع $f^{-۱}$ خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۶- اگر $f(x)=x^۳+x+۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $y=x-۲$ یکدیگر را در نقطهٔ (α,β) قطع می‌کنند. $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۲۲۷- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ در دامنهٔ $D_f=(-\infty,\circ)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سراسری ۹۹)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲۲۸- اگر $x\geq ۱$; $f(x)=x^۲-۲x-۳$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=\dfrac{x-۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۲۲۹- تابع $f(x)=x^۲+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع $f(x-۱)$ و $f^{-۱}(-x)$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

$fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$

۲۳۰- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳)\}$، تابع $fof^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{(۲,۲),(۳,۳)\}$ ۲) $\{(۱,۱),(۲,۲)\}$ ۳) $\{(۲,۱),(۳,۲)\}$ ۴) $\{(۱,۱),(۳,۳)\}$

۲۳۱- اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ و g تابعی باشد که $fog(x)=x$، تابع g کدام می‌تواند باشد؟ (کتاب درسی)

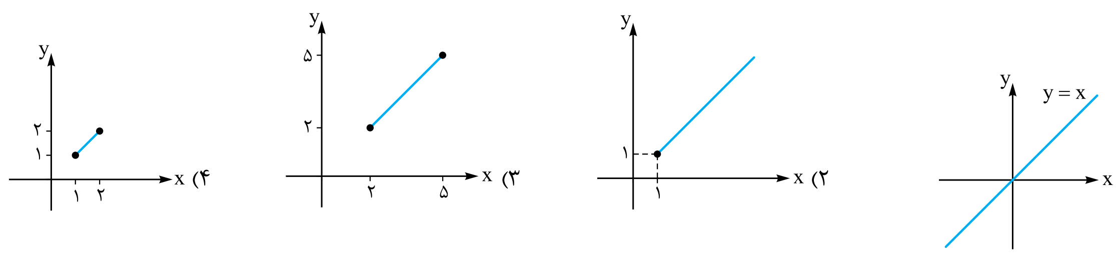
۱) $g=\{(۴,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$ ۲) $g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$

۳) $g=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$ ۴) $g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۵)\}$

۲۳۲- با توجه به ماشین $x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to x$، اگر $f(x)=۲x-۱$ باشد، $g(\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۲۳۳- در تابع $f(x)$ با دامنهٔ $[۲,۵]$ و برد $[۱,۲]$ نمودار تابع $fof^{-۱}$ چگونه است؟



۲۳۴- اگر $f(x)=x^۳+\sqrt[۵]{x}+۶$ با دامنهٔ $[-۱,۱]$ تعریف شود، طول پاره‌خط نمودار تابع $fof^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۳۵- اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$، آن‌گاه دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{1+f^{-1}of(x)}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $[0,1]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $(-\infty,-1]$ ۴) $(-\infty,1]$

تابع مرکب و تابع وارون

۲۳۶- اگر $f(x)=x^2+x$ و $g(x)=\frac{5x+2}{2x-1}$، آن‌گاه حاصل $(fog^{-1})(4)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲ ۴) ۱۲

۲۳۷- اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ دو تابع باشند، تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$، کدام است؟

۱) $\{(4,2),(5,2)\}$ ۲) $\{(4,2),(3,5)\}$ ۳) $\{(5,2),(2,4)\}$ ۴) $\{(3,5),(2,4)\}$

کتاب درسی شما، وارون fog را خیلی تحویل گرفته ...

۲۳۸- اگر $f=\{(0,-1),(2,\frac{1}{2}),(-3,\sqrt{2}),(1,5)\}$ و $g=\{(-1,-3),(5,2),(\frac{1}{2},0),(4,6)\}$ تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\{(-1,\frac{1}{2}),(5,2),(\sqrt{2},-3)\}$ ۲) $\{(\frac{1}{2},5),(5,2),(-1,\frac{1}{2})\}$

۳) $\{(\sqrt{2},-1),(\frac{1}{2},5),(-1,-3)\}$ ۴) $\{(-1,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},5),(\sqrt{2},-1)\}$

۲۳۹- اگر $f(x)=\frac{2}{5}x-4$ و $g(x)=x^3+x$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(8)$ کدام است؟ (خارج ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۲۴۰- دو تابع $f=\{(5,2),(7,3),(1,4),(3,6),(9,1)\}$ و $g(x)=\sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$ باشد، a کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۴۱- اگر $f(x)=x+2$ و $g(x)=2x^2-8x+1$ باشند، آن‌گاه حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ $(fog^{-1})^{-1}(x)=0$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -10 ۳) ۸ ۴) -8

۲۴۲- اگر $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x}$ و $g^{-1}(x)=x^2$ و $x\geq 0$، آن‌گاه ضابطهٔ $fog(x)$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) x^2-1 ۳) $x+1+2\sqrt{x}$ ۴) $x+1-2\sqrt{x}$

۲۴۳- اگر $f=\{(2,3),(-1,2),(-4,1),(3,0)\}$ و $g=\{(0,2),(2,-4),(3,2),(-4,-2)\}$، آن‌گاه حاصل $(fogof^{-1})(3)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۲۴۴- وارون تابع $y=f(3x-1)$ کدام است؟

۱) $y=f^{-1}(\frac{x+1}{3})$ ۲) $y=f^{-1}(3x-1)$ ۳) $y=3f^{-1}(x)-1$ ۴) $y=\frac{f^{-1}(x)+1}{3}$

۲۴۵- f تابعی یک‌به‌یک و $g(x)=f(2x+1)+1$ است. اگر $f^{-1}(5)=3$ و $g^{-1}(a)=1$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴۶- اگر $f(x)=x+[x]$ باشد، حاصل $(fof^{-1})(4/5)$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۶ ۴) موجود نیست.

۲۴۷- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ و $g(x)=k(x-\frac{1}{x})$ وارون هم باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۴۸- نمودار $f(x)=\frac{x-3}{2}+2\sqrt{x}$ و وارون آن در نقاط A و B متقاطع‌اند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

۲۴۹- وارون تابع $f(x)=x+4\sqrt{x}+8$ به صورت $x\geq c$; $f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b}$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۲۵۰- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ کدام است؟

۱) $y=\log_2\frac{1+x}{1-x}$ ۲) $y=\log_2\frac{x+1}{x-1}$ ۳) $y=\log_x\frac{2+x}{2-x}$ ۴) $y=\log_x\frac{2-x}{2+x}$

۲۵۱- ضابطهٔ وارون تابع $y=f(x)=5^{\log_x 5}$ کدام است؟

۱) $y=5^{\log_5 x}$ ۲) $y=5^x$ ۳) $y=5^{\log_x 5}$ ۴) $y=5^{\frac{1}{x}}$

۲۵۲- اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۳- اگر داشته باشیم: $g(x) = f(2x + 5)$ و $f^{-1}(x) = \frac{x^3}{9} + \sqrt[3]{9x}$، آن‌گاه حاصل عبارت $f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -3 ۴) -6

۱۷۶. گزینه ۴ گزینه‌های ۱ ، ۲ و ۳ را که در درس‌نامه داشتیم اما در مورد ۴ همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم اگر f تابعی غیر یک‌به‌یک باشد، f^{-1} (یعنی وارون آن) تابع نیست. پس اگر f تابع باشد، f^{-1} به شرطی تابع است که f یک‌به‌یک باشد.

۱۷۷. گزینه ۴ داریم: $f=\{(۱,۲),(-۳,-۱),(۳,۴),(۴,-۳)\}$

پس $f(۳)=۴$ و $f^{-1}(-۳)=۴$ و در نتیجه:

$$۲f^{-1}(-۳)+f(۳)=۲(۴)+۴=۱۲$$

۱۷۸. گزینه ۳ اول f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$f=\{(-۱,۰),(۱,۲),(۰,۱),(۲,-۱)\}$$

$$f^{-1}=\{(۰,-۱),(۲,۱),(۱,۰),(-۱,۲)\}$$

حالا $\frac{f}{f^{-1}}$ را پیدا می‌کنیم: $\frac{f}{f^{-1}}=\{(-1,\frac{0}{2}),(1,\cancel{\frac{2}{0}}),(0,\frac{1}{-1}),(2,\frac{-1}{1})\}$

حواسمان هست که $\frac{f}{f^{-1}}$ به ازای $x=1$ تعریف‌نشده است؛ پس:

$$\frac{f}{f^{-1}}=\{(-1,0),(0,-1),(2,-1)\}$$

یعنی $\frac{f}{f^{-1}}$ سه زوج مرتب دارد.

۱۷۹. گزینهٔ ۱ رابطهٔ $f=\{(2,a+1),(\sqrt{b},3)\}$ دو زوج مرتب و رابطهٔ $f^{-1}=\{(a-1,c+1),(d,b-2)\}$ هم دو زوج مرتب دارد. پس هر کدام از زوج مرتب‌های f^{-1} باید وارون یکی از زوج مرتب‌های f باشند (یعنی در زوج مرتب f^{-1} جای x و y زوج مرتب f عوض شود)، پس:

الف) $(2,a+1)\xleftrightarrow{\text{وارون}}(a-1,c+1)\Rightarrow\begin{cases}2=c+1\\a+1=a-1\end{cases}\Rightarrow$ غیرممکن

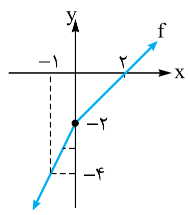
ب) $(2,a+1)\xleftrightarrow{\text{وارون}}(d,b-2)\Rightarrow\begin{cases}2=b-2\\a+1=d\end{cases}\Rightarrow b=4$

$$(\sqrt{b},3)\xleftrightarrow{\text{وارون}}(a-1,c+1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{b}=c+1\\3=a-1\end{cases}\xrightarrow{b=4}\begin{matrix}c=1\\a=4\end{matrix}\xrightarrow{a+1=d}d=5$$

پس $a+b+c+d$ برابر است با: $4+4+1+5=14$

۱۸۰. گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع f برای پیداکردن $f^{-1}(-5)$ باید نقطه‌ای روی نمودار f پیدا کنیم که عرضش برابر ۵- باشد؛ یعنی معادلهٔ خطی را بنویسیم که از $(0,-2)$ و $(-1,-4)$ می‌گذرد:



$$(0,-2),(-1,-4)\Rightarrow m=\frac{-4-(-2)}{-1-0}=\frac{-2}{-1}=2\Rightarrow y=2x-2$$

بنابراین باید $2x-2=-5$ باشد که می‌شود $x=-\frac{3}{2}$ یعنی $f^{-1}(-5)=-\frac{3}{2}$.
برای پیداکردن $f^{-1}(4)$ هم باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که از نقاط $(0,-2)$ و $(2,0)$ می‌گذرد:

$$(0,-2),(2,0)\xrightarrow{f}m=\frac{0-(-2)}{2-0}=1\Rightarrow y=x-2$$

بنابراین باید $x-2=4$ باشد یعنی $x=6$ و در نتیجه $f^{-1}(4)=6$ بنابراین داریم:

$$f^{-1}(-5)+f^{-1}(4)=-\frac{3}{2}+6=\frac{-3+12}{2}=\frac{9}{2}=4/5$$

۱۸۱. گزینهٔ ۱ همان‌طور که می‌دانیم $f^{-1}(6)=1$ و $f^{-1}(21)=4$. پس $f(1)=6$ و $f(4)=21$، یعنی خط $y=ax+b$ از دو نقطهٔ $(1,6)$ و $(4,21)$ می‌گذرد:

$$(1,6),(4,21)\Rightarrow \text{شیب}\ m=\frac{21-6}{4-1}=5\Rightarrow y=5x+1$$

پس $f(x)=ax+b$ باید به شکل $f(x)=5x+1$ باشد و در نتیجه $a=5$ و $b=1$.

۱۸۲. گزینهٔ ۱ نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(a+2,a)$ می‌گذرد. پس نمودار تابع f از نقطهٔ $(a,a+2)$ می‌گذرد، در نتیجه:

$$y=\frac{x-4}{2x-1}\xrightarrow{(a,a+2)}a+2=\frac{a-4}{2a-1}$$

$$\Rightarrow(a+2)(2a-1)=a-4\Rightarrow 2a^2-a+4a-2=a-4$$

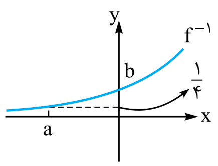
$$\Rightarrow 2a^2+2a+2=0\xrightarrow{\div 2}a^2+a+1=0$$

$\Rightarrow\Delta=(1)^2-4(1)(1)<0\Rightarrow$ جواب ندارد.

پس به ازای هیچ مقدار a نمودار f از نقطهٔ $(a,a+2)$ نمی‌گذرد.

۱۸۳. گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد وارون تابع و محور xها یعنی در تابع وارون $y=0$ باشد، پس در خود تابع $y=x^3+2x-3$ داریم $x=0$ و چون $x=0\Rightarrow y=-3$ پس وارون تابع محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

۱۸۴. گزینهٔ ۱ روی نمودار f^{-1} نقطهٔ $(a,\frac{1}{4})$ داریم پس نقطهٔ $(\frac{1}{4},a)$ باید روی نمودار f باشد:



$$f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}\xrightarrow{x=\frac{1}{4}}f(\tfrac{1}{4})=\sqrt{\tfrac{1}{4}}-\frac{1}{\frac{1}{4}}=a$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}-4=a\Rightarrow a=-\frac{7}{2}$$

از طرف دیگر نقطهٔ $(0,b)$ روی نمودار f^{-1} است، پس روی نمودار f باید نقطهٔ $(b,0)$ را داشته باشیم:

$$(b,0)\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}}\sqrt{b}-\frac{1}{b}=0\Rightarrow\frac{b\sqrt{b}-1}{b}=0$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b}=1\xrightarrow{\text{توان ۲}}b^3=1\Rightarrow b=1$$

پس حاصل $a+b$ برابر است با: $-\frac{7}{2}+1=-\frac{5}{2}$

۱۸۵. گزینهٔ ۳ g وارون تابع f است، یعنی $g=f^{-1}$، حالا داریم:

$$g(6)=f^{-1}(6)=a\Rightarrow f(a)=6\Rightarrow a+\sqrt{a}=6$$

$$\xrightarrow{\text{عددگذاری}}a=4$$

$$g(12)=f^{-1}(12)=b\Rightarrow f(b)=12\Rightarrow b+\sqrt{b}=12$$

$$\xrightarrow{\text{عددگذاری}}b=9$$

پس $g(6)+g(12)$ یا همان $f^{-1}(6)+f^{-1}(12)=4+9=13$ است.

۱۸۶. گزینهٔ ۳ در تابع $f(x)=\begin{cases}4x+3 & x\ge 3\\x+1 & x<3\end{cases}$ فرض می‌کنیم $f^{-1}(-5)=a$ باشد، در این صورت باید $f(a)=-5$ باشد. پس هر کدام از ضابطه‌ها را برابر ۵- قرار می‌دهیم. مقدار به دست آمده برای a در صورتی قابل قبول است که در محدودهٔ تعریف ضابطه باشد:

$x\ge 3\Rightarrow 4a+3=-5\Rightarrow a=-2$ غ‌ق‌ق

$x<3\Rightarrow a+1=-5\Rightarrow a=-6$ ق‌ق

پس $f^{-1}(5)=a=-6$.

۱۸۷. گزینهٔ ۱ اگر $x=f^{-1}(3)$ قرار دهیم داریم:

$$f(f^{-1}(3))=f^{-1}(3)+2f^{-1}(3)-1$$

$$\Rightarrow 3=3f^{-1}(3)-1\Rightarrow f^{-1}(3)=\frac{4}{3}$$

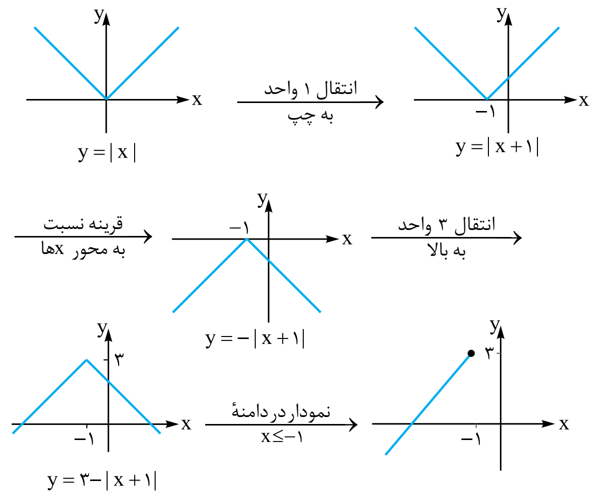
پس $f(x)=\frac{4}{3}+2x-1$ و مقدار $f(3)$ می‌شود $\frac{4}{3}+5=\frac{19}{3}$.

۱۸۸. گزینهٔ ۲ راه I می‌دانیم دامنهٔ f^{-1} برابر برد f است. پس برای پیداکردن دامنهٔ تابع معکوس تابع $f(x)=3-|x+1|$ باید برد تابع f را پیدا کنیم. می‌دانیم حاصل یک قدرمطلق همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، حاصل $|x-1|$ هم به ازای $x\le -1$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس:

$$|x+1|\ge 0\Rightarrow -|x+1|\le 0\Rightarrow 3-|x+1|\le 3\Rightarrow f(x)\le 3$$

پس برد f برابر بازهٔ $(-\infty,3]$ و در نتیجه دامنهٔ f^{-1} هم برابر بازهٔ $(-\infty,3]$ است.

راه II برای پیداکردن $D_{f^{-1}}$ یا همان برد f، می‌توانیم نمودار تابع f را هم رسم کنیم:



حالا طبق نمودار برد تابع f (یا همان دامنهٔ تابع f^{-1}) برابر است با $(-\infty,3]$.

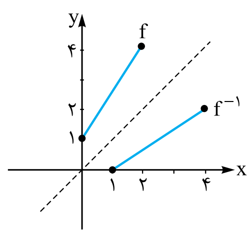
۱۸۹. گزینهٔ ۲ باید دامنه و برد g^{-1} را پیدا کنیم و چون $D_{g^{-1}}=R_g$ و $R_{g^{-1}}=D_g$ پس باید دامنه و برد $g(x)=1+\sqrt{x-2}$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=1+\sqrt{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه}: x\ge 2 \Rightarrow D_g:[2,+\infty) \\ \text{برد}: \sqrt{x-2}\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}+1\ge 1 \\ \text{برد}: y\ge 1 \Rightarrow R_g=[1,+\infty) \end{cases}$$

پس $D_{g^{-1}}=[1,+\infty)$ و $R_{g^{-1}}=[2,+\infty)$ و در دامنه و برد g^{-1} فقط یک عضو صحیح غیرمشترک هست.

۱۹۰. گزینهٔ ۱ راه I طبق شکل زیر نمودار تابع f^{-1} از نقاط $(1,0)$ و $(4,2)$ می‌گذرد.پس ضابطه‌اش برابر است با:

$(1,0),(4,2)$



$$\Rightarrow (\text{شیب})\ m=\frac{2-0}{4-1}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

راه II اول ضابطهٔ خود تابع را پیدا می‌کنیم، تابع f پاره‌خطی است که از نقاط $(0,1)$ و $(2,4)$ می‌گذرد، پس:

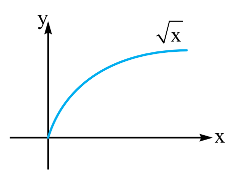
$$(0,1),(2,4) \Rightarrow (\text{شیب})\, m=\frac{4-1}{2-0}=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+1$$

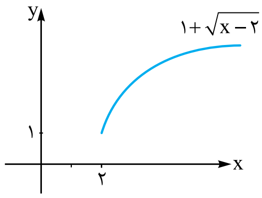
حالا ضابطهٔ f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{3}{2}x+1 \Rightarrow \frac{3}{2}x=y-1$$

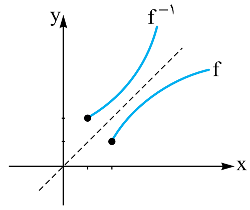
$$\Rightarrow x=\frac{2}{3}y-\frac{2}{3} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

۱۹۱. گزینهٔ ۱ اول نمودار تابع $f(x)=1+\sqrt{x-2}$ را با انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ رسم می‌کنیم و بعد قرینه‌اش را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم، تا نمودار f^{-1} به دست آید:

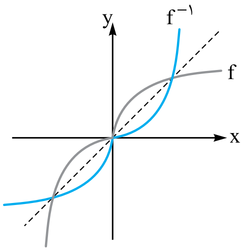




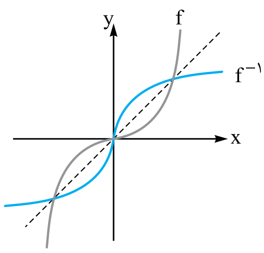
$\Rightarrow$



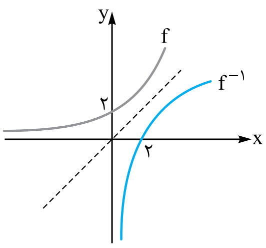
۱۹۲. گزینهٔ ۳ اول نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ را رسم می‌کنیم. نمودار تابع معکوس f، قرینهٔ نمودار آن نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است.



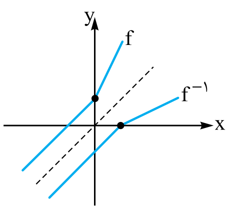
۱۹۳. گزینهٔ ۳ اول نمودار تابع $f(x)=x|x|$ که برابر است با $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ را رسم می‌کنیم. نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به خط $y=x$ است:



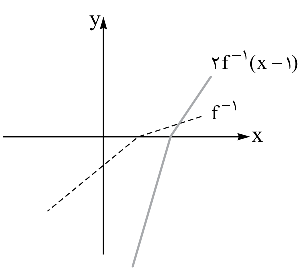
۱۹۴. گزینهٔ ۴ نمودار تابع $f(x)$ را داریم. نمودار تابع $f^{-1}(x)$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است، حالا دامنهٔ تابع $\sqrt{f^{-1}(x)}$ برابر بازه‌ای است که در آن $f^{-1}(x)\ge 0$ باشد که می‌شود $x\ge 2$.



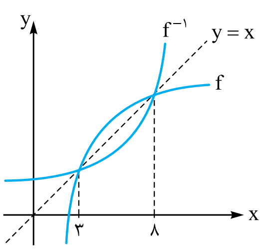
۱۹۵. گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار f^{-1} کافی است وارون نمودار f را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم رسم کنیم:



حالا دقت کنید که ما $2f^{-1}(x-1)$ را می‌خواهیم پس باید f^{-1} را یک واحد به راست برده و عرض‌ها را ۲ برابر کنیم: که از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.



۱۹۶. گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ برابر بازه‌ای است که در آن $x-f^{-1}(x)\ge 0$، یعنی $x\ge f^{-1}(x)$ باشد. با توجه به شکل، خط $y=x$ در بازهٔ $[3,8]$ بالای منحنی تابع قرار می‌گیرد. پس دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ برابر است با بازهٔ $[3,8]$.



۱۹۷. گزینهٔ ۳ | راه I: برای پیداکردن تابع معکوس تابع $f(x)=2x+4$ با دامنهٔ $[-1,3]$ اولاً در مورد ضابطه مثل همان چیزی که قبلاً گفتیم، داریم:

$$y=2x+4 \Rightarrow 2x=y-4 \Rightarrow x=\frac{y-4}{2}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x-4}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}$$

و ثانیاً در مورد دامنهٔ f^{-1} هم می‌دانیم که دامنهٔ f^{-1} همان برد f است پس باید برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=2x+4$ و دامنهٔ $[-1,3]$ را پیدا کنیم:

$$-1\le x\le 3 \Rightarrow -2\le 2x\le 6 \Rightarrow 2\le 2x+4\le 10$$

$$\Rightarrow 2\le f(x)\le 10$$

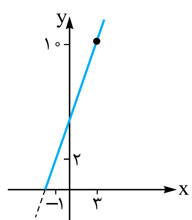
پس برد f برابر بازهٔ $[2,10]$ و در نتیجه دامنهٔ f^{-1} هم برابر بازهٔ $[2,10]$ است، پس تابع معکوس f می‌شود: $f^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}, 2\le x\le 10$

راه II: بعد از پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون یعنی $f^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}$ برای پیداکردن دامنهٔ f^{-1} می‌توانیم نمودار تابع f را رسم و برد f را تعیین کنیم:

$f(x)=2x+4 , x\in[-1,3]$

$x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (-1,2)$

$x=3 \Rightarrow y=10 \Rightarrow (3,10)$



حالا با توجه به نمودار برد تابع f برابر است با $[2,10]$ پس دامنهٔ f^{-1} هم می‌شود $2\le x\le 10$.

۱۹۸. گزینهٔ ۴ | برای پیداکردن وارون یک تابع دوضابطه‌ای f در هر کدام از ضابطه‌ها:

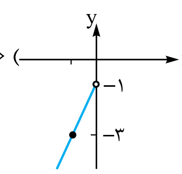
الف) ضابطهٔ وارون را پیدا می‌کنیم (x را برحسب y پیدا و جای x و y را عوض می‌کنیم) و ب) برای هر کدام از ضابطه‌ها برد تابع f را با رسم نمودار پیدا می‌کنیم که برابر می‌شود با دامنهٔ f^{-1}، ببینیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ 4x+1 & x\ge 0\end{cases}$$

ضابطهٔ بالا: الف) $y=2x-1 \Rightarrow 2x=y+1 \Rightarrow x=\frac{y}{2}+\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ب) $(0,-1),(-1,-3) \Rightarrow$

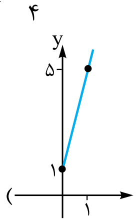


$\Rightarrow$ دامنهٔ $f^{-1}: x<-1$

ضابطهٔ پایین: الف) $y=4x+1 \Rightarrow 4x=y-1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}$

$\xrightarrow{x\Leftrightarrow y} y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$

ب) $(0,1),(1,5) \Rightarrow$



$\Rightarrow$ دامنهٔ $f^{-1}: x\ge 1$

پس ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ برابر است با:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & x<-1\\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{4} & x\ge 1\end{cases}$$

۱۹۹. گزینهٔ ۱ | راه I: معادلهٔ قرینهٔ خط $d_1: 3y-2x=4$ را نسبت به خط $y=x$ پیدا می‌کنیم (جای x و y را عوض می‌کنیم.):

$d: 3x-2y=4 \Rightarrow$ عرض از مبدأ $x=0 \Rightarrow -2y=4 \Rightarrow y=-2$

راه II: اگر فرض کنیم خط $3y-2x=4$ ضابطهٔ یک تابع مانند f است، خط d، قرینهٔ آن نسبت به خط $y=x$، ضابطهٔ تابع وارون آن یعنی f^{-1} است، پس عرض از مبدأ خط d، برابر طول از مبدأ خط $3y-2x=4$ است، بنابراین داریم:

$3y-2x=4 \Rightarrow$ طول از مبدأ $y=0 \Rightarrow -2x=4 \Rightarrow x=-2$

۲۰۰. گزینهٔ ۲ | راه I: در درس‌نامه داشتیم اگر f یک تابع خطی باشد f و وارون f در دو صورت بر هم منطبق‌اند:

الف) $f(x)=x$ باشد.

ب) $f(x)=-x+b$ باشد (چون خط $y=-x+b$ بر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم عمود است و قرینه‌اش نسبت به نیمساز می‌شود خودش). پس حالا که داریم $f(x)=ax+1$ باید $a=-1$ باشد.

راه II: وارون تابع f را پیدا می‌کنیم: $y=ax+1$

$$\Rightarrow ax=y-1 \Rightarrow x=\frac{1}{a}y-\frac{1}{a} \xrightarrow{x\Leftrightarrow y} y=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$$

حالا دو خط $y=ax+1$ و $y=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$ باید بر هم منطبق باشند، پس باید a برابر -1 باشد.

۲۰۱. گزینهٔ ۲ | دو خط $d_1: ax+by=8$ و $d_2: 2x-3y=b$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند پس قرینهٔ d_2 را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم پیدا می‌کنیم: $2x-3y=b \xrightarrow{x\Leftrightarrow y} 2y-3x=b$

حالا دو خط $2y-3x=b$ و $ax+by=8$ باید بر هم منطبق باشند پس ضرایب x و y و عدد ثابت دو خط باید با هم متناسب باشند:

$$\begin{cases}-3x+2y=b\\ ax+by=8\end{cases} \xrightarrow{\text{منطبق بر هم}} -\frac{3}{a}=\frac{2}{b}=\frac{b}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{b}=\frac{b}{8} \Rightarrow b^2=16$$

$$\Rightarrow \begin{cases}b=4 \Rightarrow -\frac{3}{a}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8} \Rightarrow a=-6\\ b=-4 \Rightarrow -\frac{3}{a}=\frac{2}{-4}=\frac{-4}{8} \Rightarrow a=6\end{cases}$$

پس یا $a=-6$ و $b=4$ که $a+b$ می‌شود $-6+4=-2$ و یا $a=6$ و $b=-4$ که $a+b$ می‌شود $6+(-4)=2$.

۲۰۲. گزینهٔ ۴ | راه I: مثل همیشه برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{x-1} \Rightarrow xy-y=1 \Rightarrow xy=y+1$$

$$\Rightarrow x=\frac{y+1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x}$$

و چون $1+\frac{1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$ پس $f^{-1}(x)=1+\frac{1}{x}$.

راه II: در درس‌نامه دیدیم وارون تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است، پس:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{0\times x+1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-0}=\frac{x+1}{x}$$

۲۰۳. گزینه ۲ از درس‌نامه یادمان هست که تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به شرطی وارون خودش است که $a=-d$، در تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x+b}$ باید $b=-2$ باشد، پس $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ است و در نتیجه $f(0)=-\frac{3}{2}$.

۲۰۴. گزینه ۲ | راه I در درس‌نامه دیدیم که نمودار تابع هموگرافیک، نمودار تابع وارونش را روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع می‌کند، یعنی روی خط $y=x$. پس می‌توانیم مقدار x را از گزینه‌ها در ضابطهٔ تابع قرار دهیم و در هر کدام که y برابر x شد جواب است: $y=\frac{x+4}{x-2}$

$$x=1 \Rightarrow y=\frac{1+4}{1-2}=-5 \text{ ✗}$$

$$x=-1 \Rightarrow y=\frac{-1+4}{-1-2}=-1 \text{ ✓}$$

$$x=4 \Rightarrow y=\frac{4+4}{4-2}=4 \text{ ✓}$$

$$x=-4 \Rightarrow y=\frac{-4+4}{-4-2}=0 \text{ ✗}$$

پس جواب می‌شود $x=-1$ و $x=4$.

راه II تابع $y=\frac{x+4}{x-2}$ را با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=\frac{x+4}{x-2} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \frac{x+4}{x-2}=x \Rightarrow x+4=x^2-2x$$

$$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \xrightarrow{a+c=b} x=-1,\ x=4$$

۲۰۵. گزینه ۲ | راه I برد $\sqrt{x+3}$ شامل اعداد بیشتر یا مساوی صفر است (پس دامنهٔ f^{-1} باید $x\ge 0$ باشد). به ازای $x=1$ داریم $y=2$. پس در وارون آن نقطه $(2,1)$ صدق می‌کند و جواب می‌شود (۲).

راه II ضابطهٔ تابع وارون و دامنه‌اش را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}\ \text{ضابطهٔ}: y=\sqrt{x+3} \Rightarrow y^2=x+3$$

$$\Rightarrow x=y^2-3 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2-3$$

$$f^{-1}\ \text{دامنهٔ}: \sqrt{x+3}\ge 0 \Rightarrow y\ge 0$$

$$\Rightarrow \text{برد } f: y\ge 0 \Rightarrow \text{دامنهٔ } f^{-1}: x\ge 0$$

۲۰۶. گزینه ۱ | عددگذاری در تابع f داریم: $f(5)=0$، پس در وارون آن $f^{-1}(0)=5$ که فقط به (۱) می‌خورد.

راه II با توجه به گزینه‌ها هم باید ضابطهٔ تابع وارون و هم دامنهٔ آن را پیدا کنیم. برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون داریم:

$$y=2-\sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1}=2-y$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-1=(2-y)^2 \Rightarrow x=4-4y+y^2+1$$

$$\Rightarrow x=y^2-4y+5 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2-4x+5$$

و برای پیداکردن دامنهٔ f^{-1} می‌گوییم دامنهٔ f^{-1} برابر برد f است و چون در f داریم $y=2-\sqrt{x-1}$، می‌نویسیم:

$$\sqrt{x-1}\ge 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1}\le 0 \Rightarrow 2-\sqrt{x-1}\le 2 \Rightarrow f(x)\le 2$$

پس برد f برابر است با $y\le 2$ و در نتیجه دامنهٔ f^{-1} هم می‌شود $x\le 2$؛ یعنی تابع وارون برابر است با:
$f^{-1}(x)=x^2-4x+5,\ x\le 2$

۲۰۷. گزینه ۱ | عددگذاری f از $(2,1)$ می‌گذرد پس باید $(1,2)$ در وارونش هم صدق کند که فقط به (۱) می‌خورد.

راه II برای پیداکردن ضابطهٔ f^{-1} با شرط $x\ge 2$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و برای پیداکردن دامنهٔ f^{-1} برد خود تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}\ \text{ضابطهٔ}: y=x^2-4x+5 \Rightarrow y-1=(x-2)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y-1}=|x-2| \xrightarrow{x\ge 2} x-2=\sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow x=2+\sqrt{y-1} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=2+\sqrt{x-1}$$

$$f^{-1}\ \text{دامنهٔ}: y=(x-2)^2+1 \Rightarrow y\ge 1$$

$$\Rightarrow \text{برد } f: y\ge 1 \Rightarrow \text{دامنهٔ } f^{-1}: x\ge 1$$

۲۰۸. گزینه ۱ ضابطهٔ تابع وارون f را با شرط $x\le 1$ پیدا می‌کنیم:

$$y=x^2-2x \xrightarrow{\text{تبدیل به مربع کامل}} y+1=x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow y+1=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \sqrt{y+1}=|x-1|$$

$$\xrightarrow{\text{چون } x\le 1 \text{ است}} \sqrt{y+1}=-x+1 \Rightarrow x=-\sqrt{y+1}+1$$

$$\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y را}} y=-\sqrt{x+1}+1$$

پس $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}+1$ است که با مقایسه‌اش با $y=a\sqrt{x+b}+c$ داریم $a=-1$ و $b=1$ و $c=1$ پس $a+b-c^2$ برابر است با:

$$-1+1-(1)^2=-1$$

۲۰۹. گزینه ۳ | عددگذاری در خود تابع نقطهٔ $(1,9)$ را داریم پس در گزینهٔ درست باید $(9,1)$ بخورد.

راه II x را بر حسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=x^3+3x^2+3x+2 \Rightarrow y=x^3+3x^2+3x+1+1$$

$$\Rightarrow y=(x+1)^3+1 \Rightarrow (x+1)^3=y-1$$

$$\Rightarrow x+1=\sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}-1$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt[3]{x-1}-1$$

۲۱۰. گزینه ۲ | عددگذاری در تابع فرض می‌کنیم $x=-\frac{1}{2}$:

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{16}-2\left(\frac{1}{4}\right)+1=\frac{9}{16}$$

پس در تابع وارون باید داشته باشیم $x=\frac{9}{16} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$ که فقط در (۲) صدق می‌کند.

راه II در تابع $y=x^4-2x^2+1$، x را بر حسب y، با توجه به $-1<x<0$ پیدا می‌کنیم: $y=(x^2-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y}=|x^2-1|$

$$\xrightarrow{-1<x<0} \sqrt{y}=-x^2+1 \Rightarrow x^2=1-\sqrt{y}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{1-\sqrt{y}} \xrightarrow{-1<x<0} -x=\sqrt{1-\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{1-\sqrt{y}} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

پس تابع وارون $y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$ است.

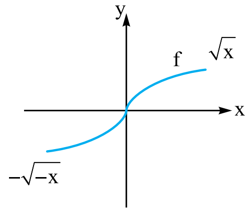
۲۱۱. گزینه ۳ | عددگذاری زوج‌های مرتب $(1,1)$ و $(-1,-1)$ در f هستند و عکس آن‌ها باید در f^{-1} باشد که فقط به (۳) می‌خورد.

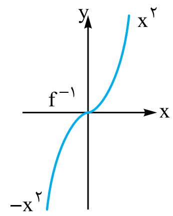
راه II قرار شد برای محاسبهٔ تابع وارون، x را برحسب y پیدا کنیم و سپس جای x و y را عوض کنیم. در تابع‌های دوضابطه‌ای (یا چندضابطه‌ای) این کار را برای هر کدام از ضابطه‌ها انجام می‌دهیم:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\ ;\ x\ge 0 \Rightarrow y=\sqrt{x} \\ \Rightarrow x=y^2 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2 \\ -\sqrt{-x}\ ;\ x<0 \Rightarrow y=-\sqrt{-x} \\ \Rightarrow y^2=-x \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-x^2 \end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون برابر است با $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\ge ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}$ که می‌تواند به صورت $f(x)=x|x|$ نوشته شود.

نمودار تابع و وارونش را ببینید:





۲۱۲. گزینه ۱ | عددگذاری: در تابع f به ازای $x=-۲$ داریم $y=-۲$. پس وارون آن باید در شرایط $f^{-1}(-۲)=-۲$ صدق کند که فقط به ۱ می‌خورد.

اشاره: این تابع در $x<-۲$ یک‌به‌یک نیست (تابع ثابت است.)

راه I: از اول تابع را به یک تابع دوضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=x+|x+۲| \Rightarrow f(x)=\begin{cases}۲x+۲ & x\ge -۲\\ -۲ & x<-۲\end{cases}$$

از بین دو ضابطهٔ تابع، ضابطهٔ $y=۲x+۲$ در بازهٔ $x\ge -۲$ وارون‌پذیر است (چون ضابطهٔ دیگر $y=-۲$ یک تابع ثابت است که یک‌به‌یک نیست). ضابطهٔ تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم:

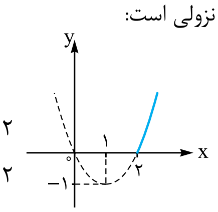
$$x\ge -۲: y=۲x+۲ \Rightarrow x=\frac{y-۲}{۲} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x-۲}{۲}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون برابر است با: $y=\frac{x-۲}{۲}$ و $x\ge -۲$

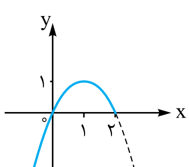
۲۱۳. گزینه ۳ | عددگذاری: در تابع f نقطهٔ $(۲,۰)$ می‌خورد پس باید $(۰,۲)$ در وارونش صدق کند که فقط در ۳ این‌طور است!

راه I: اول نمودار تابع $y=x|x-۲|$ را رسم می‌کنیم تا ببینیم در کدام بازه نزولی است:

$$y=x|x-۲|=\begin{cases}x^{۲}-۲x & x\ge ۲\\ -x^{۲}+۲x & x<۲\end{cases}$$

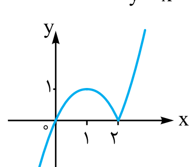


$y=x^{۲}-۲x$



$y=-x^{۲}+۲x$

$\Rightarrow$



$y=x|x-۲|$

با توجه به شکل رسم‌شده تابع در بازهٔ $[۱,۲]$ نزولی است، ضابطهٔ تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$۱\le x\le ۲ \Rightarrow y=-x^{۲}+۲x \Rightarrow y-۱=-(x-۱)^{۲}$$

$$\Rightarrow (x-۱)^{۲}=۱-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۱|=\sqrt{۱-y}$$

$$\xrightarrow{۱<x<۲} x-۱=\sqrt{۱-y} \Rightarrow x=\sqrt{۱-y}+۱$$

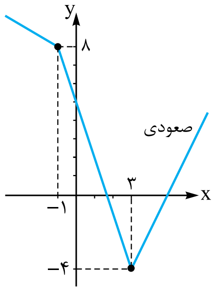
$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt{۱-x}+۱$$

پس ضابطهٔ تابع وارون در این بازه برابر است با: $f^{-1}(x)=۱+\sqrt{۱-x}, ۰\le x\le ۱$

البته در گزینه‌ها، بازه‌های جواب به صورت باز آمده‌اند.

۲۱۴. گزینه ۳

راه I: نمودار f را می‌کشیم، ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها $x=۳$ و $x=-۱$ هستند، نقاط شکستگی $A(۳,-۴)$ و $B(-۱,۸)$ هستند و شیب نمودار برای xهای بزرگ $۲-۱=۱$ و برای xهای خیلی منفی، $-۲-(-۱)=-۱$ است. ببینید:



تابع با دامنهٔ $[۳,+\infty)$ و برد $[-۴,+\infty)$ صعودی است. پس دامنهٔ وارونش $x\ge -۴$ است و وارون آن از نقطهٔ $(-۴,۳)$ می‌گذرد.

راه II: ضابطهٔ تابع $f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|$ را ساده می‌کنیم تا ببینیم در کدام بازه صعودی است.

نزولی $\quad x<-۱ \Rightarrow y=-۲x+۶+x+۱ \Rightarrow y=-x+۷$

نزولی $\quad -۱\le x<۳ \Rightarrow y=-۲x+۶-x-۱ \Rightarrow y=-۳x+۵$

صعودی $\quad ۳\le x \Rightarrow y=۲x-۶-x-۱ \Rightarrow y=x-۷$

پس باید ضابطهٔ تابع وارون را برای $x\ge ۳$ و $y=x-۷$ پیدا کنیم:

$$y=x-۷ \Rightarrow \begin{cases}\text{ضابطهٔ وارون}: y=x-۷ \Rightarrow x=y+۷\\ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x+۷\\ \text{دامنهٔ وارون}: x\ge ۳ \Rightarrow x-۷\ge -۴\\ \Rightarrow y\ge -۴ \xrightarrow[\text{وارون}]{\text{در تابع}} x\ge -۴\end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون برابر است با: $f^{-1}(x)=x+۷$ و $x\ge -۴$

در گزینه‌ها حالت تساوی را نداریم، پس $x>۴$ را در نظر می‌گیریم.

۲۱۵. گزینه ۲ | عددگذاری: در خود تابع نقطهٔ $(-۱,-۴)$ را داریم، پس در وارونش باید $(-۴,-۱)$ را داشته باشیم که فقط در ۲ صدق می‌کند.

راه II: اول ضابطهٔ تابع را به ازای xهای مثبت و منفی به دست می‌آوریم:

$$y=۳x-|x|$$

$$x\ge ۰ \Rightarrow y=۳x-x \Rightarrow y=۲x \Rightarrow x=\frac{y}{۲}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۲}$$

$$x<۰ \Rightarrow y=۳x+x \Rightarrow y=۴x \Rightarrow x=\frac{y}{۴}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۴}$$

پس تابع وارون برابر است با: $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲} & x\ge ۰\\ \frac{x}{۴} & x<۰\end{cases}$

حالا اگر گزینه‌ها را به ازای $x\ge ۰$ و $x<۰$ ساده کنیم ۲ برابر f^{-1} است:

$$y=\frac{۳x+|x|}{۸}=\begin{cases}\frac{x}{۲} & x\ge ۰\\ \frac{x}{۴} & x<۰\end{cases}$$

۲۱۶. گزینه ۴ | عددگذاری: تابع از نقاط $(۰,۰)$ و $(۴,۲)$ عبور می‌کند پس $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ باید در وارونش صدق کنند که فقط به ۴ می‌خورد.

راه II: ضابطهٔ تابع را به ازای $x>۰$ و $x<۰$ جدا می‌کنیم و در هر حالت ضابطهٔ تابع وارون (به همراه دامنهٔ تابع وارون) را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\ne ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

$x>۰ \Rightarrow y=\sqrt{x} \Rightarrow y^۲=x \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^۲, x>۰$

$x<۰ \Rightarrow y=-\sqrt{-x} \Rightarrow y^۲=-x$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-x^۲, x<۰$

پس تابع وارون برابر است با $f^{-1}(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ و از بین گزینه‌ها (۴) برابر f^{-1} است.

۲۱۷. گزینه ۱ **عددگذاری** نقطهٔ $(۰,۰)$ روی منحنی تابع $y=\frac{x}{۱+|x|}$ قرار دارد پس $(۰,۰)$ باید در f^{-1} هم صدق کند که با بررسی گزینه‌ها جواب می‌شود (۱).

راه II ضابطهٔ تابع را به ازای xهای مثبت و منفی جدا می‌کنیم و در هر کدام، تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$y=\frac{x}{۱+|x|} \Rightarrow$

الف) $x\ge۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱+x} \Rightarrow y+yx=x \Rightarrow x(۱-y)=y$

$\Rightarrow x=\frac{y}{۱-y} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۱-x}$

ب) $x<۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱-x} \Rightarrow y-yx=x \Rightarrow x(۱+y)=y$

$\Rightarrow x=\frac{y}{۱+y} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x}{۱+x}$

از طرفی با توجه به محدودهٔ x در خود تابع در مورد تابع وارون داریم:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۱-x} & ۰\le x<۱\\ \frac{x}{۱+x} & -۱<x<۰\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{۱-|x|}, |x|<۱$$

۲۱۸. گزینه ۱ **عددگذاری** در $f(x)=۲^x-۱$ به ازای $x=۱$ داریم $y=۱$ و در گزینه‌ها نقطهٔ $(۱,۱)$ فقط در گزینه‌های (۱) و (۳) صدق می‌کند. به ازای $x=۳$ داریم $y=۷$، پس باید $(۷,۳)$ در تابع معکوس صدق کند و (۱) صحیح است.

راه II x را بر حسب y پیدا می‌کنیم: $y=۲^x-۱ \Rightarrow ۲^x=y+۱$

$\xrightarrow{a=\log_c b \Leftrightarrow b=a^c} x=\log_۲(y+۱)$

$\xrightarrow[\text{را عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y}} y=\log_۲(x+۱)$

۲۱۹. گزینه ۲ **راه I** داریم: $f(x)=\log_{۱۰}(x-۱)-۳$، برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$y=\log_{۱۰}(x-۱)-۳ \Rightarrow y+۳=\log_{۱۰}(x-۱)$

$\Rightarrow x-۱=۱۰^{y+۳} \Rightarrow x=۱۰^{y+۳}+۱$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=۱۰^{x+۳}+۱ \Rightarrow f^{-1}(x)=۱۰^{x+۳}+۱$

عددگذاری روی نمودار $f(x)=\log_{۱۰}(x-۱)-۳$ اگر $x=۲$ باشد:

$y=\log_{۱۰}۱-۳=۰-۳=-۳ \Rightarrow (۲,-۳)\in f$

پس نقطهٔ $(-۳,۲)$ باید روی نمودار f^{-1} قرار داشته باشد که فقط در (۲) یعنی $f^{-1}(x)=۱۰^{x+۳}+۱$ صدق می‌کند.

۲۲۰. گزینه ۴ **راه I** $f^{-1}(۲)$ یعنی در تابع وارون x برابر ۲ است، پس در خود تابع باید $y=۲$ باشد:

$y=\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲} \Rightarrow \frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲}=۲$

$\Rightarrow ۲^x+\frac{۱}{۲^x}=۴ \Rightarrow \frac{۲^{۲x}+۱}{۲^x}=۴ \Rightarrow ۲^{۲x}+۱=۴\times۲^x$

$\Rightarrow ۲^{۲x}-۴\times۲^x+۱=۰$

حالا باید معادلهٔ نهایی به دست آمده را حل کنیم. اگر فرض کنیم $۲^x=t$ داریم:

$(۲^x)^۲-۴(۲^x)+۱=۰ \Rightarrow t^۲-۴t+۱=۰$

$\xrightarrow{\text{روش }\Delta} t=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۴(۱)(۱)}}{۲(۱)} \Rightarrow t=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}$

$=\frac{۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲(۲\pm\sqrt{۳})}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$

حالا چون باید $x>۰$ باشد، پس ۲^x باید بزرگ‌تر از ۱ شود؛ یعنی $۲^x=۲+\sqrt{۳}$، پس در نتیجه: $x=\log_۲ ۲+\sqrt{۳}$

راه II چون $x>۰$ است، پس گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند (چون $۲-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}-۱$ هر دو بین صفر و یک‌اند و لگاریتمشان منفی است.) بنابراین می‌ماند (۳) و (۴) که در معادله امتحانشان می‌کنیم:

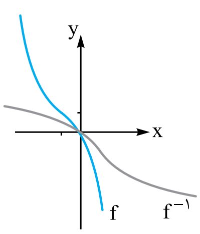
(۳) $x=\log_۲(\sqrt{۳}+۱) \Rightarrow \frac{۲^{\log_۲(\sqrt{۳}+۱)}+\frac{۱}{۲^{\log_۲(\sqrt{۳}+۱)}}}{۲}=۲$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}+۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}}{۲}=۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}+۱+\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}}{۲}=۲$

$\Rightarrow ۳\sqrt{۳}+۱=۸$ ×

پس (۳) هم نادرست است و جواب می‌شود (۴) یعنی $x=\log_۲(۲+\sqrt{۳})$.

۲۲۱. گزینه ۳



نمودار تابع $y=-(x+۱)^۳+۱$ و نمودار تابع معکوسش را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم: همان‌طور که می‌بینیم منحنی تابع و وارونش یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۲۲۲. گزینه ۲ **راه I** تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ صعودی اکید است، پس تابع وارونش را باید روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع کند؛ یعنی در نقطهٔ (a,a)، پس می‌توانیم گزینه‌ها را امتحان کنیم: (هر عددی به x بدهیم y هم باید همان شود.)

(۱) $x=-۱ \Rightarrow y=\sqrt{-۱+۲}=۱$ ×

(۲) $x=۲ \Rightarrow y=\sqrt{۲+۲}=۲$ ✓

پس جواب (۲) است.

راه II چون سؤال گفته نقطهٔ تلاقی تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ با نمودار معکوس آن و f اکیداً صعودی است، پس این نقطه روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرار دارد پس تابع را با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع می‌دهیم:

$\begin{cases}y=\sqrt{x+۲}\\y=x\end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{x+۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲=x+۲$

$\Rightarrow x^۲-x-۲=۰$

$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}x=-۱ \xrightarrow{\text{چون } x\ge۰} \text{غقق}\\ x=۲ \quad \text{قق}\end{cases}$

۲۲۳. گزینه ۱ چون نمودار تابع f و نمودار وارونش یعنی f^{-1} در نقطهٔ $(۱,۲)$ یکدیگر را قطع می‌کنند پس نقطهٔ $(۱,۲)$ در ضابطهٔ هر دو صدق می‌کند، یعنی $f(۱)=۲$ و $f^{-1}(۱)=۲$ و در نتیجه $f^{-1}(۲)=۱$ و $f(۲)=۱$.

۲۲۴. گزینه ۱ نمودار تابع f و تابع وارونش یعنی $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۱,۲)$ متقاطع‌اند، پس $(۱,۲)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار $f^{-۱}$. در نتیجه نقطهٔ $(۲,۱)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار $f^{-۱}$، بنابراین:

$$f(x)=\sqrt{ax+b}$$

$$\begin{cases}(۱,۲)\Rightarrow ۲=\sqrt{a+b}\Rightarrow\\(۲,۱)\Rightarrow ۱=\sqrt{۲a+b}\Rightarrow\end{cases}\begin{cases}a+b=۴\\۲a+b=۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} -a=۳\Rightarrow a=-۳\Rightarrow b=۷$$

بنابراین: $a-b=-۱۰$.

۲۲۵. گزینه ۳ می‌دانیم تابع‌های چندجمله‌ای درجهٔ زوج (با دامنهٔ $\mathbb{R}$) هرگز یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیستند. بنابراین برای این‌که تابع $f(x)=(a+۱)x^۴+(a+۲)x^۳+(a+۴)x^۲+۳x$ وارون‌پذیر باشد، باید جملهٔ $x^۴$ حذف شود یعنی $a=-۱$.

پس ضابطهٔ تابع f برابر است با $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$، حالا باید تعداد نقاط برخورد منحنی تابع f را با خط $x=y$ حساب کنیم:

$$\begin{cases}y=x^۳+۳x^۲+۳x\\y=x\end{cases}\Rightarrow x^۳+۳x^۲+۳x=x$$

$$\Rightarrow x(x^۲+۳x+۲)=۰\Rightarrow x(x+۱)(x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۱\\x=-۲\end{cases}$$

پس منحنی تابع، خط $y=x$ را در سه نقطه قطع می‌کند.

۲۲۶. گزینه ۳ می‌دانیم نمودار تابع $f^{-۱}$ و f نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، پس اگر نمودار $f^{-۱}$ خط $y=x-۲$ را در نقطهٔ (α,β) قطع کند، نمودار f خط قرینهٔ خط $y=x-۲$ نسبت به نیمساز را، در نقطهٔ (β,α) قطع می‌کند. پس قرینهٔ خط $y=x-۲$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم پیدا می‌کنیم و با f قطع می‌دهیم:

$$y=x-۲\xrightarrow[\text{را عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y}}x=y-۲\Rightarrow y=x+۲$$

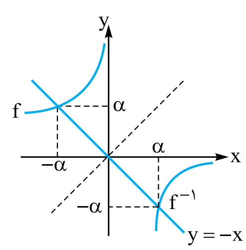
حالا خط $y=x+۲$ را با تابع $f(x)=x^۳+x+۱$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=x^۳+x+۱\\y=x+۲\end{cases}\Rightarrow x^۳+x+۱=x+۲\Rightarrow x^۳=۱$$

$$\Rightarrow x=۱\xrightarrow{\text{روی } y=x+۲ \text{ است}}y=۳$$

پس نقطهٔ (β,α) همان $(۱,۳)$ است؛ یعنی $\beta=۱$ و $\alpha=۳$ و در نتیجه $\alpha+\beta=۴$.

۲۲۷. گزینه ۲ اگر نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطهٔ $(\alpha,-\alpha)$ قطع کند، نمودار خود تابع، نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطهٔ $(-\alpha,\alpha)$ قطع می‌کند (به شکل فرضی که کشیده‌ایم، نگاه کنید!).



پس نمودار تابع $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ را با نیمساز ناحیهٔ دوم یعنی $y=-x$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=x-\frac{۲}{x}\\y=-x\end{cases}\Rightarrow x-\frac{۲}{x}=-x\Rightarrow\frac{x^۲-۲}{x}=-x$$

$$\Rightarrow x^۲-۲=-x^۲\Rightarrow ۲x^۲=۲\Rightarrow x^۲=۱$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیهٔ دوم}}\begin{cases}x=۱ \quad \text{غق}\\x=-۱ \quad \text{قق}\end{cases}$$

پس $-\alpha=-۱$ و در نتیجه $\alpha=۱$.

۲۲۸. گزینه ۴ اگر نمودار تابع $f^{-۱}$ خط $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ در نقطه‌ای به طول α قطع کند، نمودار خود تابع f خط قرینهٔ خط $y=\frac{x-۹}{۲}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را در نقطه‌ای به عرض α قطع می‌کند، پس اول قرینهٔ خط $y=\frac{x-۹}{۲}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{x-۹}{۲}\xrightarrow[\text{را عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y}}x=\frac{y-۹}{۲}\Rightarrow y-۹=۲x$$

$$\Rightarrow y=۲x+۹$$

حالا خط $y=۲x+۹$ را با نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲x-۳$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=x^۲-۲x-۳\\y=۲x+۹\end{cases}\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۲x+۹$$

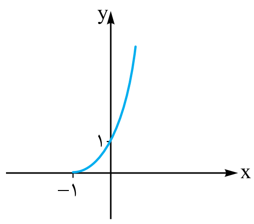
$$\Rightarrow x^۲-۴x-۱۲=۰\Rightarrow(x+۲)(x-۶)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۲ \quad \text{غق}\\x=۶ \quad \text{قق}\end{cases}(\text{چون } x\geq ۱ \text{ است})$$

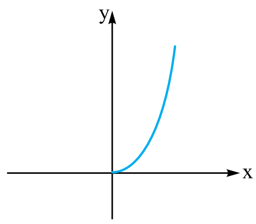
حالا مقدار عرض نقطه را به ازای $x=۶$ پیدا می‌کنیم:

$$x=۶\Rightarrow y=۲(۶)+۹=۲۱\Rightarrow\alpha=۲۱$$

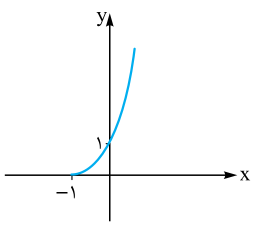
۲۲۹. گزینه ۴ داریم $f(x)=(x+۱)^۲$ پس $f(x-۱)=x^۲$ و از طرف دیگر برای رسم $f^{-۱}(-x)$ اول نمودار $f(x)$ و سپس نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ یعنی قرینهٔ نمودار نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را رسم می‌کنیم و بعد نمودار $f^{-۱}(-x)$ یعنی قرینهٔ نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ را نسبت به محور yها می‌کشیم: (در تمام این‌ها حواسمان هست که دامنهٔ تابع $x>-۱$ است.)



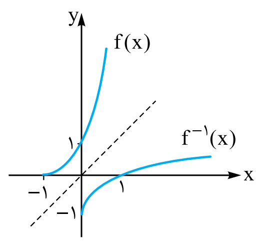
$y=f(x)$ $\Rightarrow$



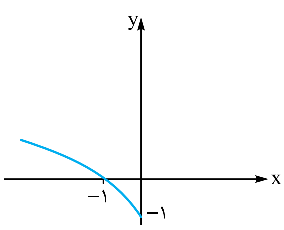
$y=f(x-۱)$



$y=f(x)$ $\Rightarrow$



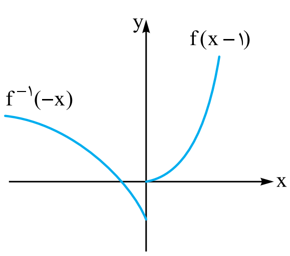
$y=f^{-۱}(x)$



$y=f^{-۱}(-x)$

حالا نمودار $f(x-۱)$ و $f^{-۱}(-x)$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

دو نمودار یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند.



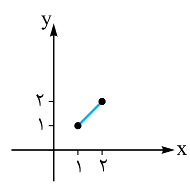
۲۳۰. گزینه ۱ گفتیم $(fof^{-1})(x)=x$، پس تابع fof^{-1} از زوج مرتب‌هایی تشکیل شده است که x و y‌شان برابر است و فقط باید دامنهٔ fof^{-1} را پیدا کنیم:
$$D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$$
و چون $f=\{(۱,۲),(۲,۳)\}$، پس $R_f=\{۲,۳\}$ و در نتیجه:
$$fof^{-1}=\{(۲,۲),(۳,۳)\}$$

۲۳۱. گزینه ۲ چون $(fog)(x)=x$، پس $g=f^{-1}$ و در نتیجه:
$$f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$$
$$\Rightarrow f^{-1}=g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

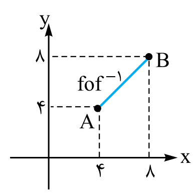
نکته البته g می‌تواند زوج‌های مرتب دیگری به شکل (a,b) داشته باشد. فقط نباید ۱ و ۲ و ۳ باشد. به همین دلیل این جواب، تنها انتخاب g نیست، مثلاً $g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳),(۷,۸)\}$ هم قابل قبول است.

۲۳۲. گزینه ۳ با توجه به ماشین $x\to\boxed{f}\to\boxed{g}\to x$ داریم $(gof)(x)=x$ پس $g=f^{-1}$، بنابراین:
$$f(x)=۲x-۱\Rightarrow g(x)=\frac{x+۱}{۲}$$
$$g(۰)=f^{-1}(۰)\Rightarrow ۰=۲x-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

۲۳۳. گزینه ۴ می‌دانیم همواره $(fof^{-1})(x)=x$ است و برای رسم نمودار تابع $(fof^{-1})(x)$ فقط باید دامنهٔ fof^{-1} را پیدا کنیم. طبق آن‌چه در درس‌نامه گفتیم:
$$D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$$
پس $(fof^{-1})(x)=x$ یعنی همان خط $y=x$ که دامنه‌اش برابر برد f یعنی بازهٔ $[۱,۲]$ است که نمودارش می‌شود:



۲۳۴. گزینه ۱ گفتیم $fof^{-1}(x)$ همان $y=x$ است فقط دامنهٔ آن، برد f است. در این‌جا f اکیداً صعودی است پس برد آن با دامنهٔ $[-۱,۱]$ به صورت $[f(-۱),f(۱)]$ یعنی $[۴,۸]$ خواهد بود.



$$\text{طول پاره‌خط نمودار}=\sqrt{(۴-۸)^۲+(۴-۸)^۲}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

۲۳۵. گزینه ۲ می‌دانیم:
$$(f^{-1}of)(x)=x$$
پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۱+(f^{-1}of)(x)}$ برابر است با دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۱+x}$ به شرط آن‌که $f^{-1}of$ تعریف‌شده باشد. یعنی $x\in D_{f^{-1}of}$ و چون $D_{f^{-1}of}=D_f$، پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۱+(f^{-1}of)(x)}$ برابر می‌شود با:
$$\text{دامنه}=\{۱+x\ge ۰\mid x\in D_f\}$$
از طرف دیگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ برابر است با $x\le ۱$، پس:
$$\text{دامنه}=\{x\ge -۱\mid x\le ۱\}=[-۱,۱]$$

۲۳۶. گزینه ۱ می‌دانیم:
$$(fog^{-1})(۴)=f(g^{-1}(۴))$$
پس اول باید حاصل $g^{-1}(۴)$ را پیدا کنیم:
$$g(x)=\frac{۵x+۲}{۲x-۱}\Rightarrow ۴=\frac{۵x+۲}{۲x-۱}\Rightarrow ۸x-۴=۵x+۲$$
$$\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲\Rightarrow g^{-1}(۴)=۲$$
$$f(x)=x^۲+x\Rightarrow f(g^{-1}(۴))=f(۲)=۴+۲=۶$$

۲۳۷. گزینه ۱ اول باتوجه‌به‌این‌که $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$، ضابطهٔ f^{-1} و gof^{-1} را پیدا می‌کنیم:
$$\left.\begin{array}{l}f^{-1}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}\\ g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}\end{array}\right\}\Rightarrow gof^{-1}=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$$
حالا g و gof^{-1} را در نظر می‌گیریم و $\frac{g}{gof^{-1}}$ را پیدا می‌کنیم:
$$g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$$
$$gof^{-1}=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$$
$$\Rightarrow gof^{-1}=\{(۴,\frac{۲}{۱}),(۵,\frac{۶}{۳})\}=\{(۴,۲),(۵,۲)\}$$

۲۳۸. گزینه ۴ در درس‌نامه داشتیم:
$$g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}$$
پس بهتر است اول fog و بعد وارونش را پیدا کنیم:
$$f=\{(۰,-۱),(۲,\frac{۱}{۲}),(-۳,\sqrt{۲}),(۱,۵)\}$$
$$g=\{(-۱,-۳),(۵,۲),(\frac{۱}{۲},۰),(۴,۶)\}$$
$$fog=\{(-۱,\sqrt{۲}),(۵,\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۲},-۱)\}$$
$$\Rightarrow (fog)^{-1}=\{(\sqrt{۲},-۱),(\frac{۱}{۲},۵),(-۱,\frac{۱}{۲})\}$$
پس جواب می‌شود (۴).

۲۳۹. گزینه ۴
می‌دانیم $(g^{-1}of^{-1})=(fog)^{-1}$ پس $(g^{-1}of^{-1})(۸)=(fog)^{-1}(۸)$.
حالا اگر فرض کنیم $(fog)^{-1}(۸)=a$ داریم $(fog)(a)=۸$، پس:
$$(fog)(a)=۸\Rightarrow f(g(a))=۸$$
$$\xrightarrow{f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴}\frac{۲}{۵}g(a)-۴=۸\Rightarrow\frac{۲}{۵}g(a)=۱۲$$
$$\Rightarrow g(a)=\frac{۱۲\times ۵}{۲}=۳۰\xrightarrow{g(x)=x^۳+x}a^۳+a=۳۰$$
$$\xrightarrow{\text{عددگذاری}}a=۳$$

۲۴۰. گزینه ۲ چون داریم
$$(g^{-1}of^{-1})(a)=۸$$
پس $(fog)^{-1}(a)=۸$ و در نتیجه $(fog)(۸)=a$، بنابراین برای پیداکردن مقدار a باید $(fog)(۸)$ را پیدا کنیم:
$$f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$$
$$g(x)=\sqrt{۵x+۹}$$
$$a=(fog)(۸)=f(g(۸))=f(\sqrt{۴۰+۹})=f(۷)=۳$$

۲۴۱. گزینه ۳ می‌دانیم:
$$(fog^{-1})^{-1}=gof^{-1}$$
پس برای پیداکردن مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(fog^{-1})^{-1}(x)=۰$ باید اول معادلهٔ $(gof^{-1})(x)=۰$ را تشکیل دهیم:
$$f(x)=x+۲\Rightarrow y=x+۲\Rightarrow x=y-۲$$
$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=x-۲\Rightarrow f^{-1}(x)=x-۲$$
$$g(x)=۲x^۲-۸x+۱$$
معادلهٔ $(gof^{-1})(x)=۰$ را تشکیل می‌دهیم: $۲(x-۲)^۲-۸(x-۲)+۱=۰$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۸x+۸-۸x+۱۶+۱=۰\Rightarrow ۲x^۲-۱۶x+۲۵=۰$$
و چون مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم برابر $-\frac{b}{a}$ است، پس مجموع ریشه‌های معادلهٔ بالا برابر است با $S=-\frac{-۱۶}{۲}=۸$.
دقت کنید که $\Delta=(-۱۶)^۲-۸(۲۵)>۰$ و دو ریشهٔ حقیقی وجود دارند.

۲۴۲. گزینه ۴ می‌دانیم $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$، پس اگر اول $(g^{-۱}of^{-۱})(x)$ را پیدا کنیم (که همان $(fog)^{-۱}$ است) و بعد وارونش را پیدا کنیم، ضابطهٔ fog را حساب کرده‌ایم، بنابراین:

$f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x}$

$g^{-۱}(x)=x^{۲} \Rightarrow (g^{-۱}of^{-۱})(x)=(۱+\sqrt{x})^{۲}$

پس داریم: $(fog)^{-۱}(x)=(۱+\sqrt{x})^{۲}$

حالا fog را پیدا می‌کنیم: $y=(۱+\sqrt{x})^{۲} \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y}=۱+\sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}-۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=۱-۲\sqrt{y}+y$

$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=۱-۲\sqrt{x}+x$

پس ضابطهٔ fog برابر است با:

$(fog)(x)=x+۱-۲\sqrt{x}$

۲۴۳. گزینه ۳ داریم: $f=\{(۲,۳),(-۱,۲),(-۴,۱),(۳,۰)\}$

$g=\{(۰,۲),(۲,-۴),(۳,۲),(-۴,-۲)\}$

حالا مقدار $(fogof^{-۱})(۳)$ را به ترتیب پیدا می‌کنیم:

$f^{-۱}(۳)=۲ \Rightarrow g(f^{-۱}(۳))=g(۲)=-۴$

$\Rightarrow f(g(f^{-۱}(۳)))=f(-۴)=۱$

۲۴۴. گزینه ۴ راه I: این تابع از ترکیب $f(x)$ و $g(x)=۳x-۱$ به صورت fog ساخته شده است. پس وارونش می‌شود:

$(fog)^{-۱}(x)=g^{-۱}of^{-۱}(x)$

وارون $g(x)$ را بلدیم: $g^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۳}$

پس: $g^{-۱}(f^{-۱}(x))=\frac{f^{-۱}(x)+۱}{۳}$

راه II: می‌نویسیم $y=f(۳x-۱)$. حالا جای x و y را عوض می‌کنیم:

$x=f(۳y-۱)$

برای تنهاکردن y، از دو طرف $f^{-۱}$ می‌گیریم:

$f^{-۱}(x)=\underbrace{f^{-۱}(f}_{\text{همدیگر را از بین می‌برند}}(۳y-۱))=۳y-۱ \Rightarrow y=\frac{f^{-۱}(x)+۱}{۳}$

۲۴۵. گزینه ۴ داریم $g(x)=f(۲x+۱)+۱$، $f^{-۱}(۵)=۳$ و $g^{-۱}(a)=۱$. از $g^{-۱}(a)=۱$ نتیجه می‌گیریم $g(۱)=a$، پس:

$g(x)=f(۲x+۱)+۱ \Rightarrow g(۱)=a \Rightarrow f(۳)+۱=a$

از طرفی دیگر چون $f^{-۱}(۵)=۳$، پس $f(۳)=۵$، بنابراین:

$f(۳)+۱=a \Rightarrow ۵+۱=a \Rightarrow a=۶$

۲۴۶. گزینه ۱ می‌دانیم $(fof^{-۱})(x)=x$، پس در تابع $f(x)=x+[x]$ به ازای xهای عضو برد f، داریم:

$(fof^{-۱})(۴/۵)=۴/۵$

نکته در این تابع $f(۲/۵)$ می‌شود ۴/۵؛ پس عدد ۴/۵ در برد f (و دامنهٔ $f^{-۱}$) بود. اما مثلاً اگر همین سؤال $fof^{-۱}(۵/۵)$ را بخواهد جواب ۴ است یعنی موجود نیست. چون عدد ۵/۵ در برد تابع $y=x+[x]$ قرار ندارد. راستش را بخواهید برد تابع $y=x+[x]$ از بازه‌های $[۲k,۲k+۱)$ ساخته شده است. $(k\in\mathbb{Z})$.

۲۴۷. گزینه ۴ راه I: در تابع f داریم: $f(۱)=۱+\sqrt{۲}$

پس در g باید $g(۱+\sqrt{۲})=۱$ باشد: $g(۱+\sqrt{۲})=k(۱+\sqrt{۲}-\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}})$

$=k(۱+\sqrt{۲}-\underbrace{\frac{\sqrt{۲}-۱}{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}}_{\text{مخرج را گویا می‌کنیم}})=k(۱+\sqrt{۲}-(\sqrt{۲}-۱))=۲k$

$\Rightarrow ۲k=۱ \Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$

راه II: گفتیم باید $fog(x)=x$ و $gof(x)=x$ باشند، پس داریم:

$gof(x)=g(f(x))$

$\xrightarrow[\text{باید } f(x) \text{ قرار دهیم}]{\text{به‌جای x در g}} k(x+\sqrt{x^{۲}+۱}-\frac{۱}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}})$

$=k\frac{(x+\sqrt{x^{۲}+۱})^{۲}-۱}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}=k\frac{x^{۲}+x^{۲}+۱+۲x\sqrt{x^{۲}+۱}-۱}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}$

$=k\frac{۲x^{۲}+۲x\sqrt{x^{۲}+۱}}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}=k\frac{۲x(x+\sqrt{x^{۲}+۱})}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}=k(۲x)=x$

$\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$

۲۴۸. گزینه ۴ تابع $f(x)=\frac{x-۳}{۲}+۲\sqrt{x}$ یک تابع اکیداً صعودی است چون تابع‌های $y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ و $y=۲\sqrt{x}$ هر دو اکیداً صعودی‌اند، پس نقطهٔ برخورد تابع f و تابع وارونش روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقاطع‌اند:

$\begin{cases} y=\frac{x-۳}{۲}+۲\sqrt{x} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \frac{x-۳}{۲}+۲\sqrt{x}=x$

$\Rightarrow ۲\sqrt{x}=x-\frac{x-۳}{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{x}=\frac{x+۳}{۲}$

$\Rightarrow ۴\sqrt{x}=x+۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۶x=x^{۲}+۶x+۹$

$\Rightarrow x^{۲}-۱۰x+۹=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x_{۱}=۱ \\ x_{۲}=\frac{c}{a}=۹ \end{cases}$

پس دو نمودار در نقاط $A(۱,۱)$ و $B(۹,۹)$ متقاطع‌اند که فاصلهٔ آن‌ها می‌شود:

$AB=\sqrt{۸^{۲}+۸^{۲}}=۸\sqrt{۲}$

۲۴۹. گزینه ۴ راه I: ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x+۴\sqrt{x}+۸$ را پیدا می‌کنیم:

$y=x+۴\sqrt{x}+۸ \Rightarrow y=(\sqrt{x}+۲)^{۲}+۴$

$\Rightarrow y-۴=(\sqrt{x}+۲)^{۲}$

$\Rightarrow \sqrt{x}+۲=\sqrt{y-۴} \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y-۴}-۲$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x=y-۴-۴\sqrt{y-۴}+۴$

$\Rightarrow x=y-۴\sqrt{y-۴} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x-۴\sqrt{x-۴}$

حالا با مقایسهٔ $f^{-۱}(x)=x-۴\sqrt{x-۴}$ و $f^{-۱}(x)=x-a\sqrt{x-b}$ نتیجه می‌گیریم $a=۴$ و $b=۴$. از طرفی دیگر در شرط $x\ge c$ (یعنی دامنهٔ $f^{-۱}$) برای پیداکردن مقدار c باید برد f را پیدا کنیم: $f(x)=(\sqrt{x}+۲)^{۲}+۴$

داریم: $x\ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x}+۲\ge ۲ \Rightarrow (\sqrt{x}+۲)^{۲}\ge ۴$

$\Rightarrow (\sqrt{x}+۲)^{۲}+۴\ge ۸ \Rightarrow$ برد f: $y\ge ۸$

بنابراین باید $c=۸$ باشد و در نتیجه: $a+b+c=۴+۴+۸=۱۶$

راه II دو تابع را ترکیب کنیم و مساوی x بگذاریم:

$$f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b}$$
$$f(x)=(\sqrt{x}+2)^2+4$$

ترکیب کنیم:
$$(\sqrt{x}+2)^2+4-a\sqrt{(\sqrt{x}+2)^2+4-b}=x$$
$$\Rightarrow x+4\sqrt{x}+8-a\sqrt{x+4\sqrt{x}+8-b}=x$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{x}+8=a\sqrt{x+4\sqrt{x}+8-b}$$
$$\xrightarrow[\div 4]{a=4} \sqrt{x}+2=\sqrt{x+4\sqrt{x}+8-b}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+4\sqrt{x}+4=x+4\sqrt{x}+8-b \Rightarrow b=4$$

c شروع برد f است که چون f همواره صعودی است، داریم:
$$f(x)=x+4\sqrt{x}+8 \qquad D_f=[0,+\infty)$$
$$\xrightarrow{\text{صعودی f}} R_f=[f(0),f(+\infty)) \Rightarrow c=f(0)=8$$

۲۵۰. گزینه ۱ **عددگذاری** در تابع $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ داریم $f(1)=\frac{1}{3}$ پس در تابع وارون باید $f(\frac{1}{3})=1$ باشد که فقط در ۱ یعنی $y=\log_2\frac{1+x}{1-x}$ صدق می‌کند.

راه II f از ترکیب دو تابع $g(x)=2^x$ و $h(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ساخته شده که وارون آن‌ها $g^{-1}(x)=\log_2 x$ و $h^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-1}$ است. پس داریم:
$$f^{-1}=(hog)^{-1}=g^{-1}oh^{-1}=\log_2\frac{-x-1}{x-1}=\log_2\frac{1+x}{1-x}$$

راه III داریم $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم:
$$y=\frac{2^x-1}{2^x+1} \Rightarrow y(2^x)+y=2^x-1 \Rightarrow 2^x-y(2^x)=y+1$$
$$\Rightarrow 2^x(1-y)=y+1 \Rightarrow 2^x=\frac{y+1}{1-y}$$
$$\xrightarrow{\text{طبق تعریف لگاریتم}} x=\log_2\frac{y+1}{1-y}$$
$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\log_2\frac{x+1}{1-x}$$

پس تابع وارون $y=\log_2\frac{x+1}{1-x}$ است.

۲۵۱. گزینه ۳ **عددگذاری** در $f(x)=5^{\log_x 5}$ به ازای $x=25$ داریم $y=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ پس در تابع وارون باید به ازای $x=\sqrt{5}$ داشته باشیم $y=25$ که فقط در ۳ یعنی $y=5^{\log_x 5}$ صدق می‌کند.

راه II از رابطهٔ $y=5^{\log_x 5}$ مقدار x را برحسب y پیدا می‌کنیم. برای این کار از طرفین (در مبنای ۵) لگاریتم می‌گیریم:
$$y=5^{\log_x 5} \Rightarrow \log_5 y=\log_5 5^{\log_x 5}$$
$$\Rightarrow \log_5 y=\log_x 5\log_5 5 \Rightarrow \log_x 5=\log_5 y$$
$$\xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} x^{\log_5 y}=5$$
$$\Rightarrow (x^{\log_5 y})^{\log_y 5}=5^{\log_y 5} \Rightarrow x=5^{\log_y 5}$$
$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=5^{\log_x 5}$$

۲۵۲. گزینه ۲ مثل سؤال قبل، داریم: $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$

و $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}$ و مقدار $g^{-1}(6)$ را می‌خواهیم:
$$\begin{cases} g^{-1}(6)=a \Rightarrow g(a)=6 \\ g(a)=f(a)+\sqrt{f(a)} \end{cases} \Rightarrow f(a)+\sqrt{f(a)}=6$$

تساوی $f(a)+\sqrt{f(a)}=6$ یک معادله است و اگر فرض کنیم $\sqrt{f(a)}=t$.

داریم:
$$t^2+t-6=0 \Rightarrow (t-2)(t+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \end{cases}$$

و چون $t=\sqrt{f(a)}$، پس فقط مقدار $t=2$ قابل قبول است؛ یعنی:
$$\sqrt{f(a)}=2 \Rightarrow f(a)=4 \Rightarrow a=f^{-1}(4)$$
$$\Rightarrow a=\sqrt[3]{2(4)}=\sqrt[3]{8}=2$$

۲۵۳. گزینه ۴ **راه I** در رابطهٔ $g(x)=f(2x+5)$ کاری می‌کنیم که $f(-1)$ ساخته شود! چه کار؟ به جای x می‌گذاریم ۳−. پس:
$$\xrightarrow{x=-3} g(-3)=f(-1)$$

حالا در صورت سؤال به جای $f(-1)$ می‌گذاریم $g(-3)$ و داریم:
$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))=f^{-1}(g^{-1}(g(-3)))$$
$$\xrightarrow{g^{-1}(g(x))=x} =f^{-1}(-3)$$

پس در ضابطهٔ f^{-1} باید ۳− قرار دهیم:
$$f^{-1}(-1)=\frac{(-3)^3}{9}+\sqrt[3]{(-3)\times 9}=-6$$

راه II از رابطهٔ $g(x)=f(2x+5)$ می‌توانیم بنویسیم:
$$g(x)=f(2x+5) \Rightarrow x=g^{-1}(f(2x+5))$$

حالا $f^{-1}(g^{-1}(f-1))$ را می‌خواهیم. پس در تساوی $x=g^{-1}(f(2x+5))$ به جای x باید عددی بگذاریم که $2x+5=-1$ شود، یعنی $x=-3$:
$$x=-3 \Rightarrow -3=g^{-1}(f(-1))$$

حالا مقدار $f^{-1}(g^{-1}(f^{-1})))$ به راحتی به دست می‌آید:
$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))=f^{-1}(-3)=\frac{(-3)^3}{9}+\sqrt[3]{9\times(-3)}$$
$$=-\frac{27}{9}-3=-6$$