

فصل پنجم:

گراف و مدل سازی

(فصل دوم کتاب ریاضیات گسسته)



- قسمت اول: آشنایی با گراف ۱۰۲
 قسمت دوم: زیرگراف، گراف کامل، گراف منتظم ۱۰۴
 قسمت سوم: مسیر، دور و همبندی در یک گراف ۱۰۷
 قسمت چهارم: مدل سازی با گراف (احاطه‌گری) ۱۱۰
 تست V.I.P ۱۱۵
 پاسخنامه تشریحی ۱۱۶

فصل ششم:

مجموعه‌ها

(فصل اول کتاب آمار و احتمال)



- قسمت اول: مجموعه، زیرمجموعه و افراز ۱۳۹
 قسمت دوم: قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها ۱۴۰
 قسمت سوم: ضرب دکارتی ۱۴۴
 تست V.I.P ۱۴۶
 پاسخنامه تشریحی ۱۴۷

فصل هفتم:

ترکیبیات (شمارش)

(فصل سوم کتاب ریاضیات گسسته)



- قسمت اول: شمارش ۱۵۷
 قسمت دوم: توزیع n شیء یکسان ۱۶۳
 قسمت سوم: مربع لاتین ۱۶۵
 قسمت چهارم: اصل شمول و عدم شمول ۱۶۷
 قسمت پنجم: اصل لانه کبوتری ۱۷۰
 تست V.I.P ۱۷۳
 پاسخنامه تشریحی ۱۷۵

فصل هشتم:

احتمال

(فصل دوم کتاب آمار و احتمال)



- قسمت اول: فضای نمونه‌ای - پیشامدها و اعمال روی پیشامدها ۲۰۵
 قسمت دوم: احتمال رخداد یک پیشامد ۲۰۶
 قسمت سوم: قوانین احتمال ۲۱۰
 قسمت چهارم: احتمال غیر هم‌شانس ۲۱۳
 قسمت پنجم: احتمال شرطی، قانون احتمال کل و قانون بیز ۲۱۵
 قسمت ششم: پیشامدهای مستقل و احتمال دو جمله‌ای ۲۲۱
 تست V.I.P ۲۲۵
 پاسخنامه تشریحی ۲۲۶
 تست‌های کنکور سراسری داخل و خارج ۹۸ ۴۵۱
 تست‌های کنکور سراسری داخل و خارج ۹۹ ۴۵۷

فصل اول:

آمار توصیفی

(فصل سوم کتاب آمار و احتمال)



- قسمت اول: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه، نمونه، ۹
 قسمت دوم: فراوانی‌ها و نمودارها ۱۰
 قسمت سوم: معیارهای گرایش به مرکز ۱۴
 قسمت چهارم: معیارهای پراکندگی ۱۶
 تست V.I.P ۱۹
 پاسخنامه تشریحی ۲۰

فصل دوم:

آمار استنباطی

(فصل چهارم کتاب آمار و احتمال)



- قسمت اول: جامعه آماری و نمونه ۳۵
 قسمت دوم: برآورد ۳۷
 تست V.I.P ۳۸
 پاسخنامه تشریحی ۳۹

فصل سوم:

آشنایی با مبانی ریاضیات

(فصل اول کتاب آمار و احتمال)



- قسمت اول: آشنایی با منطق ریاضی و گزاره‌ها ۴۳
 قسمت دوم: ترکیب شرطی، ترکیب دوشروطی و سورها ۴۴
 تست V.I.P ۴۷
 پاسخنامه تشریحی ۴۸

فصل چهارم:

آشنایی با نظریه اعداد

(فصل اول کتاب ریاضیات گسسته)



- قسمت اول: استدلال ریاضی ۵۴
 قسمت دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح ۵۶
 قسمت سوم: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه و کوچک‌ترین مضرب ۵۹
 قسمت چهارم: قضیه تقسیم و کاربردها ۶۱
 قسمت پنجم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح ۶۲
 قسمت ششم: بخش پذیری بر اعداد خاص ۶۶
 قسمت هفتم: معادله هم‌نهشتی و معادله سیاله ۶۸
 تست V.I.P ۷۰
 پاسخنامه تشریحی ۷۱

قسمت چهارم: قضیه تقسیم و کاربردها

قضیه تقسیم

- ☆ ۳۷۰. در تقسیم $67 - 23$ ، خارج قسمت q و باقی مانده r است. حاصل $r + q$ کدام است؟
- | | | | |
|-------|-------|--------|--------|
| ۲ (۱) | ۱ (۲) | -۲ (۳) | -۱ (۴) |
|-------|-------|--------|--------|
- ☆ ۳۷۱. در یک تقسیم، اگر 73 واحد به مقسوم و 4 واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییری نمی کند ولی 3 واحد از باقی مانده کم می شود. خارج قسمت تقسیم کدام است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۱۹ (۱) | ۲۰ (۲) | ۲۱ (۳) | ۲۲ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- ☆ ۳۷۲. در تقسیم عدد صحیح a بر 17 ، باقی مانده برابر 8 است. اگر 10 واحد به مقسوم اضافه کنیم، آن گاه:
- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| (۱) باقی مانده تغییر نمی کند. | (۲) باقی مانده یک واحد کم می شود. |
| (۳) باقی مانده 7 واحد کم می شود. | (۴) باقی مانده 7 واحد اضافه می شود. |
- ☆ ۳۷۳. در تقسیم عدد a بر 63 ، باقی مانده 47 است. اگر 60 واحد به a اضافه کنیم، باقی مانده و خارج قسمت به ترتیب چه تغییری می کنند؟
- | | |
|---|--|
| (۱) سه واحد کم می شود - یک واحد اضافه می شود. | (۲) سه واحد اضافه می شود - یک واحد اضافه می شود. |
| (۳) سه واحد اضافه می شود - تغییر نمی کند. | (۴) سه واحد کم می شود - دو واحد اضافه می شود. |
- ☆ ۳۷۴. در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت و باقی مانده مساوی q هستند. اگر 3 واحد از مقسوم علیه کم شود، 5 واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی مانده صفر می شود. مقادیر q کدامند؟ (سراسری)
- | | | | |
|-----------|-----------|------------|------------|
| ۵ و ۸ (۱) | ۴ و ۹ (۲) | ۵ و ۱۰ (۳) | ۸ و ۱۰ (۴) |
|-----------|-----------|------------|------------|
- ☆ ۳۷۵. مجموع ارقام بزرگ ترین عددی که در تقسیم بر 47 ، باقی مانده تقسیم، توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۱۶ (۱) | ۱۱ (۲) | ۱۲ (۳) | ۱۴ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- ☆ ۳۷۶. در تقسیم عدد طبیعی a بر 27 ، باقی مانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن 2 واحد کم تر است. بزرگ ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ (سراسری)
- | | | | |
|-------|--------|--------|--------|
| ۹ (۱) | ۱۲ (۲) | ۱۴ (۳) | ۱۶ (۴) |
|-------|--------|--------|--------|
- ☆ ۳۷۷. در تقسیم عدد 165 بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت مجذور باقی مانده است. چند عدد b می توان یافت؟ (سراسری - ۸۷)
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- ☆ ۳۷۸. در تقسیم عدد 75 بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت جذر باقی مانده است. چند مقدار برای b وجود دارد؟
- | | | | |
|---------|-------|-------|-------|
| صفر (۱) | ۱ (۲) | ۲ (۳) | ۳ (۴) |
|---------|-------|-------|-------|
- ☆ ۳۷۹. خارج قسمت و باقی مانده تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b به ترتیب 13 و 41 می باشد، مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۲۰ (۱) | ۱۹ (۲) | ۱۷ (۳) | ۱۵ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- ☆ ۳۸۰. در تقسیمی، باقی مانده برابر 14 و مقسوم علیه سه واحد کم تر از مربع خارج قسمت است اگر مقسوم مضرب 3 باشد، حاصل ضرب ارقام کوچک ترین مقدار طبیعی مقسوم کدام است؟
- | | | | |
|-------|-------|--------|--------|
| ۴ (۱) | ۸ (۲) | ۳۲ (۳) | ۵۴ (۴) |
|-------|-------|--------|--------|
- ☆ ۳۸۱. در تقسیمی، مقسوم 30 برابر باقی مانده است و باقی مانده، ماکزیمم می باشد. خارج قسمت تقسیم کدام عدد زیر می تواند باشد؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۲۷ (۱) | ۲۸ (۲) | ۲۹ (۳) | ۳۰ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- ☆ ۳۸۲. در یک تقسیم، مقسوم برابر 650 و خارج قسمت برابر 12 است. مجموع ارقام بزرگ ترین مقدار باقی مانده کدام است؟
- | | | | |
|-------|--------|--------|--------|
| ۹ (۱) | ۱۱ (۲) | ۱۳ (۳) | ۱۷ (۴) |
|-------|--------|--------|--------|
- ☆ ۳۸۳. در یک تقسیم، مقسوم برابر 500 و خارج قسمت برابر 9 است. برای مقسوم علیه چند جواب طبیعی وجود دارد؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۳ (۱) | ۴ (۲) | ۵ (۳) | ۶ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- تعیین باقی مانده

☆ ۳۸۴. اگر باقی مانده تقسیم دو عدد a و b بر 17 به ترتیب 5 و 2 باشد، باقی مانده تقسیم $a - b$ بر 17 کدام است؟

۶ (۱)	۷ (۲)	۸ (۳)	۹ (۴)
-------	-------	-------	-------

☆ ۳۸۵. باقی مانده تقسیم a بر 8 برابر 7 است. باقی مانده تقسیم $a + 1$ بر 4 کدام است؟

صفر (۱)	۱ (۲)	۲ (۳)	۳ (۴)
---------	-------	-------	-------

☆ ۳۸۶. باقی مانده تقسیم a بر 6 و 7 به ترتیب 3 و 1 می باشد. باقی مانده تقسیم عدد a بر 42 کدام است؟

۱۴ (۱)	۱۵ (۲)	۱۶ (۳)	۱۷ (۴)
--------	--------	--------	--------

۳۸۷. باقی مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۵ و ۶ به ترتیب ۱ و ۴ می‌باشند. باقیمانده تقسیم a بر ۳۰ کدام است؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۱۹ (۳) ۱۶ (۴) ۱۳
- ۳۸۸☆. باقی مانده تقسیم a بر ۵ و ۷ به ترتیب ۳ و ۴ می‌باشد. باقی مانده تقسیم a بر ۳۵ کدام است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۲ (۴) ۲۵
- ۳۸۹☆. اگر a یک عدد صحیح زوج و باقی مانده تقسیم آن بر ۳۷ برابر ۱۱ باشد، باقی مانده تقسیم $\frac{a}{4}$ بر ۳۷ کدام است؟
 (۱) ۱۷ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷
- ۳۹۰☆. اگر باقی مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۹۹ برابر ۲۵ باشد، باقی مانده تقسیم a بر ۹ چقدر است؟
 (۱) ۷ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۴
۳۹۱. باقی مانده تقسیم a بر ۱۵ و ۱۱ به ترتیب ۴ و ۶ است. باقی مانده تقسیم a بر ۵۵ کدام است؟
 (۱) ۳۲ (۲) ۳۵ (۳) ۳۶ (۴) ۳۹
- ۳۹۲☆. اگر a مضرب ۳ باشد ولی مضرب ۶ نباشد، باقی مانده تقسیم a^2 بر ۴ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) ۲
۳۹۳. اگر باقی مانده تقسیم عدد A بر ۱۳ برابر ۹ باشد، باقی مانده تقسیم عدد $A^2 - 2A$ بر ۱۳ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۹ (۴) ۱۱
- ۳۹۴☆. اگر n یک عدد صحیح زوج باشد، عدد $n(n^2 - 4)$ همواره بر بزرگ‌ترین عددی که بخش پذیر است، کدام می‌باشد؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۴۸ (۳) ۳۶ (۴) ۲۴
- ۳۹۵☆. اگر حاصل ضرب سه عدد صحیح x ، y و z زوج باشد، باقی مانده تقسیم $x^2 + y^2 + z^2$ بر چهار، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
۳۹۶. اگر x و y دو عدد صحیح فرد باشند، باقی مانده تقسیم $x^2 - 5y^2$ بر ۸، کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
- ۳۹۷☆. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، $6 | n^3 - n$

(۲) اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، آنگاه $24 | p^2 - 1$

(۳) اگر a یک عدد صحیح دلخواه باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم a^2 بر ۵ یکی از اعداد صفر یا ۱ است.

(۴) اگر m و n دو عدد صحیح فرد باشند، آنگاه $16 | n^4 + m^4 - 2$

(برگرفته از کتاب درسی)

قسمت پنجم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح

ویژگی‌های هم‌نهشتی

(سراسری)

۳۹۸☆. کدام دو عدد در هم‌نهشتی $a \equiv b^{12}$ صادق‌اند؟

- (۱) ۶۳ و ۲۰ (۲) ۱۲ و ۲۳ (۳) ۵۹ و ۲۳ (۴) ۵۹ و ۲۴

۳۹۹☆. اگر m یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، به ازای چند مقدار m ، رابطه $57 \equiv 93^m$ برقرار است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۴۰۰. عدد ۲۸۷ به کدام دسته هم‌ارزی در هم‌نهشتی به پیمانه ۱۳ قرار دارد؟

- (۱) ۴۷ (۲) ۲۱ (۳) -۵۶ (۴) -۳۸

۴۰۱☆. دسته هم‌ارزی $[۸۳]_۸$ با کدام مجموعه زیر برابر است؟

- (۱) $[۲۵]_۸$ (۲) $[۱۹]_۸$ (۳) $[-۴۳]_۸$ (۴) $[-۷۳]_۸$

۴۰۲☆. رابطه $\{x, y \in \mathbb{Z} \mid x \cdot y \in \mathbb{Z}, x - y = mk, k \in \mathbb{Z}\}$ مجموعه \mathbb{Z} را به ۵ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است. کدام دو عدد در یک کلاس

(سراسری)

هم‌ارزی قرار دارند؟

- (۱) ۷ و ۲۵ (۲) ۳ و ۳۱ (۳) ۱ و ۳۷ (۴) ۱۲ و ۳۷

۴۰۳☆ در هم‌نهشتی به پیمانه $m (m \neq 1)$ ، سه عدد a ، 41 و 132 در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a به طوری که مجموعه Z به تعداد کم‌تری کلاس هم‌ارزی افزایش شود، کدام است؟ (سراسری)

- ۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۳ (۳) ۱۰۴ (۴) ۱۰۶

۴۰۴☆ مجموعه همه دسته‌های هم‌ارزی به پیمانه ۵ به صورت $\{[a^4], [a^3], [a^2], [a], [0]\}$ است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟ (سراسری)

- ۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۴

۴۰۵ اگر a عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، با کدام پیمانه گزاره $[a^2] = [1]$ همواره درست نیست؟ (سراسری)

- ۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۴۰۶ اگر $(c, m) = 1$ کدام گزاره شرطی در رابطه هم‌نهشتی به پیمانه m همیشه درست نیست؟ (سراسری)

- ۱) $a^n \equiv b^n \Rightarrow a \equiv b$ (۲) $ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b$ (۳) $a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$ (۴) $a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$

۴۰۷☆ از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۸۴) $36a \equiv 192$ ، کدام نتیجه‌گیری در پیمانه ۷ نادرست است؟ (سراسری - ۸۸)

- ۱) $a \equiv 3$ (۲) $a \equiv 4$ (۳) $2a \equiv -1$ (۴) $3a \equiv 2$

۴۰۸ از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۳۰) $15a \equiv 20b$ ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (سراسری)

- ۱) $3a \equiv 4b$ (۲) $3a \equiv 4b$ (۳) $b \equiv 0$ (۴) $a \equiv 0$

۴۰۹☆ اگر (به پیمانه m)، $a^2 - a + 1 \equiv a^3 - a^2 - a + 1 \equiv a^2 - 1$ و $(a^2 - 1, m) = 1$ آن‌گاه (سراسری)

- ۱) $m | a - 2$ (۲) $m | a - 1$ (۳) $m | a + 1$ (۴) $m | a + 2$

۴۱۰ از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۹) $18a \equiv 12b$ ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (سراسری فارغ از کشور - ۸۵)

- ۱) (پیمانه ۲) $a \equiv 0$ (۲) (پیمانه ۳) $b \equiv 0$ (۳) (پیمانه ۳) $3a \equiv b$ (۴) (پیمانه ۳) $3a \equiv 2b$

۴۱۱☆ از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۱۸) $9a \equiv 6b$ ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (سراسری - ۸۷)

- ۱) (پیمانه ۲) $a \equiv 0$ (۲) (پیمانه ۳) $b \equiv 0$ (۳) (پیمانه ۶) $a \equiv 2$ (۴) (پیمانه ۶) $3a \equiv 2b$

۴۱۲☆ رابطه هم‌نهشتی، مجموعه Z را به ۱۵ کلاس هم‌ارزی افزایش کرده است و عدد سه‌رقمی $6a4$ در کلاس هم‌ارزی [۹] قرار دارد. تعداد جواب‌های a کدام است؟ (سراسری)

- ۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۴۱۳ باقی‌مانده تقسیم اعداد ۱۲۸، ۱۱۵ و a بر عدد طبیعی $m (m \neq 1)$ یکسان است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد چهاررقمی a کدام است؟ (سراسری)

- ۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

تعیین باقی‌مانده و هم‌نهشتی

۴۱۴☆ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد A بر ۱۹ برابر ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $5A - A^3$ بر ۱۹ کدام است؟

- ۱) ۱۰ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) ۲

۴۱۵ اگر $a = 5k + 3$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $a^4 + a^3 + a^2 + a$ بر ۵ کدام است؟

- ۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۱۶☆ اگر n یک عدد صحیح دلخواه باشد، باقی‌مانده تقسیم n^2 بر ۵ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ۱) ۵ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۱۷☆ باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۷ برابر ۳ و بر ۱۱ برابر ۴ است. باقی‌مانده تقسیم a بر ۷۷ کدام است؟

- ۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۵۹ (۴) ۶۵

۴۱۸ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۱۱ و ۱۳ به ترتیب ۴ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم $a + 5$ بر ۱۴۳ کدام است؟

- ۱) ۶۴ (۲) ۵۴ (۳) ۸۹ (۴) ۷۹

۴۱۹☆ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۶۳ چگونه است؟ (سراسری فارغ از کشور - ۸۵)

- ۱) عدد اول (۲) مضرب ۲ (۳) مضرب ۳ (۴) مضرب ۵

۴۲۰ اگر باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۹ و ۱۳ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳۹ کدام است؟ (سراسری فارغ از کشور - ۹۴)

- ۱) ۱۲ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴

۴۲۱★ باقی مانده تقسیم عدد طبیعی A بر عدد ۲۳ برابر ۵ و باقی مانده تقسیم دو برابر عدد A بر عدد ۱۷ برابر ۹ می باشد. باقی مانده تقسیم بزرگ ترین عدد سه رقمی A بر عدد ۱۲، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۷)

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۲۲★ چند عدد سه رقمی طبیعی وجود دارد که باقی مانده تقسیم آن بر ۳ برابر ۱ و بر ۵ برابر ۳ می باشد؟

(۱) ۵۹ (۲) ۶۰ (۳) ۶۱ (۴) ۶۲

۴۲۳★ باقی مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۹ برابر ۱۲ است. اگر $a+17$ مضرب ۲۱ باشد، رقم وسط کوچک ترین عدد a کدام است؟ (سراسری)

(۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۲۴ باقی مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۲۱ برابر ۱۹ و بر ۳۵ برابر ۳۳ است. باقی مانده تقسیم a بر ۱۵ چقدر است؟

(۱) ۱۳ (۲) ۲ (۳) ۱۱ (۴) ۴

۴۲۵★ باقی مانده تقسیم عدد a بر ۱۲، ۱۵ و ۳۲ به ترتیب ۵، ۸ و ۲۵ است. مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری)

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۴۲۶★ باقی مانده تقسیم عدد طبیعی A بر اعداد ۵، ۷ و ۱۱ به ترتیب ۲، ۴ و ۸ می باشند. باقی مانده تقسیم بزرگ ترین عدد سه رقمی A بر عدد ۲۳، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۴

۴۲۷ باقی مانده تقسیم عددی بر اعداد ۱۱، ۱۴ و ۱۵ به ترتیب ۵، ۸ و ۹ می باشد. کوچک ترین مقدار ممکن برای این عدد، مضرب کدام است؟

(۱) ۳۶ (۲) ۳۸ (۳) ۴۲ (۴) ۴۵ (سراسری خارج از کشور- ۸۹)

۴۲۸★ چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی مانده تقسیم های آن بر دو عدد ۴ و ۵، برابر ۱ باشد؟ (سراسری- ۹۴)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۲۹ باقی مانده تقسیم عدد طبیعی N بر عدد ۳۱ برابر ۲۶ می باشد. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقی مانده برابر خارج قسمت می شود. رقم

یکان عدد بزرگ تر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۳۰ اگر $3n+1$ بر ۷ باشد، باقی مانده تقسیم $n^2+5n+12$ بر ۴۹ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷

۴۳۱★ اگر عدد طبیعی به صورت $2n+1$ بر ۵ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم عدد طبیعی به صورت $6+19n+n^2$ بر عدد ۲۵، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۴۳۲★ در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی مانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری- ۸۸)

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۳۳★ در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت ۲۱ و باقی مانده ۳۷ می باشد. چند عضو از مجموعه جواب های a مضرب ۵ می باشد؟ (سراسری- ۹۳)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۳۴★ باقی مانده تقسیم عدد $120!+9!+6!+3!$ بر ۱۵ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

هم نهشتی و ب.م.م

۴۳۵★ به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n، کسر $\frac{9n+4}{12n-5}$ یک کسر ساده شدنی است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۳۶ به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد به صورت های $7+11n$ و $2+9n$ نسبت به هم اول نیستند. کوچک ترین مقدار n در این حالت، مضرب کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۹)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۳۷★ به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به صورت های $2-5n$ و $3+7n$ ، نسبت به هم غیراول اند؟ (سراسری- ۹۳)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۳۸ به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به صورت های $4+5n$ و $3-13n$ ، نسبت به هم غیراول اند؟ (سراسری خارج از کشور- ۹۳)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

- ☆۴۳۹. به ازای چند عدد دو رقمی n ، دو عدد طبیعی $2n+9$ و $5n-11$ نسبت به هم غیراول اند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (سراسری فارغ از کشور- ۹۲)
- ☆۴۴۰. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n ، اعداد $4n+1$ و $3n-5$ ، نسبت به هم اول اند؟
 (۱) ۱ (۲) ۸۲ (۳) ۸۴ (۴) ۸۵ (سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۵)
- باقی مانده اعداد توان دار**
- ☆۴۴۱. باقی مانده تقسیم عدد 13^{43} بر عدد ۱۷ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (سراسری فارغ از کشور- ۸۶)
- ☆۴۴۲. باقی مانده تقسیم عدد 2^{26} بر عدد ۴۳ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۲۶ (سراسری)
- ☆۴۴۳. باقی مانده تقسیم $22 - 5^{22}$ بر عدد ۴۱ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (سراسری)
- ☆۴۴۴. باقی مانده تقسیم عدد $3^{31} - 9$ بر عدد ۴۱ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (سراسری)
- ☆۴۴۵. باقی مانده تقسیم عدد 3^{20} بر عدد ۱۷ کدام است؟
 (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۵ (۴) ۴ (سراسری)
- ☆۴۴۶. باقی مانده عدد 3^{48} بر ۱۱ کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸ (سراسری)
- ☆۴۴۷. در رابطه هم باقی مانده بر ۱۱، عدد 5^1 به کدام دسته هم ارزی تعلق دارد؟
 (۱) [۵] (۲) [۳] (۳) [۱] (۴) [۷] (سراسری- ۹۱)
- ☆۴۴۸. دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته هم ارزی به پیمانه m هم نهشت شده اند. اگر $(m, 7) = 1$ ، باقی مانده عدد m^m بر ۷ کدام است؟ (سراسری)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ☆۴۴۹. اگر a مضرب ۷ باشد، باقی مانده تقسیم $(a+1397)^3 + \dots + (a+1392)^3 + (a+1391)^3$ بر ۷ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) صفر (۳) ۴ (۴) ۱ (سراسری)
- ☆۴۵۰. باقی مانده تقسیم عدد $2^{42} - 3^{42}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۶ (سراسری)
- ☆۴۵۱. باقی مانده تقسیم $(-6)^{23}$ بر عدد ۳۳ کدام است؟
 (۱) -۱۸ (۲) -۱۵ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸ (سراسری- ۸۶)
- ☆۴۵۲. باقی مانده تقسیم عدد $2^{60} - 3^{60} + 6^{60}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر (سراسری فارغ از کشور- ۸۹)
- ☆۴۵۳. باقی مانده تقسیم عدد $7^{1398} + 13^{98}$ بر ۴۲ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۱۳ (۴) ۱ (سراسری)
- ☆۴۵۴. باقی مانده تقسیم عدد $19 + 2^{140}$ بر ۲۱ کدام است؟
 (۱) ۲۳ (۲) ۱۹ (۳) ۴ (۴) ۲ (سراسری)
- ☆۴۵۵. اگر عدد $a + 7^{200}$ مضرب ۱۹ باشد، کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸ (سراسری- ۸۵)
- ☆۴۵۶. اگر عدد $a + 7^{17}$ بر عدد ۵۷ بخش پذیر باشد، کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری)
 (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸
- ☆۴۵۷. اگر $a \equiv 17 \pmod{8} - 5 \times 7^{32}$ ، آن گاه کم ترین مقدار طبیعی a کدام است؟ (سراسری)
 (۱) ۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳
- ☆۴۵۸. عدد $a + 7^{15}$ در کلاس هم ارزی $[0]$ به پیمانه ۱۷ قرار دارد. کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

- ☆۴۵۹. اگر $a \equiv 19 \pmod{4}$ باشد، کمترین مقدار طبیعی a ، کدام است؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۵ (۱) | ۴ (۲) | ۳ (۳) | ۲ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- (سراسری خارج از کشور-۹۴)
- ☆۴۶۰. تعداد اعداد دورقمی a ، به طوری که $11^a \equiv 1 \pmod{19}$ (پیمانه ۱۹) کدام است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۲۵ (۱) | ۲۷ (۲) | ۲۸ (۳) | ۳۰ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- (سراسری-۹۲)
- ☆۴۶۱. به ازای چند عدد طبیعی n کوچکتر از ۵۰، عدد $42 + 7^n$ بر ۴۳ بخش پذیر است؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۶ (۱) | ۷ (۲) | ۸ (۳) | ۹ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- (سراسری خارج از کشور-۹۲)
- ☆۴۶۲. عدد $A + 7^{54} \times 13$ بر ۴۳ بخش پذیر است. کوچکترین عدد طبیعی A ، کدام است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۲۰ (۱) | ۲۸ (۲) | ۲۹ (۳) | ۳۰ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- (سراسری-۹۱)
- ☆۴۶۳. اگر عدد $(3^n - 6^n)$ مضرب ۲۵ باشد، کوچکترین عدد طبیعی n کدام است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۱۶ (۱) | ۱۵ (۲) | ۱۰ (۳) | ۲۰ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- ☆۴۶۴. مجموع ارقام بزرگترین عدد سه رقمی a که عدد $A = (1389)^{100} + a$ بر ۱۱ بخش پذیر است، کدام است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۲۴ (۱) | ۲۵ (۲) | ۲۶ (۳) | ۲۷ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- (سراسری ریاضی-۹۶)
- ☆۴۶۵. به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $1 + 5^{3n+2} + 5^{6n+4}$ ، بر عدد ۳۱ بخش پذیر است؟
- | | | | |
|-------------------|-------------------|----------------------|----------------|
| (۱) فقط اعداد فرد | (۲) فقط اعداد زوج | (۳) فقط اعداد مضرب ۵ | (۴) تمام اعداد |
|-------------------|-------------------|----------------------|----------------|
- (سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۶)
- ☆۴۶۶. به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $2^{n+1} + 3^{n+4} + 5^{2n+1}$ ، بر عدد ۲۳ بخش پذیر است؟
- | | | | |
|----------------|-------------------|-------------------|----------------------|
| (۱) تمام اعداد | (۲) فقط اعداد فرد | (۳) فقط اعداد زوج | (۴) فقط اعداد مضرب ۷ |
|----------------|-------------------|-------------------|----------------------|

روزهای هفته و بسط دوجمله‌ای

- ☆۴۶۷. هرگاه سال نو با روز چهارشنبه آغاز شود، در این سال ۱۵ آبان چه روزی است؟
- | | | | |
|------------|-------------|--------------|--------------|
| (۱) دوشنبه | (۲) سه‌شنبه | (۳) چهارشنبه | (۴) پنج‌شنبه |
|------------|-------------|--------------|--------------|
- ☆۴۶۸. اگر ۲۵ اسفند سالی دوشنبه باشد، ۱۹ اردیبهشت همان سال چه روزی بوده است؟
- | | | | |
|----------|------------|-------------|--------------|
| (۱) جمعه | (۲) دوشنبه | (۳) سه‌شنبه | (۴) چهارشنبه |
|----------|------------|-------------|--------------|
- ☆۴۶۹. عدد 47^3 با کدام پیمانه با عدد $7^3 + 40^3$ هم‌نهشت است؟
- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| ۲۸۰ (۱) | ۳۲۰ (۲) | ۳۴۰ (۳) | ۳۶۰ (۴) |
|---------|---------|---------|---------|
- ☆۴۷۰. باقی‌مانده تقسیم $3^4 - 7^4 + 23^4$ بر ۱۶۱ کدام است؟
- | | | | |
|---------|-------|--------|--------|
| (۱) صفر | (۲) ۷ | (۳) ۱۱ | (۴) ۲۳ |
|---------|-------|--------|--------|

قسمت ششم: بخش‌پذیری بر اعداد خاص

- ☆۴۷۱. به ازای کدام مقدار n ، مجموع ارقام عدد $10^{3n} - 10^n$ برابر ۲۱۶ می‌شود؟
- | | | | |
|-------|--------|--------|--------|
| ۹ (۱) | ۱۰ (۲) | ۱۲ (۳) | ۱۵ (۴) |
|-------|--------|--------|--------|
- (سراسری-۸۵)
- ☆۴۷۲. عدد چهار رقمی \overline{aabb} مربع کامل است. باقی‌مانده تقسیم عدد دو رقمی \overline{ab} بر ۱۳، کدام است؟
- | | | | |
|-------|--------|--------|--------|
| ۹ (۱) | ۱۰ (۲) | ۱۱ (۳) | ۱۲ (۴) |
|-------|--------|--------|--------|
- (سراسری-۹۲)
- ☆۴۷۳. به ازای کدام مقدار b ، عدد پنج رقمی $\overline{a1aba}$ بر عدد ۷ بخش پذیر است؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۲ (۱) | ۵ (۲) | ۶ (۳) | ۸ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- (سراسری)
- ☆۴۷۴. عدد ۷۵! مختوم به چند صفر است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۱۸ (۱) | ۱۶ (۲) | ۱۷ (۳) | ۱۵ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- (سراسری-۹۰)
- ☆۴۷۵. در سمت راست عدد $5^3 \times 3!$ ، چند رقم صفر وجود دارد؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۳۰ (۱) | ۲۶ (۲) | ۳۶ (۳) | ۳۷ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|
- ☆۴۷۶. کوچکترین عدد به صورت $k!$ که بر 5^{22} بخش پذیر است، کدام است؟
- | | | | |
|---------|---------|----------|----------|
| ۳۵! (۱) | ۹۵! (۲) | ۱۲۰! (۳) | ۱۱۰! (۴) |
|---------|---------|----------|----------|

تست‌های V.I.P

۵۳۰. کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت.» را نقض می‌کند؟

- ۱۴ (۱) ۳۷ (۲) ۶۱ (۳) ۲۴ (۴)

۵۳۱. اگر a, b, c سه عدد حقیقی مثبت باشند به طوری که $a + b + c = 1$ ، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $(1-a)(1-b)(1-c)$ کدام است؟

- abc (۱) $a + b + c$ (۲) $8abc$ (۳) $8(a + b + c)$ (۴)

۵۳۲. چند نقطه با مختصات صحیح روی نمودار $3y = 7x^3 - 7x$ وجود دارد به طوری که طول نقاط مضرب ۲ و عرض نقاط مضرب ۱۴ باشد؟

- صفر (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۴ بی‌شمار (۴)

۵۳۳. اگر $9^n - 11^n | 202$ باشد، مقدار مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی n کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۵۳۴. اگر $11 | 3a - b + 1$ و $11 | 5a + 2b + x$ ، مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی x کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴)

۵۳۵. اگر a و b دو عدد صحیح، $(a \cdot b) = d$ و $\frac{ab}{d} = 1800$ و $(d \cdot 6) = 1$ ، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱۰۸۵ (۱) ۱۸۲۵ (۲) ۳۶۵ (۳) ۱۸۰۱ (۴)

۵۳۶. اگر $11, 13, 17, \dots, p$ ، ۴۵ عدد اول متوالی باشند، باقی‌مانده تقسیم عدد $p^2 + 13^2 + 11^2$ بر ۸ کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) صفر (۴)

۵۳۷. باقی‌مانده تقسیم $(a + 1386)^3 + (a + 1382)^3 + \dots + (a + 1381)^3$ بر ۶ کدام است؟

- (۱) به a بستگی دارد. (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۳

(سراسری - ۸۹)

۵۳۸. عدد شش‌رقمی \overline{ababab} ممکن است مضرب کدام عدد نباشد؟

- ۷ (۱) ۱۳ (۲) ۳۱ (۳) ۳۷ (۴)

(سراسری خارج از کشور - ۹۳)

۵۳۹. عدد شش‌رقمی \overline{ababab} برابر حاصل ضرب ۱۱۱ در مربع کامل یک عدد است. مجموع دو رقم a و b کدام است؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

(سراسری - ۹۳)

۵۴۰. هفت برابر عدد شش‌رقمی \overline{abcabc} ، مربع کامل است. بیش‌ترین مقدار مجموع ارقام عدد \overline{abc} ، کدام است؟

- ۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

۵۴۱. به ازای مقادیر n های طبیعی، $100 \leq n \leq 1000$ ، باقی‌مانده تقسیم $n^{100} + 1$ بر ۷ چند عدد متفاوت می‌تواند باشد؟

- ۵ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴)

(سراسری)

۵۴۲. اگر $a^p = 10k + 7$ ، آن‌گاه رقم یکان عدد a^{p+4} کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۵۴۳. اگر $A = 2! + 3! + \dots + 1381!$ و $B = 3! + 4! + \dots + 1382!$ باشد، رقم یکان عدد $(B - A)^{A+B}$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴)

(سراسری)

۵۴۴. اگر دو عدد a و 90 نسبت به هم اول باشند، بزرگ‌ترین عددی که همواره $a^F - 1$ را می‌شمارد، کدام است؟

- ۲۴۰ (۱) ۲۸۸ (۲) ۳۲۴ (۳) ۴۸۰ (۴)

۳۷۹ (۴) (۳) (۲) (۱)

بنابر قضیه تقسیم، داریم: $a = 13b + 41$, $b > 41$
 باقی مانده
 کوچکترین مقدار a به ازای کمترین مقدار b ، یعنی $b = 42$ به دست می آید. داریم:
 $b = 42 \Rightarrow a = 13 \times 42 + 41 = 587 \Rightarrow$ مجموع ارقام $= 5 + 8 + 7 = 20$

۳۸۰ (۴) (۳) (۲) (۱)

$a = bq + r$
 $r = 14, b = q^2 - 3 \Rightarrow a = (q^2 - 3)q + 14$
 $b > r \Rightarrow q^2 - 3 > 14 \Rightarrow q^2 > 17 \Rightarrow q \geq 5$
 با توجه به این که a باید مضرب ۳ باشد، پس عبارت
 $q^2 - 3q + 14 = (q^2 - 3)q + 14$ مضرب ۳ است. $3 - 3q$ که مضرب ۳
 است و با توجه به این که باقی مانده ۱۴ بر ۳ برابر ۲ است، پس باید
 باقی مانده q^2 بر ۳ برابر ۱ باشد و یعنی عدد q به صورت $3k + 1$ است و با
 توجه به شرط $q \geq 5$ حداقل مقدار q برابر ۷ است.

$\min(a) = 7^2 - 3 \times 7 + 14 = 336$
 \Rightarrow حاصل ضرب ارقام $= 3 \times 3 \times 6 = 54$

۳۸۱ (۴) (۳) (۲) (۱)

فرض کنیم a ، مقسوم و b مقسوم علیه تقسیم باشد. ماکزیم باقی مانده
 برابر $b - 1$ است. داریم:
 طبق فرض، $a = 20(b - 1)$ است. داریم:

$20(b - 1) = bq + (b - 1) \Rightarrow 20b - 20 = bq + b - 1$
 $\Rightarrow 29b - bq = 19 \Rightarrow b(29 - q) = 19 = 1 \times 19$
 $\Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 29 - q = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ q = 0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} b = 19 \\ 29 - q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 19 \\ q = 28 \end{cases}$

۳۸۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

$650 = b \times 12 + r \Rightarrow r = 650 - 12b \Rightarrow 0 \leq r = 650 - 12b < b$
 $650 - 12b \geq 0 \Rightarrow 12b \leq 650 \Rightarrow b \leq \frac{650}{12} = 54.16$ (۱)
 $650 - 12b < b \Rightarrow 13b > 650 \Rightarrow 50 = \frac{650}{13} < b$ (۲)
 با توجه به نتایج (۱) و (۲) مجموعه جواب های قابل قبول b برابر است با:
 $51, 52, 53, 54$
 برای آن که باقی مانده حداکثر شود، باید b حداقل مقدار خود را دارا باشد
 (با توجه به $r = 650 - 12b$)
 $\max(r) = 650 - 12 \times 51 = 650 - 612 = 38$ بنابراین:
 $\Rightarrow r$ مجموع ارقام $= 3 + 8 = 11$

۳۸۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

$500 = b \times 9 + r \Rightarrow 0 \leq r = 500 - 9b < b$
 $\begin{cases} 0 \leq 500 - 9b \Rightarrow 9b \leq 500 \Rightarrow b \leq \frac{500}{9} = 55.5 \\ 500 - 9b < b \Rightarrow 500 < 10b \Rightarrow 50 = \frac{500}{10} < b \end{cases}$ (۲)
 با توجه به نتایج (۱) و (۲) برای b جواب های ۵۵، ۵۴، ۵۳، ۵۲ و ۵۱
 قابل قبول هستند.

۳۸۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

طبق قضیه تقسیم داریم:
 $a = 17q + 5$, $b = 17q' + 2$
 $\Rightarrow 2a - b = 2(17q + 5) - (17q' + 2) = 34q - 17q' + 8$
 $= 17(2q - q') + 8 \Rightarrow 2a - b = 17q'' + 8 \Rightarrow r = 8$

به دو طرف تساوی ۶۰ واحد اضافه می کنیم. داریم:

$a + 60 = 63q + 107 \xrightarrow{107=63 \times 1 + 44} a + 60 = 63(q+1) + 44$
 باقی مانده خارج قسمت

پس یک واحد به خارج قسمت اضافه شده است و $47 - 44 = 3$ واحد از
 باقی مانده کم شده است.

۳۷۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

$a = bq + q$
 $a = (b - 3)(q + 5) \Rightarrow bq + q = bq - 3q + 5b - 15$
 $\Rightarrow q + 3q = 5b - 15 \Rightarrow 4q = 5(b - 3)$
 $5(b - 3)$ مضرب ۵ است، پس $4q$ مضرب ۵ است و در نتیجه q مضرب
 ۵ است. در گزینه ها فقط گزینه (۳) شامل اعداد مضرب ۵ است.

۳۷۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

طبق فرض، اگر q خارج قسمت تقسیم باشد، آن گاه باقی مانده
 تقسیم $r = q^2$ است. فرض کنیم a بر ۴۷ تقسیم شده باشد، بنابر قضیه
 تقسیم، داریم:
 $a = 47q + r$, $0 \leq r = q^2 < 47$
 بیشترین مقدار q که در نامساوی $0 \leq q^2 < 47$ صدق می کند، برابر ۶
 است. به ازای $q = 6$ ، بزرگترین عدد a به دست می آید. داریم:

$q = 6 \Rightarrow a = 47 \times 6 + 6^2 = 6(47 + 6) = 6 \times 53 = 318$
 \Rightarrow مجموع ارقام $= 3 + 1 + 8 = 12$

۳۷۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

اگر q خارج قسمت تقسیم باشد، آن گاه طبق فرض، $q^2 - 2$ باقی مانده
 تقسیم است. بنابراین:

$a = 37q + q^2 - 2, r = q^2 - 2 < 37 \Rightarrow q^2 < 39 \Rightarrow \max(q) = 6$
 $\max(a) = 37 \times 6 + 6^2 - 2 = 256 = 16^2$

۳۷۷ (۴) (۳) (۲) (۱)

طبق فرض، اگر r باقی مانده تقسیم باشد، آن گاه r^2 خارج قسمت تقسیم
 است. داریم:

$165 = br^2 + r = r(br + 1), r < b$
 $\Rightarrow \begin{cases} r = 1, br + 1 = 165 \Rightarrow b = 164 > r \\ r = 3, br + 1 = 55 \Rightarrow b = \frac{54}{3} = 18 > r \\ r = 5, br + 1 = 33 \Rightarrow b = \frac{32}{5} \notin \mathbb{N} \text{ غرق} \\ r = 11, br + 1 = 15 \Rightarrow b = \frac{14}{11} \notin \mathbb{N} \text{ غرق} \end{cases}$

۳۷۸ (۴) (۳) (۲) (۱)

در تقسیم، اگر q خارج قسمت تقسیم باشد، آن گاه باقی مانده q^2 است.
 طبق قضیه تقسیم، داریم:

$75 = bq + q^2$, $0 \leq q^2 < b$
 باقی مانده
 $\Rightarrow q(b + q) = 75 = 1 \times 75 = 3 \times 25 = 5 \times 15$
 واضح است که $b + q > q$ ، پس:

$\begin{cases} q = 1 \\ b + q = 75 \Rightarrow b = 74 > q^2 = 1 \checkmark \\ q = 3 \\ b + q = 25 \Rightarrow b = 22 > q^2 = 9 \checkmark \\ q = 5 \\ b + q = 15 \Rightarrow b = 10 < q^2 = 25 \times \end{cases}$

بنابراین فقط دو مقدار برای b وجود دارد.

با قرار دادن $2k+1$ در رابطه $2a = 35q'' + 1$ داریم:

$$2a = 35(2k+1) + 1 \Rightarrow 2a = 70k + 36 \Rightarrow a = 35k + 18$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم a بر 35 برابر 18 است.

روش دوم: به جای q'' عددی دلخواه قرار می‌دهیم به طوری که حاصل $35q'' + 1$ عددی زوج شود:

$$q'' = 1 \Rightarrow 2a = 35(1) + 1 = 36 \Rightarrow a = 18$$

باقی‌مانده تقسیم 18 بر 35 برابر 18 است:

$$a = 37q + 11 \quad (*)$$

بنابر قضیه تقسیم، داریم:

روش اول: دو طرف رابطه را نمی‌توان بر 2 تقسیم کرد، زیرا $\frac{11}{2}$ و $\frac{q}{2}$ اعداد صحیح نمی‌باشند. ابتدا وضعیت q را از نظر زوج یا فرد بودن مشخص می‌کنیم. a یک عدد زوج است، پس $37q + 11$ باید یک عدد زوج باشد.

q عدد فرد است. $\Rightarrow 37q$ عدد فرد است. \Rightarrow زوج $11 + 37q =$

فرد \downarrow

$$\Rightarrow q = 2k + 1 \xrightarrow{(*)} a = 37(2k+1) + 11 = 74k + 48$$

$$\xrightarrow{\div 2} \frac{a}{2} = 37k + 24 \Rightarrow r = 24$$

روش دوم: به جای q عددی قرار می‌دهیم که a عدد زوج به دست آید.

$$q = 1 \Rightarrow a = 37 + 11 = 48 \Rightarrow \frac{a}{2} = 24, 24 = 37 \times 0 + 24 \Rightarrow r = 24$$

$$\exists q \in \mathbb{Z}, a = 99q + 25 = 9(11q) + 18 + 7$$

$$= 9(\underbrace{11q + 2}_{q'}) + 7 = 9q' + 7$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم a بر 9 برابر 7 است.

$$a = 15q + 4, \quad a = 11q' + 6$$

بنابر قضیه تقسیم داریم:

ابتدا تقسیم a را بر 11×15 به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a = 15q + 4 \\ a = 11q' + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11a = 11 \times 15q + 44 \\ 15a = 15 \times 11q' + 90 \end{cases}$$

تفاضل $\rightarrow 4a = 11 \times 15(q' - q) + \frac{90 - 44}{46}$

$$\Rightarrow 4a = 11 \times 15 \times \frac{3(q' - q)}{q''} + 46 \Rightarrow 4a = 55q'' + 46$$

می‌خواهیم دو طرف رابطه را بر 4 تقسیم کنیم. باید $55q'' + 46$ مضرب 4 باشد، بر این اساس، q'' باید فقط به یکی از صورت‌های $4k$ یا $4k + 1$ یا $4k + 2$ یا $4k + 3$ باشد.

$$q'' = 4k \Rightarrow 55q'' + 46 = \frac{55 \times 4k + 46}{4}$$

مضرب 4 نمی‌باشد.

$$q'' = 4k + 1 \Rightarrow 55q'' + 46 = \frac{55 \times (4k + 1) + 46}{4} = \frac{55 \times 4k + 101}{4}$$

مضرب 4 نمی‌باشد.

$$q'' = 4k + 2 \Rightarrow 55q'' + 46 = 55(4k + 2) + 46 = 55 \times 4k + 156 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow 4a = 55q'' + 46 = 55 \times 4k + 156$$

$$\xrightarrow{\div 4} a = 55k + 39 \Rightarrow r = 39$$

۳۸۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

باقی‌مانده تقسیم a بر 8 برابر 7 است، پس عدد صحیح مانند q وجود دارد به طوری که:

$$a = 8q + 7$$

دو طرف رابطه اخیر را در 2 ضرب می‌کنیم و با عدد 1 جمع می‌کنیم:

$$a = 8q + 7 \xrightarrow{\times 2} 2a = 16q + 14 \xrightarrow{+1} 2a + 1 = 16q + 15$$

باقی‌مانده تقسیم 15 بر 16 برابر 15 است:

$$\Rightarrow 2a + 1 = 4(4q + 3) + 3 \Rightarrow r = 3$$

۳۸۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

باقی‌مانده تقسیم a بر اعداد 6 و 7 به ترتیب 3 و 1 می‌باشد، بنابر قضیه تقسیم، داریم:

$$\exists q \in \mathbb{Z}, a = 6q + 3 \quad (1)$$

$$\exists q' \in \mathbb{Z}, a = 7q' + 1 \quad (2)$$

برای آن‌که مقسوم‌علیه 42 داشته باشیم، رابطه (1) را در 7 و رابطه (2) را در 6 ضرب می‌کنیم:

$$(1) \xrightarrow{\times 7} 7a = 42q + 21$$

$$(2) \xrightarrow{\times 6} 6a = 42q' + 6$$

دو رابطه اخیر را از هم کم می‌کنیم:

$$7a - 6a = 42q - 42q' + 15 \Rightarrow a = 42(q - q') + 15$$

$$\Rightarrow a = 42q'' + 15 \Rightarrow r = 15$$

۳۸۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

باقی‌مانده تقسیم a بر 5 و 6 به ترتیب برابر 1 و 4 می‌باشد، پس بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$\exists q \in \mathbb{Z}, a = 5q + 1 \quad (1)$$

$$\exists q' \in \mathbb{Z}, a = 6q' + 4 \quad (2)$$

چون می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم a را بر 30 به دست آوریم، دو طرف رابطه (1) را در عدد 6 و دو طرف رابطه (2) را در عدد 5 ضرب می‌کنیم، داریم:

$$(1) \xrightarrow{\times 6} 6a = 30q + 6$$

تفاضل $\rightarrow 6a - 5a = 30q - 30q' - 14$

$$(2) \xrightarrow{\times 5} 5a = 30q' + 20$$

$$\Rightarrow a = 30 \frac{(q - q') - 14}{q''} - 14$$

14 باقی‌مانده تقسیم نمی‌باشد، بنابراین:

$$a = 30q'' - 30 + 16 = 30 \frac{(q'' - 1)}{k} + 16 \Rightarrow a = 30k + 16 \Rightarrow r = 16$$

۳۸۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

طبق فرض، داریم:

$$a = 5q + 3, \quad a = 7q' + 4$$

$$\begin{cases} a = 5q + 3 \xrightarrow{\times 7} 7a = 35q + 21 \\ a = 7q' + 4 \xrightarrow{\times 5} 5a = 35q' + 20 \end{cases}$$

تفاضل $\rightarrow 2a = 35(q - q') + 1$

روش اول: می‌خواهیم دو طرف رابطه را بر 2 تقسیم کنیم اما طرف دوم، کسری درمی‌آید $(a = 35 \frac{q}{2} + \frac{1}{2})$ که در قضیه تقسیم با اعداد کسری سروکار نداریم.

ابتدا وضعیت q'' را از نظر زوج یا فرد بودن مشخص می‌کنیم ($2a$ زوج است) داریم:

q'' فرد است. $\Rightarrow 35q'' + 1$ فرد \downarrow فرد $\Rightarrow 2a = 35q'' + 1$

$$\Rightarrow q'' = 2k + 1$$

فصل ۴ آشنایی با نظریه اعداد

قسمت چهارم: قضیه تقسیم و کاربردها

قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت (با تقسیم a بر b) اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند، به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$

(در یک تقسیم وقتی a را بر b تقسیم می‌کنیم، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.)
به عنوان مثال، اگر $a = -47$ و $b = 13$ باشد، آن‌گاه:

$$-47 = 13(-4) + 5$$

$q \in \mathbb{Z}$ $0 \leq r < 13$

مقدار q در قضیه تقسیم از نکته بعدی به دست می‌آید:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

نکته: در قضیه تقسیم، مقدار q برابر $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ است، زیرا:

$$a = bq + r \xrightarrow{\div b} \frac{a}{b} = \frac{bq}{b} + \frac{r}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \Rightarrow \lfloor \frac{a}{b} \rfloor = \lfloor q + \frac{r}{b} \rfloor = q + \lfloor \frac{r}{b} \rfloor \quad (*)$$

$q \in \mathbb{Z}$

چون $0 \leq r < b$ ، پس داریم $0 \leq \frac{r}{b} < 1$ و در نتیجه $\lfloor \frac{r}{b} \rfloor = 0$

$$\xrightarrow{(*)} \lfloor \frac{a}{b} \rfloor = q$$

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر 14 به ترتیب 6 و 4 باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $3m - 5n$ را بر 14 به دست آورید.

پاسخ: طبق قضیه تقسیم و فرض‌های مسئله داریم:

$$\begin{cases} m = 14q_1 + 6 \\ n = 14q_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 3 \times 14q_1 + 18 \\ 5n = 5 \times 14q_2 + 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m - 5n = 14(3q_1 - 5q_2) + 18 - 20 = 14q_3 - 2 = 14(q_3 - 1) + 12 = 14q + 12 \Rightarrow r = 12$$

باقی‌مانده $r = 12$

تست: در تقسیم عدد صحیح a بر 35 ، باقی‌مانده برابر 11 است. اگر 80 واحد به مقسوم اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت چه تغییری می‌کند؟

- (۱) 2 واحد به خارج‌قسمت و 10 واحد به باقی‌مانده اضافه می‌شود.
(۲) 2 واحد به خارج‌قسمت اضافه و 8 واحد به باقی‌مانده اضافه می‌شود.
(۳) 1 واحد به خارج‌قسمت اضافه و 8 واحد به باقی‌مانده اضافه می‌شود.
(۴) 1 واحد به خارج‌قسمت اضافه و 10 واحد از باقی‌مانده کم می‌شود.

پاسخ: بنابر قضیه تقسیم، خارج‌قسمتی مانند q وجود دارد به طوری که $a = 35q + 11$. می‌خواهیم 80 واحد به مقسوم (a) اضافه کنیم. پس به

دو طرف تساوی $a = 35q + 11$ ، 80 واحد اضافه می‌کنیم. داریم:

عدد 91 باقی‌مانده تقسیم $a + 80$ بر 35 نیست ($0 \leq r < 35$)، بنابراین 91 را بر 35 تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$(1) \cdot (2) \Rightarrow a + 80 = 35q + 2 \times 35 + 21 = 35(q + 2) + 21$$

فاکتورگیری از 35

پس 2 واحد به خارج‌قسمت و هم‌چنین 10 واحد به باقی‌مانده اولیه ($21 = 11 + 10$) اضافه شده است. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست: در تقسیم عدد طبیعی a بر ۷۵ ، باقی‌مانده تقسیم ۲ واحد از مکعب خارج قسمت بیش تر است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

پاسخ: اگر q خارج قسمت تقسیم a بر ۷۵ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم (r) برابر $۲ + q^۳$ (مکعب خارج قسمت $+ ۲$) است. بنابراین:

$$a = 75q + \underbrace{(q^3 + 2)}_r, \quad 0 \leq r < 75 \Rightarrow 0 \leq q^3 + 2 < 75$$

بزرگ‌ترین مقدار طبیعی a به ازای بزرگ‌ترین مقدار q به دست می‌آید. بزرگ‌ترین مقدار طبیعی q که در نامعادله $0 \leq q^3 + 2 < 75$ صدق می‌کند، برابر $q = 4$ است.

$$q_{\max} = 4 \Rightarrow a_{\max} = 75(4) + (4^3 + 2) = 300 + 66 = 366$$

پس مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی a برابر $۳ + ۶ + ۶ = ۱۵$ است و در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

افراز مجموعه \mathbb{Z} به کمک قضیه تقسیم

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b و با توجه به این‌که باقی‌مانده تقسیم یعنی r در رابطه $0 \leq r < b$ صدق می‌کند، برای a بر حسب r ، دقیقاً b حالت وجود دارد. به عنوان مثال اگر عدد صحیح a را به ۴ تقسیم کنیم، در این صورت یا a بر ۴ بخش‌پذیر است، یعنی $r = 0$ یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۴ عدد ۱ ، عدد ۲ یا عدد ۳ است، به عبارت دیگر: $a = 4k + 1$ ، $a = 4k + 2$ ، $a = 4k + 3$ یا $a = 4k$. پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از چهار صورت فوق نوشت.

چهار مجموعه $A_0 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k\}$ ، $A_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k + 1\}$ ، $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k + 2\}$ و $A_3 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k + 3\}$ مجموعه‌های \mathbb{Z} را افراز می‌کنند. پس هر عدد صحیح دلخواه، فقط و فقط در یکی از مجموعه‌های A_0 تا A_3 قرار می‌گیرد. می‌توان نکته کلی زیر را در نظر گرفت:

نکته اگر اعداد صحیح را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، آن‌گاه اعداد صحیح به صورت $bk + 1$ ، $bk + 2$ ، ... و $bk + (b - 1)$ افراز می‌شوند. ($k \in \mathbb{Z}$)

توجه مشخص کردن b مناسب و استفاده از قضیه تقسیم به مسئله بستگی دارد.

مثال: ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ نوشته می‌شود و سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به صورت $۸t + ۱$ نوشته می‌شود.

پاسخ: طبق قضیه تقسیم، در تقسیم عدد صحیح a بر عدد ۴ ، داریم:

$$a = 4k \quad \text{یا} \quad a = 4k + 1 \quad \text{یا} \quad a = 4k + 2 \quad \text{یا} \quad a = 4k + 3$$

در حالت‌های $a = 4k$ و $a = 4k + 2$ ، عددی زوج می‌باشد، پس عدد فرد a باید به یکی از دو صورت $a = 4k + 1$ یا $a = 4k + 3$ باشد. در هر دو حالت ثابت می‌کنیم، a^2 به صورت $۸t + ۱$ است:

$$a = 4k + 1 \Rightarrow a^2 = (4k + 1)^2 = \underbrace{۱۶k^2 + ۸k + ۱}_{۸(۲k^2 + k) + ۱} = 8t + 1$$

$$a = 4k + 3 \Rightarrow a^2 = (4k + 3)^2 = ۱۶k^2 + ۲۴k + ۹ = \underbrace{۱۶k^2 + ۲۴k + ۸ + ۱}_{۸(۲k^2 + ۳k + ۱) + ۱} = 8t + 1$$

نکات زیر را به صورت یادآوری بیان می‌کنیم و در حل تست‌ها از آن‌ها استفاده می‌کنیم:

(۱) مربع هر عدد فرد به صورت $۸k + ۱$ است ($k \in \mathbb{Z}$) و مربع هر عدد زوج به صورت $۴k$ است.

(۲) از هر n عدد متوالی، دقیقاً یکی بر n بخش‌پذیر است.

(۳) حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

تست: باقی مانده تقسیم عدد $119^2 + 10^2 + 10^3 + 10^5 + \dots + 10^{119}$ بر عدد ۸ کدام است؟

$$4 \quad (1) \qquad 5 \quad (2) \qquad 2 \quad (3) \qquad 3 \quad (4)$$

پاسخ: ۱، ۱۰۳، ۱۱۹ و همگی اعداد فرد هستند، بنابراین مربع آن‌ها به صورت $8k+1$ است. تعداد این اعداد برابر است با:

$$n = \frac{119-10^1}{2} + 1 = 10$$

(تعداد جملات در دنباله حسابی برابر $n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1$ است.)

$$101^2 = 8k_1 + 1, 103^2 = 8k_2 + 1, \dots, 119^2 = 8k_{10} + 1 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\Rightarrow 101^2 + 103^2 + \dots + 119^2 = (8k_1 + 1) + (8k_2 + 1) + \dots + (8k_{10} + 1)$$

$$= (8k_1 + 8k_2 + \dots + 8k_{10}) + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{10 \text{ تا}} = 8(k_1 + \dots + k_{10}) + 10 = 8k' + 2 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

مثال: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $6q+5$ ، عددی به صورت $6q+1$ است.

پاسخ: فرض کنیم $6q+5$ و $6q'+5$ دو عدد دلخواه باشند، (دو عددی که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر ۶ برابر ۵ است) در این صورت:

$$(6q+5)(6q'+5) = 36qq' + 30q + 30q' + 25 = (36qq' + 30q + 30q' + 24) + 1 = 6(6qq' + 5q + 5q' + 4) + 1 = 6k + 1$$

در واقع ثابت کرده‌ایم که اگر حاصل ضرب دو عددی که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر ۶ برابر ۵ است را بر ۶ تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی مانده تقسیم برابر ۱ می‌شود.

تست: کدام گزینه زیر نادرست است؟

(۱) حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $4q+3$ ، عددی به صورت $4q+1$ است.

(۲) اگر a مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه a^2 به صورت $3k+1$ است.

(۳) اگر a یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه $a^2 = 4k$ یا $a^2 = 4k+3$

(۴) اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، آن‌گاه $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$

پاسخ: گزینه (۱): باید دو عدد دلخواه $4q+3$ و $4q'+3$ را در هم ضرب کنیم، سپس باقی مانده آن را بر ۴ به دست بیاوریم:

$$(4q+3)(4q'+3) = 16qq' + 12q + 12q' + 9 = 4(4qq' + 3q + 3q' + 2) + 1 = 4q'' + 1$$

بنابراین باقی مانده تقسیم بر ۴ برابر ۱ است و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

گزینه (۲): a مضرب ۳ نمی‌باشد، بنابر قضیه تقسیم، a به یکی از دو صورت $a = 3q+1$ یا $a = 3q+2$ است. داریم:

$$a = 3q+1 \Rightarrow a^2 = (3q+1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3k + 1$$

$$a = 3q+2 \Rightarrow a^2 = (3q+2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$$

در هر دو حالت a^2 به صورت $3k+1$ است و در نتیجه گزینه (۲) نیز صحیح است.

گزینه (۳): اگر a زوج باشد، آن‌گاه a^2 به صورت $4k$ است و چنانچه a فرد باشد، آن‌گاه a^2 به صورت $4k+1$ است که در این صورت داریم:

$$a^2 = 4k+1 = 4(2k) + 1 = 4q + 1$$

پس a^2 نمی‌تواند به صورت $4k+3$ باشد و در نتیجه گزینه (۳) نادرست است.

گزینه (۴): اگر p عدد اول و بزرگ‌تر از ۳ را بر ۶ تقسیم کنیم، بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$p = 6k + 5 \quad \text{یا} \quad p = 6k + 4 \quad \text{یا} \quad p = 6k + 3 \quad \text{یا} \quad p = 6k + 2 \quad \text{یا} \quad p = 6k + 1 \quad \text{یا} \quad p = 6k$$

اگر $p = 6k$ یا $p = 6k+2$ یا $p = 6k+4$ باشد، در این صورت p عددی زوج است و عدد اول زوج بزرگ‌تر از ۳ وجود ندارد. پس هیچ‌یک از این ۳ حالت اتفاق نمی‌افتد. اگر $p = 6k+3$ باشد، آن‌گاه p مضرب ۳ است و می‌دانیم هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۳ و مضرب ۳ نداریم. پس این حالت نیز غیرقابل قبول است و در نتیجه p به یکی از دو صورت $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$ می‌باشد و در نتیجه گزینه (۴) نیز درست است.

بنابراین گزینه (۳) جواب تست است.

نکته اگر a مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه a^2 به صورت $3k+1$ است.

نکته هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو صورت $6k+1$ یا $6k+5$ است.

فصل ۴ آشنایی با نظریه اعداد

قسمت پنجم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح

رابطه هم‌نهشتی

تعریف برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b ، اگر $m \mid a - b$ (اگر $a - b$ مضرب m است)، می‌گوییم

$$a \equiv b \pmod{m}$$

« a هم‌نهشت با b است به سنج یا پیمانه m » و می‌نویسیم:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b$$

تعریف رابطه هم‌نهشتی به پیمانه m ($m \in \mathbb{N}$)، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$-21 \equiv 13 \pmod{17}$$

به عنوان مثال، اگر $a = -21$ و $b = 13$ باشند، آنگاه $a - b = -34$ و -34 مضرب عدد طبیعی 17 (هم‌چنین 2 و 34) است. پس:

$$43 \not\equiv 15 \pmod{13}$$

اما تفاضل دو عدد 43 و 15 ، یعنی 28 مضرب 13 نمی‌باشد، پس 43 و 15 به پیمانه 13 هم‌نهشت نمی‌باشند. در واقع:

تست: اگر m یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از 1 باشد، به ازای چند مقدار m ، رابطه $15 \equiv 33 \pmod{m}$ برقرار است؟

$$10 \quad (1) \qquad 9 \quad (2) \qquad 8 \quad (3) \qquad 7 \quad (4)$$

پاسخ: طبق تعریف، تفاضل دو عدد باید مضرب m باشد، پس $-33 - 15 = -48$ مضرب m است و به عبارت دیگر m یک مقسوم‌علیه طبیعی (به غیر از 1) عدد -48 است. بنابراین تعداد m با تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی 48 (به غیر از 1) برابر است:

$$48 = 2^4 \times 3^1 \Rightarrow 48 = (4+1)(1+1) = 10 = \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی}$$

پس m می‌تواند $9 = 1 - 1 = 10 - 1$ عدد طبیعی غیر از 1 باشد و در نتیجه گزینه (2) صحیح است.

اگر a یک عدد صحیح باشد، می‌خواهیم مشخص کنیم چه اعدادی با a به پیمانه m هم‌نهشت هستند. فرض کنیم b عدد دلخواهی باشد که با a به پیمانه m هم‌نهشت است، در واقع:

$$b \equiv a \pmod{m}$$

$$b - a = mk, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = a + mk, k \in \mathbb{Z}$$

طبق تعریف $b - a$ مضرب m است، پس داریم:

بنابراین اگر مضرب‌های صحیح m را به a اضافه کنیم، اعداد هم‌نهشت با a مشخص می‌شود. پس نکته مهم زیر را می‌توان نوشت:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b = a + mk \text{ یا } a \equiv b + mk \pmod{m} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نکته اگر a و b دو عدد صحیح و m یک عدد طبیعی باشند، آنگاه $(k \in \mathbb{Z})$:

$$-18 \equiv 6 \pmod{12} \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ k & m \\ -18 & 12 \end{matrix} \quad \text{یا} \quad -18 \equiv 102 \pmod{12} \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ k & m \\ -18 & 12 \end{matrix}$$

به عنوان مثال، داریم:

کلاس یا دسته هم‌نهشتی

مجموعه همه اعداد صحیح که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر r می‌باشد، را با $[r]_m$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < m\}$$

$[r]_m$ را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌نامیم.

به عنوان مثال، هرگاه عدد صحیح a را بر 3 تقسیم کنیم، باقی‌مانده یکی از اعداد $0, 1, 2$ می‌باشد. اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نماینده مجموعه‌ای در نظر

$$A_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} = [0]_3$$

بگیریم، آنگاه این کلاس‌های هم‌ارزی را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\} = [1]_3$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} = [2]_3$$

توجه توجه کنید که مثلاً مجموعه A_0 را می‌توانیم به صورت‌های $[5]_3$ یا $[8]_3$ یا ... نمایش دهیم. اما اغلب سعی می‌شود باقی‌مانده واقعی را داخل براکت قرار دهند و آن را نمایش دهند. ($[2]_3$)

اگر هر دو عضو دلخواه از مجموعه A_0 را در نظر بگیریم، آنگاه تفاضل آن‌ها مضرب 3 می‌باشد. به عنوان مثال، برای هر دو عضو دلخواه در A_0 ، داریم:

$$\forall a, b \in A_0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3k_1 + 1 \\ b = 3k_2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow a - b = (3k_1 + 1) - (3k_2 + 1) \Leftrightarrow a - b = 3k_1 - 3k_2 = 3(k_1 - k_2)$$

$$\Leftrightarrow a - b = 3 \underbrace{(k_1 - k_2)}_{k_3} \Leftrightarrow a - b = 3k_3 \Leftrightarrow 3 \mid a - b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$$

در نتیجه هر دو عضو دلخواه از هر یک از مجموعه A_0, A_1, A_2 به پیمانه ۳ با یکدیگر هم‌نهشت می‌باشند. مانند: $11 \equiv -4 \pmod{3}, 0 \equiv 9 \pmod{3}, -5 \equiv 4 \pmod{3}, 1 \equiv 7 \pmod{3}$ می‌دانیم مجموعه‌های $[0]_3, [1]_3, [2]_3$ یک افراز مجموعه \mathbb{Z} هستند. در این مثال، هم‌نهشتی به پیمانه $m=3$ را در نظر گرفته‌ایم و مجموعه \mathbb{Z} به ۳ کلاس هم‌ارزی افراز شده است. هم‌چنین دو عددی در یک کلاس هم‌ارزی قرار گرفته‌اند که تفاضل آن‌ها مضرب ۳ است. بنابراین در حالت کلی داریم:

نکته در هم‌نهشتی به پیمانه m ، مجموعه \mathbb{Z} به m کلاس هم‌ارزی افراز می‌شود. این کلاس‌های هم‌ارزی می‌تواند به صورت $[0]_m, [1]_m, [2]_m, \dots, [m-1]_m$ باشد.

نکته دو عدد a و b در کلاس هم‌ارزی $[r]_m$ قرار دارند، هرگاه $a-b$ مضرب m باشد و به عبارت دیگر $a \equiv b \pmod{m}$

نکته با توجه به تعریف‌های ارائه شده، گزاره‌های زیر همگی معادل هستند:

$$(1) \quad a \equiv b \pmod{m} \iff a-b \text{ مضرب } m \text{ است}$$

$$(3) \quad a \in [b]_m \iff [a]_m = [b]_m$$

(۵) باقی‌مانده تقسیم a بر b بر m یکسان است. a و b عضو یک کلاس یا دسته هم‌ارزی به پیمانه m هستند.

توجه در حل سؤالات، هر یک از گزاره‌های (۲) تا (۶) را به گزاره (۱) تبدیل می‌کنیم.

تست: رابطه هم‌نهشتی $a \equiv b \pmod{m}$ ، مجموعه \mathbb{Z} را به ۵ کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند. کدام دو عدد در یک کلاس هم‌ارزی به پیمانه m قرار می‌گیرند؟

$$(1) \quad 18 \text{ و } 40 \quad (2) \quad 21 \text{ و } -34 \quad (3) \quad -32 \text{ و } 17 \quad (4) \quad -43 \text{ و } -11$$

پاسخ: رابطه هم‌نهشتی به پیمانه m ، مجموعه \mathbb{Z} را به ۵ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است. پس m باید ۵ باشد. دو عددی در یک کلاس هم‌ارزی قرار می‌گیرند که تفاضل آن‌ها مضرب ۵ باشد. طبق گزینه‌ها، تفاضل دو عدد ۲۱ و -34 ، یعنی -55 (یا 55) مضرب ۵ است و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

تست: دسته هم‌ارزی $[13]_9$ با کدام دسته هم‌ارزی زیر به پیمانه ۹ برابر است؟

$$(1) \quad [-69] \quad (2) \quad [-43] \quad (3) \quad [97] \quad (4) \quad [85]$$

پاسخ: اگر $[a]_m = [b]_m$ ، آن‌گاه $a \equiv b \pmod{m}$ و در نتیجه $a-b$ مضرب m است. پس باید عددی که تفاضل آن با 13 مضرب ۹ باشد را مشخص کنیم. طبق گزینه‌ها، $-72 = 13 - 85 = 13 - 85$ مضرب ۹ است و در نتیجه دو دسته هم‌ارزی $[13]_9$ و $[85]_9$ یکی هستند. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

خواص و ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی

$$a \equiv a \pmod{m}$$

(۱) هر عدد صحیح مانند a به پیمانه m با خودش هم‌نهشت است:

(ب) اگر a هم‌نهشت با b به پیمانه m باشد، آن‌گاه b نیز هم‌نهشت با a به پیمانه m است و برعکس:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff b \equiv a \pmod{m}$$

(پ) اگر a هم‌نهشت با b به پیمانه m و b هم‌نهشت با c به پیمانه m باشند، آن‌گاه a هم‌نهشت با c به پیمانه m است:

$$a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$$

(خاصیت تعدی برای هم‌نهشتی برقرار است.)

(۲) به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان هر عدد صحیح را اضافه یا کم کرد:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$$

(۳) دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد:

$$a \equiv b \pmod{m} \implies ac \equiv bc \pmod{m}$$

تذکر عکس این رابطه لزوماً برقرار نیست. یعنی اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \equiv b \pmod{m}$

برای این مطلب می‌توان مثال نقض آورد.

$$12 \equiv 8 \pmod{4} \implies 3 \times 4 \equiv 2 \times 4 \pmod{4} \implies 3 \not\equiv 2 \pmod{4} \quad (\text{پیمانه } 4)$$

$$a \equiv b \pmod{m} \implies a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(۴) دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان n برسانیم: $(n \in \mathbb{N})$

تذکر عکس این قانون برقرار نیست. یعنی در حالت کلی نمی‌توان از دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی ریشه گرفت.

$$\text{مثال نقض: } 25 \equiv 9 \pmod{4} \implies 5^2 \equiv 3^2 \pmod{4} \implies 5 \not\equiv 3 \pmod{4}$$

(۵) اگر $a \equiv b^m$ و $n \mid m$ (n یک عدد طبیعی است)، در این صورت $a \equiv b^n$

به عنوان مثال، اگر $a \equiv b^3$ ، آن‌گاه $a - b$ مضرب 3^0 است و $5 \mid 3^0$ (5 یک مقسوم‌علیه طبیعی 3^0 است)، در این صورت $a - b$ مضرب 5 خواهد بود و در نتیجه $a \equiv b^5$

(۶) دو طرف رابطه‌های هم‌نهشتی که پیمانه‌های یکسان داشته باشند را می‌توان با هم جمع یا منهای کرده یا در هم ضرب کرد:

$$\begin{cases} a \equiv b^m \\ c \equiv d^m \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd^m, \quad a \pm c \equiv b \pm d^m$$

نکته با توجه به ویژگی‌های هم‌نهشتی، اگر $f(n)$ یک چندجمله‌ای بر حسب n با ضرایب صحیح و $a \equiv b^m$ باشد، آن‌گاه برای محاسبه $f(a)$ به پیمانه m ، کافی است مقدار $f(b)$ را به پیمانه m به‌دست بیاوریم. به عبارت دیگر:

به عنوان مثال، اگر $a \equiv 2^7$ و بخواهیم حاصل $5a^3 - 4a^2 + 1$ را به پیمانه 7 به‌دست بیاوریم، داریم:

$$a \equiv 2^7, f(a) = 5a^3 - 4a^2 + 1 \Rightarrow f(a) \equiv f(2) = 5(2)^3 - 4(2)^2 + 1 = 25 \equiv 4^7$$

(۷) می‌توان به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد:

$$a \equiv b^m \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk \quad (t \cdot k \in \mathbb{Z})$$

نکته از این ویژگی هم‌نهشتی همواره در محاسبات استفاده می‌کنیم و با اضافه کردن و یا کم کردن مضرب‌های مناسب پیمانه، اعداد کوچک‌تر به وجود می‌آوریم.

به عنوان مثال، اگر $a \equiv 41^m$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$a \equiv 41^m - 4 \times 11 = -3^m$$

(۸) اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \equiv r^m$

$$a = mq + r \Leftrightarrow a - r = mq \Leftrightarrow m \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r^m$$

هم‌چنین اگر $a \equiv r^m$ و $0 \leq r \leq m-1$ ، آن‌گاه r باقی‌مانده تقسیم a بر m است.

از ویژگی‌های گفته‌شده برای تعیین باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی m استفاده می‌کنیم.

تست: اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر 17 برابر 5 باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $4a + 3$ بر 17 کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۱

پاسخ: باقی‌مانده تقسیم a بر 17 برابر 5 می‌باشد، بنابراین:

ابتدا دو طرف رابطه هم‌نهشتی را در عدد 4 ضرب می‌کنیم و سپس با عدد 3 جمع می‌کنیم:

$$a \equiv 5^{17} \xrightarrow{\times 4} 4a \equiv 20^{17} \xrightarrow{+3} 4a + 3 \equiv 23^{17}$$

$23 \equiv 6 \pmod{17} \Rightarrow 4a + 3 \equiv 6^{17}$

پس باقی‌مانده برابر 6 است و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

روش تستی: می‌توان 5 را به جای a قرار داد و سپس باقی‌مانده $4a + 3$ را بر 17 به‌دست آورد:

$$4a + 3 = 4(5) + 3 = 23 = 1 \times 17 + 6 \Rightarrow r = 6$$

تست: اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر 15 برابر 12 باشد، باقی‌مانده تقسیم $4a^3 + 11$ بر 15 کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۱۱

پاسخ: روش اول: طبق فرض، $a \equiv 12^{15}$ می‌باشد. در هم‌نهشتی و در محاسبات آن، 12 عددی بزرگ به پیمانه 15 به حساب می‌آید. می‌نویسیم:

$$a \equiv 12^{15} \equiv -3^{15} \xrightarrow{\text{دو طرف را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم}} 4a^3 \equiv -3^{45} \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم}} 4a^3 \equiv -3^{15} \xrightarrow{-15} 4a^3 - 3 \equiv -3^{15} \xrightarrow{+11} 4a^3 + 11 \equiv 8^{15} \Rightarrow r = 8$$

به دو طرف رابطه اخیر، عدد 11 را اضافه می‌کنیم:

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow r = 8$

روش دوم:

$$a \equiv 12^{15} \equiv -3^{15}, f(a) = 4a^3 + 11 \Rightarrow f(a) \equiv f(-3) = 4(-3)^3 + 11 = 4 \times (-27) + 11 = -108 + 11 = -97 \equiv 8^{15}$$

در صورت نیاز، می‌توان هم دو طرف رابطه هم‌نهشتی و هم پیمانه را در یک عدد طبیعی دلخواه ضرب کرد.

$$an \equiv mn \pmod{b}$$

(۹) قانون تغییر پیمانه) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه: از این ویژگی وقتی استفاده می‌کنیم که بخواهیم پیمانه را تغییر دهیم.

تست: باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۶ و ۷ به ترتیب ۴ و ۵ است. باقی‌مانده تقسیم a بر ۴۲ کدام است؟

۳۵ (۱) ۳۸ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴)

پاسخ: باقی‌مانده تقسیم a بر ۶ برابر ۴ است. بنابراین: $a \equiv 4 \pmod{6}$

باقی‌مانده تقسیم a بر ۷ برابر ۵ است. بنابراین: $a \equiv 5 \pmod{7}$

چون می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم a را بر ۴۲ به دست آوریم، باید پیمانه را تغییر دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 4 \pmod{6} \xrightarrow{\times 7} 7a \equiv 28 \pmod{42} \\ a \equiv 5 \pmod{7} \xrightarrow{\times 6} 6a \equiv 30 \pmod{42} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{دو طرف را از} \\ \text{هم کم می‌کنیم.} \end{array} \Rightarrow 7a - 6a \equiv 28 - 30 \pmod{42} \Rightarrow a \equiv -2 \pmod{42}$$

-۲ باقی‌مانده a بر ۴۲ نمی‌باشد، زیرا باقی‌مانده بر ۴۲ یکی از اعضای مجموعه $\{۰, ۱, ۲, \dots, ۴۱\}$ می‌باشد. داریم:

$$-2 \equiv 40 \pmod{42} \Rightarrow a \equiv 40 \pmod{42} = r \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

(۱۰) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ($a - b$ مضرب m است) و $a \equiv b \pmod{n}$ ($a - b$ مضرب n است)، در این صورت $a - b$ مضرب $k.m$ و n و m یعنی $[m, n]$ است. در واقع:

$$\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{array} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m, n]}$$

در حالت خاص، اگر m و n نسبت به هم اول باشند، داریم:

$$\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{array} \xrightarrow{(m, n)=1} a \equiv b \pmod{mn}$$

تست: اگر باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۵ و ۱۸ به ترتیب ۱۳ و ۱۶ باشند، رقم یکان کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a کدام است؟

۴ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

$$a \equiv 13 \pmod{15}, a \equiv 16 \pmod{18}$$

پاسخ: طبق فرض، داریم:

برای استفاده از ویژگی (۱۰)، طرف‌های دوم رابطه‌های هم‌نهشتی باید با هم برابر باشند، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 13 \pmod{15} \xrightarrow{-2} a \equiv 11 \pmod{15} \\ a \equiv 16 \pmod{18} \xrightarrow{-2} a \equiv 14 \pmod{18} \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv 11 \pmod{[15, 18]} \Rightarrow a \equiv 11 \pmod{90} \Rightarrow a = -2 + 90k, k \in \mathbb{Z}$$

به ازای $k = 2$ ، کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a به دست می‌آید و داریم:

$$k = 2 \Rightarrow a = -2 + 180 = 178 \Rightarrow \text{گزینه (۴) صحیح است.}$$

یکی از ویژگی‌های هم‌نهشتی که کاربرد فراوانی نیز دارد، تقسیم است اما تقسیم در هم‌نهشتی، به سادگی ویژگی‌های دیگر نمی‌باشد. در واقع نمی‌توان همواره دو طرف رابطه هم‌نهشتی را بر یک عدد صحیح تقسیم کرد. به عنوان مثال، در رابطه هم‌نهشتی $۴ \times ۷ \equiv ۴ \times ۵ \pmod{۴}$ ، اگر دو طرف را بر ۴ تقسیم کنیم به رابطه نادرست $۷ \equiv ۵ \pmod{۴}$ می‌رسیم ($۷ - ۵ = ۲$ مضرب ۴ نمی‌باشد).

تقسیم در هم‌نهشتی

قضیه (تقسیم طرفین هم‌نهشتی بر یک عدد):

$$ac \equiv bc \pmod{d}, (m, c) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$ac \equiv bc \pmod{d}, (m, c) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

در حالت خاص می‌توان نوشت:

تست: باقی مانده تقسیم عدد 5^{137} بر عدد ۳۱ کدام است؟

۱ (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴)

پاسخ: باید توان‌های عدد ۵ را بررسی کنیم. داریم:

$$5^3 = 125 = 4 \times 31 + 1$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 3 \overline{) 137} \\ \underline{-125} \quad 45 \\ 2 \end{array}$$

در این جا توان مناسب عدد ۳ است. 137 را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow 5^2 \equiv 1 \pmod{31} \text{ دو طرف را به توان } 45 \text{ می‌رسانیم.} \Rightarrow (5^3)^{45} \equiv 1^{45} \Rightarrow 5^{135} \equiv 1 \pmod{31} \text{ دو طرف را در } 5^2 \text{ ضرب می‌کنیم.} \Rightarrow 5^{137} \times 5^2 = 5^{139} \equiv 1 \times 5^2 = 25 \pmod{31} \Rightarrow 25 \text{ صحیح است.}$$

تست: باقی مانده تقسیم عدد 2^{150} بر عدد ۴۳ کدام است؟

۳۵ (۱) ۲۵ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴)

پاسخ: با محاسبه توان‌های ۲، داریم:

$$2^7 = 128 = 3 \times 43 - 1 \Rightarrow 2^7 \equiv -1$$

$$-1 \equiv 2^7 \Rightarrow 2^{14} \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 2^{14k} \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 2^{14 \times 10} \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 2^{140} \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 2^{150} = 2^{140} \times 2^{10} \equiv 1 \times 2^{10} = 1024 \equiv -8 \pmod{43}$$

توجه کنید که عدد 2^{150} با عدد -۸ به پیمانه ۴۳ هم‌نهشت است، ولی چون در سؤال باقی مانده تقسیم خواسته شده، پس باید جواب عددی باشد که شرط تقسیم را دارا باشد، یعنی $0 \leq r < 43$. پس با توجه به این که $-8 \equiv 35 \pmod{43}$ ، جواب گزینه (۱) است.

در برخی از اعداد توان‌دار، ابتدا باید پایه را به پیمانه m حساب کنیم تا پایه، عددی کوچک شود.

تست: باقی مانده تقسیم عدد 4^{415} بر عدد ۴۱ کدام است؟

۹ (۱) ۲۷ (۲) ۳۲ (۳) ۳۸ (۴)

پاسخ: در این مثال باید به دنبال توان‌های عدد ۴۴ باشیم که کار راحتی نیست! بهتر است که ابتدا خود عدد ۴۴ را در هم‌نهشتی بر عدد ۴۱ محاسبه کنیم.

$$44 = 41 \times 1 + 3 \Rightarrow 44 \equiv 3 \pmod{41} \Rightarrow 44^{150} \equiv 3^{150}$$

پس مثال تبدیل به این شد که «عدد 3^{150} در تقسیم بر ۴۱ دارای چه باقی‌مانده‌ای است؟»

$$3^4 = 81 = 2 \times 41 - 1 \Rightarrow 3^4 \equiv -1 \pmod{41} \Rightarrow 3^8 \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow 3^{16} \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow 3^{32} \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow 3^{64} \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow 3^{128} \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow 3^{150} = 3^{128} \times 3^{22} \equiv 1 \times 3^{22} = 3^{22} \pmod{41}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تست: عدد $28^{29} + 42^{43}$ به پیمانه ۱۳ در کدام دسته هم‌ارزی قرار می‌گیرد؟

[۶] (۱) [۷] (۲) [۸] (۳) [۹] (۴)

پاسخ: با توجه به گزینه‌ها، باید باقی مانده تقسیم عدد $28^{29} + 42^{43}$ را بر ۱۳ به دست بیاوریم. برای این کار ابتدا باقی مانده اعداد ۲۸ و ۴۲ را در هم‌نهشتی به پیمانه ۱۳ محاسبه می‌کنیم:

$$28 \equiv 2 \pmod{13}, \quad 42 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$(1) \quad 2^6 = 64 = 5 \times 13 - 1 \Rightarrow 2^6 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{24} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{29} = 2^{24} \times 2^5 \equiv 1 \times 2^5 = 32 \equiv 6 \pmod{13}$$

$$(2) \quad 3^3 = 27 = 2 \times 13 + 1 \Rightarrow 3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{42} = 3^{39} \times 3^3 \equiv 1 \times 3 = 3 \pmod{13}$$

$$2^{29} + 3^{43} \equiv 6 + 3 = 9$$

با توجه به (۱) و (۲) و این که می‌توان دو هم‌نهشتی را با هم جمع کرد، داریم:

پس گزینه (۴) صحیح است.

تست: عدد $5 \times 7^{128} - 10 \times 6^{224}$ در کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانه ۴۳ قرار دارد؟

- (۱) $[-14]_{43}$ (۲) $[14]_{43}$ (۳) $[-20]_{43}$ (۴) $[20]_{43}$

پاسخ:

$$6^3 = 216 = 5 \times 43 + 1 \Rightarrow 6^3 \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow (6^3)^{74} \equiv 1^{74} \pmod{43}$$

$$\Rightarrow 6^{222} \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 6^{222} \times 6^2 = 6^{224} \equiv 1 \times 6^2 = 36 \equiv -7 \pmod{43}$$

$$\Rightarrow 10 \times 6^{224} \equiv 10 \times (-7) = -70 \pmod{43} \quad (1)$$

$$7^3 = 343 = 8 \times 43 - 1 \Rightarrow 7^3 \equiv -1 \pmod{43} \Rightarrow (7^3)^{42} \equiv (-1)^{42} \pmod{43} \Rightarrow 7^{126} \equiv 1 \pmod{43}$$

$$\Rightarrow 7^{126} \times 7^2 = 7^{128} \equiv 1 \times 7^2 = 49 \equiv 6 \pmod{43} \Rightarrow 5 \times 7^{128} \equiv 5 \times 6 = 30 \pmod{43} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cdot (2)} -10 \times 6^{224} - 5 \times 7^{128} \equiv -70 - 30 \equiv -100 \equiv -14 \pmod{43} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

در برخی از سؤالات، می‌توان با به توان رساندن به توانی بزرگ‌تر از آن‌چه که در صورت سؤال است، برسیم و سپس با تقسیم، به توان مطلوب برسیم.

تست: باقی‌مانده تقسیم عدد 255 بر عدد 43 کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۳۲ (۳) ۹ (۴) ۱۹

پاسخ:

$$2^7 = 128 = 3 \times 43 - 1 \Rightarrow 2^7 \equiv -1 \pmod{43} \xrightarrow[\text{۸ می‌رسانیم.}]{\text{دو طرف را به توان ۸}} (2^7)^8 \equiv (-1)^8 \pmod{43} \Rightarrow 2^{56} \equiv 1 \pmod{43}$$

باید 2^{56} را بر ۲ تقسیم کنیم تا به 2^{55} برسیم. ولی عدد ۱ مضرب عدد ۲ نیست، پس با اضافه کردن مضرب مناسبی از ۴۳ به رابطه هم‌نهشتی داریم:

$$\begin{cases} 2^{56} \equiv 1 \pmod{43} \\ (2, 43) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{55} \equiv 2^{-1} \pmod{43} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

در مثال‌های قبل، مهم‌ترین کار، پیدا کردن توان مناسب برای پایه بود. از قضیه زیر می‌توان برای پیدا کردن توان مناسب در محاسبه باقی‌مانده برخی اعداد توان‌دار استفاده کرد.

قضیه فرما: اگر p عددی اول باشد به طوری که $(a, p) = 1$ ، در این صورت $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

تذکر: قبل از قضیه فرما هم سؤال‌های هم‌نهشتی را حل می‌کردیم ولی این قضیه می‌تواند در یافتن توانی که هم‌نهشتی برابر ۱ شود کمک زیادی کند. ولی دقت کنید که حتماً شرط اول بودن عدد پیمانه را رعایت کنیم.

تست: باقی‌مانده تقسیم $3^{41} + 3^{42}$ بر عدد 43 کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۳۰ (۳) ۳۴ (۴) ۳۵

پاسخ:

با توجه به قضیه فرما داریم، $3^{42} \equiv 1 \pmod{43}$. اما برای محاسبه 3^{41} باید دو طرف رابطه $3^{42} \equiv 1 \pmod{43}$ را بر ۳ تقسیم کنیم. داریم:

$$3^{42} \equiv 1 \pmod{43} \xrightarrow[\text{(۳, ۴۳)=۱}]{\div 3} 3^{41} \equiv -14 \pmod{43} \Rightarrow 3^{41} + 3^{42} \equiv -14 + 1 = -13 \equiv 30 \pmod{43}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

شکستن پیمانه در حل مسائل هم‌نهشتی

در حل بعضی مسائل هم‌نهشتی بهتر است که پیمانه را به اعداد کوچک‌تری خرد کنیم و با استفاده از ویژگی شماره (۱۰) هم‌نهشتی، یا قانون تغییر پیمانه جواب را به دست آوریم. به تست بعدی توجه کنید.

تست: باقی‌مانده تقسیم عدد 5^{100} بر عدد ۵۶ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۷ (۴) ۱۶

پاسخ: اگر توان‌های اولیه عدد ۵ را امتحان کنیم، در تقسیم بر عدد ۵۶ به اعداد ۱ یا -۱ نمی‌رسیم. در چنین مسائلی بهتر است که پیمانه را خرد کنیم. بهتر است که عدد ۵۶ طوری تجزیه شود که اعداد نسبت به هم اول شوند، مثلاً $56 = 8 \times 7$

$$5^2 = 25 = 8 \times 3 + 1 \Rightarrow 5^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (5^2)^{50} \equiv 1^{50} \pmod{8} \Rightarrow 5^{100} \equiv 1 \pmod{8} \quad (1)$$

$$5^3 = 125 = 7 \times 18 - 1 \Rightarrow 5^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow (5^3)^{33} \equiv (-1)^{33} \pmod{7} \Rightarrow 5^{99} \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 5^{99} \times 5 = 5^{100} \equiv -1 \times 5 = -5 \pmod{7} \quad (2)$$

می‌دانیم که (به پیمانه $[m, n]$) $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m, n]}$ ، پس باید هر دو رابطه هم‌نهشتی را که در (۱) و (۲) به دست آمده‌اند ادامه دهیم تا سمت راست آن‌ها یک عدد یکسان شوند:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \Rightarrow 5^{100} \equiv 1 \pmod{8} \\ (2) \Rightarrow 5^{100} \equiv -5 \pmod{7} \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{100} \equiv 9 \pmod{56}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

نکته مهم: در حل تست‌ها، وقتی که حاصل هم‌نهشتی را به پیمانه عدد کوچک‌تر به دست آوردیم، با نگاه به گزینه‌ها، اعدادی که به این پیمانه با عدد حاصل هم‌نهشت نمی‌باشند، جواب تست نخواهند بود.

به عنوان مثال، در تست قبل، داریم: $5^{100} \equiv 1 \pmod{8}$. در بین گزینه‌ها، اعداد ۸ و ۱۶ به پیمانه ۸ برابر ۱ نمی‌باشند، پس این دو گزینه، جواب تست نمی‌باشند. هم‌چنین: $5^{100} \equiv -5 \pmod{7}$. از بین دو عدد ۹ و ۱۷، عدد ۹ به پیمانه ۷ برابر ۲ است و در نتیجه جواب ۹ می‌باشد.

تست: باقی‌مانده تقسیم $5^{100} + 3^{100} + 2^{100}$ بر ۳۰ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۲۸ (۴) ۴

پاسخ: تجزیه ۳۰ به صورت $2 \times 3 \times 5$ است. تمام اعداد موجود در گزینه‌ها به پیمانه ۲ هم‌نهشت هستند. پس باقی‌مانده تقسیم عدد را بر ۲ به دست نمی‌آوریم.

$$2^3 \equiv -1, 3^3 \equiv 0, 5^3 \equiv -1 \Rightarrow A = 2^{100} + 3^{100} + 5^{100} \equiv (-1)^{100} + 0^{100} + (-1)^{100} = 1 + 0 + 1 = 2$$

تنها عددی که در گزینه‌ها به پیمانه ۳ با ۲ هم‌نهشت است، عدد ۲ می‌باشد.

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست: به ازای چند عدد دو رقمی n ، عدد $19^n + 18^n$ مضرب ۱۷ است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۱

$$\left\{ \begin{array}{l} 19 \equiv 2 \pmod{17} \\ 18 \equiv 1 \pmod{17} \end{array} \right. \Rightarrow 19^n \equiv 2^n \pmod{17} \Rightarrow 19^n + 18^n \equiv 2^n + 1 \pmod{17} \Rightarrow 2^n \equiv -1 \pmod{17}$$

برای حل چنین تست‌هایی، ابتدا کوچک‌ترین عدد طبیعی n که به ازای آن $2^n \equiv -1 \pmod{17}$ می‌شود را مشخص می‌کنیم.

$$2^4 \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow (2^4)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{17}$$

(دو طرف رابطه $2^4 \equiv -1 \pmod{17}$ را به توان عدد فرد برسانیم، طرف دوم -۱ به دست می‌آید) بنابراین عدد n ، به صورت $4(2k+1)$ است و باید شرط دو رقمی بودن را رعایت کنیم:

$$10 \leq n = 8k + 4 < 100 \Rightarrow k \in \{1, 2, \dots, 11\}$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

اعداد فاکتوریل دار و هم‌نهشتی

در حل این نوع از مثال‌ها ابتدا باید اولین عدد فاکتوریل‌داری را بیابیم که بر پیمانه بخش‌پذیر باشد و سپس به کمک سایر ویژگی‌های هم‌نهشتی جواب را به دست می‌آوریم.

تست: باقی‌مانده تقسیم عدد $1000! + \dots + 3! + 2! + 1!$ بر عدد ۱۵ کدام است؟

۳ (۱) ۷ (۲) ۱۳ (۳) ۹ (۴)

پاسخ: در این مثال اعداد $1!, 2!, 3!$ و $4!$ مضرب ۱۵ نیستند، اما عدد $5! = 120$ مضرب ۱۵ است و بنابراین به ازای هر $n \geq 5$ داریم $n! \equiv 0 \pmod{15}$.

بنابراین: $1! + 2! + 3! + \dots + 1000! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 = 33 \equiv 3 \pmod{15}$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست: باقی‌مانده تقسیم عدد $a + 200! + 57^{200} + 7^{200}$ بر عدد ۱۹ صفر است. کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

پاسخ: دقت کنیم که در عدد $200!$ عدد ۱۹ هم ضرب شده است. بنابراین $200! \equiv 0 \pmod{19}$.

عدد $57 = 3 \times 19$ مضرب ۱۹ است، بنابراین:

$$57^{19} \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow 57^{200} \equiv 0 \pmod{19}$$

فرما $7^{19} \equiv 1 \pmod{19}$ به توان ۱۱ $\rightarrow 7^{19 \times 11} \equiv 1 \pmod{19} \rightarrow 7^{209} \equiv 1 \pmod{19}$

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow \min(a) = 8$

بسط دوجمله‌ای و هم‌نهشتی

بسط دوجمله‌ای عبارت است از: $(a+b)^n = \binom{n}{n}a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{0}b^n$

با توجه به این‌که تمام جملات به جز جملات اول و آخر شامل a و b هستند، پس مضرب ab هستند و بنابراین:

نکته: $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$ ، $(a-b)^n \equiv a^n + (-1)^n b^n \pmod{ab}$

تست: باقی‌مانده تقسیم عدد $8^{40} - 9^{40} - 17^{40}$ بر ۷۲ کدام است؟

صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۷۱ (۴)

پاسخ: اگر در رابطه $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$ ، مقادیر $a=9$ ، $b=8$ و $n=40$ را قرار دهیم، داریم:

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

روزهای هفته و هم‌نهشتی

تست: اگر ۱۱ اردیبهشت، دوشنبه باشد، روز ۹ اسفند همان سال چه روزی از هفته است؟

پنج‌شنبه (۱) جمعه (۲) سه‌شنبه (۳) چهارشنبه (۴)

پاسخ: دقت کنیم که هر هفت روز که طی شود، دوباره به همان روز از هفته می‌رسیم، پس در این مثال فاصله دو روز (۱۱ اردیبهشت تا ۹ اسفند) را محاسبه می‌کنیم و از هم‌نهشتی به پیمانه ۷ استفاده می‌کنیم.

$$9 \text{ روز از اسفند} + 5 \text{ ماه } 30 \text{ روزه} + 4 \text{ ماه } 31 \text{ روزه} + 20 \text{ روز} \equiv -1 + 5 + 3 + 2 \equiv 2 \pmod{7}$$

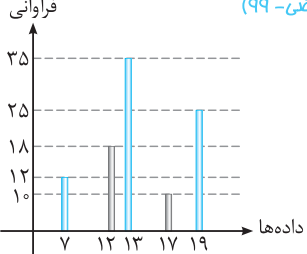
(مهر، آبان، آذر، دی و بهمن) (خرداد، تیر، مرداد، شهریور) ادامه اردیبهشت

$9 \equiv 2$ ، $5 \times 30 \equiv 5 \times 2 \equiv 3$ ، $4 \times 31 \equiv 4 \times 3 \equiv 5$ ، $20 \equiv -1$

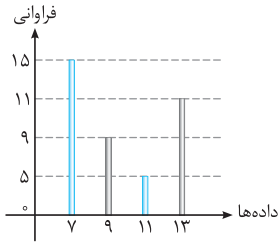
نتیجه هم‌نهشتی ۲ شده است، پس از روز دوشنبه باید دو روز جلوتر برویم و جواب چهارشنبه است و گزینه (۴) صحیح است.

فصل چهارم (آشنایی با نظریه اعداد)

تست‌های کنکور سراسری ۱۳۹۹

۱. اگر A و B دو مجموعه غیرتهی با شرط $A \subset B$ باشند، آن‌گاه کدام رابطه نادرست است؟
 (۱) $B - A' = A$ (۲) $A - B' = A$ (۳) $A \cap B' = \emptyset$ (۴) $B \cap A' = \emptyset$ (سراسری ریاضی-۹۹)
۲. مجموعه $((B \cup A) - B) \cap ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B))$ ، با کدام مجموعه برابر است؟
 (۱) $A \cup B'$ (۲) $A \cap B'$ (۳) A (۴) B' (سراسری ریاضی-۹۹)
۳. در مجموعه‌های چهارعضوی $A = \{x+2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t-1\}$ ، فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد. تعداد مجموعه‌ها به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ ، کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ (سراسری ریاضی-۹۹)
۴. کدام یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $p \Leftrightarrow q$ است؟
 (۱) $(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$ (۲) $(p \vee q) \vee \sim(p \wedge q)$ (۳) $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ (۴) $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ (سراسری ریاضی-۹۹)
۵. تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟
 (۱) ۹۴۸ (۲) ۹۵۲ (۳) ۹۶۸ (۴) ۹۷۲ (سراسری ریاضی-۹۹)
۶. در جعبه‌ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه برداریم تا مطمئن باشیم، حداقل ۴ کتاب، هم‌موضوع است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷ (سراسری ریاضی-۹۹)
۷. به تصادف یک عدد طبیعی دورقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟
 (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{8}{15}$ (سراسری ریاضی-۹۹)
۸. ناس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لاقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟
 (۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{3}{4}$ (سراسری ریاضی-۹۹)
۹. سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید، در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لاقل یکی از این دو مهره سیاه است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{11}{18}$ (۳) $\frac{25}{36}$ (۴) $\frac{13}{18}$ (سراسری ریاضی-۹۹)
۱۰. A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B|A) = \frac{1}{25}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ باشد، $P(B|A')$ ، کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$ (سراسری ریاضی-۹۹)
۱۱. با توجه به نمودار میله‌ای فراوانی داده‌های کتی گسسته، میانگین کدام است؟
 (۱) ۱۳ (۲) $\frac{13}{8}$ (۳) ۱۴ (۴) $\frac{14}{2}$ (سراسری ریاضی-۹۹)
- 
۱۲. چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد، که باقی‌مانده تقسیم آن اعداد بر ۴۳۰، با مجذور خارج‌قسمت، برابر باشد؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (سراسری ریاضی-۹۹)
۱۳. کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد، کدام است؟
 (۱) ۴۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۲ (۴) ۵۶ (سراسری ریاضی-۹۹)

۱۴. اگر عدد $1 - 2^n$ بر عدد ۲۱۷ بخش پذیر باشد، تعداد اعداد دورقمی n ، کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (سراسری ریاضی-۹۹)
۱۵. عدد چهاررقمی $aabb$ ، مجذور عدد دورقمی cc است. $a - b$ ، کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (سراسری ریاضی-۹۹)
۱۶. اگر درجه رأس‌های یک گراف ۴، ۴، ۲، ۲ و ۲ باشد، تعداد تمام دورهای موجود، کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (سراسری ریاضی-۹۹)
۱۷. در گراف مقابل، کدام مجموعه، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال، نیست؟
 (۱) $\{a, e, g\}$
 (۲) $\{a, f, g\}$
 (۳) $\{b, c, g\}$
 (۴) $\{c, f, h\}$
- 
۱۸. در یک گراف ۷ رأسی غیرتهی و غیرکامل k -منتظم، k چند عدد می‌تواند اختیار کند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (سراسری ریاضی-۹۹)
۱۹. فرض کنید A و B دو مجموعه غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعه مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
 (۱) $A \subset B'$ (۲) $A - B' = \emptyset$ (۳) $A \cap B' = A$ (۴) $(A \cup B)' = \emptyset$
۲۰. مجموعه $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B)')$ با کدام مجموعه، برابر است؟
 (۱) A (۲) B (۳) A' (۴) B' (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
۲۱. اگر $A = [1, 4]$ و $B = (-1, 3]$ باشند، مساحت نمودار $A \times A - B \times B$ در صفحه مختصات، کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۶ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
۲۲. کدام یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟
 (۱) p (۲) q (۳) $p \wedge q$ (۴) $p \Rightarrow q$ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
۲۳. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x + y + z + t = 11$ ، به شرط آن‌که $x < 5$ باشد، کدام است؟
 (۱) ۲۱۰ (۲) ۲۲۰ (۳) ۲۷۰ (۴) ۲۸۰ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
۲۴. حداقل چند عدد از مجموعه اعداد طبیعی متوالی $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ انتخاب شود، تا مطمئن باشیم بین آن‌ها حداقل دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از یک، وجود دارد؟
 (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
۲۵. یک تاس سالم را سه بار به طور متوالی پرتاب می‌کنیم. احتمال رو شدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
 (۱) $\frac{13}{36}$ (۲) $\frac{41}{108}$ (۳) $\frac{91}{216}$ (۴) $\frac{31}{72}$
۲۶. تعداد اعداد چهاررقمی با ارقام غیرتکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟
 (۱) ۱۸۴۸ (۲) ۱۷۹۲ (۳) ۱۷۴۸ (۴) ۱۶۵۸ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
۲۷. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لاقل یکی از تاس‌های رو شده ۳ باشد، کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{15}{36}$ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
۲۸. در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبه دوم می‌اندازیم سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لاقل یکی از این دو مهره، سفید است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)
 (۱) $\frac{20}{27}$ (۲) $\frac{34}{45}$ (۳) $\frac{28}{45}$ (۴) $\frac{23}{27}$
۲۹. در دو پیشامد مستقل A و B ، اگر $P(A \cap B) = 0.1$ ، $P(A \cup B) = 0.6$ و با فرض $P(B') > P(B)$ ، احتمال وقوع پیشامد B ، کدام است؟
 (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۲ (۴) ۰/۲۵ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)



۳۰. با توجه به نمودار میله‌ای فراوانی داده‌های کمتی گسسته، تفاضل میانه از میانگین، کدام است؟

- (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)
- ۰/۳ (۱)
 - ۰/۴ (۲)
 - ۰/۵ (۳)
 - ۰/۶ (۴)

۳۱. فرض کنید خارج‌قسمت و باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی سه‌رقمی m بر n به ترتیب ۲۹ و ۱۷ باشند. تعداد عددهای طبیعی m بخش‌پذیر

- (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)
- ۵، کدام است؟
- ۳ (۱)
 - ۴ (۲)
 - ۵ (۳)
 - ۶ (۴)

۳۲. در مجموعه اعداد طبیعی اگر $d = (3n^2 - 2n + 6, 3n + 5)$ و $d \neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

- (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)
- ۴۱ (۱)
 - ۴۳ (۲)
 - ۴۷ (۳)
 - ۵۳ (۴)

۳۳. اگر عدد $2^n - 1$ بر عدد ۱۰۵ بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد دورقمی n ، کدام است؟

- (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)
- ۶ (۱)
 - ۷ (۲)
 - ۸ (۳)
 - ۹ (۴)

۳۴. پنج برابر عدد دورقمی \overline{aa} را در سمت چپ \overline{aa} قرار داده و آن را m می‌نامیم. m همنهشت کدام عدد زیر، به پیمانه ۱۸۳۷ است؟

- (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)
- صفر (۱)
 - ۲ (۳)
 - ۳ (۴)
 - ۱ (۲)

۳۵. درجه رأس‌های یک گراف ۵، ۴، ۴، ۳، ۳ و ۱ است. چند دور با طول ۴، موجود است؟

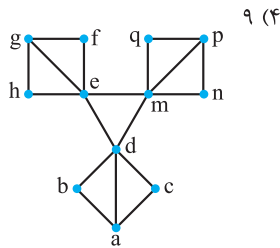
- (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)
- ۶ (۱)
 - ۷ (۲)
 - ۸ (۳)
 - ۹ (۴)

۳۶. در گراف روبه‌رو، تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمال، کدام است؟

- (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)
- ۸ (۱)
 - ۶ (۲)
 - ۴ (۳)
 - ۳ (۴)

۳۷. در یک گراف ۵ رأسی k -منتظم با بیشترین مقدار ممکن k ، تعداد دورها با طول ۴، کدام است؟

- (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)
- ۸ (۱)
 - ۱۰ (۲)
 - ۱۲ (۳)
 - ۱۵ (۴)



(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)

پاسخ تست‌های کنکور سراسری ۱۳۹۹

۳. اگر $A \times B = B \times A$ ، آن‌گاه $A = B$ است.

$$A = B \Rightarrow \{x+2, 1, 4, y\} = \{5, 7, z, t-1\}$$

چهار حالت زیر به‌وجود می‌آید:

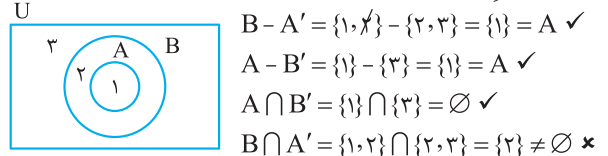
$$\begin{cases} x+2=5, y=7 \\ z=1, t-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, y=7 \\ z=1, t=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2=7, y=5 \\ z=1, t-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5, y=5 \\ z=1, t=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2=5, y=7 \\ t-1=1, z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, y=7 \\ t=2, z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2=7, y=5 \\ t-1=1, z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5, y=5 \\ t=2, z=4 \end{cases}$$

۱. طبق نمودار ون مقابل، داریم:



۲

$$(B' \cup A) - B = (B' \cup A) \cap B' \stackrel{\text{جذب}}{=} B'$$

$$\Rightarrow (B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B) = (B \cap C)' \cap B'$$

$$\stackrel{\text{دمورگان}}{=} (B' \cup C') \cap B' \stackrel{\text{جذب}}{=} B'$$

$$\Rightarrow \text{حاصل} = (A - B) \cup B' = (A \cap B') \cup B' \stackrel{\text{جذب}}{=} B'$$