

(فصل ۱)

تابع

- درس ۱: تبدیل نمودار توابع ۷
 درس ۲: تابع درجه سوم و توابع صعودی و نزولی ۲۰
 درس ۳: بخش پذیری و تقسیم ۲۹
 آزمون جامع ۳۵

(فصل ۲)

حد و پیوستگی

- درس ۱: حد بی نهایت ۷۱
 درس ۲: حد در بی نهایت ۸۳
 آزمون جامع ۹۲

(فصل ۳)

کاربرد مشتق

- درس ۱: اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱۴۹
 درس ۲: اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱۵۸
 درس ۳: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۱۷۴
 درس ۴: رسم نمودار توابع ۱۹۲
 آزمون جامع ۱ ۲۰۶
 آزمون جامع ۲ ۲۰۷

(فصل ۴)

مثلثات

- درس ۱: اتحادهای مثلثاتی ۳۸
 درس ۲: تناوب و تابع تانژانت ۴۶
 درس ۳: معادلات مثلثاتی ۵۸
 آزمون جامع ۶۸

(فصل ۵)

مشتق

- درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ۹۵
 درس ۲: مشتق پذیری و پیوستگی ۱ ۱۰۲
 درس ۳: مشتق پذیری و پیوستگی ۲ ۱۲۲
 درس ۴: آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای ۱۴۱
 آزمون جامع ۱ ۱۴۵
 آزمون جامع ۲ ۱۴۶

- پاسخنامه تشریحی ۲۱۱
 پاسخنامه کلیدی ۳۹۱

بخش پذیری و تقسیم



یکی از سؤال‌های معروف امتحان‌های ریاضی دوران کودکی این بود:

«عدد ۳۴ را بر عدد ۶ تقسیم کنید و خارج قسمت و باقی‌مانده را بیابید، سپس درستی تقسیم را با کمک امتحان تقسیم بررسی کنید.»

مقسوم‌علیه مقسوم

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 34} \\ \underline{30} \\ 4 \end{array}$$

خارج قسمت ۵
باقی‌مانده ۴

برای شروع بد نیست که این سؤال را با هم حل کنیم. این تقسیم به صورت روبه‌رو انجام می‌شود:

حالا باید درستی تقسیم را بررسی کنیم. رابطه امتحان تقسیم به صورت زیر است:

$$\text{باقی‌مانده} + \text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم‌علیه} = \text{مقسوم}$$

$$34 = 6 \times 5 + 4 \quad \checkmark$$

به کم که بزرگ‌تر شدیم تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را یاد گرفتیم. از اون‌جا که می‌دونم یاد تونه! یک نمونه هم از این تقسیم انجام بدیم.

فرض کنید می‌خواهیم چندجمله‌ای $3x^3 + 2x^4 - 1$ را بر $x^2 - 2$ تقسیم کنیم. روش کار به ترتیب زیر است:

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم} \\ 2x^4 + 3x^3 - 1 \\ \underline{-(2x^4 - 4x^2)} \\ 3x^3 + 4x^2 - 1 \\ \underline{-(3x^3 - 6x)} \\ 4x^2 + 6x - 1 \\ \underline{-(4x^2 - 8)} \\ 6x + 7 \\ \downarrow \\ \text{باقی‌مانده} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم‌علیه} \\ x^2 - 2 \\ \underline{2x^2 + 3x + 4} \\ \downarrow \\ \text{خارج قسمت} \end{array}$$

۱ ابتدا $3x^3 + 2x^4 - 1$ (مقسوم) را استاندارد می‌کنیم:

۲ جمله با بزرگ‌ترین درجه مقسوم را بر جمله با بزرگ‌ترین درجه مقسوم‌علیه

تقسیم می‌کنیم و در خارج قسمت می‌نویسیم:

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$$

۳ عبارت به دست آمده در خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب و از مقسوم کم

$$2x^2 \times (x^2 - 2) = 2x^4 - 4x^2$$

می‌کنیم:

۴ حال با تکرار مراحل ۲ و ۳ تقسیم را ادامه می‌دهیم، تا جایی که درجه

چندجمله‌ای باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه کم‌تر باشد.

می‌توانید این تقسیم را به صورت سریع هم انجام دهید. برای

این کار کافی است که تنها ضرایب مقسوم و مقسوم‌علیه را

نوشته و عمل تقسیم را انجام دهید. فقط باید دقت کنید

که باید ضرایب توان‌هایی از x را که وجود ندارند، صفر قرار

دهید. در مثال بالا چون در مقسوم x^2 و x نداریم، ضرایب

آن‌ها را صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{r} 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ -1 \\ \underline{-(2 \ 0 \ -4)} \\ 3 \ 4 \ 0 \\ \underline{-(3 \ 0 \ -6)} \\ 4 \ 6 \ -1 \\ \underline{-(4 \ 0 \ -8)} \\ 6 \ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \ 0 \ -2 \\ \underline{2 \ 2 \ 4} \\ \end{array}$$

$2x^2 + 3x + 4 =$ خارج قسمت

$6x + 7 \Rightarrow$ باقی‌مانده

به طور قطع این تقسیم هم رابطه امتحان تقسیم دارد. این رابطه هم همانند رابطه قبل است. یعنی: باقی‌مانده + خارج قسمت \times مقسوم‌علیه = مقسوم. رابطه

فقط چون این‌جا با چندجمله‌ای‌ها سروکار داریم رابطه را بر حسب x بیان می‌کنیم: $P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$ رابطه

$$2x^4 + 3x^3 - 1 = (x^2 - 2)(2x^2 + 3x + 4) + 6x + 7$$

به عنوان مثال در تقسیم مثال قبل داریم:

اگر درجه مقسوم n و درجه مقسوم‌علیه m باشد ($n \geq m$)، درجه خارج قسمت $n - m$ و درجه باقی‌مانده حداکثر $m - 1$ می‌باشد.

تست در تقسیم $ax^3 - 3 + x^n$ بر $x^2 - 1$ ، خارج قسمت $x^2 + 2$ و باقی‌مانده $x^2 + b$ شده است. $n + a - b$ کدام است؟

۲ (۴) ۴ (۳) ۸ (۲) ۶ (۱)

پاسخ گزینه ۲ اولاً مقسوم از درجه n ، مقسوم‌علیه از درجه ۲ و خارج قسمت از درجه ۲ است، پس طبق نکته قبل داریم: $n - 3 = 2 \Rightarrow n = 5$

پس مقسوم به صورت $x^5 + ax^3 - 3$ است. حالا رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \Rightarrow x^5 + ax^3 - 3 = (x^2 - 1)(x^2 + 2) + x^2 + b$$

$$\Rightarrow x^5 + ax^3 - 3 = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2 + x^2 + b \Rightarrow x^5 + ax^3 - 3 = x^5 + 2x^3 - 2 + b$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ -3 = -2 + b \Rightarrow b = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow n + a - b = 5 + 2 - (-1) = 8$$

حالا با متحد قراردادن جمله‌ها، مجهول‌ها را می‌یابیم:

محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $ax + b$

وقتی $P(x)$ را بر $ax + b$ تقسیم می‌کنیم، باقی مانده حداکثر می‌تواند از درجه صفر (یا همان عدد ثابت) باشد، پس رابطه تقسیم به صورت زیر نوشته می‌شود (یعنی یک عدد ثابت):

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

ملا برای مناسبه R ، باید $Q(x)$ را طوری از رابطه حذف کرد که خودش هم متوجه نشه! برای این کار ضرب $Q(x)$ را صفر می‌کنیم:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \times Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R \Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

پس اگر در رابطه تقسیم، $x = -\frac{b}{a}$ را قرار دهیم، R محاسبه می‌شود:

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ برابر است با:

تست باقی مانده تقسیم $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6$ بر $x + 2$ کدام است؟

۱۸ (۱) ۳۴ (۲) ۱۰ (۳) ۲۲ (۴)

پاسخ گزینه ۱: مقسوم‌علیه یک چندجمله‌ای از درجه اول است. ریشه این عبارت برابر است با:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

پس برای محاسبه باقی مانده کافی است، $P(-2)$ را محاسبه کنیم:

$$R = P(-2) = 2(-2)^4 + (-2)^3 - 6 = 2(16) - 8 - 6 = 18$$

نکته چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $D(x)$ بخش‌پذیر گویند، هرگاه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $D(x)$ صفر شود و برعکس.

تست باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + b$ بر $x + 1$ برابر ۹ است. اگر این چندجمله‌ای بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد، $a - b$ کدام است؟

۱ (۱) ۱ (۲) ۷ (۳) -۷ (۴)

پاسخ گزینه ۱: باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x + 1)$ برابر ۹ است، در نتیجه: (*)

از طرفی $P(x)$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر است، پس: (**)

$$P(2) = 0 \Rightarrow 16 - 8a + 4 + b = 0 \Rightarrow 8a - b = 20$$

با حل دستگاه معادلات (*) و (**):

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ 8a - b = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 9a = 29 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{(*)} 3 + b = 9 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a - b = 3 - 6 = -3$$

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای از درجه بیشتر از یک

در این جا نیز همانند بالا (طبق رابطه تقسیم) مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم و بزرگ‌ترین جمله مقسوم‌علیه را بر حسب جملات با درجه کم‌تر مرتب می‌کنیم و در نهایت رابطه حاصل را در مقسوم جای‌گذاری می‌کنیم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه عبارت حاصل، کم‌تر از درجه مقسوم‌علیه باشد. در این حالت عبارت حاصل همان باقی مانده تقسیم است. عمراً آله متوجه شده باشین! 😊 بریم با مثال توضیح بدیم:

فرض کنید می‌خواهیم باقی مانده تقسیم $P(x) = x^5 - 2x^4 + x - 1$ بر $x^2 - 1$ را محاسبه کنیم. برای این کار از یکی از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

۱) مقسوم‌علیه از درجه دوم است. پس باقی مانده حداکثر از درجه یک است. بنابراین می‌توانیم باقی مانده را به صورت $ax + b$ در نظر بگیریم.

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) \Rightarrow x^5 - 2x^4 + x - 1 = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b$$

حالا رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

برای محاسبه a و b ، باید یک کاری کنیم $Q(x)$ حذف شود. پس $x = 1$ و $x = -1$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x = 1 : 1 - 2 + 1 - 1 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = -1 \\ x = -1 : -1 - 2 - 1 - 1 = 0 - a + b \Rightarrow -a + b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2b = -6 \Rightarrow b = -3 \xrightarrow{a+b=-1} a = 2$$

پس باقی مانده تقسیم، برابر $2x - 3$ است.

۲) رابطه تقسیم با فرض این که $R(x)$ باقی مانده است، به صورت مقابل است:

$$x^5 - 2x^4 + x - 1 = Q(x)(x^2 - 1) + R(x)$$

برای حذف $Q(x)$ و محاسبه $R(x)$ ، باید ضرب $Q(x)$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

حالا مقسوم را بر حسب x^2 مرتب می‌کنیم و سپس به جای x^2 ها مقدار ۱ قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow x^5 - 2x^4 + x - 1 \xrightarrow{\text{بر حسب } x^2 \text{ می‌نویسیم}} = (x^2)^2 x - 2(x^2)^2 + x - 1$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x^2 \text{ ها، ۱ می‌گذاریم}} = 1^2(x) - 2(1)^2 + x - 1 = x - 2 + x - 1 = 2x - 3$$

تست به چند جمله‌ای $P(x) = x^6 - 3x^5 + ax$ چند واحد اضافه کنیم تا بر عبارت $x^2 - 4$ بخش پذیر باشد؟

- ۶۴ (۱) -۶۴ (۲) ۴۸ (۳) -۴۸ (۴)

پاسخ گزینه ۲:

فرض کنیم به $P(x)$ ، مقدار b واحد اضافه کنیم؛ در این حالت عبارت $x^6 - 3x^5 + ax + b$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. حالا برای حل دو تا روش داریم:

راه اول: از آن جا که $P(x)$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است، پس باقی مانده تقسیم آن‌ها صفر است، پس طبق رابطه تقسیم داریم:

$$x^6 - 3x^5 + ax + b = (x^2 - 4)Q(x) + 0$$

با قراردادن $x = 2$ و $x = -2$ ، از شرط $Q(x)$ فاصله می‌شیم! پس:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{x=2} 64 - 96 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 32 \\ \xrightarrow{x=-2} 64 + 96 - 2a + b = 0 \Rightarrow 2a - b = 16 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 4a = 192 \Rightarrow a = 48 \xrightarrow{2a+b=32} b = -64$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

راه دوم: مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار داده و آن را برحسب بزرگ‌ترین جمله آن می‌نویسیم:

حالا چند جمله‌ای $x^6 - 3x^5 + ax + b$ را برحسب x^2 مرتب می‌کنیم و سپس به جای x^2 مقدار ۴ قرار می‌دهیم:

$$(x^2)^3 - 3(x^2)^2 x + ax + b = 4^3 - 3(4)^2 x + ax + b = 64 - 48x + ax + b \Rightarrow (a - 48)x + b + 64$$

$$(a - 48)x + b + 64 = 0 \xrightarrow{\text{متحد قراردادن}} \begin{cases} a - 48 = 0 \Rightarrow a = 48 \\ b + 64 = 0 \Rightarrow b = -64 \end{cases} \quad \text{چون باید باقی مانده برابر صفر باشد، پس:}$$

تست اگر باقی مانده تقسیم $x^3 + ax + 1$ بر $x^2 + 3x - 2$ برابر ۱ باشد، a کدام است؟

- ±۷ (۴) ±۴ (۳) ±۲ (۲) ±۱ (۱)

پاسخ گزینه ۲:

مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار داده و آن را برحسب بزرگ‌ترین جمله آن می‌نویسیم:

حالا مقسوم را برحسب x^2 مرتب می‌کنیم و سپس به جای x^2 ها $-ax$ قرار می‌دهیم و این کار را تا جایی انجام می‌دهیم که تمام x ها کم‌تر از ۳ (درجه مقسوم‌علیه) شود:

$$(x^2)^3 + ax + 1 = (-ax)^2 x + 3(-ax) - 28x^2 + 1 = -a^2 x^4 + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1$$

$$= -a^2 (x^2)x + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1 = -a^2 (-ax)x + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1 = a^3 x^2 + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1$$

$$= (a^3 + 3a^2 - 28)x^2 + 1 \quad \text{باقی مانده}$$

چون باقی مانده برابر ۱ است؛ بنابراین باید ضریب x^2 برابر صفر باشد (ت x^2 حذف شه!):

$$a^3 + 3a^2 - 28 = 0 \Rightarrow (a^2 + 7)(a - 4) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

محاسبه باقی مانده بدون داشتن مقسوم

در بعضی از سؤالات مقسوم را نمی‌دهند و از شما باقی مانده را می‌خواهند. در این جا فقط باید از رابطه تقسیم کمک بگیرید تا با خیال راحت جواب را محاسبه کنید. فقط حتماً باید به درجه مقسوم‌علیه برای تعیین درجه باقی مانده توجه کنید.

تست اگر باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 1$ و $x - 3$ به ترتیب برابر ۲ و ۶ باشد، باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 2x - 3$ کدام است؟

- $x + 3$ (۴) $3x - 1$ (۳) $-x + 2$ (۲) $x - 1$ (۱)

پاسخ گزینه ۲:

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 1$ برابر ۲ است، پس:

$$P(-1) = 2$$

از طرفی باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x - 3$ برابر ۶ است، پس:

$$P(3) = 6$$

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 2x - 3$ ، رابطه تقسیم را می‌نویسیم. فقط توجه کنید که چون مقسوم‌علیه از درجه ۲ است، باقی مانده

حداکثر از درجه یک است؛ پس آن را به صورت $ax + b$ می‌نویسیم:

$$P(x) = (x^2 - 2x - 3)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(-1) = 2 \Rightarrow 2 = 0 - a + b \Rightarrow -a + b = 2 \\ P(3) = 6 \Rightarrow 6 = 0 + 3a + b \Rightarrow 3a + b = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{-a+b=2} b = 3$$

بنابراین با جای گذاری مقادیر a و b در $ax + b$ باقی مانده برابر $x + 3$ است.



تست اگر باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x+1)$ برابر $2x-1$ باشد، باقی مانده تقسیم عبارت $P(x^2) - 2x$ بر $(x+1)(x-1)$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) -2 (۴) 2

پاسخ گزینه ۱ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x+1)$ برابر $2x-1$ است، پس طبق رابطه تقسیم: $P(x) = (x-1)(x+1)Q(x) + 2x - 1$

حالا اگر به جای x ها، x^2 قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$P(x^2) = (x^2-1)(x^2+1)Q(x^2) + 2x^2 - 1 \Rightarrow P(x^2) = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)Q(x^2) + 2x^2 - 1$$

$$\Rightarrow P(x^2) = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q(x^2)}_{Q'(x)} + 2x^2 - 1 \Rightarrow P(x^2) = (x-1)(x+1)Q'(x) + 2x^2 - 1$$

حالا از طرفین تساوی $2x$ واحد کم می کنیم تا $P(x^2) - 2x$ تشکیل شود:

چون مقسوم علیه از درجه ۲ است، باید باقی مانده حداکثر از درجه ۱ باشد، پس $2x^2 - 2x - 1$ را بر مقسوم علیه (x^2-1) تقسیم می کنیم تا درجه آن کم تر از ۲ شود. باقی مانده این تقسیم همان باقی مانده ای است که دنبال آن هستیم:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 2x - 1 \quad | \quad x^2 - 1 \\ \underline{-(2x^2 - 2x)} \\ -1 \end{array} \Rightarrow \text{باقی مانده} = -1$$

محاسبه مقادیر خارج قسمت یک تقسیم

برای یافتن مقادیر خارج قسمت یک تقسیم اول باید باقی مانده را محاسبه کرده، سپس با نوشتن رابطه تقسیم مقدار خواسته شده را بیابید:

تست خارج قسمت تقسیم $2 + x^2 - 3x^5 - x^7$ بر $x-1$ را $Q(x)$ می نامیم. اگر $Q(x)$ را بر $x-2$ تقسیم کنیم، باقی مانده کدام است؟

- (۱) 28 (۲) 29 (۳) 31 (۴) 30

پاسخ گزینه ۲ ابتدا باقی مانده تقسیم $P(x) = x^7 - 3x^5 - x^2 + 2$ بر $x-1$ را محاسبه می کنیم:

$$R = P(1) = 1 - 3 - 1 + 2 = -1$$

رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$x^7 - 3x^5 - x^2 + 2 = (x-1)Q(x) - 1$$

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کافی است $Q(2)$ را محاسبه کنیم. پس با قراردادن $x=2$ در رابطه بالا داریم:

$$x=2: 128 - 96 - 4 + 2 = (1)Q(2) - 1 \Rightarrow Q(2) - 1 = 30 \Rightarrow Q(2) = 31$$
 باقی مانده

یادآوری و تعمیم دو اتحاد

اتحادهای زیر را به خاطر دارید:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \quad , \quad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

در این بخش می خواهیم این اتحادها را تعمیم دهیم؛ یعنی آن ها را برای توان های بالاتر از ۳ بنویسیم. به جدول زیر توجه کنید: ($k \in \mathbb{Z}$)

تقسیم	توضیح	رابطه
$x^n - y^n$ بر $x-y$	$x-y=0 \Rightarrow x=y$ $\Rightarrow P(y) = y^n - y^n = 0$ پس $x^n - y^n$ همواره بر $x-y$ بخش پذیر است.	① $n \in \mathbb{R} : x^n - y^n$ $= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
$x^n - y^n$ بر $x+y$	$x+y=0 \Rightarrow x=-y$ $\Rightarrow P(-y) = (-y)^n - y^n$ اگر n زوج باشد، حاصل مقدار بالا که همان باقی مانده است صفر می شود، پس $x^n - y^n$ بر $x+y$ بخش پذیر است.	② $n \in 2k : x^n - y^n$ زوج $= (x+y) \times (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$

تقسیم	توضیح	رابطه
$x^n + y^n$ بر $x - y$	$x - y = 0 \Rightarrow x = y$ $\Rightarrow P(y) = y^n + y^n$ تحت هیچ شرایطی برای n ، صفر نمی‌شود. پس $x^n + y^n$ هیچ‌گاه بر $x - y$ بخش‌پذیر نیست.	
$x^n + y^n$ بر $x + y$	$x + y = 0 \Rightarrow x = -y$ $\Rightarrow P(-y) = (-y)^n + y^n$ اگر n فرد باشد، حاصل مقدار بالا صفر می‌شود و در نتیجه $x^n + y^n$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.	$n \in 2k+1$: $x^n + y^n$ فرد $= (x + y) \times (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$

تست حاصل $\frac{x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1}{x + 1}$ به ازای $x = \sqrt{3}$ کدام است؟

۲۴۲ (۱) ۱۲۱ (۲) ۲۴۴ (۳) ۱۲۲ (۴)

پاسخ گزینه ۲ **راه اول** صورت و مخرج را در $x - 1$ ضرب می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{(x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1)}{(x-1)(x+1)} \xrightarrow{\text{اتحاد (۱)}} \text{عبارت} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{(\sqrt{3})^2 - 1}$$

$$= \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{243 - 1}{2} = \frac{242}{2} = 121$$

راه دوم صورت کسر، مجموع 10 جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = x$ است، پس:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{1(x^{10} - 1)}{x - 1}$$

پس کل کسر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1 + x + x^2 + \dots + x^9}{x + 1} = \frac{\frac{x^{10} - 1}{x - 1}}{x + 1} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$$

با جای‌گذاری $x = \sqrt{3}$ ، داریم:

$$\frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{242}{2} = 121$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

بخش‌پذیری و تقسیم

- ۱۰۱- در تقسیم عبارت $x^3 + (x+2)^2(x-2) - 4x^2$ ، خارج‌قسمت کدام است؟
 ۲x - 4 (۴) 2x - 2 (۳) x - 2 (۲) x² - 2x (۱)
- ۱۰۲- باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^2 + 2ax + 1 - ax^2 + x^2$ بر $x + 1$ برابر ۴ است. a کدام است؟
 ۴ (۴) ۱ (۳) -۱ (۲) -۴ (۱)
- ۱۰۳- اگر چندجمله‌ای $P(x) = x^3 - mx^2 - x - 4$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد، m کدام است؟
 -۵/۵ (۴) ۵/۵ (۳) -۲/۵ (۲) ۲/۵ (۱)
- ۱۰۴- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $2x^2 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x - 1)$ کدام است؟ (۴.ق)
 ۶ (۴) ۴ (۳) -۶ (۲) -۴ (۱)
- ۱۰۵- به ازای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^3 + ax^2 + 2x - 3x$ بر $2x - 1$ بخش‌پذیر است. در این حالت، باقی‌مانده $P(x)$ بر $x + 2$ ، x ، $x + 2$ کدام است؟ (ریاضی قاجار ۹۹)
 ۶ (۴) ۴ (۳) -۸ (۲) -۱۰ (۱)
- ۱۰۶- دو عبارت $9 + 4x^2 + x^5$ و $ax^3 - x - 1$ در تقسیم بر $x + 2$ هم‌باقی‌مانده هستند. a کدام است؟
 ۲ (۴) -۲ (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)

۱۰۷- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x - b$ بر $x - 1$ برابر ۳ و $P(x)$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴)

۱۰۸- فرض کنید باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

- ۷ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) صفر

۱۰۹- اگر باقی‌مانده تقسیم $P(x) = 2x^{n+1} + ax^3 + bx^2 - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) بر $x + 1$ برابر ۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم $T(x) = ax^3 - 2bx^2 + x - 1$ بر $x - 2$ کدام است؟

- ۶۳ (۱) ۶۵ (۲) -۳۱ (۳) ۳۳ (۴)

۱۱۰- اگر تابع $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x - 6$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد، مجموع ریشه‌های تابع f کدام است؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴)

۱۱۱- به ازای مقداری از a ، چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

- ۱ - $\sqrt{3}$ (۱) ۱ - $\sqrt{5}$ (۲) -۱ - $\sqrt{3}$ (۳) -۱ - $\sqrt{5}$ (۴)

۱۱۲- در تقسیم $x^3 + 4x^2 + bx + 3$ بر $x^2 + ax - 1$ ، خارج‌قسمت $x + 2$ و باقی‌مانده $3x + 5$ شده است. $a + b$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴)

۱۱۳- اگر باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^3 - x^2 + 3x^2 - x - 1$ بر $x^2 + x^3 - 4x - 3$ برابر $R(x)$ باشد، $R(-1)$ کدام است؟

- ۳ (۱) -۳ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)

۱۱۴- عبارت $x^2 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

- $-\frac{15}{8}$ (۱) $-\frac{17}{16}$ (۲) $\frac{17}{16}$ (۳) $\frac{15}{8}$ (۴)

۱۱۵- در صورتی که باقی‌مانده تقسیم $ax^6 + bx^3 + 1$ بر $x^3 + 1$ برابر ۱ باشد، باقی‌مانده تقسیم $x^3 + ax + 2b$ بر $x + 2$ کدام است؟

- ۴ (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۱۱۶- اگر عبارات $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ به ازای هر عدد طبیعی n بر دوجمله‌ای $x + 2$ بخش‌پذیر باشد؛ آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم آن بر $x^2 - 1$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

- ۳x - ۶ (۱) -2x + 1 (۲) 2x + 4 (۳) 2x - 4 (۴)

۱۱۷- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^3 + ax^2 - bx$ بر $x^2 + 1$ برابر ۵ باشد، $a - b$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

۱۱۸- کدام عبارت زیر را از عبارت $x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ کم کنیم تا حاصل بر $x^2 + 1$ بخش‌پذیر باشد؟

- x + 1 (۱) x + 3 (۲) x + 6 (۳) x + 8 (۴)

۱۱۹- باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^4 - x^3 - 1$ بر $f(x) = (x + 1)^3(x - 1)^2 + x^2 - x^3 - 1$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

- x + 1 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -x - 1 (۴)

۱۲۰- باقی‌مانده تقسیم عبارت $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$ بر $x^2 + 3x$ کدام است؟

- 2x + 1 (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) x + 1 (۴)

۱۲۱- باقی‌مانده تقسیم $x^2 + (x^2 + 4)(x^2 + 3)(x^2 + 2)(x^2 + 1)$ بر $x^4 + 4x^2 - 1$ کدام است؟

- ۳۵ (۱) $x^2 + 5$ (۲) $9x^2 + 36$ (۳) $x^4 + 13x^2 + 35$ (۴)

۱۲۲- باقی‌مانده تقسیم عبارت $3 + (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 6x + 8)$ بر $x^2 + x + 1$ کدام است؟

- ۳ (۱) -x + 1 (۲) x + 3 (۳) ۴۲ (۴)

۱۲۳- اگر $R(x)$ باقی‌مانده تقسیم عبارت $x + 2x^2 + 3x^3 - 4x^4$ بر $x^3 - x$ باشد، $R(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۱۲۴- اگر عبارت $x^3 + ax^2 - bx + 4$ بر $(x - 1)^2$ بخش‌پذیر باشد، b کدام است؟ (ریاضی قارچ ۹۴)

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۲۵- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای درجه سوم f بر دوجمله‌ای‌های $x - 1$ ، $x + 1$ و $x - 2$ برابر ۲۴ است. اگر این چندجمله‌ای بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد، ضریب جمله با بیشترین درجه کدام است؟

- ۲ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)

۱۲۶- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^2 - 4$ برابر $x - 1$ و بر $x - 2$ برابر A و بر $x + 2$ برابر B باشد؛ آن‌گاه $A - B$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۸ (۴)

۱۲۷- اگر باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب برابر -2 و 4 باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-2 کدام است؟

(۱) -2 (۲) $2x-4$ (۳) $6x-8$ (۴) $-2x$

۱۲۸- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ و $x+3$ به ترتیب 1 و -4 است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-6 کدام است؟

(۱) $x-1$ (۲) $x+1$ (۳) $-x+2$ (۴) $2x-1$ (ریاضی تارج ۹۷)

۱۲۹- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب 8 و 5 است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

(۱) $-x+4$ (۲) $x+3$ (۳) $2x+6$ (۴) $2x-3$

۱۳۰- باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x+b$ به ترتیب 3 و 7 می‌باشد. اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+b)(x-1)$ به شکل $(-x+a)$ باشد،

$a-b$ کدام است؟

(۱) 3 (۲) 1 (۳) 7 (۴) 5

۱۳۱- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-3)(x+3)$ برابر $5x^2+3x+1$ باشد و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-3x برابر $ax+b$ باشد؛ آن‌گاه

$2a+b$ کدام است؟

(۱) 20 (۲) 37 (۳) -23 (۴) 19

۱۳۲- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-4 برابر $3x+12$ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+3$ کدام است؟

(۱) -6 (۲) 6 (۳) 11 (۴) -11

۱۳۳- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-4 برابر $3x+1$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) 7 (۳) -5 (۴) -11

۱۳۴- اگر باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x)$ بر x^2+3x+2 ، x^2+2x+1 باشد، باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x-1)-p(x-2)$ بر x کدام است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4 (کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)

۱۳۵- اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد و عبارت $x+f(x)$ بر $(x-1)$ و $(x-2)$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $xf(x)$ بر x^2-3x+2 کدام است؟

(۱) $2x+3$ (۲) $-3x+2$ (۳) $2x-3$ (۴) $3x-2$

۱۳۶- باقی‌مانده تقسیم ax^6-3x^5+ax-1 بر $p(x)=x^2-1$ و خارج‌قسمت آن $q(x)$ است. $q(-1)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)

(۱) -7 (۲) -6 (۳) 6 (۴) 7

۱۳۷- مقدار خارج‌قسمت تقسیم $3+14x^2-5x^5$ بر $x-2$ به ازای $x=-2$ کدام است؟ (ق. ۴۰)

(۱) -2 (۲) 12 (۳) 24 (۴) صفر

۱۳۸- مجموع ضرایب خارج‌قسمت تقسیم $f(x)=x^8+3x^5-2x^2+1$ بر $x+1$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -3 (۳) 3 (۴) 2

۱۳۹- اگر خارج‌قسمت تقسیم $6+x^6+x^{10}-3x^{14}$ بر $f(x)=x+1$ ، $g(x)$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $g(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) 2 (۳) 7 (۴) 1

۱۴۰- عبارت $x^{24}+1$ بر کدام عبارت همواره بخش‌پذیر است؟

(۱) $x^{12}+1$ (۲) x^3+1 (۳) x^6+1 (۴) x^8+1

۱۴۱- عبارت $a^{28}+b^{42}$ بر کدام یک از عبارت‌های زیر بخش‌پذیر است؟

(۱) a^7+b^7 (۲) a^4+b^7 (۳) a^4+b^6 (۴) a^7+b^6

۱۴۲- اگر $A = \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+x-2}$ ، آن‌گاه ساده‌شده A کدام است؟

(۱) x^2-x+1 (۲) x^2+x+1 (۳) x^2+x^2+x+1 (۴) x^2-x^2+x-1

۱۴۳- حاصل عبارت $\frac{(1-t+t^2-t^3+t^4)(1+t)}{1-t^{10}}$ به ازای $t = \sqrt[5]{2}$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) 1 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-4) = 20$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

پس ریشه‌های f عبارت‌اند از صفر، -2 ، $-1 + \sqrt{5}$ و $-1 - \sqrt{5}$ که کوچک‌ترین آن‌ها $-1 - \sqrt{5}$ است.

۱۱۲- گزینه ۲ رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^3 + 4x^2 + bx + 3 = (x^2 + ax - 1)(x + 2) + 3x + 5$$

$$\Rightarrow x^3 + 4x^2 + bx + 3 = x^3 + 2x^2 + ax^2 + 2ax - x - 2 + 3x + 5$$

$$\Rightarrow 4x^2 + bx + 3 = (2+a)x^2 + (2a+2)x + 3$$

برای آن که عبارت سمت راست و چپ متحد باشند باید ضرایب عبارت‌های هم‌درجه برابر باشند، پس:

$$4x^2 + bx + 3 = (2+a)x^2 + (2a+2)x + 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = 2 + a \\ b = 2a + 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 6 \Rightarrow a + b = 8$$

۱۱۳- گزینه ۳ در تقسیم $x^5 + x^4 + 3x^2 - x - 1$ بر $x^2 - 4x - 3$ ،

خارج‌قسمت و باقی‌مانده را به ترتیب $Q(x)$ و $R(x)$ می‌گیریم، پس داریم:

$$x^5 + x^4 + 3x^2 - x - 1 = (x^2 - 4x - 3)Q(x) + R(x)$$

در رابطه تقسیم بالا، $x = -1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(-1)^5 + (-1)^4 + 3(-1)^2 - (-1) - 1$$

$$= ((-1)^5 - 4(-1) - 3)Q(-1) + R(-1)$$

$$\Rightarrow -1 - 1 + 3 + 1 - 1 = (-1 + 4 - 3)Q(-1) + R(-1)$$

$$\Rightarrow 1 = R(-1)$$

۱۱۴- گزینه ۲ راه اول عبارت $P(x) = x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر

$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ بخش‌پذیر است، پس $P(x)$ بر $x - 2$ و

$x + 2$ بخش‌پذیر است و در نتیجه باید $P(2)$ و $P(-2)$ صفر باشند:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 2^4 + 4a(2)^2 + 2b(2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 16 + 16a + 4b + 1 = 0 \Rightarrow 16a + 4b = -17$$

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^4 + 4a(-2)^2 + 2b(-2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 16 + 16a - 4b + 1 = 0 \Rightarrow 16a - 4b = -17$$

با حل دو معادله بالا داریم:

$$b = 0, a = \frac{-17}{16}$$

پس:

$$a + b = \frac{-17}{16} + 0 = \frac{-17}{16}$$

۲ راه دوم از $x^2 - 4 = 0$ نتیجه می‌گیریم:

حالا $P(x)$ را برحسب x^2 می‌نویسیم، به جای x^2 ها، عدد ۴ و عبارت به

دست آمده را متحد با صفر قرار می‌دهیم:

$$P(x) = (x^2)^2 + 4ax^2 + 2bx + 1 = 4^2 + 4a(4) + 2bx + 1$$

$$= 2bx + 16a + 17$$

اگر عبارت به دست آمده را متحد با صفر قرار دهیم، باید ضریب x (یعنی

$$2b) \text{ و عبارت درجه صفر (یعنی } 16a + 17) \text{ صفر شوند:}$$

$$\begin{cases} 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 16a + 17 = 0 \Rightarrow a = \frac{-17}{16} \end{cases}$$

۱۱۵- گزینه ۲ راه اول در تقسیم $ax^6 + bx^3 + 1$ بر $x^2 + 1$ ،

خارج‌قسمت $Q(x)$ و باقی‌مانده ۱ شده است، رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$ax^6 + bx^3 + 1 = (x^2 + 1)Q(x) + 1$$

در رابطه بالا جای x عدد -1 قرار می‌دهیم:

$$a(-1)^6 + b(-1)^3 + 1 = ((-1)^2 + 1)Q(-1) + 1$$

$$\Rightarrow a - b + 1 = 1 \Rightarrow a - b = 0$$

برای به دست آوردن باقی‌مانده $P(x) = x^2 + ax + 2b$ بر $x + 2$ باید مقدار $P(-2)$ را حساب کنیم:

$$P(-2) = (-2)^2 + a(-2) + 2b = 4 - 2a + 2b$$

$$= 4 - 2(a - b) \xrightarrow{a-b=0} P(-2) = 4 - 2(0) = 4$$

۲ راه دوم برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم $ax^6 + bx^3 + 1$ مقسوم‌علیه را

مساوی صفر قرار می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم $x^2 = -1$.

حالا در مقسوم به جای x^2 ها، عدد -1 می‌گذاریم تا باقی‌مانده به دست آید:

$$ax^6 + bx^3 + 1 = a(x^2)^3 + bx^3 + 1$$

$$\xrightarrow{x^2=-1} a(-1)^3 + b(-1) + 1 = a - b + 1$$

طبق صورت سؤال، باقی‌مانده تقسیم بر $x^2 + 1$ برابر ۱ شده است، پس:

$$a - b + 1 = 1 \Rightarrow a - b = 0$$

ادامه حل مثل راه‌حل اول است.

۱۱۶- گزینه ۱ چون $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ بر

$x + 2$ بخش‌پذیر است، پس $P(-2) = 0$ باید صفر شود:

$$\Rightarrow (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + k = 0$$

$$\Rightarrow -2^{2n+1} + 2^{2n+1} - 32 + 40 + k = 0 \Rightarrow 8 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = -8$$

حالا باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 1$ را می‌خواهیم، از $x^2 - 1 = 0$ نتیجه

می‌گیریم $x^2 = 1$ ، پس برای محاسبه باقی‌مانده $P(x)$ بر $x^2 - 1$ به جای

x^2 ها عدد ۱ می‌گذاریم:

$$P(x) = x(x^2)^n + 2(x^2)^n + (x^2)^2 x - 5x^2 x - 8$$

$$\xrightarrow{x^2=1} x(1)^n + 2(1)^n + (1)^2 x - 5(1)x - 8$$

$$= x + 2 + x - 5x - 8 = -3x - 6$$

۱۱۷- گزینه ۴ مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + 1$ ، در $f(x)$ جای x^2 ها،

عدد -1 می‌گذاریم:

$$f(x) = x^2 + ax^2 - bx = x^2 x + ax^2 - bx \xrightarrow{x^2=-1} (-1)x + a(-1) - bx = -x - a - bx = (-b-1)x - a$$

سؤال گفته باقی‌مانده برابر ۵ است، پس عبارت $(-b-1)x - a$ باید متحد

با ۵ باشد و داریم:

$$\begin{cases} (-b-1)x - a = 5 \\ -a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b-1 = 0 \Rightarrow b = -1 \\ -a = 5 \Rightarrow a = -5 \end{cases}$$

$$a - b = -5 - (-1) = -4$$

در نتیجه:

۱۱۸- گزینه ۳

۲ راه اول ابتدا باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^2 - 5x^2 + 2x + 1$ را بر $x^2 + 1$ حساب می‌کنیم.

برای به دست آوردن باقی مانده، باید در مقسوم به جای x^2 ها، x قرار دهیم:

$$4x^{21} - 3x^{12} + 2x^2 + x = 4(x^2)^5 - 3(x^2)^3 + 2x^2 + x$$

$$\xrightarrow{x^2=x} 4x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x$$

$$= 4(x^2)^2 x - 3(x^2)x + 2x^2 + x$$

$$\xrightarrow{x^2=x} 4x^2 x - 3xx + 2x^2 + x = 4x^2 - x^2 + x$$

$$\xrightarrow{x^2=x} 4x - x^2 + x = -x^2 + 5x$$

پس باقی مانده به صورت $R(x) = -x^2 + 5x$ است و مقدار $R(2)$ برابر است با:

$$R(2) = -(2)^2 + 5(2) = -4 + 10 = 6$$

۱۲۴- گزینه ۲ مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x - 1$$

برای به دست آوردن باقی مانده، باید در مقسوم به جای x^2 ها، $2x - 1$ بگذاریم:

$$x^4 + ax^2 - bx + 4 = (x^2)^2 + ax^2 - bx + 4$$

$$\xrightarrow{x^2=2x-1} (2x-1)^2 + a(2x-1) - bx + 4$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 + 2ax - a - bx + 4$$

$$\xrightarrow{x^2=2x-1} 4(2x-1) - 4x + 1 + 2ax - a - bx + 4$$

$$= 8x - 4 - 4x + 1 + 2ax - a - bx + 4$$

$$= (2a - b + 4)x + 1 - a$$

به خاطر بخش پذیر بودن، باقی مانده باید صفر شود، پس عبارت به دست آمده متحد با صفر است:

$$\begin{cases} 1 - a = 0 \\ 2a - b + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}$$

۱۲۵- گزینه ۲ چند جمله ای درجه سوم $a(x-1)(x+1)(x-2)$ بر $x-1$ ، $x+1$ و $x-2$ بخش پذیر است. پس اگر به این چند جمله ای درجه سه، ۲۴ واحد اضافه کنیم، باقی مانده تقسیم آن بر $x-1$ ، $x+1$ و $x-2$ برابر ۲۴ می شود. پس:

$$f(x) = a(x-1)(x+1)(x-2) + 24$$

حالا شرط آخر را روی آن اعمال می کنیم. باید $f(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد، پس $f(-2)$ باید صفر شود:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow a(-2-1)(-2+1)(-2-2) + 24 = 0$$

$$\Rightarrow -12a + 24 = 0 \Rightarrow a = 2$$

پس $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2) + 24 = 2x^3 + \dots$$

ضریب x^3 برابر ۲ است.

۱۲۶- گزینه ۱ چند جمله ای $f(x)$ را بر $x^2 - 4$ تقسیم کرده ایم. خارج قسمت $Q(x)$ و باقی مانده $1 - 2x$ شده است. بنابراین رابطه تقسیم به صورت مقابل است:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 2x - 1$$

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ و $x+2$ به ترتیب برابر $f(2)$ و $f(-2)$ است.

$$f(2) = (2^2 - 4)Q(2) + 2(2) - 1 = 3 \Rightarrow A = 3$$

$$f(-2) = ((-2)^2 - 4)Q(-2) + 2(-2) - 1 = -5 \Rightarrow B = -5$$

$$A - B = 3 - (-5) = 8$$

پس:

۱۲۷- گزینه ۲ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 2$ ، حداکثر از درجه یک است. آن را $ax + b$ در نظر می گیریم. رابطه تقسیم به صورت مقابل درمی آید:

$$P(x) = (x^2 + x - 2)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow P(x) = (x+2)(x-1)Q(x) + ax + b$$

اگر مقسوم علیه را مساوی صفر قرار دهیم، داریم $x^2 = -1$ ، پس در $P(x)$ به جای x^2 ها، -1 می گذاریم:

$$P(x) = x^2 x - 5x^2 + 2x + 1$$

$$\xrightarrow{x^2=-1} (-1)x - 5(-1) + 2x + 1 = -x + 5 + 2x + 1 = x + 6$$

پس باقی مانده، $x + 6$ است، بنابراین اگر $x + 6$ را از $P(x)$ کم کنیم باقی مانده تقسیم، صفر می شود.

راه دوم $(x-1)^2(x+1)^2$ بر (x^2-1) بخش پذیر است. بنابراین کافی است باقی مانده $1 - x^2 - x^4$ را بر $x^2 - 1$ محاسبه کنیم:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow (x^2)^2 - x^2 - 1$$

$$\xrightarrow{x^2=1} (1)^2 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = -1$$

۱۱۹- گزینه ۳ اگر مقسوم را مساوی صفر قرار دهیم، داریم: $x^2 = 1$ پس در $f(x)$ به جای x^2 ها، 1 می گذاریم. فقط اول مقسوم را بر حسب x^2 مرتب می کنیم:

$$f(x) = (x+1)^2(x-1)^2 + x^4 - x^2 - 1$$

$$= (x+1)(x+1)^2(x-1)^2 + x^4 - x^2 - 1$$

$$= (x+1)(x^2-1)^2 + (x^2)^2 - x^2 - 1$$

$$\xrightarrow{x^2=1} (x+1)(1-1)^2 + (1)^2 - 1 - 1 = 0 + 1 - 1 - 1 = -1$$

۱۲۰- گزینه ۲ اگر مقسوم را مساوی صفر بگذاریم، نتیجه می گیریم:

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x^2 = -3x$$

پس برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + 3x$ ، در $f(x)$ به جای x^2 ها، $-3x$ می گذاریم. البته قبلاً قیافه $f(x)$ را باید کمی درست کنیم:

$$f(x) = x(x+2)(x+1)(x+2) + 1 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1$$

$$\xrightarrow{x^2=-3x} (-3x + 3x)(-3x + 3x + 2) + 1 = 0 + 1 = 1$$

۱۲۱- گزینه ۳ اگر مقسوم علیه را برابر صفر قرار دهیم، داریم:

$$x^4 + 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = -4x^2 + 1$$

پس مقسوم را طوری مرتب می کنیم که بتوانیم از تساوی بالا استفاده کنیم:

$$(x^2+1)(x^2+4)(x^2+2)(x^2+3) + x^2$$

$$= (x^4 + 5x^2 + 4)(x^4 + 5x^2 + 6) + x^2$$

$$\xrightarrow{x^4=-4x^2+1} (-4x^2+1+5x^2+4)(-4x^2+1+5x^2+6) + x^2$$

$$= (x^2+5)(x^2+7) + x^2 = x^4 + 12x^2 + 35 + x^2 = x^4 + 13x^2 + 35$$

$$\xrightarrow{x^4=-4x^2} 1 - 4x^2 + 13x^2 + 35 = 9x^2 + 36$$

۱۲۲- گزینه ۲ مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -x - 1$$

برای محاسبه باقی مانده، باید در مقسوم به جای x^2 ها، $-x - 1$ قرار دهیم و اگر لازم شد این کار را تکرار می کنیم:

$$(x^2 + 6x + 8)(x^2 - 4x + 3) + 3$$

$$\xrightarrow{x^2=-x-1} (-x-1+6x+8)(-x-1-4x+3) + 3$$

$$= (5x+7)(-5x+2) + 3 = -25x^2 + 10x - 35x + 14 + 3$$

$$\xrightarrow{-x^2=-x-1} -25(-x-1) - 25x + 17 = 25x + 25 - 25x + 17 = 42$$

۱۲۳- گزینه ۲ اگر مقسوم علیه را مساوی صفر قرار دهیم، داریم:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x^2 = x$$

برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x$ ، باید در $f(x)$ جای x^2 ها، $3x$ قرار دهیم:

$$\frac{x^2 = 3x}{\rightarrow} \circ + \Delta(3x) + 3x + 1 = 18x + 1$$

پس $a = 18$ ، $b = 1$ و در نتیجه:

۱۳۲- گزینه ۳ باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4$ برابر با $3x + 12$ شده است. رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 3x + 12 \quad (I)$$

برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $-1 - 2f(x+1)$ بر $x+3$ باید به جای x عدد -3 بگذاریم:

$$2f(-3) - 1 = 2f(-2) - 1$$

پس $f(-2)$ را می خواهیم. با استفاده از رابطه (I) آن را حساب می کنیم:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 3x + 12$$

$$\xrightarrow{x=-2} f(-2) = \circ + 3(-2) + 12 = 6$$

$$2f(-2) - 1 = 2(6) - 1 = 11$$

در نتیجه:

۱۳۳- گزینه ۳ باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4$ برابر با $3x + 1$ شده، پس:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 3x + 1 \quad (I)$$

ما باقی مانده تقسیم $f(x^2 - x - 2)$ بر $x+1$ را می خواهیم. باید به جای x عدد -1 بگذاریم:

$$f(x^2 - x - 2) \xrightarrow{x=-1} f(-1+1-2) = f(-2)$$

مقدار $f(-2)$ را با استفاده از رابطه (I) حساب می کنیم:

$$f(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 3x + 1$$

$$\xrightarrow{x=-2} f(-2) = \circ + 3(-2) + 1 = -5$$

۱۳۴- گزینه ۲ برای محاسبه باقی مانده عبارت $p(x-1) - p(x-2)$ بر x ، $x = 0$ قرار می دهیم: (*) $p(-1) - p(-2) = p(0)$ باقی مانده: $x = 0$. حالا باید با استفاده از اطلاعات مسئله $p(-1)$ و $p(-2)$ را محاسبه کنیم. باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + 3x + 2$ برابر با $2x + 1$ است. پس رابطه تقسیم به صورت روبه رو است:

$$p(x) = (x^2 + 3x + 2)Q(x) + 2x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(-1) = \circ + (-1) = -1 \\ p(-2) = \circ + (-3) = -3 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)} -1 - (-3) = 2 = p(0)$$

۱۳۵- گزینه ۲ چند جمله ای $g(x) = x + f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ بخش پذیر است، پس:

$$\triangleright g(1) = \circ \Rightarrow 1 + f(1) = \circ \Rightarrow f(1) = -1$$

$$\triangleright g(2) = \circ \Rightarrow 2 + f(2) = \circ \Rightarrow f(2) = -2$$

باقی مانده تقسیم $xf(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ یک چند جمله ای حداکثر از درجه یک است. آن را $ax + b$ در نظر می گیریم و داریم:

$$xf(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$

در تساوی بالا یک بار $x = 1$ و یک بار $x = 2$ قرار می دهیم:

$$\xrightarrow{x=1} 1f(1) = \circ + a + b \xrightarrow{f(1)=-1} a + b = -1$$

$$\xrightarrow{x=2} 2f(2) = \circ + 2a + b \xrightarrow{f(2)=-2} 2a + b = -4$$

با حل دو معادله بالا داریم:

$$b = 2, a = -3$$

پس باقی مانده به صورت $-3x + 2$ است.

۱۳۶- گزینه ۳ باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ برابر ۲ است پس:

$$p(1) = 2 \Rightarrow 1 - 3 + a - 1 = 2 \Rightarrow a = 5$$

حالا رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$x^4 - 3x^3 + 5x - 1 = (x-1)q(x) + 2$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر -2 شده است، پس:

$$P(1) = -2 \Rightarrow \circ + a + b = -2 \Rightarrow a + b = -2$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ برابر 4 شده است، پس:

$$P(-2) = 4 \Rightarrow \circ - 2a + b = 4 \Rightarrow -2a + b = 4$$

با حل دو معادله $a + b = -2$ و $-2a + b = 4$ داریم:

$$b = \circ, a = -2$$

پس $ax + b$ که باقی مانده تقسیم بود برابر با $-2x$ است.

۱۳۸- گزینه ۱ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-2$ برابر ۱ است؛ پس $P(2) = 1$.

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+3$ برابر -4 است، پس $P(-3) = -4$.

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-6$ ، ابتدا رابطه تقسیم را می نویسیم (چون مقسوم علیه از درجه دوم است، باقی مانده تقسیم را به صورت $ax + b$ در نظر می گیریم):

$$P(x) = (x^2 + x - 6)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(2) = 1 \Rightarrow \circ \times Q(2) + 2a + b = 1 \\ P(-3) = -4 \Rightarrow \circ \times Q(-3) - 3a + b = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ -3a + b = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \Delta a = 5 \Rightarrow a = 1$$

$$\xrightarrow{2a+b=1} b = -1 \Rightarrow ax + b = x - 1$$

۱۳۹- گزینه ۳ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۸ است، پس:

$P(1) = 8$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x+1$ برابر ۵ است، پس:

$$P(-\frac{1}{2}) = 5$$

حالا فرض کنیم باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ برابر $ax + b$ باشد، در این صورت با توجه به رابطه تقسیم داریم:

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(1) = \circ + a + b \Rightarrow 8 = a + b \\ P(-\frac{1}{2}) = \circ + (-\frac{1}{2}a + b) \Rightarrow 5 = -\frac{1}{2}a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 3 = \frac{3}{2}a \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{8=a+b} b = 6$$

بنابراین باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ برابر $2x + 6$ است.

۱۳۰- گزینه ۲ باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x+b$ به ترتیب ۳ و ۷ شده، پس:

$$f(-b) = 7, f(1) = 3$$

از طرفی باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+b)(x-1)$ برابر با $-x + a$ است، پس رابطه تقسیم به شکل زیر درمی آید:

$$f(x) = (x+b)(x-1)Q(x) + (-x+a)$$

حالا دو شرط $f(-b) = 7$ و $f(1) = 3$ را می نویسیم:

$$f(1) = 3 \Rightarrow (1+b)(\circ)Q(1) + (-1+a) = 3$$

$$\Rightarrow a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4$$

$$f(-b) = 7 \Rightarrow (-b+b)(-b-1)Q(-b) + (b+a) = 7$$

$$\Rightarrow \circ + b + a = 7 \xrightarrow{a=4} b = 3$$

$$a - b = 4 - 3 = 1$$

پس:

۱۳۱- گزینه ۲ باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x(x-3)(x+3)$ برابر $5x^2 + 3x + 1$ است. رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$f(x) = x(x-3)(x+3)Q(x) + 5x^2 + 3x + 1$$

$$= (x^2 - 3x)(x+3)Q(x) + 5x^2 + 3x + 1$$

$x^A + 1 = 0 \Rightarrow x^A = -1$ ❏
 $x^{2^f} + 1 = (x^A)^f + 1 = (-1)^f + 1 = 0 \checkmark$

۱۴۱- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد
 $x^y + y^y = (x+y)(x^y - x^{\frac{y}{2}}y + \dots - xy^{\frac{y}{2}} + y^y)$
 داریم: $a^{2^A} + b^{2^A} = (a^f)^y + (b^f)^y = (a^f + b^f)(a^{2^f} - \dots + b^{2^f})$
 پس $a^{2^A} + b^{2^A}$ بر $a^f + b^f$ بخش پذیر است.

۱۴۲- گزینه ۳
 $A = \frac{(x^f - 1)(x + 2)}{x^f + x - 2} = \frac{(x - 1)(x^f + x^{\frac{f}{2}} + x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 1)}$
 $= x^f + x^{\frac{f}{2}} + x + 1$

۱۴۳- گزینه ۱ صورت کسر را با اتحاد (n فرد)
 $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = a^n + b^n$
 ساده می‌کنیم و مخرج را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(1+t)(1-t+t^2-t^3+t^4)}{1-t^5} = \frac{1+t^5}{(1-t^5)(1+t^5)}$$

$$= \frac{1}{1-t^5} \xrightarrow{t=\sqrt[5]{t}} \frac{1}{1-(\sqrt[5]{t})^5} = \frac{1}{1-t} = -1$$

برای محاسبه $q(-1)$ ، در تساوی قبل $x = -1$ قرار می‌دهیم:
 $-1 - 3 - 5 - 1 = (-1-1)q(-1) + 2 \Rightarrow -2q(-1) = -12$
 $\Rightarrow q(-1) = 6$

۱۳۷- گزینه ۳ در تقسیم $P(x) = 5x^5 - 14x^3 + 3$ بر $x - 2$ ، ابتدا باقی‌مانده را حساب می‌کنیم:
 $P(2) = 5(2)^5 - 14(2)^3 + 3 = 160 - 112 + 3 = 51$
 با داشتن باقی‌مانده رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$5x^5 - 14x^3 + 3 = (x - 2)Q(x) + 51$
 در رابطه بالا $x = -2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:
 $5(-2)^5 - 14(-2)^3 + 3 = (-2 - 2)Q(-2) + 51$
 $\Rightarrow -160 + 112 + 3 = -4Q(-2) + 51$
 $\Rightarrow -96 = -4Q(-2) \Rightarrow Q(-2) = 24$

۱۳۸- گزینه ۲ ابتدا باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^A + 3x^5 - 2x^3 + 1$ بر $x + 1$ را حساب می‌کنیم:
 $f(-1) = (-1)^A + 3(-1)^5 - 2(-1)^3 + 1 = 1 - 3 - 2 + 1 = -3$
 پس رابطه تقسیم به صورت زیر است:

$x^A + 3x^5 - 2x^3 + 1 = (x + 1)Q(x) + (-3)$
 اگر یادتان باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $P(x)$ برابر با $P(1)$ بود، بنابراین مجموع ضرایب خارج‌قسمت $Q(1)$ می‌شود. در تساوی بالا $x = 1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:
 $1^A + 3(1)^5 - 2(1)^3 + 1 = (1 + 1)Q(1) + (-3)$
 $\Rightarrow 1 + 3 - 2 + 1 = 2Q(1) - 3 \Rightarrow 2Q(1) = 6 \Rightarrow Q(1) = 3$

۱۳۹- گزینه ۴ ابتدا باقی‌مانده تقسیم $f(x) = 3x^{1^4} - x^{1^0} + x^y + 6$ بر $x + 1$ حساب می‌کنیم:

$f(-1) = 3(-1)^4 - (-1)^0 + (-1)^y + 6 = 3 - 1 - 1 + 6 = 7$
 با فرض این که خارج‌قسمت این تقسیم $g(x)$ باشد، رابطه تقسیم به شکل مقابل درمی‌آید:
 $3x^{1^4} - x^{1^0} + x^y + 6 = (x + 1)g(x) + 7$
 باقی‌مانده تقسیم $g(x)$ بر $x - 1$ برابر با $g(1)$ است. برای به دست آوردن $g(1)$ ، در رابطه بالا $x = 1$ قرار می‌دهیم:

$3(1)^4 - 1^0 + 1^y + 6 = (1 + 1)g(1) + 7$
 $\Rightarrow 3 - 1 + 1 + 6 = 2g(1) + 7 \Rightarrow 2g(1) = 2 \Rightarrow g(1) = 1$

۱۴۰- گزینه ۴
راه اول با استفاده از اتحاد $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ داریم:

$x^{2^f} + 1 = (x^A)^3 + 1^3 = (x^A + 1)(x^{1^6} - x^A + 1)$
 پس $x^{2^f} + 1$ بر $x^A + 1$ بخش پذیر است.

راه دوم تک‌تک گزینه‌ها را چک می‌کنیم. هر گزینه نقش مقسوم‌علیه را دارد. آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم و تساوی به دست آمده را در مقسوم یعنی $x^{2^f} + 1$ جای‌گذاری می‌کنیم. اگر حاصل صفر شد یعنی $x^{2^f} + 1$ بر آن گزینه بخش پذیر است.

$x^{1^2} + 1 = 0 \Rightarrow x^{1^2} = -1$ ❏

$x^{2^f} + 1 = (x^{1^2})^f + 1 = (-1)^f + 1 = 2 \neq 0$

$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$ ❏

$x^{2^f} + 1 = (x^3)^A + 1 = (-1)^A + 1 = 2 \neq 0$

$x^f + 1 = 0 \Rightarrow x^f = -1$ ❏

$x^{2^f} + 1 = (x^f)^f + 1 = (-1)^f + 1 = 2 \neq 0$