به نام پروردگار مهربان

ویرایش جدید

گسسته و آمار و احتمال

دهم | یازدهم | دوازدهم

سید مسعود طایفه

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

لقمه طلایی

مهروماه

مقدمه

دوستان عزیز سلام!

یادمه چند سال پیش وقتی یکی از کتاب‌های برایان تریسی (از خوبای تکنولوژی فکر و موفقیت) رو می‌خوندم، مطلبی راجع‌به هدف‌گذاری به چشمم خورد که الان براتون می‌گم.

فرانسوی‌ها برای عبور از قلب صحرای آفریقا از ایده‌ای جالب استفاده می‌کردند. صحرایی بی‌آب و علف، با وسعت بیش از ۸۰۰ کیلومتر که حتی یک پشه هم در آن پر نمی‌زد. مثل یک دریای ماسه‌ای، زرد رنگ و وسیع بود که از هر طرف که چشم کار می‌کرد، ادامه داشت. در آن سال‌ها بیشتر از ۱۳۰۰ نفر، هنگام عبور از این صحرا ناپدید شده‌بودند. اغلب شن‌های روان، مسیر را می‌پوشاند و مسافران، شب‌ها در صحرا گم می‌شدند. برای حل این مشکل، فرانسوی‌ها از بشکه‌های سیاه‌رنگ برای نشانه‌گذاری در مسیر استفاده می‌کردند. این بشکه‌ها را به فاصله‌های ۵ کیلومتری یعنی فاصله‌ای که خمیدگی زمین، افق دید را در صحرا محدود می‌کند، قرار داده‌بودند. به این ترتیب در طول روز در هر کجای مسیر که بودند، می‌توانستند دو بشکه را ببینند. تنها کاری که باید برای عبور انجام می‌دادند این بود که اتومبیل را به طرف بشکهٔ بعدی هدایت کنند در نتیجه می‌توانستند از بزرگ‌ترین صحرای جهان عبور کنند، یعنی فقط به این صورت که هربار یک بشکه جلو بروند.

شـــاید الان می‌گید که این به ما چه ربطـــی داره؟!! خوب دندون به جیگر بگیرید می‌گم. ما با نوشـــتن کتاب لقمه می‌خواهیم دستتون رو بگیریم و از هر بشـــکه به بشکهٔ بعدی راهنماییتون کنیم تا مسیر عبـــور از درس‌ها رو گم نکنید. جناب کنفســـیوس هم گفته که طی کردن راهی که هزار فرسنگ است با برداشتن یک قدم آغاز می‌شود. خـــوب لقمه رو بخونید تا اولین قدم را با هم تاتی تاتی کنیم، بعدش به‌سوی هدف اصلی دوان دوان می‌روید! انشالا.

تشکر و سپاس

در اینجا لازم می‌دانم از تمام عزیزانی که در آماده‌سازی این کتاب تلاش کرده‌اند، قدردانی کنم:

- جناب آقای احمد اختیاری مدیر محترم و توانمند انتشارات
- جناب آقای محمدحسین انوشه مدیر فرهیختهٔ شورای تألیف انتشارات
- جناب آقای عباس اشرفی مدیر با تدبیر گروه ریاضی
- سرکار خانم دنیا سلیمی مسئول ویراستاری
- سرکار خانم آزاده فلاح‌زاده ویراستار علمی
- گـروه تولیـد خسـتگی ناپذیـر انتشـارات بـه مدیریـت سـرکار خانـم سمیرا سیاوشی
- گروه هنری خلاق انتشارات به مدیریت جناب آقای محسن فرهادی

و همهٔ عزیزانی که در تهیه این کتاب ما را همراهی کردند.

ارادتمند شما

مسعود طایفه

فهرست

وعدهٔ ۳

جدول ارزش گزاره‌های مرکب

هـرگاه دو گـزارهٔ p و q را بـا هم ترکیـب کنیم، با توجه بـه ارزش‌های آن‌هـا ممکـن اسـت بـرای گـزارهٔ مرکـب ارزش‌هـای مختلفـی داشـته باشـیم. طبـق تعریـف در هر حالـت داریم:

۱ $\sim p$

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۲ $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۳ $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۴ $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۵ $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

چاشنی: ◂ ترکیب فصلی دو گزاره زمانی **نادرست** است که هر دو گزاره **نادرست** باشند.

◂ ترکیب عطفی دو گزاره زمانی **درست** است که هر دو گزاره **درست** باشند.

◂ در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، p مقدم و q تالی نامیده می‌شود. ترکیب شرطی زمانی **نادرست** است که مقدم **درست** و تالی **نادرست** باشد.

◂ یک ترکیب دو شرطی وقتی **درست** است که هر دو گزارهٔ تشکیل‌دهندهٔ آن **درست** یا **نادرست** باشند.

تست: اگر گزاره‌های زیر نادرست باشند، ترتیب افراد از نظر چاقی و لاغری چگونه است؟ (نفر سمت راست چاق‌ترین و سمت چپ لاغرترین فرد است.)

«رضا از علی چاق‌تر است $\Rightarrow$ علی لاغراندام است»

«محمد از علی چاق‌تر است $\vee$ رضا از محمد لاغرتر است»

۱) رضا > علی > محمد
۲) علی > رضا > محمد
۳) رضا > محمد > علی
۴) محمد > رضا > علی

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

می‌دانیم یک گزارهٔ شرطی زمانی نادرست است که مقدم آن درست و تالی آن نادرست باشد. بنابراین گزارهٔ «رضا از علی چاق‌تر است» غلط است و «علی از رضا چاق‌تر است». همچنین یک ترکیب فصلی زمانی نادرست است که هر دو گزارهٔ آن نادرست باشند. پس گزاره‌های «رضا از محمد لاغرتر است» و «محمد از علی چاق‌تر است» غلط است.

با توجه به توضیحات بالا داریم: علی > رضا > محمد

چاشنی: در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$، در حالتی که p نادرست و q درست است، می‌گوییم گزاره به **انتفای مقدم** درست است.

وعدهٔ ۴

هم‌ارزی گزاره‌ها

اگر دو گزارهٔ p و q هم‌ارزش باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم «p هم‌ارز است با q». با توجه به تعریف با تشکیل جدول ارزش، هم‌ارزی برخی از گزاره‌ها به سادگی اثبات می‌شوند.

چاشنی: از بین p و $\sim p$ حتماً یکی درست است، پس:

$$p\vee\sim p\equiv T \quad , \quad p\wedge\sim p\equiv F$$

- همواره $\sim(\sim p)\equiv p$
- قانون **ادخال فاصل:** $(p\Rightarrow p\vee q)\equiv T$
- قانون **حذف عاطف:** $(p\wedge q\Rightarrow p)\equiv T$
- $\vee$ و $\wedge$ (فاصل و عاطف) خاصیت جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دارند. یعنی:

جابه‌جایی: $p\wedge q\equiv q\wedge p \quad , \quad p\vee q\equiv q\vee p$

شرکت‌پذیری:
$$\begin{cases}(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)\\(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)\end{cases}$$

توزیع‌پذیری:
$$\begin{cases}p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)\\p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\end{cases}$$

- $p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
- در زمان محاوره‌ای، مقدم و تالی در جملات شرطی که به نام‌های شرط و جواب شرط معروف هستند، به هم ارتباط دارند. در صورتی که در گزاره‌های شرطی ممکن است هیچ نوع ارتباطی با هم نداشته باشند.
- تبدیل ترکیب شرطی به فصلی: $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

تست: کدام‌یک از گزینه‌های زیر، گزاره‌ای همواره درست است؟

۱) $p\wedge q\Rightarrow\sim p$ ۲) $\sim p\Rightarrow p\wedge q$

۳) $p\wedge q\Rightarrow p\vee q$ ۴) $p\vee q\Rightarrow p\wedge q$

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

گزینهٔ ۱: اگر p و q گزاره‌هایی درست باشند، مقدم درست و تالی نادرست است، پس کل گزاره نادرست است.

گزینهٔ ۲: اگر p نادرست باشد، مقدم درست و تالی نادرست است پس کل ترکیب غلط است.

گزینهٔ ۳: اگر p یا q یا هر دو نادرست باشند، مقدم نادرست بوده و کل ترکیب به انتفای مقدم درست می‌شود.

گزینهٔ ۴: اگر p یا q یکی درست و دیگری نادرست باشد، مقدم درست و تالی نادرست است و کل ترکیب نادست است.

تست: اگر $p \Rightarrow q$ نادرست و $S \Leftrightarrow q$ درست باشد، گزارهٔ $S \Rightarrow (p \wedge q)$ هم ارز کدام گزینه است؟

۱) $p \Leftrightarrow S$ ۲) $S \vee p \Rightarrow q$

۳) $q \vee p \Rightarrow (q \wedge S)$ ۴) $q \Leftrightarrow S$

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

از نادرستی $p \Rightarrow q$ نتیجه می‌گیریم p درست و q نادرست است. هم‌چنین می‌دانیم $S \Leftrightarrow q$ زمانی گزاره‌ای صحیح است که q و S هم‌ارز باشند. پس S گزاره‌ای نادرست است. با توجه به توضیحات بالا $S \Rightarrow (p \wedge q)$ گزاره‌ای درست است. حالا به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ ۱: $p \Leftrightarrow S \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

گزینهٔ ۲: $S \vee p \Rightarrow q \equiv T \Rightarrow F \equiv F$

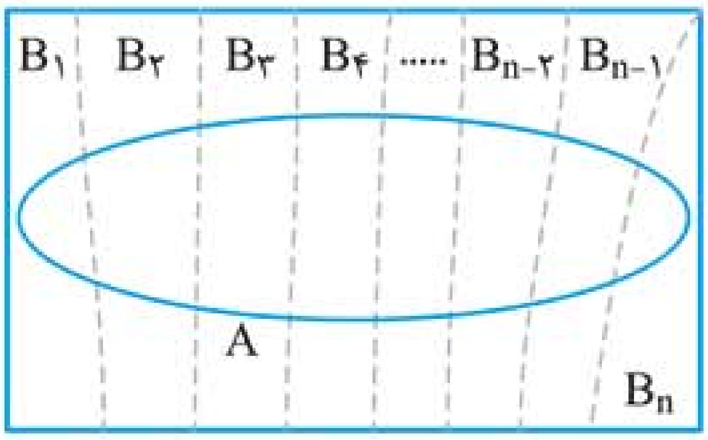
گزینهٔ ۳: $q \vee p \Rightarrow q \wedge S \equiv T \Rightarrow F \equiv F$

گزینهٔ ۴: $q \Leftrightarrow S \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

وعدهٔ ۸

قانون احتمال کل

اگر فضای نمونه‌ای به صورت چندقسمتی باشد (مثلاً زنان و مردان، محصولات مختلف، ظرف‌های مختلف و...) احتمال یک پیشامد در این فضا را به کمک احتمال کل محاسبه می‌کنیم. فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، ...، B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A داریم:



$$P(A) = P(B_۱)P(A \mid B_۱) + P(B_۲)P(A \mid B_۲) + \cdots + P(B_n)P(A \mid B_n) = \sum_{k=۱}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)$$

معمولاً برای قانون احتمال کل از نمودار درختی استفاده می‌شود.

تست: در جعبهٔ اول ۴ مهرهٔ سفید، ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم، ۳ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟ (تجربی خارج ۹۲ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۸)

۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

هر یک از دو جعبه شانسی مساوی برای انتخاب شدن دارد. پس ابتدا در نظر می‌گیریم که یا جعبهٔ اول انتخاب می‌شود یا جعبهٔ دوم.سپس اگر جعبهٔ اول انتخاب شده یا جعبهٔ دوم، احتمال سفیدبودن دو مهره از آن

جعبه را محاسبه کرده و در احتمال اولیهٔ انتخاب جعبه‌ها ضرب می‌کنیم. این روند همان قانون احتمال کل است. داریم:

$$P(\underset{\text{دومهره}}{\text{سفیدبودن}}) = P(\underset{\text{جعبه اول}}{\text{انتخاب}}) \times P(\underset{\text{دو مهره}}{\text{سفیدبودن}} \mid \underset{\text{جعبه اول}}{\text{انتخاب}})$$

$$+P(\underset{\text{جعبه دوم}}{\text{انتخاب}}) \times P(\underset{\text{دو مهره}}{\text{سفیدبودن}} \mid \underset{\text{جعبه دوم}}{\text{انتخاب}})$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} + \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۱}{۲}(\frac{۶}{۲۱} + \frac{۳}{۳۶}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳۱}{۸۴} = \frac{۳۱}{۱۶۸}$$

به کمک نمودار درختی هم می‌توانیم مسئله را حل کنیم:

$\xrightarrow{\frac{۱}{۲}}$ جعبهٔ اول $\xrightarrow{\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۲}{۴}}}$ سفیدبودن ۲ مهره

$\xrightarrow{\frac{۱}{۲}}$ جعبهٔ دوم $\xrightarrow{\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}}$ سفیدبودن ۲ مهره

$$P\ (\text{سفیدبودن ۲ مهره}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} + \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۳۱}{۱۶۸}$$

تست: احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند، ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری، به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال این بیماری منتقل می‌شود؟

(ریاضی ۸۹ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۸)

۱) ۰/۱۳   ۲) ۰/۱۴

۳) ۰/۱۶   ۴) ۰/۱۵

پاسخ گزینهٔ «۱»

به کمک نمودار درختی به حل سؤال می‌پردازیم:

$\xrightarrow{\frac{۲}{۵}}$ واکسن زده $\xrightarrow{٪۲۵}$ انتقال بیماری

$\xrightarrow{\frac{۳}{۵}}$ واکسن نزده $\xrightarrow{٪۲}$ انتقال بیماری

$$P(\text{بیماری}) = \frac{۲}{۵} \times ۰/۰۲۵ + \frac{۳}{۵} \times ۰/۲ = \frac{۰/۰۵ + ۰/۶}{۵}$$

$$= \frac{۰/۶۵}{۵} = ۰/۱۳$$

چاشنی: می‌دانیم که B و B' فضای S را افراز می‌کنند. لذا ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت $n = ۲$ به صورت زیر بیان می‌شود. فرض کنید B پیشامدی باشد که $۰ < P(B) < ۱$، در این‌صورت برای هر پیشامد دلخواه A داریم:

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(B')P(A \mid B')$$

چاشنی: مقایسهٔ روش‌های نمونه‌گیری:

نوع نمونه‌گیری	مزایا	معایب
تصادفی ساده	همهٔ عضوها شانس برابر برای انتخاب دارند.	هزینه‌بر بودن و عدم دسترسی مناسب به واحدها برای جامعهٔ بزرگ
خوشه‌ای	کم‌هزینه سریع شانس مساوی عضوها	عدم دقت در نمونه‌گیری و وجود خطا در آن
طبقه‌ای	اطمینان از انتخاب عضو از همهٔ طبقه‌ها در نمونه	زمان‌بر و هزینه‌بر بودن ـ عدم وجود شانس برابر برای عضوها
سیستماتیک	شانس انتخاب عضوها برابر ـ بهینه در صرف زمان و هزینه	بدون وجود فهرستی از عضوهای جامعه قابل اجرا نیست.

۲ نمونه‌گیری غیراحتمالی: روش نمونه‌گیری که در آن برخی از عضوهای جامعه، شانسی برای انتخاب شدن در نمونه ندارند. برخی از نمونه‌گیری‌های غیراحتمالی عبارت‌اند از:

الف نمونه‌گیری در دسترس — ب نمونه‌گیری قضاوتی

پ نمونه‌گیری بدون برنامه‌ریزی — ت نمونه‌گیری تلفنی

ث نمونه‌گیری داوطلبانه

نمونهٔ اُریب: اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، می‌گویند آن روش نمونه‌گیری اُریب

است. لذا آمارشناسان تلاش می‌کنند تا با شناسایی منابع تولید اُریبی، نمونه‌گیری را تا جایی که می‌توانند نااُریب کنند.

چاشنی: در نمونه‌های اُریب، ممکن است عضوها از شانس برابر برای انتخاب در نمونه برخوردار باشند اما روش نمونه‌گیری به شکلی بوده است که داده‌ها به سمتی انحراف پیدا کنند و با افزایش تعداد نمونه‌ها نیز این انحراف کاهش نیابد.

تست: کدام نمونه اُریب نیست؟ (آمار و احتمال صفحهٔ ۱۱۰)

۱) انتخاب تصادفی افراد و پرسش از آن‌ها در مورد تعداد اعضای خانواده برای محاسبهٔ این که خانواده‌ها چند نفره هستند.

۲) نمونه‌گیری از بازیکن‌های حرفه‌ای تنیس برای بررسی درآمد مالی ورزشکاران

۳) نمونه‌گیری از افراد مراجعه‌کننده به یک دندانپزشکی برای بررسی وضعیت بهداشت دهان و دندان در ایران

۴) انتخاب ۲۰ دانش‌آموز از هر استان کشور

پاسخ گزینهٔ «۴»

گزینهٔ ۱: افراد خانواده‌های پرجمعیت‌تر شانس بیشتری برای شرکت در این مطالعه دارند و بنابراین همهٔ افراد از شانس یکسانی برخوردار نبوده و پاسخ‌ها به سمت خانوادهٔ پرجمعیت‌تر منحرف می‌شود.

گزینهٔ ۲: بازیکن‌های حرفه‌ای تنیس، گروه کوچکی از کل جامعهٔ ورزشکاران بوده و همهٔ اقشار گوناگون در ورزش را شامل نمی‌شود.

گزینهٔ ۳: افراد مراجعه‌کننده به دندانپزشکی، به طور منطقی دارای مشکل دهان یا دندان هستند و نمونه‌های مناسبی برای بررسی وضعیت دهان و دندان نیستند.

گزینهٔ ۴: یک نمونه‌گیری احتمالی و غیراُریب است.

آمار استنباطی

کنکور سراسری ۹۸

۱. اگر $A = \{۱,۲,\{۱,۲\},\{۱,\{۱,۲\}\},\{۲\}\}$ و $B = \{\{۱\},\{۱,۲\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B'$ ، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۳۲

۲. در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

۱) $\frac{۵}{۲۴}$
۲) $\frac{۱۱}{۴۸}$
۳) $\frac{۱۳}{۴۸}$
۴) $\frac{۷}{۲۴}$

۳. در دو پیشامد مستقل A و B ، اگر $P(A \cap B) = ۰/۶$ و $P(A \cap B') = ۰/۲$ ، آن‌گاه $P(A \cup B')$ ، کدام است؟

۱) ۰/۷
۲) ۰/۷۵
۳) ۰/۸۵
۴) ۰/۹

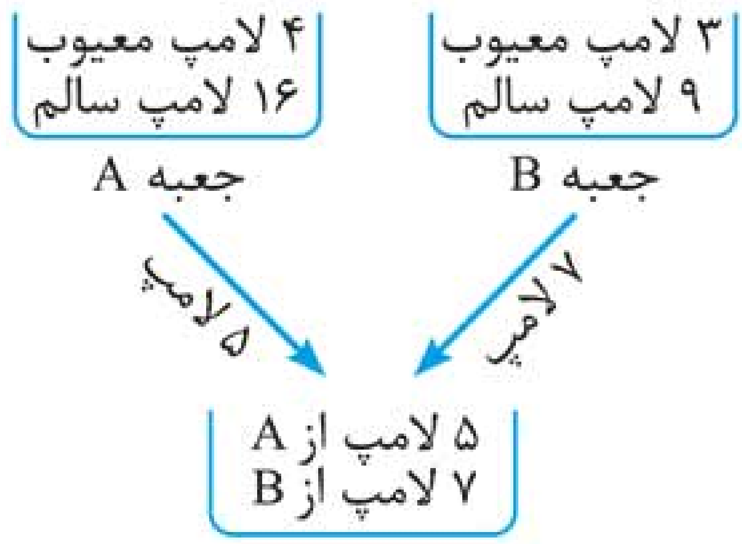
پاسخ‌نامهٔ کنکور ۹۸

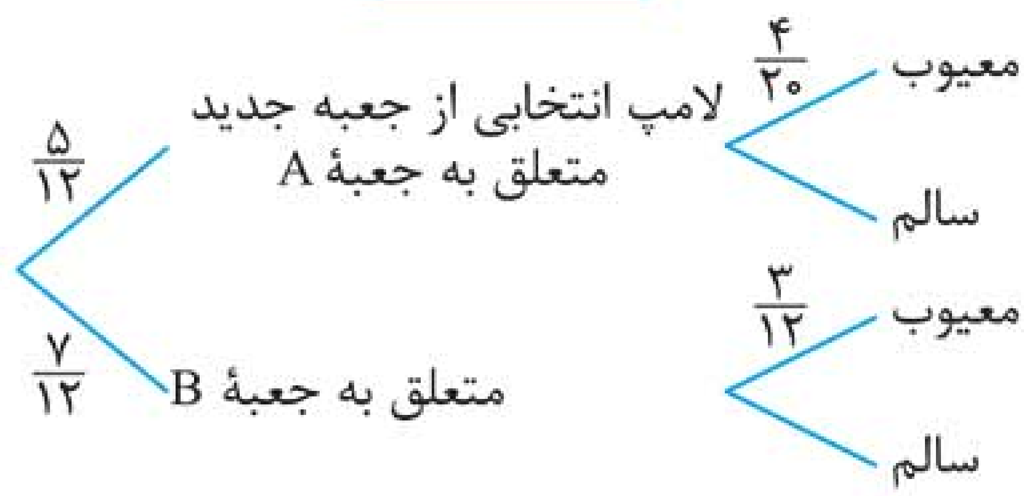
۱. گزینهٔ «۳»

$$A \cap B' = A - B = \{۱,۲,\{۱,\{۱,۲\}\},\{۲\}\} \Rightarrow$$ ۴ عضو

پس تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B'$ برابر با $۱۶ = ۲^۴$ است.

۲. گزینهٔ «۲»





$$\text{جواب} = \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۴}{۲۰} + \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱۱}{۴۸}$$

۳. گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases} P(A \cap B) = ۰/۶ \xrightarrow{\text{مستقل}} P(A) \cdot P(B) = ۰/۶ & ① \\ P(A \cap B') = ۰/۲ \xrightarrow{\text{مستقل}} P(A) \cdot P(B') = ۰/۲ & ② \end{cases}$$

$$\xrightarrow{① \div ②} \frac{P(B)}{P(B')} = ۳$$